**Министерство образования и науки Российской Федерации**
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Факультет фотоники и оптоинформатики

# ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

## «ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Нахождение собственных значений матрицы с помощью метода Ньютона и собственных векторов с помощью итерационных методов Якоби, Зейделя и SOR методом»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

**Цель работы:** Научиться находить собственные значения матрицы с помощью метода Ньютона и собственные векторы с помощью итерационных методов Якоби, Зейделя и SOR метода.

**Задание:** Вычислить собственные значения симметричной и положительно-определенной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с помощью метода Ньютона. А затем вычислить соответствующие собственные векторы с помощью итерационных методов Якоби, Зейделя и SOR методом.

**Ход работы:**

Определить собственные значения матрицы можно из уравнения

$$f(\lambda) = det(B - \lambda I) = 0. \tag{2}$$

Данное уравнение можно решить методом Ньютона. Тогда собственное значение на следующем шаге будет определяться по формуле:

$$\lambda_i^{(n+1)} = \lambda_i^{(n)} - \frac{f(\lambda_i^{(n)})}{f'(\lambda_i^{(n)})}, \quad i, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Для нахождения собственных векторов сведем исходную задачу

$$Bx = \lambda x \tag{4}$$

к виду

$$(B - \lambda I)x = Ax = 0. \tag{5}$$

Представим матрицу системы $A$ в виде суммы трех матриц:

$$A = B - \lambda I = A_1 + D + A_2, \tag{6}$$

где $I$ – единичная матрица, $D$ – матрица, состоящая только из диагонали, $A_1$ – нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали и выше, $A_2$ – верхняя треугольная матрица с нулями на диагонали и ниже.

С учетом такого разложения матрицы $A$, метод Якоби записывается в следующей итерационной форме:

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}A_1x^{(n)} - D^{-1}A_2x^{(n)} \tag{7}$$

Метод Зейделя записывается, как:

$$x^{(n+1)} = -(D + A_1)^{-1} A_2 x^{(n)} \tag{8}$$

Метод SOR получается из метода Зейделя, если введен дополнительный параметр $\omega$:

$$x^{(n+1)} = (I + \omega D^{-1} A_1)^{-1} [(1 - \omega) I - \omega D^{-1} A_2] x^{(n)} \tag{9}$$

Реализуя указанные выше рекуррентные соотношения для каждого $\lambda_i$, получаем следующие результаты:

| $\lambda_i$ | 4.193 | 9.396 | 17.411 |
|---|---|---|---|
| | -0.231 | -0.296 | -0.927 |
| $\vec{x_i}$ | 0.969 | 0.015 | -0.247 |
| | -0.087 | 0.955 | -0.283 |

**Выводы:**

В настоящей лабораторной работе была решена задача на собственные числа и собственные векторы матрицы (1). Собственные значения были найдены из уравнения (2) с помощью метода Ньютона (3). По найденым собственным значениям были получены соответствующие собственные векторы по алгоритмам Якоби (7), Зейделя (8) и SOR (9). Результаты вычислений приведены в таблице выше.