Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет фотоники и оптоинформатики

ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

«ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Решение систем линейных алгебраических уравнений методом последовательных исключений Гаусса. LU разложение матрицы системы»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы: Научиться решать системы линейный алгебраических уравнений методом последовательны исключений Гаусса. Научиться производить LU разложение матрицы системы.

Задание: Решить систему линейных алгебраических уравнений методом последовательных исключений Гаусса.

$$Ax = f, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Получить LU разложение матрицы системы.

Ход работы:

Выполним алгоритм Гаусса для нахождения неизвестных.

1. Проверим, что определитель матрицы A не равен нулю:

$$\det A \neq 0. \tag{2}$$

2. Воспользуемся общим алгоритмом, переводящим матрицу A в матрицу U:

$$A \longrightarrow U \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   Получившаяся матрица U называется верхнетреугольной.

3. Уравнение $Ax = f$ перешло в уравнение $Ux = y$. Причем, коэффициенты u_{kj} и y_k вычисляются по следующим формулам:

$$u_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \tag{4}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} u_{kj}, \quad i,j = k+1, \cdots, n \tag{5}$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, \quad i,j = k+1, \cdots, n \tag{6}$$

$$f_1^{(0)} = f_1, \quad a_{1j}^{(0)} = a_{1j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

4. Неизвестные x_i найдем с помощью обратных подстановок по формуле:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{8}$$

Выполним LU разложение матрицы системы.

1. Сделав Гауссов спуск, мы из системы уравнений $Ax = f$ получили $Ux = y$. Рассматривая соотношения между y и f, получаем, что $f = Ly$. Причем L вычисляется по формулам:

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(j-1)}, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases} \tag{9}$$

2. Так как $Ax = f$, $Ux = y$ и $Ly = f$, получаем

$$Ax = Ly = LUx. \tag{10}$$

Следовательно, $A = LU$.

Результаты:

Программа, использующая описанные выше формулы и написанная на Python, выдает следующие результаты:

$$x = \begin{pmatrix} -3.38461538 \\ 2.11538462 \\ 4.88461538 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 11 & 1.5 & 0 \\ 9 & 3.5 & 17.33333333 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -7.66666667 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

При перемножении L и U получаем следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

которая в точности совпадает с исходной матрицей A.

Выводы:

В настоящей работе была решена решена система линейных алгебраических уравнений (1) с помощью метода последовательных исключений Гаусса. Также было получено LU разложение матрицы системы. Лабораторная работа была выполнена на языке Python.