Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет фотоники и оптоинформатики

ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

«ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Решения начальной задачи Коши для линейного ОДУ первого порядка»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы: Научиться решать начальную задачу Коши для линейного ОДУ первого порядка.

Задание: Исследовать численные решения начальной задачи Коши для линейного ОДУ первого порядка методом Рунге-Кутта четвертого порядка и многошаговым методом Адамса-Бэшфорта-Молтона. Исследовать абсолютную и относительную погрешности вычислений для случая

$$y' = y, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 5] \tag{1}$$

и

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 5]. \tag{2}$$

Ход работы:

Уравнение в общем виде записывается как

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{3}$$

где

$$f(x,y) = \pm y. \tag{4}$$

Тогда метод Рунге-Кутта можно построить по следующим формулам:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = hf(x_n,y_n), \quad k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \tag{5}$$

Многошаговый метод Адамса-Бэшфорта-Молтона строится по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}[1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}]. \tag{6}$$

Результаты реализации указанных методов для уравнений (1-2) приведены ниже.

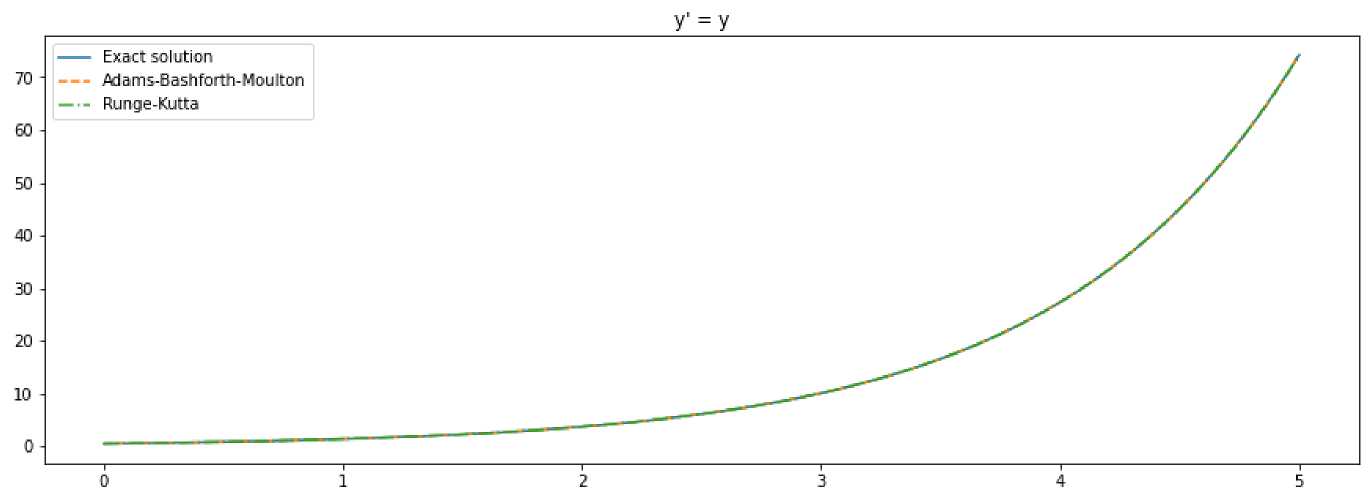

Рисунок 1 — Решение уравнения (1), полученное с помощью точного, Рунге-Кутта и Адамаса-Бэшфорта-Молтона

Из рисунка видно, что решения, полученные точно и с помощью итерационных методов Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона в общем совпадают. Для более детальной оценки решений, посмотрим на абсолютную и относительную погрешности вычислений, приведенные на Рисунке 2.

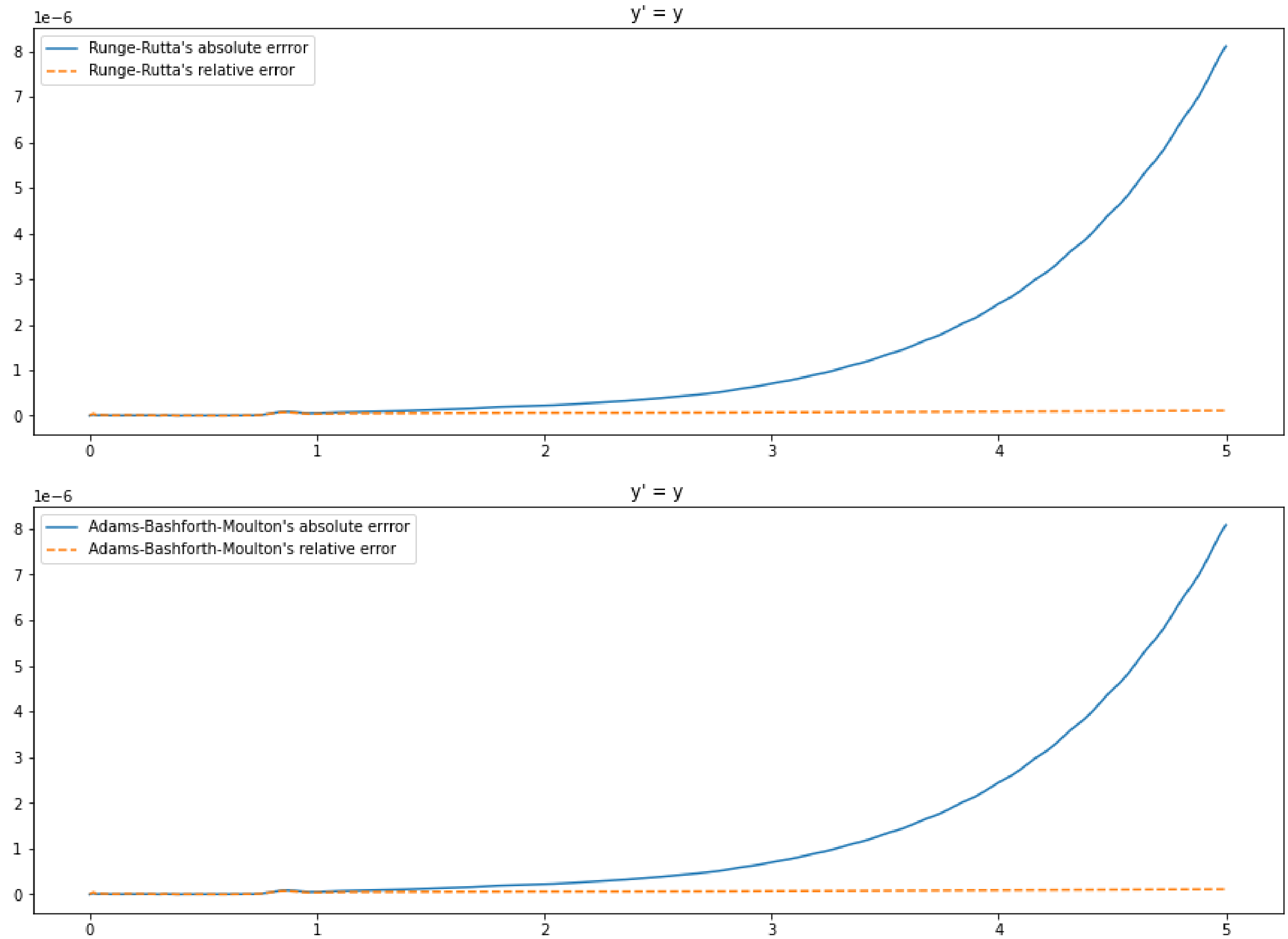

Рисунок 2 — Графики абсолютной и относительной ошибок для точного и приближенного решений уравнения (1). Приближенное решение было получено с помощью методов Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона

Из рисунков видно, что абсолютная ошибка вычислений накапливается с ростом независимой переменной. Можно сделать вывод, что при значительных приростах независимой переменной численное решение методома Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона дифференциального уравнения первого порядка будет значительно отличаться от точного решения.

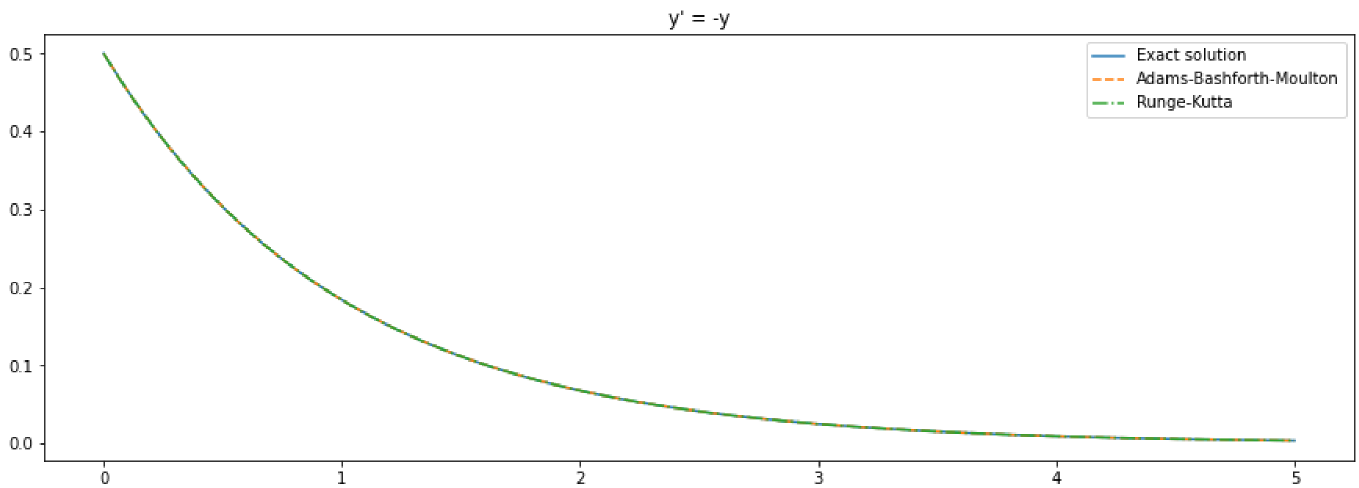

Рисунок 3 — Решение уравнения (2), полученное с помощью точного, Рунге-Кутта и Адамаса-Бэшфорта-Молтона

Из рисунка видно, что решения, полученные точно и с помощью итерационных методов Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона в общем совпадают. Для более детальной оценки решений, посмотрим на абсолютную и относительную погрешности вычислений, приведенные на Рисунке 4.

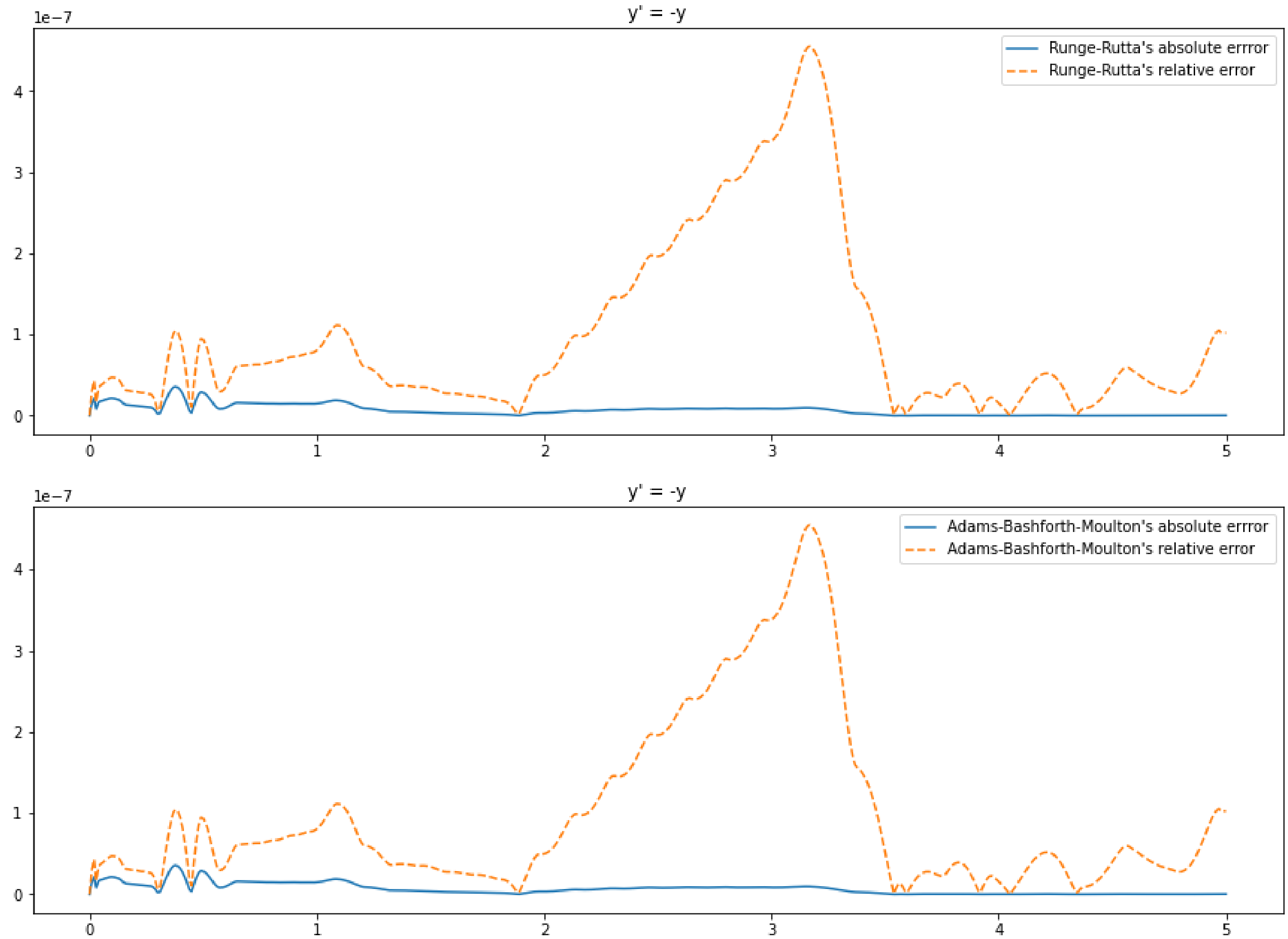

Рисунок 4 — Графики абсолютной и относительной ошибок для точного и приближенного решений уравнения (2). Приближенное решение было получено с помощью методов Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона

Из рисунков видно, что относительная ошибка вычислений осциллирует с периодическим ростом при увеличивающейся независимой переменной. Можно сделать вывод, что местами численное решение методома Рунге-Кутта и Адамса-Бэшфорта-Молтона дифференциального уравнения первого порядка будет отличаться от точного решения. Однако, абсолютная погрешность остается практически равной нулю на всем отрезке $[0, 5]$.

Выводы:

В настоящей лабораторной работе были исследованы численные решения начальной задачи Коши для линейного ОДУ первого порядка методом Рунге-Кутта четвертого порядка и многошаговым методом Адамса-Бэшфорта-Молтона. Вычисления показали, что точное и приближенные решения совпадают на всем отрезке независимой переменной. Также были исследованы абсолютная и относительная погрешности вычислений для разных уравнений. Получилось, что для уравнения (1) в пределах отрезка $[0, 5]$ абсолютная погрешность возрастает с увеличением x. Для уравнения (2) абсолютная погрешность практически всегда остается равной нулю.