Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет фотоники и оптоинформатики

ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

«ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами Якоби, Зейделя и SOR»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы: Научиться решать системы линейный алгебраических уравнений итерационными методами Якоби, Зейделя и SOR.

Задание: Решить систему линейных алгебраических уравнений итерационными методами Якоби, Зейделя и SOR методом

$$Ax = f, \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

с относительной погрешностью, удовлетворяющей

$$\frac{\|\bar{x} - x^{(n)}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \varepsilon, \tag{2}$$

где $\bar{x}$ есть точное решение, $\bar{x}^{(n)}$ – итерация с номером n, а ε задано (например, $\varepsilon = 10^{-4}$). Сравнить количество итераций для всех трех методов.

Ход работы:

Представим исходную матрицу системы в виде суммы трех матриц:

$$A = A_1 + D + A_2, \tag{3}$$

где D – матрица, состоящая только из диагонали, A_1 – нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали и выше, A_2 – верхняя треугольная матрица с нулями на диагонали и ниже.

С учетом такого разложения матрицы A, метод Якоби записывается в следующей итерационной форме:

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}A_1x^{(n)} - D^{-1}A_2x^{(n)} + D^{-1}f \tag{4}$$

Метод Зейделя записывается, как:

$$x^{(n+1)} = -(D + A_1)^{-1}A_2x^{(n)} + (D + A_1)^{-1}f \tag{5}$$

Метод SOR получается из метода Зейделя, если введен дополнительный параметр ω:

$$x^{(n+1)} = (I + \omega D^{-1}A_1)^{-1}[(1 - \omega)I - \omega D^{-1}A_2]x^{(n)} + (I + \omega D^{-1}A_1)^{-1}\omega D^{-1}f \tag{6}$$

Если реализовать указанные алгоритмы на Python с $\varepsilon = 10^{-4}$ и взять начальное приближение

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

то получатся следующие результаты:

1. Метод Якоби сходится за 7 итераций и дает решение

$$x = \begin{pmatrix} -0.02970633 \\ 0.76553095 \\ 0.60490175 \end{pmatrix} \tag{8}$$

2. Метод Зейделя сходится за 5 итераций и дает решение

$$x = \begin{pmatrix} -0.02968127 \\ 0.76560425 \\ 0.60492278 \end{pmatrix} \tag{9}$$

3. Метод SOR с $\omega = 1.01$ сходится за 4 итерации и дает решение

$$x = \begin{pmatrix} -0.02967632 \\ 0.76558363 \\ 0.60497565 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Выводы:

В настоящей лабораторной работе была решена система линейных алгебраических уравнений (1) с помощью итерационных методов Якоби, Зейделя и SOR. Получилось, что медленнее всего сходится метод Якоби, потом – метод Зейделя. Быстрее всего сошелся метод SOR с параметром $\omega = 1.01$. Следует отметить, что при других значениях параметра ω итерационный процесс может сходиться значительно медленнее.