Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет фотоники и оптоинформатики

ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

«ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Вычисление двойных интегралов методом Монте-Карло»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы: Научиться вычислять двойные интегралы методом Монте-Карло.

Задание: Вычислить двойной интеграл

$$I = \int_{x^2+y^2 \le 1} (Ax^2 + By^2 + C)dxdy, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \tag{1}$$

методом Монте-Карло двумя способами. Первый способ основан на применении теоремы о среднем, второй способ использует представление двойного интеграла как объема вертикального цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y) = Ax^2 + By^2 + C$. Сравнить результаты вычислений.

Ход работы:

Пусть

$$Ax^2 + By^2 + C = f(x, y), \tag{2}$$

тогда

$$I = \int_{x^2+y^2 \le 1} f(x, y)dxdy. \tag{3}$$

Первый способ основан на теореме о среднем:

$$\int_{x^2+y^2 \le 1} f(x, y)dxdy = f(\bar{x}, \bar{y})S, \tag{4}$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in x^2 + y^2 \le 1$, а S – площадь области $x^2 + y^2 \le 1$. В качестве приближения возьмем $f(\bar{x}, \bar{y})$ за среднее арифметическое значений функций $f(x, y)$ в n случайных точках, попавших в область $x^2 + y^2 \le 1$. Площадь приблизим следующим выражением:

$$S \approx (b - a)(d - c)\frac{n}{N}, \tag{5}$$

где a, b, c, d – границы области $x^2 + y^2 \le 1$, равные 1 и -1, n – количество попавших в нужную область точек, N – общее количество точек, распределенных на плоскости.

Таким образом интеграл (3) переходит в (6).

$$\int_{x^2+y^2 \le 1} f(x, y)dxdy \approx \frac{(b - a)(d - c)}{N} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k). \tag{6}$$

Второй метод основан на представление двойного интеграла как объема вертикального цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$. В таком случае формулы будут следующими:

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy \approx (b-a)(d-c)M\frac{n}{N}, \tag{7}$$

$$M = \max_{(x,y)\in D_{xy}} f(x,y), \tag{8}$$

где a, b, c, d – границы области $x^2 + y^2 \leq 1$, равные 1 и -1, n – количество попавших в нужную область точек, N – общее количество точек, распределенных на плоскости.

При следующих параметрах $A = 6, B = 8, C = 7, N = 10^6, n = 10^3$ первый метод дает результат 32.888528, второй – 32.894736, а точное решение – 32.986723.

Выводы:

В настоящей работе был вычислен интеграл (1) двумя методами Монте-Карло. Полученные результаты указывают на то, что методы Монте-Карло достаточно хорошо аппроксимируют точное значение кратных интегралов. В рамках настоящей лабораторной работы второй метод получился ближе к точному решению на 0.01.