Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет фотоники и оптоинформатики

ОТЧЁТ ПО РАБОТЕ

по дисциплине:

«ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

«Аппроксимация функций тригонометрическим многочленом и полиномами Чебышева»

Выполнил:
студент группы V33022
Васильев М.Д.

Проверил:
Залипаев В.В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Цель работы: Научиться аппроксимировать функции тригонометрическим многочленом и полиномами Чебышева. Сравнить полученные результаты.

Задание: Сравнить аппроксимации бесконечно дифференцируемой функции

$$f(x) = A_1 cos(\omega_1 x) + A_2 sin(\omega_2 x) \tag{1}$$

на отрезке $[-1{,}1]$, полученные с помощью тригонометрического многочлена ряда Фурье

$$S_N^{(1)}(x) = \frac{a_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^{(1)} cos(\pi n x) + b_n^{(1)} sin(\pi n x), \quad |x| \leq 1, \tag{2}$$

$$a_n^{(1)} = \int_{-1}^{1} f(x) cos(\pi n x) dx, \quad n = 0{,}1{,}...{,}N, \tag{3}$$

$$b_n^{(1)} = \int_{-1}^{1} f(x) sin(\pi n x) dx, \quad n = 0{,}1{,}...{,}N, \tag{4}$$

и аппроксимации Чебышевскими многочленами

$$S_N^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(2)} T_n(x), \quad |x| \leq 1, \quad T_n(x) = cos(n\, arccos\, x). \tag{5}$$

Ход работы:

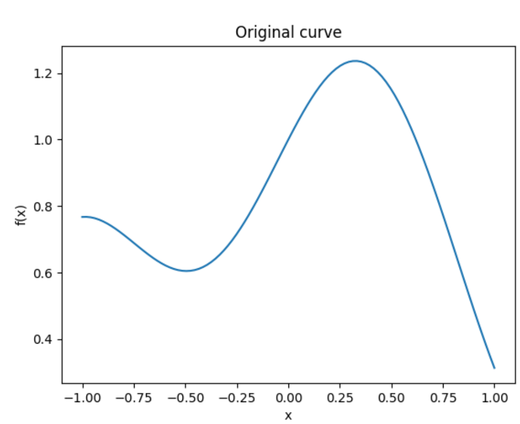
Коэффициенты тригонометрического многочлена ряда Фурье были вычислены по формулам (3 – 4). Для вычисления Чебышевских коэффициентов было использовано быстрое дискретное преобразование Фурье по следующим формулам:

$$a_0^{(2)} \sim \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(cos\, t_m)\, dt, \quad t_m = \frac{\pi m}{N}, \tag{6}$$

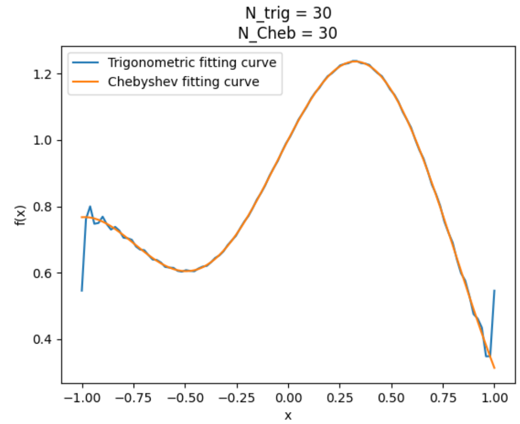
$$a_n^{(2)} \sim \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(cos\, t_m)\, cos(n\, t_m), \quad n > 0. \tag{7}$$

После реализации программы на Python для функции (8) получаются следующие графики:

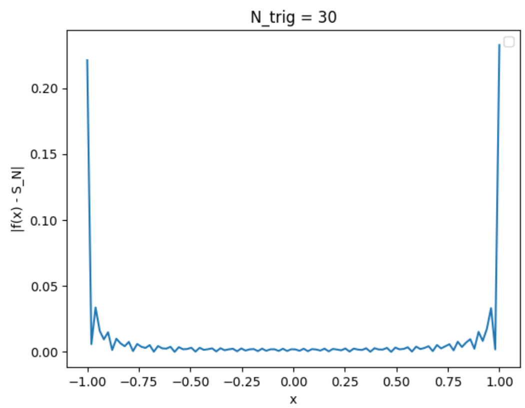
$$f(x) = cos(x) + 0.3 \cdot sin(4x) \tag{8}$$



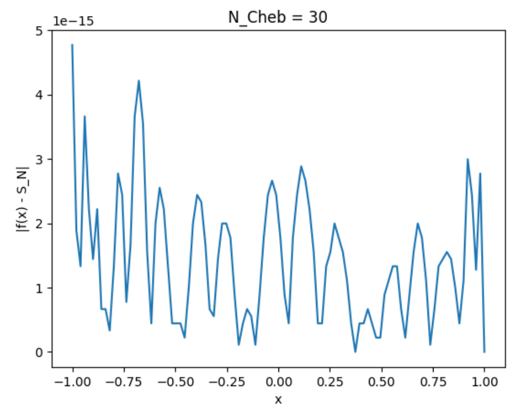
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 1 — (a) – График исходной кривой; (b) – графики аппроксимирующих кривых; (c) – график отклонения тригонометрического полинома от исходной функции; (d) – график отклонения Чебышевского полинома от исходной функции

Видно, что Чебышевские полиномы намного лучше аппроксимируют исходную функцию, так как относительное отклонение у них порядка 10^{-15}, в то время как у тригонометрических полиномов отклонение порядка 10^{-1}.

Выводы:

В настоящей лабораторной работы была произведена аппроксимация бесконечно дифференцируемой функции тригонометрическим многочленом и полиномами Чебышева. После сравнения было выяснено, что полиномы Чебышева аппроксимируют лучше.