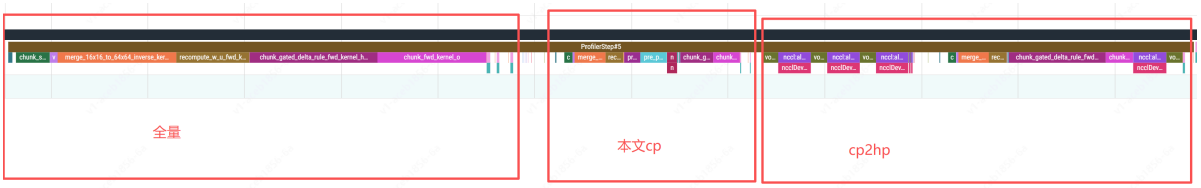
pr：Add cp for gdn and kda by mdy666 · Pull Request #691 · fla-org/flash-linear-attention

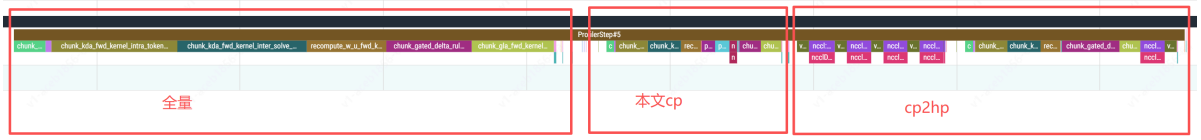
GDN和KDA的高效CP方法

全新的CP方法。基于前人的伟大博客DeltaNet如何做序列并行加上自己的理解进行实现，大大加速GDN（KDA）在长文本下的训练效率，并且CP无限开，轻松训练到1M长度。目前已给flash-linear-attention提了pr，欢迎大家尝试或者进行review。

GDN

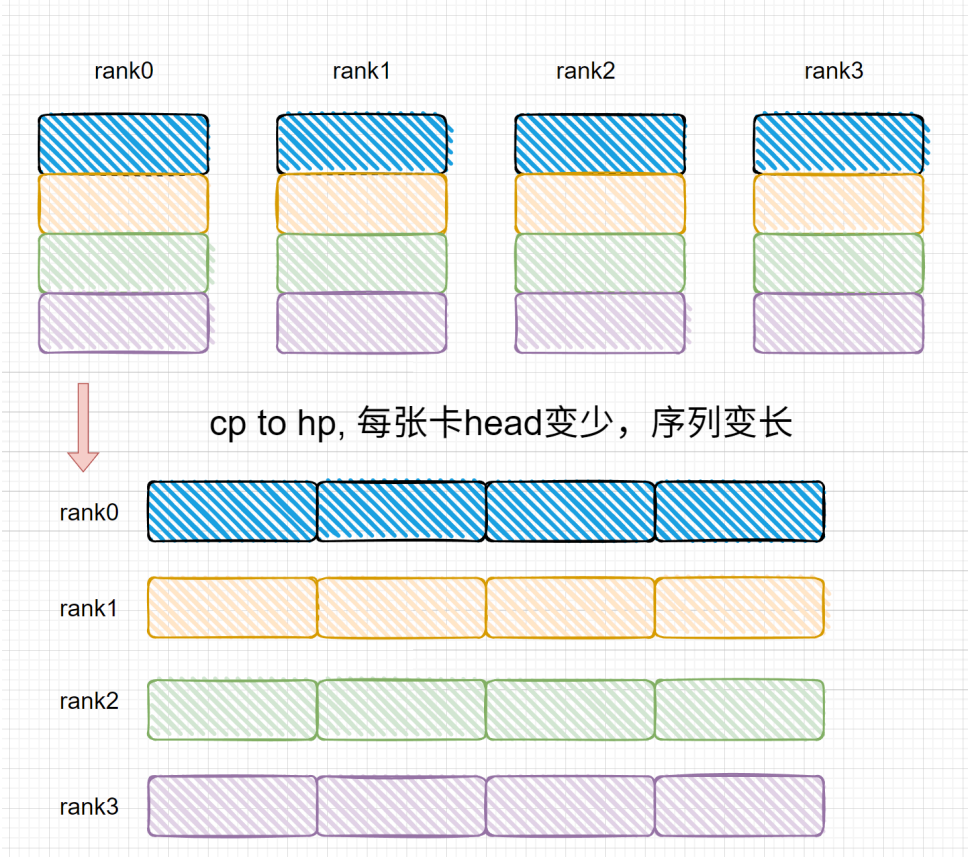


KDA



为什么需要更高效的CP

- GDN或KDA等linear attn是为解决长序列而存在的，面对长序列训练有两个基本要求：
  - 要能在足够长的序列上进行训练，即有可行的CP方案
  - 在长序列上训练性能不会严重裂化
- 现存CP方案
  - 目前GDN的CP方案开源出来的，我看到的很少，比如有Megatron-LM dev。丰富程度远不如MHA/GQA等标准attention
  - Megatron-LM的实现、我自己之前的实现以及和其他人的讨论得知的方案，大家基本都是使用的cp2hp（**deepspeed-ulysses**）的并行方式，因为算法本身就是在head维度进行并行，对head不感知，因此算子无需任何修改即可
  - ring attention (p2p) 或者 all-gather attention (llama3 cp)对GDN都不太兼容，因此无法使用

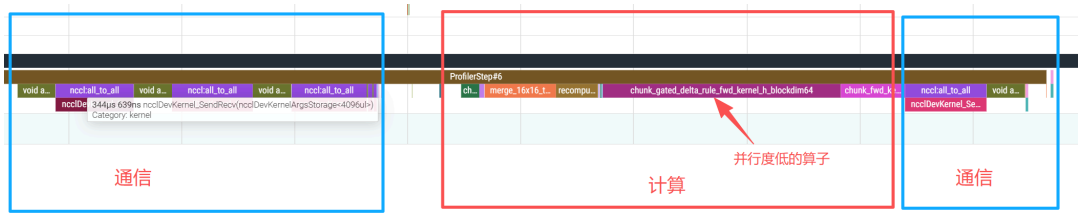


- cp2hp的不足
  - **最大cp数量受限head个数。**`max_cp_size = num_heads`。**Kimi-linear**报告中显示支持1M的context，该model只有32个head，如果是原生训练1M长度的话，把cp拉满，每张卡需要放64k长度的数据，这显然非常大了。因此我猜测可能没训到1M或者采用了其他的CP方式（不是单纯的cp2hp的现有方案）
  - **算子并行度低。**GDN(KDA)的核心算子之一`chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64`目前只能在batch，head和chunk V之间进行并行

    (N, H, V//BV)，如果batch=1，cp2hp可能导致H也等于1，那么该算子就是灾难级别的，可能只会用到2-4个SM，GPU利用率大大降低。

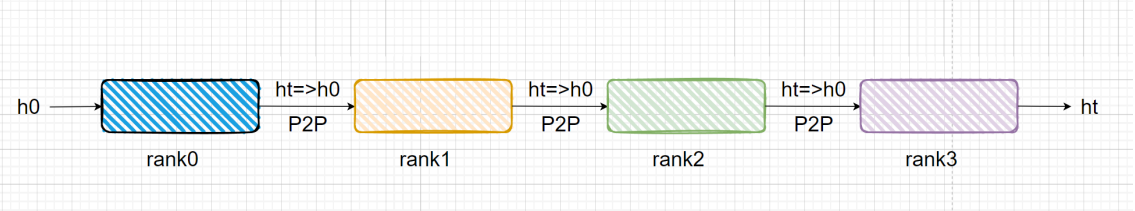
```
494     def grid(meta): return (triton.cdiv(V, meta['BV']), N*H)
495     chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64[grid](
```

  - **通信时间长。**linear attn的耗时短，cp2hp的通信占比会被放大。



Scan并行算法

- 最简单的方式：GDN(KDA)只有`chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64`这一个算子依赖序列间的信息传递，其他算子都和序列无关。因此一个办法就是逐rank去算，比如rank0先算，得到final_state传个rank1作为initital_state，rank1再算final_state传给rank2.....该方法也很直观，但是gpu之间无法并行计算，rank i需要等待rank i-1算完才能算，会有严重的bubble，类似pp并行的warm up阶段。这显然也不是一个很好的办法。



- 如何解决上述问题？RNN类模型在过去为提高计算效率，将状态(S_t)之间的变化从非线性变化转成线性变化，通过Scan算法可以大幅度提高计算并行度。GDN也可以做类似的事情，只是复杂一些。

Algorithm 1 Parallel linear recurrence on p processors

Let $y = [(\Lambda_1, x_1), (\Lambda_2, x_2), ..., (\Lambda_T, x_T)]$
Let binary operator $\bullet$ act as $(\Lambda, x) \bullet h = \Lambda h + x$
Let $S_0 = 1, S_i < E_i, E_i + 1 = S_{i+1}, E_{p-1} = T$ for i in $0, p-1$

parfor $i \leftarrow 0, p-1$ **do**
    $P_i = \text{REDUCE}(\odot, \Lambda_{S_i:E_i}, I)$
    $R_i = \text{REDUCE}(\bullet, y_{S_i:E_i}, 0)$
end parfor

Let $z = [(P_0, R_0), (P_1, R_1), ..., (P_p, R_p)]$.
$C = \text{SCAN}(\bullet, z, h_0)$ ▷ compute $C_i = P_i C_{i-1} + R_i$ with $C_{-1} = h_0$

parfor $i \leftarrow 0, p-1$ **do**
    $h_{S_i:E_i} = \text{SCAN}(\bullet, y_{S_i:E_i}, C_{i-1})$
end parfor
return h

GDN下的Scan算法

前言

本人是阅读博客DeltaNet如何做序列并行之后才有的想法（之前根本想不到QAQ，建议大家也阅读下原文），并在该基础上进行了进行扩展，推导了GDN和KDA下的并行，以及加上自己的一些理解，对GDN和KDA实现了真正的序列并行。

PS：我数学一般，幸好我只能看懂GDN最后的两个公式，前面的推导看不懂一点，而前面的公式不涉及序列信息的传递，因此可以直接跳过！

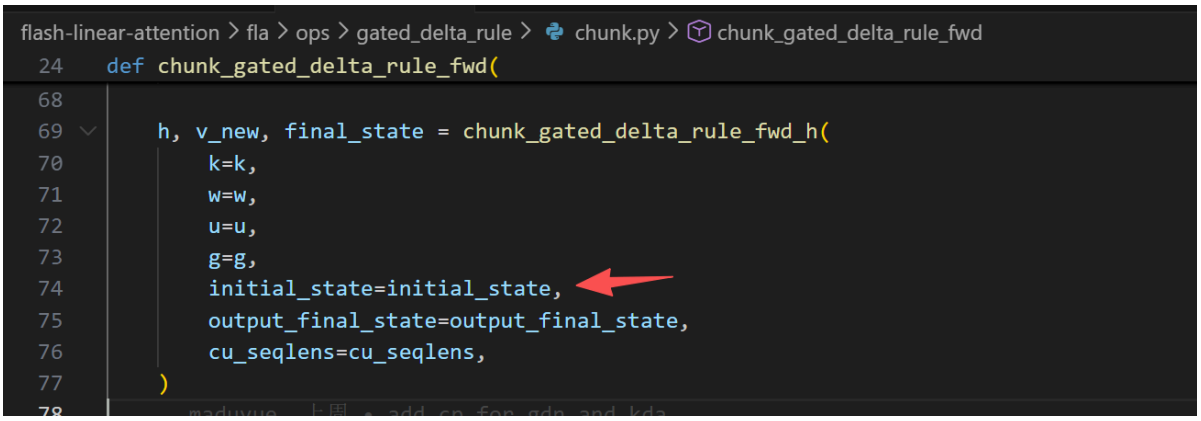
$$\mathbf{S}_{[t+1]} = \overrightarrow{\mathbf{S}_{[t]}} + \left(\widetilde{\mathbf{U}_{[t]}} - \overleftarrow{\mathbf{W}_{[t]}}\mathbf{S}_{[t]}^{\intercal}\right)^{\intercal} \overrightarrow{\mathbf{K}_{[t]}} \qquad \in \mathbb{R}^{d_v \times d_k}$$

$$\mathbf{O}_{[t]} = \overleftarrow{\mathbf{Q}_{[t]}}\mathbf{S}_{[t]}^{\intercal} + (\mathbf{Q}_{[t]}\mathbf{K}_{[t]}^{\intercal} \odot \mathbf{M})\left(\widetilde{\mathbf{U}_{[t]}} - \overleftarrow{\mathbf{W}_{[t]}}\mathbf{S}_{[t]}^{\intercal}\right) \qquad \in \mathbb{R}^{C \times d_v}$$

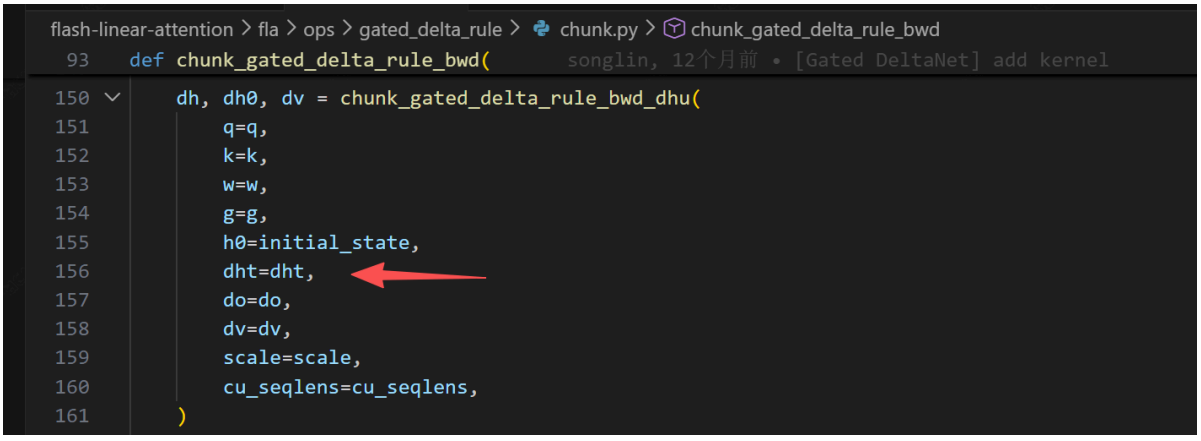
where $\overleftarrow{\boldsymbol{q}_{[t]}^r} = \gamma_{[t]}^r \boldsymbol{q}_{[t]}^r$, $\overleftarrow{\mathbf{w}_{[t]}^r} = \gamma_{[t]}^r \mathbf{w}_{[t]}^r$, $\overrightarrow{\boldsymbol{k}_{[t]}^r} = \frac{\gamma_{[t]}^C}{\gamma_{[t]}^r}\boldsymbol{k}_{[t]}^r$, and $\overrightarrow{\mathbf{S}_{[t]}} = \gamma_{[t]}^C \mathbf{S}_{[t]}$ like we defined in Eq. 2.

从代码进行切入

假设CP=4，一个完整序列被平均切分为4份。在唯一和序列相关的函数`chunk_gated_delta_rule_fwd_h`中，每个rank的`initial_state`默认都为0，这对于rank0是对的，对rank1，2，3都是错误的，如果有一个额外的函数，能够算出成真实的`initial_state`，那么下面的函数输出的结果就是正确的了。因此我的设计出发点是：写一个额外的函数插入到该函数之前。



反向类似，rank3的dht为0，rank0，1，2的dht需要真实的dht，需要一个额外函数算出真实的dht。



前向公式推导

我为了方便写代码，推导过程中的公式的shape和代码中都是一致的，对S_t都进行了转置进行表式。

$$
\begin{aligned}
S_{[t+1]}^T &= \overrightarrow{S_{[t]}^T} + \overrightarrow{K_{[t]}^T}(U_{[t]}^T - \overleftarrow{W_{[t]}}S_t^T) \\
&= \overrightarrow{S_{[t]}^T} + \overrightarrow{K_{[t]}^T(U_{[t]}^T - \overleftarrow{W_{[t]}}S_t^T)} \\
&= \gamma_{[t]}^C S_{[t]}^T + K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})(U_{[t]}^T - \overleftarrow{W_{[t]}}S_t^T) \\
&= (I\gamma_{[t]}^C - K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})\overleftarrow{W_{[t]}})S_t^T + K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})U_{[t]}^T
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
O_{[t]} = \overleftarrow{Q_{[t]}}S_{[t]}^T + (Q_{[t]}K_t^T \odot M)(U_{[t]}^T - \overleftarrow{W_{[t]}}S_t^T) \tag{2}
$$

公式1和2是论文中的两个公式，其中的decay的Q和W我没有展开，是因为这两个与核心算子都无关。在公式1的第二行，K的decay放到了括号那项，这是原始代码中的做法。

$$
S_{[t+1]}^{*T} = (I\gamma_{[t]}^C - K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})\overleftarrow{W_{[t]}})S_{[t]}^{*T} + K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})U_{[t]}^T \tag{3}
$$

假设每张rank都初始化S_0为0，得到S*_t，即公式3，这时rank1，2，3的结果都是不正确的。

$$
S_{[t+1]}^T - S_{[t+1]}^{*T} = (I\gamma_{[t]}^C - K_{[t]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[t]})W_{[t]})(S_{[t]}^T - S_{[t]}^{*T}) \tag{4}
$$

$$
S_{[i+k]}^T - S_{[i+k]}^{*T} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(I\gamma_{[i+j]}^C - K_{[i+j]}^T \mathrm{diag}(\gamma_{[i+j]})W_{[i+j]})\right)(S_{[t]}^T - S_{[t]}^{*T}) \tag{5}
$$

然后用公式1减公式3，得到公式4，对公式4的最后一项继续进行展开，就能得到chunk之间的递推公式5。

$$S^T_{[i+k]} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(I\gamma^C_{[i+j]} - K^T_{[i+j]}\mathrm{diag}(\gamma_{[i+j]})W_{[i+j]})\right)(S^T_{[t]} - S^{*T}_{[t]}) + S^{*T}_{[i+k]} \tag{6}$$

$$\text{另} M_{[i]} = I\gamma^C_{[i]} - K^T_{[i]}\mathrm{diag}(\gamma_{[i]})W_{[i]}$$

$$\text{则 } M_{[i+1]} = (I\gamma^C_{[i+1]} - K^T_{[i+1]}\mathrm{diag}(\gamma_{[i+1]})W_{[i+1]})M_{[i]} \tag{7}$$

对公式5进行移项后得到公式6。

前向算法设计

根据上面的公式，即可设计如下算法。

```
假设有16个chunk，每张卡4个chunk。
rank0: chunk 1, 2, 3, 4,  初始化S*_1=0, M_0=I
rank1: chunk 5, 6, 7, 8,  初始化S*_5=0, M_4=I
rank2: chunk 9, 10, 11, 12,  初始化S*_9=0, M_8=I
rank3: chunk 13, 14, 15, 16,  初始化S*_13=0, M_12=I

使用公式1（第2个等号）计算S*，并行算。只需存储一个S，大小为H * K * V
rank0: S*_5
rank0: S*_9
rank0: S*_13
rank0: S*_17

使用公式7计算M，并行算。只需存储一个M，大小为H * K * K
rank0: M_4
rank0: M_8
rank0: M_12
rank0: M_16

all_agther。通信量大小为CP * H * K * (K+V)
S* = [S*_5, S*_9, S*_13, S*_17]
M  = [M_4, M_8, M_12, M_16]

使用公式6进行merge，并行算。唯一缺点，该算子，每张卡计算不均衡，但是占比很小
rank0：S_1 = 0
rank1：S_5 = S*_5
rank2: S_5 = S*_5, S_9 = M_8 @ S_5 + S*_9
rank3: S_13 = S*_5, S_9 = M_8 @ S_5 + S*_9, S_13 = M_12 @ S_9 + S*_13

现在，每个rank都得到有真实的initial_state，继续走GDN的剩余步骤
```

反向公式推导

反向和前向类似，也可以写成前向的形式，只不过方向是反过来来的。算法设计我就不是写了。

$$\text{另公式1中的：} (U^T_{[t]} - \overleftarrow{W}_{[t]}S^T_{[t]}) = V_1, \text{ 则} dV_1 = diag(\gamma_{[t]})K_{[t]}dS^T_{[t+1]}$$

$$\text{另公式2中的：} (U^T_{[t]} - \overleftarrow{W}_{[t]}S^T_{t}) = V_2, \ dV_2\text{可以通过其他算子直接求到}$$

对公式1和2中的S_t进行求导。

$$
\begin{cases}
dS_{[t]}^{T(1)} &= \overleftarrow{Q_{[t]}^T} dO_{[t]} \\
dS_{[t]}^{T(2)} &= -\overleftarrow{W_{[t]}^T} dV_1 = \overleftarrow{W_{[t]}^T} diag(\gamma_{[t]}) K_{[t]} dS_{[t+1]}^T \\
dS_{[t]}^{T(3)} &= -\overleftarrow{W_{[t]}^T} dV_2 \\
dS_{[t]}^{T(4)} &= \gamma_{[t]}^C dS_{[t+1]}^T
\end{cases}
$$

$$
dS_{[t]}^T = (\gamma_{[t]}^C I - \overleftarrow{W_{[t]}^T} diag(\gamma_{[t]}) K_{[t]}) dS_{[t+1]}^T + \overleftarrow{Q_{[t]}^T} dO_{[t]} - \overleftarrow{W_{[t]}^T} dV_2
$$

$$
dS_{[t]}^{*T} = (\gamma_{[t]}^C I - \overleftarrow{W_{[t]}^T} diag(\gamma_{[t]}) K_{[t]}) dS_{[t+1]}^{*T} + \overleftarrow{Q_{[t]}^T} dO_{[t]} - \overleftarrow{W_{[t]}^T} dV_2
$$

$$
dS_{[t]}^T - dS_{[t]}^{*T} = (\gamma_{[t]}^C I - \overleftarrow{W_{[t]}^T} diag(\gamma_{[t]}) K_{[t]}) (dS_{[t+1]}^T - dS_{[t+1]}^{*T})
$$

$$
dS_{[t]}^T - dS_{[t]}^{*T} = (\prod_{j=0}^{k-1} (\gamma_{[t+j]}^C I - \overleftarrow{W_{[t+j]}^T} diag(\gamma_{[t+j]}) K_{[t+j]})) (dS_{[t+k]}^T - dS_{[t+k]}^{*T})
$$

$$
dS_{[t]}^T = (\prod_{j=0}^{k-1} (\gamma_{[t+j]}^C I - \overleftarrow{W_{[t+j]}^T} diag(\gamma_{[t+j]}) K_{[t+j]})) (dS_{[t+k]}^T - dS_{[t+k]}^{*T}) + dS_{[t]}^{*T}
$$

代码设计

context初始化（最核心）

实际场景中是varlen的，不同rank是可以跳过一些计算的。下面的初始化是最核心的，后面的算子都依赖这些信息，请看下面代码中的注释进行理解。

```
S = cu_seqlens_list[-1]
part_len = (S // world_size)
start, end = part_len * rank, part_len * (rank + 1) # 每个rank的切分范围
def contain(left, right): # 判断该rank的范围与该样本的范围是否重合。
    return (min(right, end) - max(left, start)) > 0
cu_seqlens = []
is_last_rank_list, pre_num_ranks_list, is_first_rank_list, post_num_ranks_list  =
[], [], [], []
for idx in range(len(cu_seqlens_list) - 1):
    left, right = cu_seqlens_list[idx], cu_seqlens_list[idx + 1]
    if left >= end: # 该样本以及之后的都不会在这个rank范围内
        break
    if contain(left, right):
        cu_seqlens.append(max(left - start, 0))
        pre_num_conv_tokens_list.append(max(0, start - left))
        # cross rank
        if left < start or right > end:
            first_rank = left // part_len
            last_rank = (right - 1) // part_len
            is_last_rank_list.append(rank == last_rank) # forward
            pre_num_ranks_list.append(rank - first_rank) # forward
            is_first_rank_list.append(rank == first_rank) # backward
            post_num_ranks_list.append(last_rank - rank) # backward
```

```
        else:
            is_last_rank_list.append(True)
            pre_num_ranks_list.append(0)
            is_first_rank_list.append(True)
            post_num_ranks_list.append(0)
if cu_seqlens[-1] != part_len:
   cu_seqlens.append(part_len)
cu_seqlens = torch.tensor(cu_seqlens, dtype=torch.int32,
device=torch.cuda.current_device())
# 取最后一个，如果是False，那么该rank需要计算state传给下一个
is_last_rank = is_last_rank_list[-1]
# 取第一个，如果>0，需要接收前面rank的state
pre_num_ranks = pre_num_ranks_list[0]
# 取第一个，如果>0，需要接收前面rank的conv_tokens
pre_num_conv_tokens = pre_num_conv_tokens_list[0]
# 取第一个，如果是False，那么该rank需要计算dstate传给上一个
is_first_rank = is_first_rank_list[0]
# 取最后一个，如果>0，需要接收后面rank的dstate
post_num_ranks = post_num_ranks_list[-1]
```

算子

首先`pre_process_fwd_kernel_stage1`直接copy fla的算子`chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64`，对其进行删删减减即可，非常easy。注意grid是没有batch这个维度的，如果是varlen，该rank的batch数量比较大，那么该算子的耗时非常短。

然后`pre_process_fwd_bwd_kernel_stage2`是对公式6进行实现。该grid是没有batch这个维度的。这个算子有个缺点，公式中6中有个K_T@W，并且还需要连乘，因为K和W的head_dim维度没法拆开，因此head_dim目前最大只可以是128，如果是192和256算子都跑不通。为了提高并行度，可以在每个sm初始化M_0的时候，只初始化[K, K//BK2]的大小，这样K_T@W的计算都是重复的，但是M_i+1 = (*) @ M_i的计算量可以变小。

接着进行`all_gather`通信，通信量和CP的大小成正比

最后`merge_fwd_bwd_kernel`会更新该rank的第一个样本的initial_state

反向和前向一样，只是`pre_process_fwd_kernel_stage1`换成了`pre_process_bwd_kernel_stage1`，是对`chunk_gated_delta_rule_bwd_kernel_dhu_blockdim64`进行删删减减

```
def chunk_gated_delta_rule_fwd_h_pre_process(*):
    hm = k.new_zeros(H, K, (V + K), dtype=DTYPE)
    initial_state = k.new_zeros(N, H, K, V, dtype=DTYPE)

    if not context.is_last_rank:
        def grid(meta): return (triton.cdiv(V, meta['BV']), H)
        pre_process_fwd_kernel_stage1[grid](hm, cu_seqlens=cu_seqlens[-2:], *)

        def grid(meta): return (triton.cdiv(K, meta['BK2']), H)
        pre_process_fwd_bwd_kernel_stage2[grid](hm, cu_seqlens=cu_seqlens[-2:],
*)

    ag_hm, _ = all_gather(hm, group=context.group)

    if context.pre_num_ranks > 0:
        def grid(meta): return (triton.cdiv(V, meta['BV']), H)
```

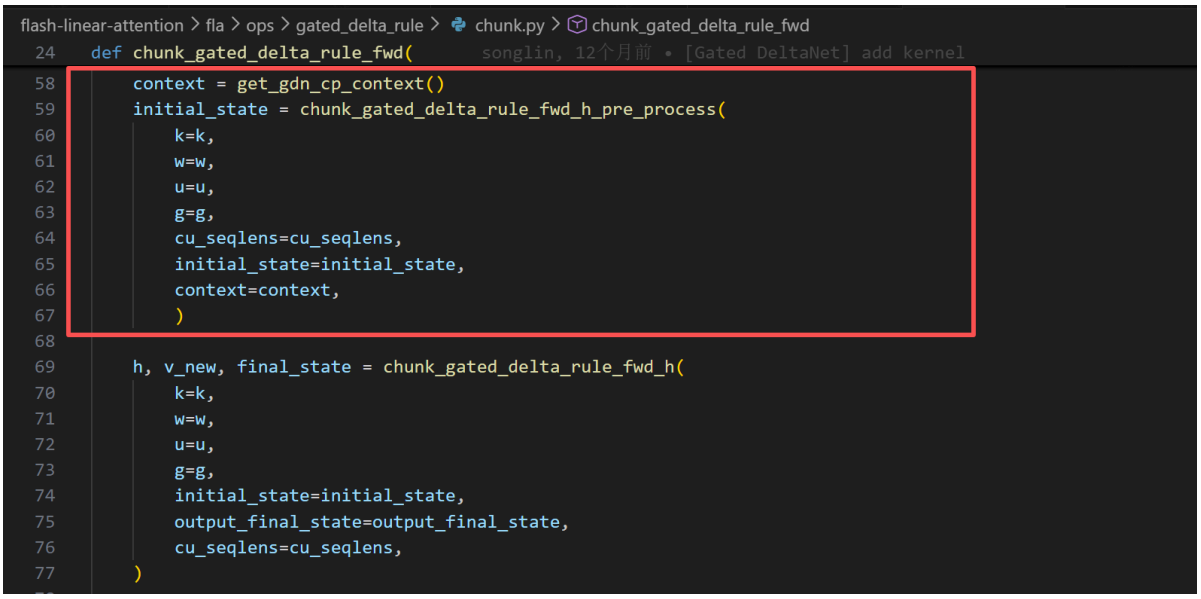
```
        merge_fwd_bwd_kernel[grid](initial_state[0], rank, pre_num_ranks, *)

    return initial_state
```

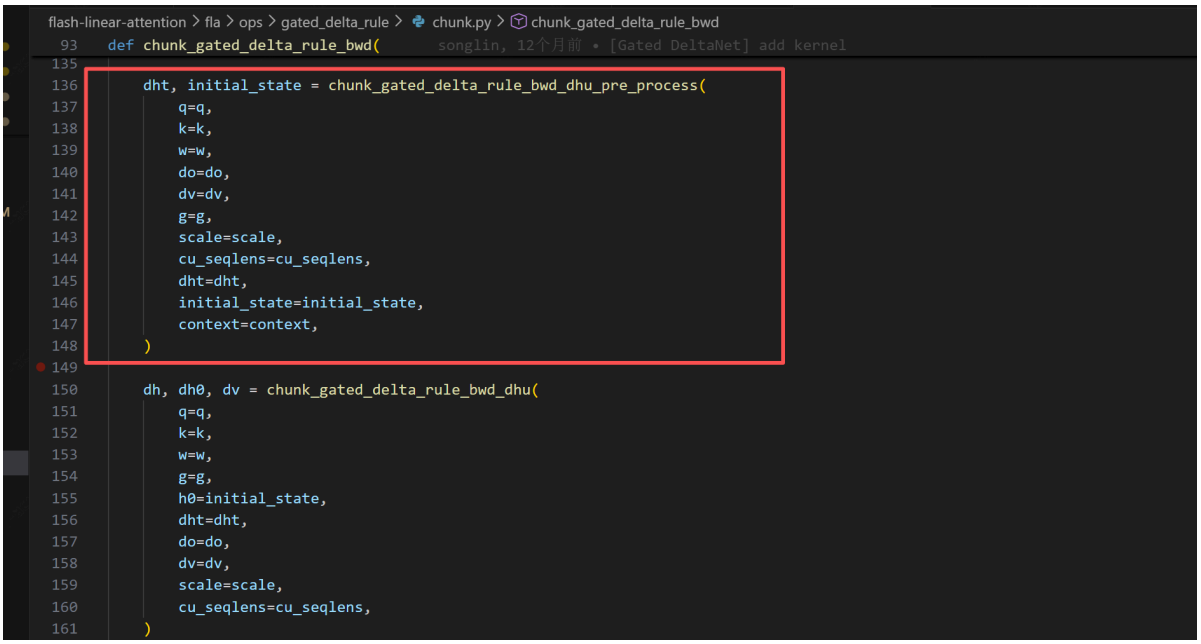
接入带GDN或者KDA中

首先初始化context

forward中进行插入



backward中进行插入



注意的是，如果用到的conv1d，还需要拿到上一个rank的尾块token，需要进行额外的通信。可恶的conv1d, 什么时候去死！

性能表现

32k, cp=4, num_head=64, head_dim=128。torch=2.8, cuda=12.8, triton=3.4, gpu=H800。

3种模式，全量，a2a模式(包含通信，但是每张卡head变少)，以及本文所讲的CP方式。只对比了核心chunk函数，不包含linear和conv1d等操作。

据一位朋友告知：256k下，训练类似kimi-linear的模型，端到端可加速20%，money大大的省！

```
cu_seqlen: [0, 32768]

GDN forward
custom cp, non-cp time: 5.432 ms, cp time: 2.160 ms, rate: 62.86 %
all to all, non-cp time: 5.432 ms, cp time: 4.068 ms, rate: 33.38 %

GDN forward + backward
custom cp, non-cp time: 16.516 ms, cp time: 5.878 ms, rate: 70.24 %
all to all, non-cp time: 16.516 ms, cp time: 10.592 ms, rate: 38.98 %

KDA forward
custom cp, non-cp time: 7.753 ms, cp time: 2.622 ms, rate: 73.93 %
```

```
all to all, non-cp time: 7.753 ms, cp time: 5.047 ms, rate: 38.41 %

KDA forward + backward
custom cp, non-cp time: 37.592 ms, cp time: 10.801 ms, rate: 87.01 %
all to all, non-cp time: 37.592 ms, cp time: 15.877 ms, rate: 59.19 %

长文本训练种也包含一些短文本
cu_seqlen: [0, 2960, 5212, 9513, 13567, 17443, 20634, 23521, 26281, 31785, 32768]

GDN forward
custom cp, non-cp time: 4.816 ms, cp time: 1.665 ms, rate: 72.31 %
all to all, non-cp time: 4.816 ms, cp time: 3.460 ms, rate: 34.80 %

GDN forward + backward
custom cp, non-cp time: 15.815 ms, cp time: 4.897 ms, rate: 80.74 %
all to all, non-cp time: 15.815 ms, cp time: 8.608 ms, rate: 45.93 %

KDA forward
custom cp, non-cp time: 8.066 ms, cp time: 2.351 ms, rate: 85.76 %
all to all, non-cp time: 8.066 ms, cp time: 4.750 ms, rate: 42.45 %

KDA forward + backward
custom cp, non-cp time: 37.730 ms, cp time: 10.489 ms, rate: 89.93 %
all to all, non-cp time: 37.730 ms, cp time: 15.162 ms, rate: 62.21 %
```

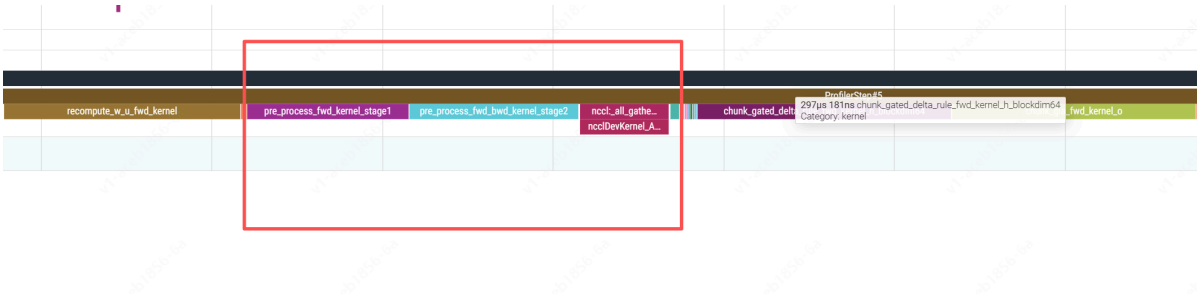
profile分析

以KDA前向为例，拿的rank2的timeline信息

可以看到本文介绍的cp方式比cp2hp的方式要友好很多，主要原因是all2all的时间占比很大

下面是cu_seqlens=[0, 32768]

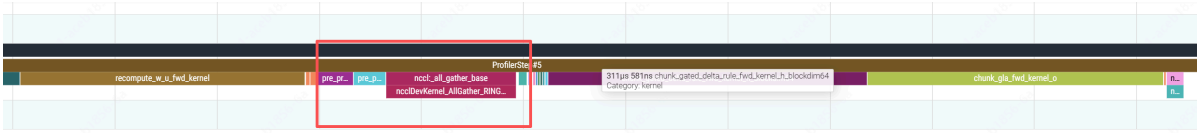
本文cp多了3个算子+一次通信，然后`chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64`大概耗时300us左右



cp2hp中，`chunk_gated_delta_rule_fwd_kernel_h_blockdim64`大概耗时800us左右，因为head变少，并行度降低，效率大大折扣

下面是cu_seqlens=[0, 2960, 5212, 9513, 13567, 17443, 20634, 23521, 26281, 31785, 32768]

本文cp，可以看到因为单个rank的样本数增加，我们只需要算一个样本即可，因此前2个算子时间大大减少，通信时间不变



cp2hp，样本数增加，并行度增加，因此时间也会减少一些。