

## Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad (1)$$

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}) \quad (2)$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i) \text{ dla } \bigcap_{i=1}^n F_i = \Omega \quad (3)$$

	zmienne dyskretne	zmienne ciągłe
definicja	$P(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'(x)$
obliczanie prawdopodobieństwa	$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(x)$	$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$
skumulowana f. rozkładu	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(y)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$
całkowite prawdopodobieństwo	$\sum_x P(x) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
wartość oczekiwana	$EX = \sum_x xP(x)$	$EX = \int x f(x)dx$
wariancja	$VarX = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$	$VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$

## Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \quad (4)$$

## Rozkłady dyskretne

Rozkład	P(x)	EX	VarX	
Bernoulli(p)	$P(x) = \begin{cases} p, & \text{for } x = 1 \\ q = (1 - p), & \text{for } x = 0 \end{cases}$	$EX = p$	$VarX = pq$	próba
Binomial(n, p)	$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ for $x = 0, 1, \dots$	$EX = np$	$VarX = npq$	liczba sukcesów z n prób
Geometric(p)	$P(x) = (1-p)^{x-1} p$ for $x = 1, 2, \dots$ $P(X > k) = (1-p)^k$	$EX = \frac{1}{p}$	$VarX = \frac{1-p}{p^2}$	liczba prób do sukcesu
Poiss( $\lambda$ )	$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ for $x = 0, 1, \dots$	$EX = \lambda$	$VarX = \lambda$	rozkład zdarzeń rzadkich

## Rozkłady ciągłe

Rozkład	f(x), F(x)	EX	VarX	
Unif(a,b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ for $a \leq x \leq b$ $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{for } a \leq x < b \\ 1, & \text{for } x \geq b \end{cases}$	$EX = \frac{a+b}{2}$	$VarX = \frac{(b-a)^2}{12}$	
Exp( $\lambda$ )	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$EX = \frac{1}{\lambda}$	$VarX = \frac{1}{\lambda^2}$	modelowanie czasu, brak pamięci
Gamma( $\alpha, \lambda$ )	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$	$EX = \frac{\alpha}{\lambda}$	$VarX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$	łączny czas $\alpha$ niezależnych zdarzeń $\sim Exp(\lambda)$
N( $\mu, \sigma$ )	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $F(x) = \Phi(x)$ dla N(0,1)	$EX = \mu$	$VarX = \sigma^2$	

$$Bin(n, p) \approx Poiss(\lambda) \quad (5)$$

$$P(T \leq t) = P(X \geq \alpha) \quad (6)$$

$$T \sim Gamma(\alpha, \lambda), X \sim Poiss(\lambda t)$$

$$Binomial(n, p) = N(np, \sqrt{np(1-p)}) \quad (7)$$

$$X_i \sim Bernoulli(p), S_n = \sum_{i=1}^n X_i, 0.05 \leq p \leq .095$$

#### Rozkład łączny

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} F_{(X,Y)}(x, y)$$

	zmienne dyskretne	zmienne ciągłe
rozkłady brzegowe	$P(x) = \sum_y P(x, y)$ $P(y) = \sum_x P(x, y)$	$f(x) = \int_Y f(x, y) dy$ $f(y) = \int_X f(x, y) dx$
niezależność obliczanie prawdopodobieństwa	$P(x, y) = P(x)P(y)$ $P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} P(x, y)$	$f(x, y) = f(x)f(y)$ $\int \int_{(x,y) \in A} f(x, y) dx dy$

#### Centralne Twierdzenie Graniczne

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{Std(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{(n)\sigma}} \rightarrow N(0, 1) \text{ for } n \text{ to } \infty \quad (8)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, E(X_i) = \mu, Std(X_i) = \sigma$$

## Estymatory - Monte Carlo

dla  $X$ ,  $p = P(X \in A)$

$$\hat{p} = \hat{P}(X \in A) = \frac{\#(X_i \in A)}{n}$$

$$E\hat{p} = \frac{1}{n}(np) = p$$

$$Std\hat{p} = \frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)}$$

Dokładność

$$P(|\hat{p} - p| > \epsilon) = P\left(\frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} > \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{-\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

Estymacja średniej  $\bar{X}$  z  $X_1, \dots, X_n$  ze wspólnym  $\mu$  i  $\sigma$

$$E\bar{X} = \frac{1}{n}(EX_1 + \dots + EX_n) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

$$Var\bar{X} = \frac{1}{n^2}(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Estymator wariancji

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Procesy Markowa

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład w czasie  $h$ :  $P_h = P_0 * P^h$

Rozkład stacjonarny:  $\pi P = \pi$ ,  $\sum \pi_i = 1$

Estymacja: **metoda momentów**

k-ty moment z populacji

$$\mu_k = E(X^k)$$

k-ty centralny moment z populacji

$$\mu'_k = E((X - \mu_1)^k)$$

k-ty moment z próby

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

k-ty centralny moment z próby

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

$$\mu_1 = EX, \mu_2 = VarX, \mu_k = m_k$$

Estymacja: **metoda największej wiarygodności**

$$P(X = (X_1, \dots, X_n)) = P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i)$$

Szukamy ekstremum:  $\frac{\delta P}{\delta \theta}(x) = 0$ , używając logarytmu.

**Przedziały ufności**

$$\hat{\theta} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(\hat{\theta})$$

$$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

### Rozkład t-studenta

$t = \frac{\hat{\theta} - \theta}{s(\hat{\theta})} \leftarrow$  zastępujemy  $Std(\hat{\theta})$  przez  $S(\hat{\theta})$ ,  $n-1$  stopni swobody

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

### Z-testy

Null hypothesis	Parameter, estimator	if $H_0$ is true:		Test statistic
$H_0$	$\theta, \hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	$Var(\hat{\theta})$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}}$
$\mu = \mu_0$	$\mu, \bar{X}$	$\mu_0$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
$p = p_0$	$p, \hat{p}$	$p_0$	$\frac{p_0(1-p_0)}{n}$	$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
$\mu_X - \mu_Y = D$	$\mu_X - \mu_Y, \bar{X} - \bar{Y}$	$D$	$\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{n}$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - D}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$
$p_1 - p_2 = D$	$p_1 - p_2, \hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$D$	$\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$	$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - D}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}}$
$p_1 = p_2$	$p_1 - p_2, \hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	$p(1-p)(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$ where $p = p_1 = p_2$	$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}$ where $\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}$

### T-testy

Hypothesis $H_0$	Conditions	Test static t	Degrees of freedom
$\mu = \mu_0$	Sample size $n$ ; unknown $\sigma$	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$n - 1$
$\mu_X - \mu_Y = D$	Sample sizes $n, m$ unknown but equal $\sigma_X = \sigma_Y$	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$	$n + m - 2$
$\mu_X - \mu_Y = D$	Sample sizes $n, m$ ; unknown and unequal $\sigma_X \neq \sigma_Y$	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}$	Satterthwaite approximation

**P-values** - accept if  $P \geq 0.1$ , reject if  $P \leq 0.01$

Hypothesis $H_0$	Alternative $H_A$	P-value	Computation
$\theta = \theta_0$	right-tail $\theta > \theta_0$	$P\{Z \geq Z_{obs}\}$	$1 - \Phi(Z_{obs})$
	left-tail $\theta < \theta_0$	$P\{Z \leq Z_{obs}\}$	$\Phi(Z_{obs})$
	two-sided $\theta \neq \theta_0$	$P\{ Z  \geq  Z_{obs} \}$	$2(1 - \Phi( Z_{obs} ))$

## Rozkład obserwacji o rozkładzie normalnym i wspólnej wariancji $\sigma^2$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim Chi-square(n-1) \sim Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Zatem przedział ufności:

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

## Testy Chi kwadrat

$H_0$	$H_A$	Test statistic	Rejection region	P-value
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_{obs}^2 > \chi_{\alpha}^2$ $\chi_{obs}^2 < \chi_{\alpha}^2$ $\chi_{obs}^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ or $\chi_{obs}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$	$P\chi^2 \geq \chi_{obs}^2$ $P\chi^2 \leq \chi_{obs}^2$ $2min(P\chi^2 \geq \chi_{obs}^2, P\chi^2 \leq \chi_{obs}^2)$

## Statystyka Chi-kwadrat

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{(Obs(k) - Exp(k))^2}{Exp(k)}, R = [\chi_{\alpha}^2, +\infty], P = P\chi^2 \geq \chi_{obs}^2$$

Rule of thumb:  $Exp(k) \geq 5$  for all  $k = 1, \dots, N$ .

## Test Chi-kwadrat niezależności A i B

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(Obs(i,j) - \hat{Exp}(i,j))^2}{\hat{Exp}(i,j)}, \hat{Exp}(i,j) = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n}$$