MNUM-PROJEKT, zadanie 3.17

Marcin Dziedzic

7 maja 2018

Spis treści

1 Zadanie I

1.1 Treść zadania

Proszę znaleźć wszystkie zera funkcji

$$f(x) = 0.7xcos(x) - ln(x + 1)$$

w przedziale $[2, 11]$, używając dla każdego zera programu z implementacją:
a) metody bisekcji
b) metody siecznych
c) metody Newtona

1.2 Metoda bisekcji

1.2.1 Opis teoretyczny

Teoretyczny zarys metody bisekcji możemy przybliżyć poniższym algorytmem:

1. Począwszy od przedziału startowego $[a, b] = [a_0, b_0]$ obliczamy środek przedziału c_n, $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ i obliczamy wartość $f(x)$ w tym punkcie.
2. Obliczamy iloczyny $f(a_n) * f(c_n)$ oraz $f(b_n) * f(c_n)$ i jako nowy przedział $[a_{n=1}, b_{n+1}]$ wybieramy argumenty tego iloczynu którego wartość jest ujemna.

Kroki te powtarzamy aż do momentu uzyskania $f(c_n) < \delta$ gdzie δ to oczekiwana dokładność rozwiązania. W przypadku "płaskich"funkcji warto też kontrolować długość rozpatrywanego przedziału. Dokładność wyniku zależy jedynie od ilości iteracji dlatego metoda jest zbieżna liniowo z ilorazem zbieżności 0.5, co czyni ją stosunkowo wolno zbieżną w przypadku wyboru szerokiego przedziału początkowego.

1.2.2 Realizacja w programie Matlab

Listing 1: Implementacja metody bisekcji

```
% Funkcja wyznaczajaca punkty zerowe funkcji metoda bisekcji
%
% IN:
% a0, b0 - zakres
% fun - funkcja
% iter - maksymalna liczba iteracji
%
% OUT:
% solution - wyznaczone miejsce zerowe

function soluiton = md_bisection(fun,a0,b0,iter)

  a = a0;
  b = b0;
  % inicjalizacja wartosciami poczatkowymi
```

```
  fa =feval(fun,a);
  fb =feval(fun,b);
  for k=1:iter
    % obliczenie srodka odcinka
    xm = a + 0.5*(b-a);
    %  f(xm)
    fm = feval(fun,xm);
    fprintf('%3d    [%12.10f;%12.10f]   %12.16f     %12.3e\n',k,a,b,xm,fm);
    if(fm == 0)
        return
    end
    %  Zero lezy w przedziale [xm,b], zamiana a
    if sign(fm)==sign(fa)
        a = xm;
        fa = fm;
    %  Zero lezy w przedziale [a,xm], zamiana b
    else
        b = xm;
        fb = fm;
    end
    %dodatkowy warunek zakonczenia wykonywania
    if(fm == 0)
        return
    end
  end
  soluiton = xm;
  return
end
```

1.3 Metoda siecznych

Metoda siecznch jest bardzo podobna do metody bisekcji, różni się tym, iż przez krańce aktualnego przedziału prowadzimy prostą, która przecina oś rzędnych w punkcie x_0 . Następnie prowadzimy kolejną prostą przez punkt $f(x_n)$ i poprzedni punkt $f(x_{n-1})$. Warto zaznaczyć, że nie dbamy tutaj o przedział izolacji pierwiastka, ani nawet o znak iloczynu wartości na krańcach aktualnego przedziału.

Wzór na n+1 punkt, przez który ma przejść prosta: $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

Rząd zbieżności metody siecznych wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zatem metoda ta jest szybsza od metody bisekcji, lecz w praktyce może okazać się niezbieżna kiedy przedział izolacji nie jest dostatecznie mały, gdyż jest ona zbieżna tylko lokalnie, a nie globalnie jak poprzednia metoda.

1.3.1 Realizacja w programie Matlab

Listing 2: Implementacja metody siecznych

```
% Funkcja wyznaczajaca punkty zerowe funkcji metoda siecznych
%
% IN:
% a0, b0 - zakres
% fun - funkcja
% iter - maksymalna liczba iteracji
%
% OUT:
% solution - wyznaczone miejsce zerowe
function solution = md_secans(fun, a0, b0, iter)
  a = a0;
  b = b0;
  % poczatkowa wartosc funkcji
  fa = feval(fun,a);
  for k = 1:iter
    fb = feval(fun,b);
    dx = fb * (b-a) / (fb-fa);
    xm = b-dx;
    if(isnan(xm))
        return
    end
    a = b;
    b = xm;
    fa = fb;
    solution = b;
    fprintf('%3d         [%12.10f;%12.10f]   %12.16f     %12.3e\n',k,a,b,xm,fb);
    %dodatkowy warunek zakonczenia wykonywania
    if(fb == 0)
        return
    end
  end
end
```

1.4 Metoda Newtona

1.4.1 Opis teoretyczny

Metoda Newtona polega na wyznaczeniu częściowego (uciętego) rozwinięcia w szereg Taylora danej funkcji, które możemy traktować jak liniowe przybliżenie funkcji według wzoru:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Następnie wyznaczamy kolejne punkty iteracji poprzez przyrównanie do zera otrzymanej aproksymacji:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

Prowadzi to do zależności iteracyjnej danej następującym wzorem:

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda Newtona jest zbieżna jedynie lokalnie, ponieważ wyznaczając styczną do wykresu w danym punkcie możemy w przypadku ujemnego znaku pochodnej dojść do rozbieżności. Dla przypadków pochodnej większej od zera metoda jest zbieżna kwadratowo. Rząd zbieżności wynosi 2.

1.4.2 Realizacja w programie Matlab

Listing 3: Implementacja metody Newtona

```
% Funkcja wyznaczajaca punkty zerowe funkcji metoda Newtona
%
% IN:
% a0 - lewa strona zakresu
% fun - funkcja
% iter - maksymalna liczba iteracji
%
% OUT:
% solution - wyznaczone miejsce zerowe
function solution = md_newton(fun, a0,iter)
  x0 = a0;
  for k = 1:iter
    [fold, fpold] = feval(fun,x0);
    dx = fold / fpold;
    x0 = x0 - dx;
```

```
    fprintf('%3d␣␣␣␣␣␣␣␣␣%12.10f␣␣␣␣␣%12.16f␣␣␣␣␣%12.3e␣\n',k,dx,x0,fold);
    if(fold == 0)
        return
    end
    %dodatkowy warunek zatrzumania
        if fold==0
        solution = x0;
        break;
    end
  end
end
```

1.5 Analiza danych wejściowych

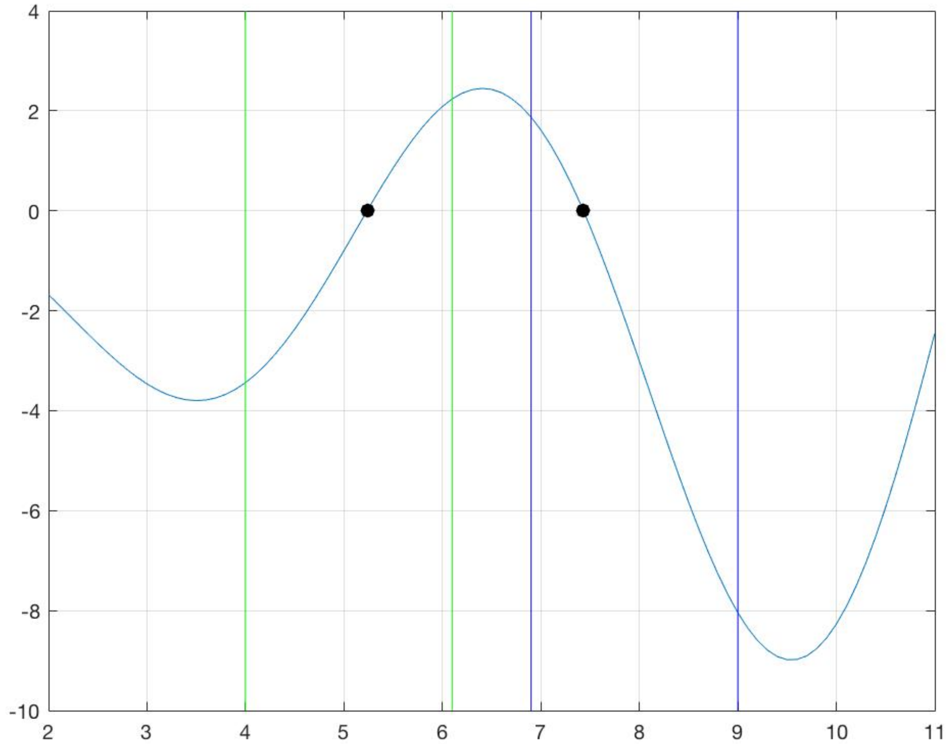
W celu wyznaczenia przedziałów izolacji miejsc zerowych został wykorzystany algorytm opisany w skrypcie prof. Tatjewskiego. Wstępna analiza danych rozpoczyna się od wygenerowania wykresu funkcji w danym przedziale i na tej podstawie wyboru przedziału startowego dla algorytmu. Następnie w podanym przedziale w pętli badany jest znak iloczynu funkcji w punktach granicznych. Jeżeli jest on ujemny, oznacza to występowanie miejsca zerowego w danym przedziale. Jeżeli nie, to przedział jest rozszerzany do momentu przekroczenia przedziału danego w zadaniu. Poniżej wykres funkcji z zaznaczonymi przedziałami izolacji wyznaczonymi przez algorytm.

1.5.1 Realizacja w programie Matlab

Listing 4: Skrypt rozwiązujący zadanie nr 1

```
% zadanie nr 1

clear;
x  = 2 : 0.1 : 11;
plot(x, md_fun_1(x))
grid on
axis([2 11 -10 4])
hold on
plot([4 4], [-10 4], 'g-');
plot([6.1 6.1], [-10 4], 'g-');
plot([6.9 6.9], [-10 4], 'b-');
plot([9 9], [-10 4], 'b-');
plot(5.2353163129141116, 0, '.','MarkerSize', 24, 'MarkerEdge', 'k');
plot(7.4317177653721664, 0,'.','MarkerSize',24,'MarkerEdge','k');
```




```
n=100;
x1 = 4;
x2 = 5;

% algorytmiczne wyznaczanie przedzialow izolacji
for k=1:2
    for j=1:n
        if md_fun_1(x1)*md_fun_1(x2)<0
            a = x1;
            b = x2;
            fprintf('Wyniki␣dla␣%d␣miejsca␣zerowego␣w␣przedziale␣[%d,%d]\n',k,a,
            bisection('md_fun_1',a,b,100);
            secant('md_fun_1',a,b,100);
            newton('md_fun_1',a,100);
```

```
            x1 = 8;
            x2 = 9;
            break;
        elseif abs(md_fun_1(x1))<abs(md_fun_1(x2))
            x1 = x1+1.1*(x1-x2);
        else
            x2 = x2+1.1*(x2-x1);
        end
        %wyjscie z petli po przekroczeniu przedzialu
        if(x1>11)&&(x2<(2))
            break;
        end
    end
end
```

cell1	cell2	cell3
cell4	cell5	cell6
cell7	cell8	cell9

1.6 Rozwiązanie

1.6.1 Metoda bisekcji

Pierwsze miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	[4.0000000000;6.1000000000]	5.0499999999999998	-6.291e-01
2	[5.0500000000;6.1000000000]	5.5749999999999993	1.081e+00
3	[5.0500000000;5.5750000000]	5.3125000000000000	2.576e-01
4	[5.0500000000;5.3125000000]	5.1812500000000004	-1.826e-01
5	[5.1812500000;5.3125000000]	5.2468750000000002	3.884e-02
6	[5.1812500000;5.2468750000]	5.2140625000000007	-7.163e-02
7	[5.2140625000;5.2468750000]	5.2304687500000000	-1.631e-02
8	[5.2304687500;5.2468750000]	5.2386718749999996	1.129e-02
9	[5.2304687500;5.2386718750]	5.2345703124999998	-2.510e-03
10	[5.2345703125;5.2386718750]	5.2366210937499993	4.389e-03
11	[5.2345703125;5.2366210937]	5.2355957031250000	9.399e-04
12	[5.2345703125;5.2355957031]	5.2350830078125004	-7.849e-04
13	[5.2350830078;5.2355957031]	5.2353393554687502	7.752e-05
14	[5.2350830078;5.2353393555]	5.2352111816406257	-3.537e-04
15	[5.2352111816;5.2353393555]	5.2352752685546875	-1.381e-04
16	[5.2352752686;5.2353393555]	5.2353073120117184	-3.028e-05
17	[5.2353073120;5.2353393555]	5.2353233337402347	2.362e-05
18	[5.2353073120;5.2353233337]	5.2353153228759766	-3.331e-06
19	[5.2353153229;5.2353233337]	5.2353193283081056	1.014e-05
20	[5.2353153229;5.2353193283]	5.2353173255920407	3.407e-06
21	[5.2353153229;5.2353173256]	5.2353163242340086	3.808e-08
22	[5.2353153229;5.2353163242]	5.2353158235549930	-1.646e-06
23	[5.2353158236;5.2353163242]	5.2353160738945004	-8.041e-07
24	[5.2353160739;5.2353163242]	5.2353161990642541	-3.830e-07
25	[5.2353161991;5.2353163242]	5.2353162616491318	-1.725e-07
26	[5.2353162616;5.2353163242]	5.2353162929415706	-6.719e-08
27	[5.2353162929;5.2353163242]	5.2353163085877892	-1.455e-08
28	[5.2353163086;5.2353163242]	5.2353163164108985	1.176e-08
29	[5.2353163086;5.2353163164]	5.2353163124993438	-1.395e-09
30	[5.2353163125;5.2353163164]	5.2353163144551207	5.184e-09
31	[5.2353163125;5.2353163145]	5.2353163134772327	1.894e-09
32	[5.2353163125;5.2353163135]	5.2353163129882887	2.495e-10
33	[5.2353163125;5.2353163130]	5.2353163127438158	-5.729e-10
34	[5.2353163127;5.2353163130]	5.2353163128660523	-1.617e-10
35	[5.2353163129;5.2353163130]	5.2353163129271705	4.393e-11
36	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163128966109	-5.887e-11
37	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129118911	-7.469e-12
38	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129195313	1.823e-11
39	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129157112	5.382e-12
40	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129138007	-1.045e-12

Drugie miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	[6.9000000000;9.0000000000]	7.9500000000000002	-2.725e+00
2	[6.9000000000;7.9500000000]	7.4250000000000007	3.067e-02
3	[7.4250000000;7.9500000000]	7.6875000000000000	-1.270e+00
4	[7.4250000000;7.6875000000]	7.5562500000000004	-5.950e-01
5	[7.4250000000;7.5562500000]	7.4906250000000005	-2.754e-01
6	[7.4250000000;7.4906250000]	7.4578125000000011	-1.206e-01
7	[7.4250000000;7.4578125000]	7.4414062500000009	-4.450e-02
8	[7.4250000000;7.4414062500]	7.4332031250000004	-6.802e-03
9	[7.4250000000;7.4332031250]	7.4291015625000005	1.196e-02
10	[7.4291015625;7.4332031250]	7.4311523437500000	2.587e-03
11	[7.4311523438;7.4332031250]	7.4321777343750002	-2.106e-03
12	[7.4311523438;7.4321777344]	7.4316650390624996	2.413e-04
13	[7.4316650391;7.4321777344]	7.4319213867187504	-9.320e-04
14	[7.4316650391;7.4319213867]	7.4317932128906250	-3.453e-04
15	[7.4316650391;7.4317932129]	7.4317291259765623	-5.200e-05
16	[7.4316650391;7.4317291260]	7.4316970825195305	9.466e-05
17	[7.4316970825;7.4317291260]	7.4317131042480469	2.133e-05
18	[7.4317131042;7.4317291260]	7.4317211151123050	-1.533e-05
19	[7.4317131042;7.4317211151]	7.4317171096801760	3.001e-06
20	[7.4317171097;7.4317211151]	7.4317191123962409	-6.165e-06
21	[7.4317171097;7.4317191124]	7.4317181110382080	-1.582e-06
22	[7.4317171097;7.4317181110]	7.4317176103591915	7.095e-07
23	[7.4317176104;7.4317181110]	7.4317178606986998	-4.363e-07
24	[7.4317176104;7.4317178607]	7.4317177355289452	1.366e-07
25	[7.4317177355;7.4317178607]	7.4317177981138229	-1.499e-07
26	[7.4317177355;7.4317177981]	7.4317177668213841	-6.633e-09
27	[7.4317177355;7.4317177668]	7.4317177511751646	6.498e-08
28	[7.4317177512;7.4317177668]	7.4317177589982748	2.917e-08
29	[7.4317177590;7.4317177668]	7.4317177629098294	1.127e-08
30	[7.4317177629;7.4317177668]	7.4317177648656063	2.319e-09
31	[7.4317177649;7.4317177668]	7.4317177658434952	-2.157e-09
32	[7.4317177649;7.4317177658]	7.4317177653545503	8.063e-11
33	[7.4317177654;7.4317177658]	7.4317177655990232	-1.038e-09
34	[7.4317177654;7.4317177656]	7.4317177654767868	-4.788e-10
35	[7.4317177654;7.4317177655]	7.4317177654156685	-1.991e-10
36	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653851090	-5.924e-11
37	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653698296	1.070e-11
38	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653774689	-2.427e-11
39	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653736497	-6.789e-12
40	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653717401	1.952e-12
41	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653726949	-2.419e-12
42	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653722180	-2.354e-13
43	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653719790	8.584e-13
44	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653720989	3.091e-13
45	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721584	3.642e-14
46	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721878	-9.726e-14
47	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721735	-3.242e-14
48	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721664	0.000e+00

1.6.2 Metoda siecznych

Pierwsze miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	[6.1000000000;5.2721231045]	5.2721231045481129	2.238e+00
2	[5.2721231045;5.2238264588]	5.2238264587735248	1.234e-01
3	[5.2238264588;5.2353558422]	5.2353558421649877	-3.869e-02
4	[5.2353558422;5.2353163517]	5.2353163517211909	1.330e-04
5	[5.2353163517;5.2353163129]	5.2353163129139766	1.306e-07
6	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129141116	-4.534e-13
7	[5.2353163129;5.2353163129]	5.2353163129141116	8.882e-16

Drugie miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	[9.0000000000;7.2966891015]	7.2966891015391813	-8.043e+00
2	[7.2966891015;7.4122825051]	7.4122825051309968	5.855e-01
3	[7.4122825051;7.4328117423]	7.4328117422994682	8.831e-02
4	[7.4328117423;7.4317097704]	7.4317097703803334	-5.009e-03
5	[7.4317097704;7.4317177621]	7.4317177621310275	3.659e-05
6	[7.4317177621;7.4317177654]	7.4317177653721762	1.483e-08
7	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721664	-4.396e-14
8	[7.4317177654;7.4317177654]	7.4317177653721664	0.000e+00

1.6.3 Metoda Newtona

Pierwsze miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	2.291e+01	-1.891e+01	-3.440e+00
2	-2.907e+02	2.718e+02	-1.610e+01
3	6.998e+52	-6.998e+52	8.442e+25
4	Inf	-Inf	-Inf
5	NaN	NaN	NaN
6	NaN	NaN	NaN

Drugie miejsce zerowe			
nr	przedzial	rozwiazanie	wartość
1	-10.6337977481	17.5337977481481566	1.873e+00
2	-5.4087425453	22.9425402934045692	1.768e-01
3	457.6247656451	-434.6822253516609180	-1.250e+01
4	-94071.6545455790	93636.9723202273016796	-1.325e+02
5	NaN	NaN	Inf
6	NaN	NaN	NaN
7	NaN	NaN	NaN
8	NaN	NaN	NaN

1.7 Wnioski

Dzięki graficznej analizie wykresu funkcji w prosty sposób możemy wyznaczyć otoczenie miejsc zerowych i zachowanie funkcji. Zauważyłem, że funkcja posiada dwa miejsca zerowe. Wyznaczyłem więc przedziały "badania"miejsc zerowych za pomocą algorytmu przedstawionego w książce prof. Piotra Tatjewskiego.
Jak wynika z otrzymanych rezultatów metoda bisekcji w obu przypadkach potrzebowała stosunkowo duzej ilosci iteracji (około 50), aby osiagac zadana dokładnosc. Jej zaletami jest niewrazliwosc na szczególne zachowania funkcji wiec mimo słabej zbieznosci nadaje sie do wyznaczania miejsc zerowych funkcji których przebiegu nie znamy w celu zabezpieczenia przez niezbieznoscią.
Metoda siecznych potrzebowała około 8 iteracji aby dojsc do wyniku. W przypadku badanej funkcji metoda ta okazała się najlepsza. O wiele szybsza niż metoda bisekcji oraz zbieżna dla podanej funkcji. Wynika to z wiekszego współczynnika zbieżności Niestety dla innych funkcji np. gdy ieczna przetnie wykres funkcji w wiekszej ilosci miejsc niz 2 razy moze okazać się niezbieżna.
Metoda Newtona zupełnie zawiodła w moim rozwiazaniu. Rozpatrywany przedział zawierał fragment funkcji z ujemna pochodna. Metoda okazała sie rozbieżna.

Ostatnia wypróbowana metoda jest metoda Newtona (stycznych), która w przypadku dobrego uwarunkowania (waski przedział, brak odcinków o pochodnej mniejszej niz zero w przedziale startowym) okazuje sie byc najszybsza (w zadaniu ok 3-4 iteracje). Wynika to z najwyzszego współczynnika zbieznosci. W przypadku wyznaczania drugiego miejsca zerowego metoda Newtona rozpatrywany przedział zawierał fragment funkcji z ujemna pochodna. Spowodowało to zwiekszenie liczby iteracji dla metody Newtona co mozna uznac za przypadek kiedy funkcja zawiodła.

2 Zadanie II

2.1 Treść zadania

Używając metody Mullera MM1, proszę znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste i zespolone wielomianu

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$