

Beugung elektromagnetischer Wellen

Manuel Meyer¹

¹Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg, Luruper Chaussee 149, D-22761 Hamburg, Deutschland

Keywords: Optik, elektromagnetische Wellen

EINLEITUNG

Wir haben uns in der Vorlesung bereits mit elektromagnetischen Feldern und den Maxwell-Gleichungen beschäftigt. Aus den Maxwell-Gleichungen geht hervor, dass sich elektromagnetische Felder wie Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Wellennatur des Lichts konnte von Thomas Young Anfang des 19. Jahrhunderts mit dem Doppelspaltexperiment nachgewiesen werden. Das entstehende Interferenzmuster beim Doppelspalt haben wir in der letzten Vorlesung betrachtet. Dabei haben wir angenommen, dass die Spalten sehr dünn (im Vergleich zur Wellenlänge) des Lichts sind, so dass wir die Spalten als zwei miteinander kohärente Linienquellen betrachten konnten. Diese Näherung wollen wir nun aufgeben. Dazu werden wir die Beugung von Licht an einem Einfachspalt betrachten. Wir werden feststellen, dass Interferenz und Beugung das selbe Phänomen (Interferenz von Wellen) beschreiben. Der Begriff Beugung wird meist genutzt, wenn es um Hindernisse im Lichtweg geht. Außerdem ist Beugung wichtig zur Beschreibung des Auflösungsvermögens optischer Instrumente wie Mikroskope, Teleskope, aber auch vom menschlichen Auge.

Zur Erinnerung: Zwei Lichtquellen sind *kohärent* wenn sie eine zeitlich konstante Phasenbeziehung zueinander haben.

VERSUCHSAUFBAU

Im oberen Teil von Abb. 1 ist unser Versuchsaufbau skizziert.¹ Er ist der selbe wie beim Doppelspalt, nur dass wir anstatt des Doppelspalts jetzt einen Einfachspalt verwenden, welcher eine Öffnung der Größe L hat. Wie beim Doppelspalt nehmen wir an, dass die Lichtquelle genügend weit entfernt ist, so dass ebene Wellen auf den Spalt treffen. Außerdem gehen wir davon aus, dass der Abstand zwischen Spalt und Schirm, ℓ , sehr viel größer als L ist. Dann können wir wieder annehmen, dass Strahlen ausgehend vom Spalt nahezu parallel sind, sich aber am Punkt P auf dem Schirm treffen.

Erstaunlicherweise sehen wir auf dem Schirm wie beim Doppelspalt ein Interferenzmuster — man spricht in diesem Fall von einem Beugungsmuster — mit einem Hauptmaximum im Zentrum sowie mehreren Nebenmaxima und Minima (siehe den unteren Teil von Abb. 1).

HERLEITUNG DES BEUGUNGSMUSTERS

Im Folgenden wollen wir nun dieses Beugungsmuster näher beschreiben. Dazu werden wir uns wieder das Superpositionsprinzip elektromagnetischer Wellen zunutze machen. Außerdem werden wir das Huygens'sche Prinzip anwenden, welches besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront wieder eine Punktquelle einer Kugelwelle ist. Dazu betrachten wir Abb. 2, wo wir im Spalt n Punktquellen platziert haben welche jeweils den Abstand d voneinander haben, so dass gilt $L = nd$.

Die Wellen zweier benachbarter Punktquellen erreichen den Punkt P auf dem Schirm mit einer zeitlichen Differenz von $\Delta t = \Delta r/c$, wobei Δr der Gangunterschied ist und c die Lichtgeschwindigkeit. Aus der Abbildung erkennt man, dass der Gangunterschied $\Delta r = d \sin \theta$ beträgt. Wie nehmen des Weiteren an, dass jede Punktquelle eine harmonische Welle von der Form $E = A \cos(\omega t - kx)$ emittiert, wobei die Amplitude A für jede Punktquelle

¹Farbige Versionen der Abbildungen sind hier abrufbar: <https://bit.ly/3q4tI9a>.

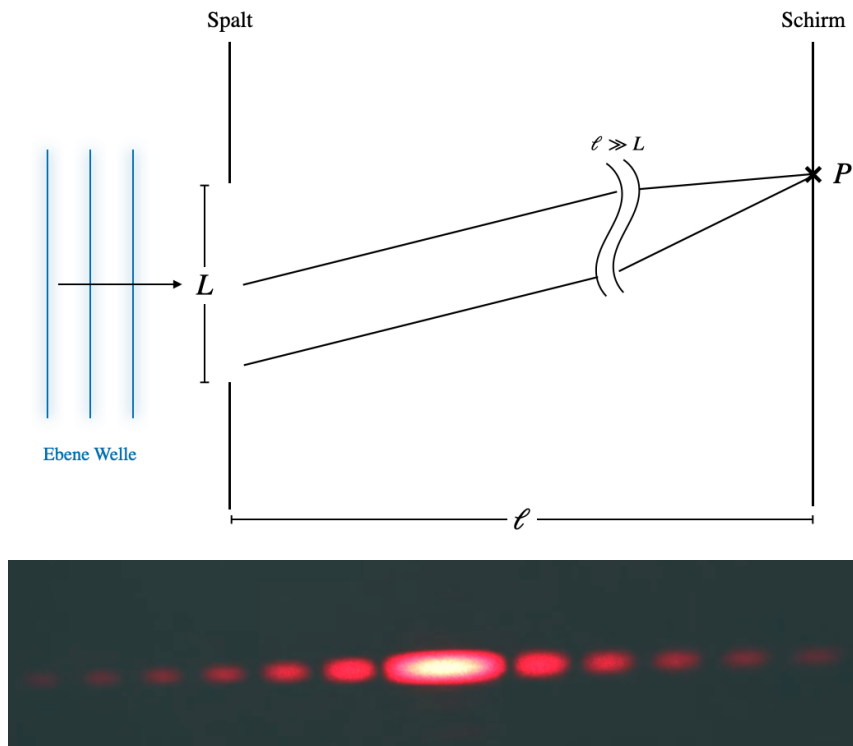


Abbildung 1. Oben: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus. Unten: beobachtetes Beugungsmuster auf dem Schirm.

gleich ist. Dann führt der Zeitunterschied Δt zu einem Phasenunterschied $\delta = \omega \Delta t$. Mit der Dispersionsrelation $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ erhalten wir

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta, \quad (1)$$

wobei λ die Wellenlänge des Lichts ist. Bezeichnen wir die Phase der Welle als $\alpha = \omega t - kx$, dann lässt sich das resultierende elektrische Feld E_R auf dem Schirm als Superposition der einzelnen Wellen schreiben,

$$E_R = A [\cos(\alpha) + \cos(\alpha + \delta) + \cos(\alpha + 2\delta) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\delta)]. \quad (2)$$

Einen ähnlichen Ausdruck hatten wir schon beim Doppelspalt betrachtet: dort hatten wir es mit den ersten beiden Termen der Gleichung zu tun, die wir mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus zusammengefasst haben. Ähnlich könnten wir auch hier vorgehen. Allerdings erweist es sich als einfacher, diese Summe geometrisch zu addieren (diese Vorgehensweise schärft auch unsere physikalische Intuition). Wir betrachten hierzu zunächst Abb. 3, aus der wir sehen, dass wir das elektrische Feld auch als Vektor begreifen können, welcher die Länge A hat und mit der x Achse zu einem Zeitpunkt t und an einem Ort x den Winkel α bildet. Die Projektion auf die x Achse gibt dann einfach das elektrische Feld. So einen Vektor bezeichnen wir als *Zeiger*, der mit ωt entgegen des Uhrzeigersinns rotiert. Wir können die Felder der anderen Vektoren auch als solche Zeiger darstellen und dann gemäß der Vektoraddition die Gesamtamplitude A_R von E_R bestimmen. Dazu beachte man, dass die Zeiger zwar rotieren, aber die Phasendifferenzen zeitlich konstant bleiben.

Für die Addition unserer n Punktquellen betrachten wir Abb. 4 in der wir als Beispiel $n = 8$ gewählt haben. Die Vektoren bilden jeweils den Winkel δ miteinander und laufen

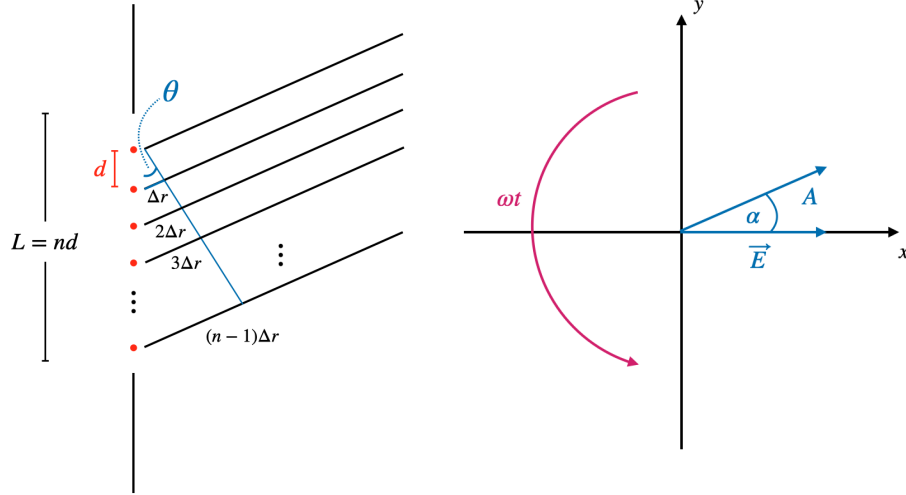


Abbildung 2. Spalt mit n Punktquellen. **Abbildung 3.** Zeigerdarstellung des elektrischen Feldes zu einem festen Zeitpunkt t und an einem Ort x .

entlang eines Kreisbogens der Länge r . Wir können also jeden Startpunkt eines Vektors mit dem Mittelpunkt des Kreisbogens verbinden und erhalten so n gleichschenklige Dreiecke. Zunächst stellen wir fest, dass der Winkel eines jeden Dreiecks am Kreisbogen (also die Spitze) gleich δ ist. Dann erhalten wir sofort einen Ausdruck für r ,

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{A/2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{A}{2 \sin(\delta/2)}. \quad (3)$$

Außerdem sehen wir, dass der Winkel des Kreisbogens $\phi = n\delta$ ist. Anhand dessen erhalten wir eine Relation zwischen A_R und ϕ ,

$$\sin \frac{n\delta}{2} = \frac{A_R/2}{r}. \quad (4)$$

Durch Auflösen nach A_R und Einsetzen von Gleichung (3) erhalten wir für die Gesamtamplitude

$$A_R = A \frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}. \quad (5)$$

Wir hatten bereits gesehen, dass die Intensität gleich dem Amplitudenquadrat des elektrischen Feldes ist. Mit der Intensität einer einzelnen Punktquelle $I_0 = A^2$ erhalten wir also die Gesamtintensität auf dem Schirm,

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{n\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (6)$$

Wir hatten im unteren Teil in Abb. 1 gesehen, dass das Hauptmaximum in der Mitte des Schirms, also bei $\theta = 0$, auftritt. Für $\theta \rightarrow 0$ geht auch $\delta \rightarrow 0$ (siehe Gleichung (1)). Was passiert mit der Intensität? Für kleine δ können wir die Reihenentwicklung des Sinus verwenden, $\sin x \rightarrow x$ für $x \rightarrow 0$, und erhalten somit

$$A_R \rightarrow A \frac{n\delta}{\delta} = nA. \quad (7)$$

Überlegen sie einmal selbst, warum der Winkel an der Spitze gleich δ sein muss.

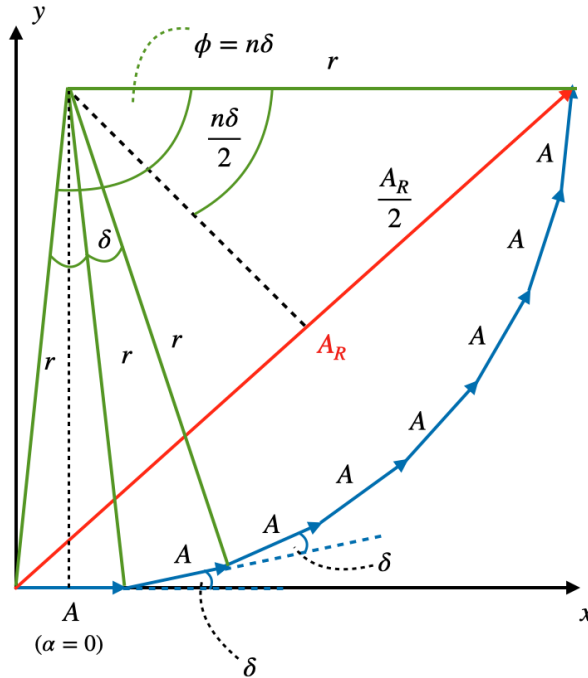


Abbildung 4. Geometrische Methode zur Addition der Vektoren der n Punktquellen. Der Einfachheit halber wählen wir $\alpha = 0$ für die erste Punktquelle.

Dies kann man sich auch einfach geometrisch veranschaulichen, siehe die linke Seite von Abb. 5. Somit ist die Intensität für $\theta = 0$ maximal und beträgt $I = n^2 I_0 \equiv I_{\max}$.

Da wir im Allgemeinen n sehr groß wählen, ist δ immer ein kleiner Winkel und wir können die Intensitätsverteilung auch schreiben als

$$I \approx I_0 \frac{\sin^2 \frac{n\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} = I_{\max} \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}}, \quad (8)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Definitionen von ϕ und I_{\max} verwendet haben. Die Gleichungen (6) und (8) bezeichnet man auch als *Fraunhofer'sches Beugungsmuster*, welches wir am Einzelspalt immer dann erhalten wenn $\ell \gg L$ ist. Die Funktion ist in Abb. 6 gezeigt.

Wann ist diese Funktion minimal? Wir erhöhen die Phasendifferenz δ und stellen fest, dass $I = 0$ wird sobald der Zähler in Gleichung (6) gleich null ist, also wenn

$$\frac{n\delta}{2} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{2\pi}{n}. \quad (9)$$

Auch dessen kann man sich wieder einfach durch die geometrische Darstellung überzeugen: wenn $\delta = 2\pi/n$ dann bilden die einzelnen Vektoren einen geschlossenen Kreis und $A_R = 0$, siehe die rechte Seite von Abb. 5. Im Bild der Punktquellen lassen sich, wenn diese Bedingung erfüllt ist, immer Paare von Punktquellen finden deren Phasenunterschied $\lambda/2$ beträgt und somit interferieren sie destruktiv. Generell erhalten wir Minima, wenn die Vektoren mehrere ganzzahlige Kreisläufe bilden. Mit Gleichung (1) erhalten wir so eine Bedingung für θ bei der Minima auftreten:

$$n d \sin \theta = L \sin \theta = m \lambda, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

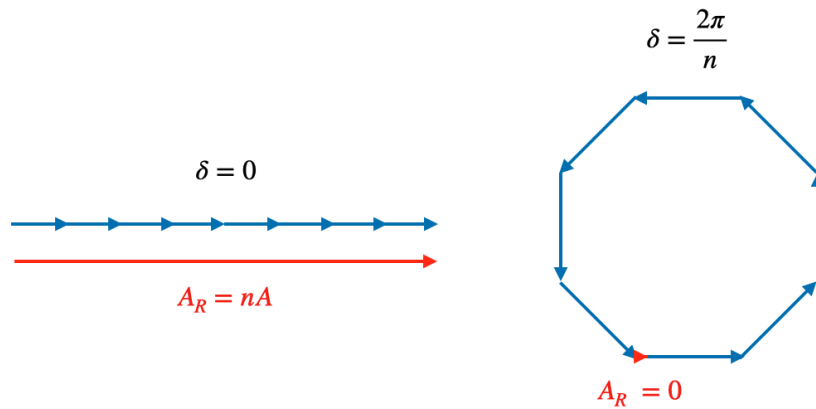


Abbildung 5. Geometrische Darstellung der Vektoren. *Links:* das Hauptmaximum. *Rechts:* Das erste Minimum.

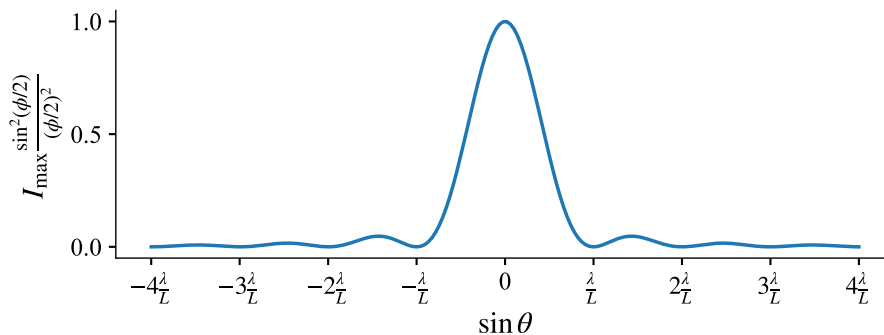


Abbildung 6. Das Fraunhofer'sche Beugungsmuster

Die Nebenmaxima treten jeweils zwischen den Minima auf. Für das erste Nebenmaximum ist dies der Fall wenn $n\delta/2 = 3\pi/2$ ist, denn dann ist $\sin^2(n\delta/2) = 1$. Wir werden uns mit den Nebenmaxima noch weiter in den Übungen beschäftigen.

AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

Beugung hat wichtige Auswirkung auf das Auflösungsvermögen von Mikroskopen, Teleskopen, oder dem menschlichen Auge. Gleichung (10) gibt uns ein Kriterium, wie groß der Winkelabstand α_{\min} zweier (inkohärenter) Punktquellen sein muss, damit wir sie noch von einander unterscheiden können. Dies ist nämlich gerade dann noch der Fall, wenn das Beugungsmaximum der ersten Quelle mit dem ersten Beugungsminimum der zweiten Quelle übereinstimmt. Für kleine θ erhalten wir das sogenannte *Rayleigh Kriterium*,

$$\alpha_{\min} \gtrsim \frac{\lambda}{L}. \quad (11)$$

Diese Bedingung gilt auch für Teleskope, wobei hier L die Größe des Teleskops ist. Wir können also die Auflösung von Teleskopen verbessern, wenn wir diese größer bauen oder aber mit zwei weit voneinander entfernten Teleskopen die selben Quellen beobachten. Letzteres macht sich zum Beispiel das Event Horizon Telescope zu nutze, siehe z.B. Event Horizon Telescope Collaboration et al. (2019).

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Vorlesung haben wir folgendes gelernt:

- Was wir unter Beugung (am Spalt) verstehen.
- Wie wir das Fraunhofer'sche Beugungsmuster aus geometrischen Betrachtungen herleiten können.
- Das Beugung elektromagnetischer Wellen das Auflösungsvermögen von optischen Instrumenten begrenzt.

Weitere Details können in Feynman et al. (1965) Kapitel 29 und 30 sowie in Tipler and Mosca (2015) Kapitel 33 nachgelesen werden.

LITERATUR

Event Horizon Telescope Collaboration et al. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *ApJ*, 875(1):L1.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M., and Hafner, E. M. (1965). The Feynman Lectures on Physics; Vol. I. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752.

Tipler, P. A. and Mosca, G. (2015). *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*.