EXPOSÉ VI

CATÉGORIES FIBRÉES ET DESCENTE

145

0. Introduction

Contrairement à ce qui avait été annoncé dans l'introduction à l'exposé précédent, il s'est avéré impossible de faire de la descente dans la catégorie des préschémas, même dans des cas particuliers, sans avoir développé au préalable avec assez de soin le langage de la descente dans les catégories générales.

La notion de « descente » fournit le cadre général pour tous les procédés de « recollement » d'objets, et par conséquent de « recollement » de catégories. Le cas le plus classique de recollement est relatif à la donnée d'un espace topologique X et d'un recouvrement de X par des ouverts X_i ; si on se donne pour tout i un espace fibré (disons) E_i au-dessus de X_i, et pour tout couple (i, j) un isomorphisme f_{ji} de $E_i|X_{ij}$ sur $E_j|X_{ij}$ (où on pose $X_{ij} = X_i \cap X_j$), satisfaisant une condition de transitivité bien connue (qu'on écrit de façon abrégée $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$), on sait qu'il existe un espace fibré E sur X, défini à isomorphisme près par la condition que l'on ait des isomorphismes $f_i \colon E|X_i \xrightarrow{\sim} E_i$, satisfaisant les relations $f_{ji} = f_j f_i^{-1}$ (avec l'abus d'écriture habituel). Soit X' l'espace somme des X_i, qui est donc un espace fibré au-dessus de X (i.e. muni d'une application continue $X' \to X$). On peut interpréter de façon plus concise la donnée des E_i comme un espace fibré E' sur X', et la donnée des f_{ji} comme un isomorphisme entre les deux images inverses (par les deux projections canoniques) E''_1 et E''_2 de E' sur $X'' = X' \times_X X'$, la condition de recollement pouvant alors s'écrire comme une identité entre isomorphismes d'espaces fibrés E'''_1 et E'''_3 sur le produit fibré triple $X''' = X' \times_X X' \times_X X'$ (où E'''_i désigne l'image inverse de E' sur X''' par la projection canonique d'indice i). La construction de E, à partir de E' et de f, est un cas typique de procédé de « descente ». D'ailleurs, partant d'un espace fibré E 146
sur X, on dit que X est « localement trivial », de fibre F, s'il existe un recouvrement ouvert (X_i) de X tel que les $E|X_i$ soient isomorphes à $F \times X_i$, ou ce qui revient au même, tel que l'image inverse E' de E sur $X' = \coprod_i X_i$ soit isomorphe à $X' \times F$.

Ainsi, la notion de « recollement » d'objets comme celle de « localisation » d'une propriété, sont liées à l'étude de certains types de « changements de base » $X' \to X$. En Géométrie Algébrique, bien d'autres types de changement de base, et notamment les morphismes $X' \to X$ fidèlement plats, doivent être considérés comme correspondant à un procédé de « localisation » relativement aux préschémas, ou autres objets, « au-dessus » de X. Ce type de localisation est utilisé tout autant que la simple localisation topologique (qui en est un cas particulier d'ailleurs). Il en est de même (dans une moindre mesure) en Géométrie Analytique.

La plupart des démonstrations, se réduisant à des vérifications, sont omises ou simplement esquissées ; le cas échéant nous précisons les diagrammes moins évidents qui s'introduisent dans une démonstration.

1. Univers, catégories, équivalence de catégories

Pour éviter certaines difficultés logiques, nous admettrons ici la notion d'*Univers*, qui est un ensemble « assez gros » pour qu'on n'en sorte pas par les opérations habituelles de la théorie des ensembles ; un « *axiome des Univers* » garantit que tout objet se trouve dans un Univers. Pour des détails, voir un livre en préparation par C. Chevalley et le conférencier[(1)]. Ainsi, le sigle **Ens** désigne, non pas la catégorie de tous les ensembles (notion qui n'a pas de sens), mais la catégorie des ensembles qui se trouvent dans un Univers donné (que nous ne préciserons pas ici dans la notation). De même, **Cat** désignera la catégorie des catégories se trouvant dans l'Univers en question, les « morphismes » d'un objet X de **Cat** dans un autre Y, étant par définition les *foncteurs* de X dans Y.

147 Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, nous désignons par $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *l'ensemble des objets* de $\mathscr{C}$, par $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ *l'ensemble des flèches* de $\mathscr{C}$ (ou morphismes de $\mathscr{C}$). Nous écrirons donc $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ en évitant l'abus de notation courant $X \in \mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories, un *foncteur* de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ sera toujours ce qu'on appelle communément un foncteur *covariant* de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$; sa donnée implique celle de la catégorie d'arrivée et la catégorie de départ, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Les foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ forment un ensemble, noté $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$, qui est l'ensemble des objets d'une catégorie notée $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$. Par définition, un *foncteur contravariant* de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est un foncteur de la *catégorie opposée* $\mathscr{C}^\circ$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$.

Nous admettrons la notion de *limite projective* et de *limite inductive* d'un foncteur $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$, et en particulier les cas particuliers les plus courants de cette notion : produits cartésiens et produits fibrés, notions duales de sommes directes et de sommes amalgamées, et les propriétés formelles habituelles de ces opérations.

[(1)] Les auteurs définitifs sont C. Chevalley et P. Gabriel. Le livre doit sortir en l'an 3000. En attendant, cf. aussi SGA 4 I.

Par exemple, dans la catégorie **Cat** introduite plus haut, les limites projectives (relatives à des catégories $\mathscr{I}$ se trouvant dans l'Univers choisi) existent ; l'ensemble d'objets (resp. l'ensemble de flèches) de la catégorie limite projective $\mathscr{C}$ des $\mathscr{C}_i$, s'obtient en prenant la limite projective des ensembles d'objets (resp. des ensembles de flèches) des catégories $\mathscr{C}_i$. Le cas le plus connu est celui du produit d'une famille de catégories. Nous utiliserons constamment par la suite le produit fibré de deux catégories sur une troisième.

Pour tout ce qui concerne les catégories et foncteurs, en attendant le livre en préparation déjà signalé, voir [**1**] (qui est nécessairement fort incomplet, même en ce qui concerne les généralités esquissées dans le présent numéro).

Prenons cette occasion pour expliciter la notion d'équivalence de catégories, qui n'est pas exposée de façon satisfaisante dans [**1**]. Un foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets S, T de $\mathscr{C}$, l'application $u \mapsto F(u)$ de $\mathrm{Hom}(S,T)$ dans $\mathrm{Hom}(F(S),F(T))$ est injective (resp. bijective). On dit que F est une *équivalence* de catégories si F est pleinement fidèle, et si de plus tout 148
objet S' de $\mathscr{C}'$ est isomorphe à un objet de la forme $F(S)$. On montre qu'il revient au même de dire qu'il existe un foncteur G de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ *quasi-inverse de* F, i.e., tel que GF soit isomorphe à $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Lorsqu'il en est ainsi, la donnée d'un foncteur $G\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ et d'un isomorphisme $\varphi\colon GF \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ équivaut à la donnée, pour tout $S' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$, d'un couple (S,u) formé d'un objet S de $\mathscr{C}$ et d'un isomorphisme $u\colon F(S) \to S'$, soit $(G(S),\varphi(S))$. (Avec ces notations, il existe un foncteur unique $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ ayant l'application donnée $S \mapsto G(S)$ comme application-objets, et tel que l'application $S \mapsto \varphi(S)$ soit un homomorphisme de foncteurs $FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$). Enfin, si G est un foncteur quasi-inverse de F, et si on choisit des isomorphismes $\varphi\colon FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ et $\psi\colon GF \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, alors les deux conditions de compatibilités sur φ, ψ énoncées dans [**1**, I.1.2] sont en fait équivalentes l'une à l'autre, et pour tout isomorphisme φ choisi, il existe un isomorphisme ψ unique tel que lesdites conditions soient satisfaites.

2. Catégories sur une autre

Soit $\mathscr{E}$ une catégorie dans **Univ**, c'est donc un objet de **Cat**, et on peut considérer la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ des « objets de **Cat** au-dessus de $\mathscr{E}$ ». Un objet de cette catégorie est donc un foncteur

$$p\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$$

On dit aussi que la catégorie $\mathscr{F}$, munie d'un tel foncteur, est une *catégorie au-dessus de* $\mathscr{E}$, ou une $\mathscr{E}$*-catégorie*. On appellera donc $\mathscr{E}$-foncteur d'une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ dans une catégorie $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{E}$, un foncteur

$$f\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$$

tel que

$$qf = p$$

où p et q sont les foncteurs-projection pour $\mathscr{F}$ resp. $\mathscr{G}$. L'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs f de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ est donc en correspondance biunivoque avec l'ensemble des flèches
149 d'origine $\mathscr{F}$ et d'extrémité $\mathscr{G}$ dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, sans pourtant qu'on ait là une identité (puisque la donnée d'un f comme dessus ne détermine pas $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ en tant que catégories sur $\mathscr{E}$) ; mais bien entendu, comme dans toute autre catégorie $\mathscr{C}_{/S}$, on fera couramment l'abus de langage consistant à identifier les $\mathscr{E}$-foncteurs (au sens explicité plus haut) à des flèches dans une catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$.

On désignera par
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$
l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Bien entendu, un composé de $\mathscr{E}$-foncteurs est un $\mathscr{E}$-foncteur (la composition en question correspondant par définition à la composition des flèches dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$).

Considérons maintenant deux $\mathscr{E}$-foncteurs
$$f, g\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$$
et un homomorphisme de foncteurs :
$$u\colon f \longrightarrow g$$
On dit que u est un *$\mathscr{E}$-homomorphisme* ou un « *homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs* », si pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$, on a
$$q(u(\xi)) = \mathrm{id}_{p(\xi)},$$
en paroles : posant $S = p(\xi) = qf(\xi) = qg(\xi) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, le morphisme
$$u(\xi)\colon f(\xi) \longrightarrow g(\xi)$$
dans $\mathscr{G}$ est un id_S-morphisme. (De façon générale, pour tout morphisme $\alpha\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, et toute catégorie $\mathscr{G}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, un morphisme v dans $\mathscr{G}$ est appelé un *α-morphisme* si $q(v) = \alpha$, q désignant le foncteur projection $\mathscr{G} \to \mathscr{E}$). Si on a un troisième $\mathscr{E}$-foncteur $h\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et un $\mathscr{E}$-homomorphisme $v\colon g \to h$, alors vu
150 est également un $\mathscr{E}$-homomorphisme. Ainsi, *les $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, et les $\mathscr{E}$-homomorphismes de tels, forment une sous-catégorie de la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ de tous les foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, qu'on appellera la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ et qu'on notera*
$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$
C'est aussi la sous-catégorie noyau du couple de foncteurs
$$R, S\colon \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \rightrightarrows \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) ,$$
où R est le foncteur constant défini par l'objet p de $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$, et où S est le foncteur $f \mapsto q \circ f$ défini par $q\colon \mathscr{G} \to \mathscr{E}$.

Pour finir ces généralités, il reste à définir les accouplements naturels entre les catégories $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ par composition de $\mathscr{E}$-foncteurs. En d'autres termes, on veut définir un « foncteur composition » :

$$\text{(i)}\qquad \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$

lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont trois catégories sur $\mathscr{E}$, de telle façon que ce foncteur induise, pour les objets, l'application de composition $(f,g) \mapsto gf$ de $\mathscr{E}$-foncteurs $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $g\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$. Pour ceci, rappelons qu'on définit un foncteur canonique :

$$\text{(ii)}\qquad \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$

qui, pour les objets, n'est autre que l'application de composition $(f,g) \mapsto gf$ de foncteurs, et qui transforme une flèche (u,v), où

$$u\colon f \longrightarrow f', \quad v\colon g \longrightarrow g'$$

sont des flèches dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ resp. dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{H})$, en la flèche

$$v * u\colon gf \longrightarrow g'f'$$

définie par la relation : 151

$$v * u(\xi) = v(f'(\xi)) \cdot g(u(\xi)) = g'(u(\xi)) \cdot v(f(\xi))$$

Il est bien connu que l'on obtient bien ainsi un homomorphisme de gf dans $g'f'$, et que (pour f,g et u,v variables) on obtient ainsi un foncteur (ii), i.e. qu'on a

$$\text{(I)}\qquad \mathrm{id}_g * \mathrm{id}_f = \mathrm{id}_{gf},$$

$$\text{(II)}\qquad (v' * u') \circ (v * u) = (v' \circ v) * (u' \circ u)$$

Rappelons aussi qu'on a une formule d'associativité pour les accouplements canoniques (ii), qui s'exprime d'une part par l'associativité $(hg)f = h(gf)$ de la composition de foncteurs, et d'autre part par la formule

$$\text{(III)}\qquad (w * v) * u = w * (v * u)$$

pour les produits de composition d'homomorphismes de foncteurs (où $u\colon f \to f'$ et $v\colon g \to g'$ sont comme dessus, et où on suppose donné de plus un homomorphisme $w\colon h \to h'$ de foncteurs $h, h'\colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$). Je dis maintenant que *lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{E}$-catégories, le foncteur composition canonique* (ii) *induit un foncteur* (i). Comme on sait déjà que le composé de deux $\mathscr{E}$-foncteurs est un $\mathscr{E}$-foncteur, cela revient à dire que *lorsque $u\colon f \to f'$ et $v\colon g \to g'$ sont des homomorphismes de $\mathscr{E}$-foncteurs, alors $v * u\colon gf \to g'f'$ est également un homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs.* Cela résulte en effet trivialement des définitions. Comme les accouplements (i) sont induits par les accouplements (ii), ils satisfont à la même propriété d'associativité, exprimée aussi dans les formules $(hg)f = h(gf)$ et $(w * v) * u = w * (v * u)$ pour des $\mathscr{E}$-foncteurs et des $\mathscr{E}$-homomorphismes de $\mathscr{E}$-foncteurs.

Pour compléter le formulaire (I), (II), (III), rappelons aussi les formules :

$$\text{(IV)}\qquad v * \mathrm{id}_{\mathscr{F}} = v \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{\mathscr{G}} * u = u,$$

où pour simplifier on écrit $v * f$ ou $u * g$ au lieu de $v * u$, lorsque u resp. v est 152 l'automorphisme identique de f resp. g.

De la définition des accouplements (i) résulte que $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ *est un foncteur en* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, *de la catégorie produit* $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ *dans la catégorie* $\mathbf{Cat}$. Si en effet $g\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}_1$ est un $\mathscr{E}$-foncteur, i.e. un objet de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{G}_1)$, alors faisant dans (i) $\mathscr{H} = \mathscr{G}_1$, il lui correspond un foncteur

$$g_*\colon \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}_1)$$

On définit de la façon analogue, pour un $\mathscr{E}$-foncteur $f\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}$, un foncteur

$$f^* : \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}_1,\mathscr{G})$$

Pour abréger, on désigne ces foncteurs aussi par les sigles $f \mapsto g \circ f$ resp. $g \mapsto g \circ f$ (qui désignent seulement, en fait, les applications correspondantes sur les ensembles d'objets). Il résulte de la propriété d'associativité indiquée plus haut que de cette façon, on obtient bien comme annoncé un foncteur $\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}} \to \mathbf{Cat}$.

3. Changement de base dans les catégories sur $\mathscr{E}$

Comme dans $\mathbf{Cat}$ les limites projectives (relativement à des catégories $\mathscr{I}$ éléments de $\mathbf{Univ}$) existent, il en est de même dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, en particulier les produits cartésiens y existent, qui s'interprètent comme des produits fibrés dans $\mathbf{Cat}$. Conformément aux notations générales, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des catégories au-dessus de $\mathscr{E}$, on désigne par

$$\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}$$

153 leur produit dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, i.e. leur produit fibré au-dessus de $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{Cat}$, en tant que catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$. Ainsi, $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}$ est muni de deux $\mathscr{E}$-foncteurs pr_1 et pr_2, qui définissent, pour toute catégorie $\mathscr{H}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{G}).$$

Cette bijection provient d'ailleurs d'un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \times \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{G})$$

en prenant les ensembles d'objets des deux membres, où le foncteur écrit est celui qui a pour composantes les foncteurs $h \mapsto \mathrm{pr}_1 \circ h$ et $h \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ h$ du premier membre dans les deux facteurs du second. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on obtient bien ainsi un isomorphisme (le fait analogue étant vrai, plus généralement, chaque fois qu'on a une limite projective de catégories — et non seulement dans le cas d'un produit fibré).

Rappelons d'ailleurs qu'on a (comme il a été dit dans le N° 1) :

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{F}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathscr{E})} \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$$
$$\mathrm{Fl}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) = \mathrm{Fl}(\mathscr{F}) \times_{\mathrm{Fl}(\mathscr{E})} \mathrm{Fl}(\mathscr{G}),$$

la composition des flèches se faisant d'ailleurs composante par composante.

Dans la suite, nous considérons un foncteur

$$\lambda\colon \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$$

et pour toute catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, on considère $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ comme une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}'$ grâce à pr_2 ; en d'autres termes, nous interprétons l'opération « produit fibré » comme une opération *« changement de base »,* le foncteur $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ prenant le nom de *« foncteur de changement de base ».* Conformément aux faits généraux bien connus, on obtient ainsi un foncteur, dit *foncteur changement de base* pour λ : 154

$$\lambda^*\colon \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}} \longrightarrow \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}'},$$

(adjoint du foncteur « restriction de la base » qui, à toute catégorie $\mathscr{F}'$ au-dessus de $\mathscr{E}'$, de foncteur projection p', associe $\mathscr{F}'$, considéré comme catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ par le foncteur $p = \lambda p'$). Comme il est bien connu dans le cas général d'un foncteur changement de base dans une catégorie, le foncteur changement de base « commute aux limites projectives », et en particulier « transforme » produits fibrés sur $\mathscr{E}$ en produits fibrés sur $\mathscr{E}'$.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux catégories au-dessus de $\mathscr{E}$, on va définir un *isomorphisme canonique* :

$$\text{(i)}\qquad \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G})$$

$$\text{où } \mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}',\ \mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'.$$

Pour ceci, considérons le foncteur

$$\mathrm{pr}_1\colon \mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{G},$$

et définissons (i) par

$$F \longmapsto \mathrm{pr}_1 \circ F,$$

qui a priori désigne un foncteur

$$\text{(ii)}\qquad \mathbf{Hom}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathscr{F}', \mathscr{G})$$

Il faut donc vérifier seulement que ce dernier induit un foncteur pour les sous-catégories (i), et que ce dernier est un isomorphisme. Que (ii) induise une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G})$$

est la propriété caractéristique du foncteur changement de base. Il reste donc à prouver 155
que si F, G sont des $\mathscr{E}'$-foncteurs $\mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$, alors *l'application*

$$u \longmapsto \mathrm{pr}_1 \circ u$$

induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathrm{pr}_1 \circ F, \mathrm{pr}_1 \circ G).$$

La vérification de ce fait est immédiate, et laissée au lecteur.

Il résulte de cet isomorphisme (i), et de la fin du numéro précédent, que

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')$$

peut être considéré comme un foncteur en $\mathscr{E}',\mathscr{F},\mathscr{G}$, *de la catégorie* $\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}}\times\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}}\times\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ *dans la catégorie* $\mathbf{Cat}$, isomorphe au foncteur défini par l'expression $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\mathscr{G})$. En particulier, pour $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ fixés, on obtient un foncteur en $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}'\to\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}')=\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')$, et en particulier le $\mathscr{E}$-foncteur de projection $\lambda\colon\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$ définit un morphisme i.e. un foncteur

$$\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{G}}\colon\ \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})\longrightarrow\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}')$$

que nous allons expliciter. Pour les ensembles d'objets des deux membres, c'est l'application

$$f\longmapsto f'=f\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$$

qui exprime la dépendance fonctorielle de $\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$ de l'objet $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$. D'autre part, considérons deux $\mathscr{E}$-foncteurs

$$f,g\colon\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{G}$$

et un homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs

$$u\colon f\longrightarrow g,$$

156 on va expliciter l'homomorphisme de $\mathscr{E}'$-foncteurs correspondant :

$$u'\colon f'\longrightarrow g'.$$

Pour tout

$$\xi'=(\xi,S')\in\mathrm{Ob}(\mathscr{F}')$$

avec

$$\xi\in\mathrm{Ob}(\mathscr{F}),\quad S'\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E}'),\quad p(\xi)=\lambda(S')=S$$

le morphisme

$$u'(\xi')\colon f'(\xi')=(f(\xi),S')\longrightarrow g'(\xi')=(g(\xi),S')\quad\text{dans }\mathscr{G}'$$

est défini par la formule

$$u'(\xi')=(u(\xi),\mathrm{id}_{S'})$$

(ce qui est bien un S'-morphisme dans $\mathscr{G}'$, car $q(u(\xi))=\lambda(\mathrm{id}_{S'})=\mathrm{id}_S$).

Considérons maintenant un $\mathscr{E}$-foncteur quelconque

$$\lambda'\colon\mathscr{E}''\longrightarrow\mathscr{E}'$$

et le foncteur correspondant

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')\longrightarrow\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}''),$$

je dis que ce foncteur n'est autre que le foncteur qu'on obtient par le procédé précédent, en partant de $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$ sur $\mathscr{E}'$ et en considérant $\mathscr{E}''$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}'$, compte tenu des isomorphismes de « *transitivité de changement de base* » :

$$\mathscr{F}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}''\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}''=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}''\quad\text{et}\quad\mathscr{G}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}''\xrightarrow{\sim}\mathscr{G}''=\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'',$$

qui impliquent un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}'',\mathscr{G}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}'')\xrightarrow{\sim}\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'')$$

La vérification de cette compatibilité est immédiate, et laissée au lecteur. 157

Les foncteurs qu'on vient de définir sont compatibles avec les accouplements définis au numéro précédent, de façon précise, si $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont des catégories au-dessus de $\mathscr{E}$ et si on pose

$$\mathscr{F}'=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\quad \mathscr{G}'=\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\quad \mathscr{H}'=\mathscr{H}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',$$

on a commutativité dans le diagramme de foncteurs suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})\times\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{G}}\times\lambda^*_{\mathscr{G},\mathscr{H}}"'] & \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{H}) \arrow[d, "\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{H}}"] \\
\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}')\times\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{G}',\mathscr{H}') \arrow[r] & \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{H}')
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs-composition définis au numéro précédent. Cette commutativité s'exprime par les formules

$$(gf)'=g'f'$$

pour $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{G},\mathscr{H})$, (formule qui exprime simplement la fonctorialité du changement de base), et la formule

$$(v*u)'=v'*u'$$

lorsque $u\colon f\to f_1$ est une flèche de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ et $v\colon g\to g_1$ une flèche de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H})$. La vérification de cette formule résulte facilement des définitions.

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (et certaines sous-catégories remarquables de celle-ci) lorsque $\mathscr{F}=\mathscr{E}$, et introduisons pour cette raisons une notation spéciale :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{G}/\mathscr{E})=\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E},\mathscr{G}),\quad \Gamma(\mathscr{G}/\mathscr{E})=\mathrm{Ob}(\mathbf{\Gamma}(\mathscr{G}/\mathscr{E}))=\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E},\mathscr{G}).$$

Remarques. — Lorsque $\mathscr{E}$ est une catégorie ponctuelle, i.e. $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Fl}(\mathscr{E})$ réduits à un seul élément, ce qui signifie aussi que $\mathscr{E}$ est un objet final de la catégorie **Cat**, alors la donnée d'une catégorie sur $\mathscr{E}$ est équivalente à la donnée d'une catégorie tout court, (car il y aura un foncteur unique de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$). De façon plus précise, $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ est alors isomorphe à **Cat**. De plus, les catégories $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ ne sont alors autres que les $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Rappelons alors que la formule fondamentale 158

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{H},\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(\mathscr{F}\times\mathscr{H},\mathscr{G})$$

(isomorphisme fonctoriel en les trois arguments qui y figurent), permet d'interpréter $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ axiomatiquement, en termes internes à la catégorie **Cat**, de sorte que le formulaire connu des catégories **Hom** apparaît comme un cas particulier d'un formulaire valable dans les catégories telles que **Cat**, où des « objets **Hom** » (définis par la formule précédente) existent. Il y a une interprétation analogue de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ lorsqu'on suppose à nouveau $\mathscr{E}$ quelconque, par la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{H},\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}\times\mathscr{H},\mathscr{G})$$

(isomorphisme fonctoriel en les trois arguments). De cette façon, les propriétés formelles exposées dans les N$^{\text{o}}$ 2, 3 sont des cas particuliers de résultats plus généraux, valables dans les catégories où les objets $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sont deux objets de la catégorie au-dessus d'un troisième $\mathscr{E}$) existent.

4. Catégories-fibres ; équivalence de $\mathscr{E}$-catégories

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, et soit $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$. On appelle *catégorie-fibre de* $\mathscr{F}$
159 en S la sous-catégorie $\mathscr{F}_S$ de $\mathscr{F}$ image réciproque de la sous-catégorie ponctuelle de $\mathscr{E}$ définie par S. Donc les objets de $\mathscr{F}_S$ sont les objets ξ de $\mathscr{F}$ tels que $p(\xi) = S$, ses morphismes sont les morphismes u de $\mathscr{F}$ tels que $p(u) = \mathrm{id}_S$, i.e. les S-morphismes dans $\mathscr{F}$. Bien entendu, $\mathscr{F}_S$ est canoniquement isomorphe au produit fibré $\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\{S\}$, où $\{S\}$ désigne la sous-catégorie ponctuelle de $\mathscr{E}$ définie par S, munie de son foncteur d'inclusion dans $\mathscr{E}$. Il en résulte (compte tenu de la transitivité du changement de base) que si on fait le changement de base $\lambda\colon \mathscr{E}'\to\mathscr{E}$, alors pour tout $S'\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E}')$, *la projection* $\mathrm{pr}_1\colon \mathscr{F}' = \mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\to\mathscr{F}$ *induit un isomorphisme*

$$\mathscr{F}'_{S'} \longrightarrow \mathscr{F}_S \qquad (\text{où } S = \lambda(S')).$$

Proposition 4.1. — *Soit $f\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un $\mathscr{E}$-foncteur. Si f est pleinement fidèle, alors pour tout changement de base $\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$, le foncteur correspondant $f'\colon \mathscr{F}' = \mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}' \to \mathscr{G}' = \mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$ est pleinement fidèle.*

La vérification est immédiate ; plus généralement, on peut montrer que toute limite projective de foncteurs pleinement fidèles (ici, f et les foncteurs identiques dans $\mathscr{E},\mathscr{E}'$) est un foncteur pleinement fidèle.

On notera que l'assertion analogue à 4.1, où « pleinement fidèle » est remplacée par « équivalence de catégories », est fausse, déjà pour $\mathscr{G} = \mathscr{E}$. Cependant :

Proposition 4.2. — *Soit $f\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un $\mathscr{E}$-foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un $\mathscr{E}$-foncteur $g\colon \mathscr{G}\to\mathscr{F}$ et des $\mathscr{E}$-isomorphismes*

$$gf \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}}, \quad fg \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{G}}.$$

(ii) *Pout toute catégorie $\mathscr{E}'$ sur $\mathscr{E}$, le foncteur*

$$f' = f\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\colon \mathscr{F}' = \mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{G}' = \mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$$

est une équivalence de catégories.

160 (iii) *f est une équivalence de catégories, et pout tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, le foncteur $f_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{G}_S$ induit par f est une équivalence de catégories.*

(iii bis) *f est pleinement fidèle, et pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et tout $\eta \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G}_S)$, il existe un $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$ et un S-isomorphisme $u\colon f(\xi) \to \eta$.*

Démonstration. — Évidemment (i) implique que f est une équivalence de catégories (notion qui se définit par la même condition, mais où les isomorphismes de foncteurs ne sont pas astreints à être des $\mathscr{E}$-morphismes). D'autre part, il résulte des fonctorialités du numéro précédent que la condition (i) est conservée après changement de base $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$. Il s'ensuit que (i)$\Rightarrow$(ii). Évidemment (ii)$\Rightarrow$(iii), car il suffit de faire $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}' = \{S\}$. Il est encore plus trivial que (iii)$\Rightarrow$(iii bis), reste à prouver que (iii bis)$\Rightarrow$(i). Pour ceci, choisissons pour tout $\eta \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ un $g(\eta) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ et un isomorphisme $u(\eta)\colon f(g(\eta)) \to \eta$ qui soit tel que $q(u(\eta)) = \mathrm{id}_S$, où $S = q(\eta)$. C'est possible grâce à la deuxième condition (iii bis). Comme il est connu et immédiat, le fait que f est pleinement fidèle implique que g peut de façon unique être considéré comme un foncteur de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$, de façon que les $u(\eta)$ définissent un homomorphisme (donc un isomorphisme) fonctoriel $u\colon fg \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{G}}$. De plus, par construction g est un $\mathscr{E}$-foncteur et u un $\mathscr{E}$-homomorphisme. Aux données précédentes correspond alors un isomorphisme fonctoriel $v\colon gf \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$, défini par la condition que $f * v = u * f$, et on constate tout de suite que c'est également un $\mathscr{E}$-morphisme, cqfd.

Définition 4.3. — Si les conditions précédentes sont vérifiées, on dit que f est une équivalence de catégories sur $\mathscr{E}$, ou une $\mathscr{E}$-équivalence.

Corollaire 4.4. — *Supposons que le foncteur projection $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ soit un foncteur transportable, i.e. que pour tout isomorphisme $\alpha\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et tout objet ξ dans $\mathscr{F}_T$, il existe un isomorphisme u dans $\mathscr{F}$ de source ξ tel que $p(u) = \alpha$. Alors tout $\mathscr{E}$-foncteur $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ qui est une équivalence de catégories, est une $\mathscr{E}$-équivalence.*

Résulte du critère (iii bis). 161

Corollaire 4.5. — *Soit $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Alors pour toute catégorie $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{E}$, les foncteurs correspondants :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$
$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{G})$$

(*cf.* N^{o} 2) *sont des équivalences de catégories.*

Cela résulte du critère (i) par le raisonnement habituel.

5. Morphismes cartésiens, images inverses, foncteurs cartésiens

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, de foncteur-projection p.

Définition 5.1. — Considérons un morphisme

$$\alpha\colon \eta \longrightarrow \xi$$

dans $\mathscr{F}$, et soient

$$S = p(\xi), \quad T = p(\eta), \quad f = p(\alpha).$$

On dit que α est un *morphisme cartésien* si pour tout $\eta' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_T)$ et tout f-morphisme $u\colon \eta' \to \xi$, il existe un T-morphisme unique $u\colon \eta' \to \eta$ tel que $u = \alpha \circ u$.

Cela signifie donc que pour tout $\eta' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_T)$, l'application $v \mapsto \alpha \circ v$:

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi)$$

est bijective. Cela signifie aussi que le couple (η, α) *représente le foncteur en* η' $\mathscr{F}_T^\circ \to \mathbf{Ens}$ du deuxième membre. Si pour un morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ donné,
162 et un $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$ donné, il existe un tel couple (η, α), i.e. un morphisme cartésien α dans $\mathscr{F}$ de but ξ, tel que $p(\alpha) = f$, alors η est déterminé dans $\mathscr{F}_T$ à isomorphisme unique près. On dit alors que *l'image inverse de* ξ *par* f *existe*, et un objet η de $\mathscr{F}_T$ muni d'un f-morphisme cartésien $\alpha\colon \eta \to \xi$ est appelé *une image inverse de* ξ *par* f. Souvent on suppose choisie une telle image inverse chaque fois qu'elle existe ($\mathscr{F}$ étant fixé) ; on notera alors l'image inverse par des symboles tels que $f^*_{\mathscr{F}}(\xi)$, ou simplement $f^*(\xi)$ ou $\xi \times_S T$ lorsque ces notations n'entraînent pas de confusions ; le morphisme canonique $\alpha\colon \eta \to \xi$ sera alors noté, dans ce qui suit, par $\alpha_f(\xi)$. Si pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$, l'image inverse de ξ par f existe, on dira aussi que *le foncteur image inverse par* f *dans* $\mathscr{F}$ *existe*, et $f^*(\xi)$ devient alors un *foncteur covariant en* ξ, de $\mathscr{F}_S$ dans $\mathscr{F}_T$. Ceci provient du fait que le deuxième membre dans (i) dépend de façon covariante de ξ, i.e. de façon précise désigne un foncteur de $\mathscr{F}_T^\circ \times \mathscr{F}_S$ dans $\mathbf{Ens}$. Cette dépendance fonctorielle pour $f^*(\xi)$ s'explicite ainsi : considérons des f-morphismes cartésiens

$$\alpha\colon \eta \longrightarrow \xi, \quad \alpha'\colon \eta' \longrightarrow \xi'$$

et un S-morphisme $\lambda\colon \xi \to \xi'$, alors il existe un T-morphisme et un seul $\mu\colon \eta \to \eta'$ tel que l'on ait

$$\alpha'\mu = \lambda\alpha$$

(comme il résulte du fait que α' est cartésien).

Notons aussi le fait immédiat suivant : considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[d, "\lambda"'] & \eta \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mu"] \\ \xi' & \eta' \arrow[l, "\alpha'"] \end{tikzcd}$$

163 dans $\mathscr{F}$, où α et α' sont des f-morphismes, et λ un S-isomorphisme, μ un T-isomorphisme. *Pour que* α *soit cartésien, il faut et il suffit que* α' *le soit.*

Définition 5.2. — Un $\mathscr{E}$-foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est appelé un *foncteur cartésien* s'il transforme morphismes cartésiens en morphismes cartésiens. On désigne par $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ formée des foncteurs cartésiens.

Par exemple, considérant $\mathscr{E}$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}$ grâce au foncteur identique, tout morphisme de $\mathscr{E}$ est cartésien, donc un foncteur cartésien de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un foncteur section $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ qui transforme tout morphisme de $\mathscr{E}$ en un morphisme cartésien ; un tel foncteur s'appelle une *section cartésienne* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$.

Proposition 5.3. — (i) *Un foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ qui est une $\mathscr{E}$-équivalence, est un foncteur cartésien.* (ii) *Soient F, G deux $\mathscr{E}$-foncteurs* isomorphes $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$. *Si l'un est cartésien, l'autre l'est.* (iii) *Le composé de deux foncteurs cartésiens $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est un foncteur cartésien.*

L'assertion (iii) est triviale sur la définition, (ii) résulte de la remarque précédant 5.2, (i) résulte facilement de la définition et du critère 4.2 (iii) ; plus précisément, un morphisme α dans $\mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F(\alpha)$ l'est.

Corollaire 5.4. — *Soit $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Alors pour toute catégorie $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{E}$, les foncteurs correspondants $G \mapsto G \circ F$ et $G \mapsto F \circ G$ induisent des équivalences de catégories :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$
$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{H},\mathscr{G})$$

Cela se déduit de la façon habituelle de 4.2 critère (i) et de 5.3 (i) (ii) (iii). On peut 164
préciser que *le $\mathscr{E}$-foncteur $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est cartésien si et seulement si $G \circ F$ l'est*, et de même *un $\mathscr{E}$-foncteur $G\colon \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F \circ G$ l'est.*

Il résulte de 5.4 (iii) que si on considère la sous-catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ de $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, et dont les morphismes sont les foncteurs *cartésiens* alors on a comme au N° 2 des accouplements :

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$

induits par ceux du N° 2, permettant de considérer $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ comme un foncteur en $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, de la catégorie $\left(\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}\right)^{\circ} \times \mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ dans $\mathbf{Cat}$. Nous aurons besoin de cette remarque surtout pour le cas où $\mathscr{F} = \mathscr{G}$:

Définition 5.5. — Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. On désigne par

$$\varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{E}$$

la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs cartésiens $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$, i.e. des sections cartésiennes de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$.

D'après ce qu'on vient de dire, $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\mathscr{F}/\mathscr{E}$ est un foncteur en $\mathscr{F}$, de la catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ dans la catégorie $\mathbf{Cat}$.

Nous verrons plus bas les relations entre cette opération $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}$ et la notion de limite projective de catégories, ainsi que de nombreux exemples.

6. Catégories fibrées et catégories préfibrées. Produits et changement de base dans icelles

Définition 6.1. — Une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est appelée une *catégorie fibrée* (et on dit alors que le foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est *fibrant*) si elle satisfait les deux axiomes suivants :

165 – $\mathrm{Fib}_{\mathrm{I}}$ Pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, le foncteur image inverse par f dans $\mathscr{F}$ existe.

– $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}}$ Le composé de deux morphismes cartésiens est cartésien.

Une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ satisfaisant la condition $\mathrm{Fib}_{\mathrm{I}}$ est appelée une *catégorie préfibrée sur* $\mathscr{E}$.

Si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, une sous-catégorie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ est appelée une *sous-catégorie fibrée* (resp. une *sous-catégorie préfibrée*) si c'est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, et si de plus le foncteur d'inclusion est cartésien. Si par exemple $\mathscr{G}$ est une sous-catégorie *pleine* de $\mathscr{F}$, on voit que cela signifie que pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G}_S)$, $f^*_{\mathscr{F}}(\xi)$ est T-isomorphe à un objet de $\mathscr{G}_T$. Un autre cas intéressant est le suivant : $\mathscr{F}$ étant une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, considérons la sous-catégorie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ ayant mêmes objets, et dont les morphismes sont les morphismes *cartésiens* de $\mathscr{F}$; en particulier les morphismes de $\mathscr{G}_S$ sont les isomorphismes de $\mathscr{F}_S$. On voit de suite que c'est bien une sous-catégorie fibrée de $\mathscr{F}$, car dans la bijection

$$\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi)$$

relative à un f-morphisme cartésien α dans $\mathscr{F}$, aux T-isomorphismes du premier membre correspondent les morphismes cartésiens du second. Par définition, les sections cartésiennes $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$ correspondent alors biunivoquement aux $\mathscr{E}$-foncteurs quelconques $\mathscr{E} \to \mathscr{G}$ (mais on notera que le foncteur naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathscr{F}/\mathscr{E})$$

est fidèle, mais en général n'est pas pleinement fidèle, i.e. n'est pas un isomorphisme).

Remarques. — Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) Tous les morphismes de $\mathscr{F}$ sont cartésiens (ii) $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, et les $\mathscr{F}_S$ sont des groupoïdes (i.e. tout morphisme dans $\mathscr{F}_S$ est un isomor-
166 phisme). On dit alors que $\mathscr{F}$ est une catégorie *fibrée en groupoïdes* sur $\mathscr{E}$. Ce sont elles qu'on rencontre surtout en « théorie des modules ». Si $\mathscr{E}$ est un groupoïde, on montre que les conditions (i) et (ii) équivalent aussi à la suivante : (iii) $\mathscr{F}$ est un groupoïde,

et le foncteur projection $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est transportable (cf. 4.4). Par exemple, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des groupoïdes tels que $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ soient réduits à un point, de sorte que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont définis, à isomorphisme près, par des groupes E et F, et le foncteur $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est défini par un homomorphisme de groupes $p\colon F \to E$, alors $\mathscr{F}$ est fibré sur $\mathscr{E}$ si et seulement si p est surjectif, i.e. si p définit une *extension* du groupe E par le groupe $G = \operatorname{Ker} p$.

Proposition 6.2. — *Soit $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Pour que $\mathscr{F}$ soit une catégorie fibrée* (*resp. préfibrée*) *sur $\mathscr{E}$, il faut et il suffit que $\mathscr{G}$ le soit.*

Résulte facilement des définitions et de la remarque signalée plus haut qu'un morphisme α dans $\mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F(\alpha)$ l'est.

Proposition 6.3. — *Soient $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ deux catégories sur $\mathscr{E}$, et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ un morphisme dans $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$. Pour que α soit cartésien, il faut et il suffit que ses composantes le soient.*

Soit en effet ξ_i le but et η_i la source de α_i, et soit $f\colon T \to S$ le morphisme de $\mathscr{E}$ tel que α_1 et α_2 soient des f-morphismes. Pour tout $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2)$ dans $\mathscr{F}_T$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_T(\eta'_1, \eta_1) \times \mathrm{Hom}_T(\eta'_2, \eta_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_f(\eta'_1, \xi_1) \times \mathrm{Hom}_f(\eta'_2, \xi_2)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des bijections. Donc si l'une des flèches horizontales est une bijection, il en est de même de l'autre. Cela montre déjà que si α_1, α_2 sont cartésiens (donc la deuxième flèche horizontale bijective) alors α l'est. La réciproque se voit en faisant dans le diagramme ci-dessus $\eta'_i = \eta_i$ d'où $\mathrm{Hom}_T(\eta'_i, \eta_i) \neq \emptyset$, d'abord pour $i = 2$ ce qui prouve que α_1 est cartésien, puis pour $i = 1$ ce qui prouve que α_2 est cartésien.

Corollaire 6.4. — *Soit $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$, et soit $F = (F_1, F_2)$ un $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$.* 167
Pour que F soit cartésien, il faut et il suffit que F_1 et F_2 le soient. On obtient ainsi un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1) \times \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_2)$$

et en particulier (*faisant $\mathscr{G} = \mathscr{E}$*) *un isomorphisme de catégories*

$$\varprojlim(\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2/\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim(\mathscr{F}_1/\mathscr{E}) \times \varprojlim(\mathscr{F}_2/\mathscr{E})$$

Corollaire 6.5. — *Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux catégories fibrées* (*resp. préfibrées*) *au-dessus de $\mathscr{E}$, alors leur produit fibré $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$ est une catégorie fibrée* (*resp. préfibrée*) *sur $\mathscr{E}$.*

Ces résultats s'étendent d'ailleurs au cas du produit fibré d'une famille quelconque de catégories sur $\mathscr{E}$.

Proposition 6.6. — *Soient $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, de foncteur-projection p, et soit $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un foncteur, considérons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}'$ par le foncteur-projection $p' = p \times_{\mathscr{E}} \mathrm{id}_{\mathscr{E}'}$. Soit α' un morphisme de $\mathscr{F}'$, pour que α' soit un morphisme cartésien, il faut et il suffit que son image α dans $\mathscr{F}$ le soit.*

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur.

Corollaire 6.7. — *Pour tout foncteur cartésien $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de catégories sur $\mathscr{E}$, le foncteur $F' = F \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ de $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ dans $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ est cartésien.*

Par suite, le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'}(\mathscr{F}',\mathscr{G}')$ considéré dans le N° 3 induit un foncteur

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F}',\mathscr{G}');$$

en d'autres termes, pour $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ fixés, *on peut considérer*

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}')$$

168 *comme un foncteur en $\mathscr{E}'$, de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ}$ dans* $\mathbf{Cat}$. Si on laisse varier également $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, on trouve un foncteur de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \big(\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}^{\mathrm{cart}}\big)^{\circ} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}^{\mathrm{cart}}$ dans $\mathbf{Cat}$. Lorsqu'on tient compte de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'}(\mathscr{F}',\mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G})$$

envisagé au N° 3, alors les $\mathscr{E}'$-foncteurs cartésiens de $\mathscr{F}'$ dans $\mathscr{G}'$ correspondent aux $\mathscr{E}$-foncteurs $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}' \to \mathscr{G}$ qui transforment tout morphisme dont la première projection est un morphisme cartésien de $\mathscr{F}$, en un morphisme cartésien de $\mathscr{G}$. Faisant $\mathscr{F} = \mathscr{E}$, on trouve (après changement de notation) :

Corollaire 6.8. — *$\varprojlim(\mathscr{F}'/\mathscr{E}')$ est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}',\mathscr{F})$ formée des $\mathscr{E}$-foncteurs $\mathscr{E}' \to \mathscr{F}$ qui transforment morphismes quelconques en morphismes cartésiens. En particulier, si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée et si $\widetilde{\mathscr{F}}$ est la sous-catégorie de $\mathscr{F}$ dont les morphismes sont les morphismes cartésiens de $\mathscr{F}$, alors on a une bijection*

$$\mathrm{Ob}\,\varprojlim(\mathscr{F}'/\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}',\widetilde{\mathscr{F}}).$$

Cela précise la façon dont l'expression $\varprojlim(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'/\mathscr{E}')$ doit être considérée comme un foncteur en $\mathscr{E}'$ et en $\mathscr{F}$, de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}^{\mathrm{cart}}$ dans la catégorie $\mathbf{Cat}$. On verra ultérieurement une dépendance fonctorielle plus complète par rapport à $\mathscr{E}'$, lorsque $\mathscr{F}$ est astreint à être une catégorie fibrée.

Corollaire 6.9. — *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}'$.*

Proposition 6.10. — *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ des catégories préfibrées sur $\mathscr{E}$, F un $\mathscr{E}$-foncteur cartésien de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Pour que F soit fidèle,* (*resp. pleinement fidèle, resp. une* 169
$\mathscr{E}$-équivalence) *il faut et il suffit que pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, le foncteur induit $F_S \colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{G}_S$ soit fidèle* (*resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence*).

Démonstration immédiate à partir des définitions.

Pour finir ce numéro, nous donnons quelques propriétés des catégories fibrées, utilisant l'axiome $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}}$.

Proposition 6.11. — *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie préfibrée sur $\mathscr{E}$. Pour que $\mathscr{F}$ soit fibrée, il faut et il suffit qu'elle satisfasse la condition suivante :*

$\mathrm{Fib}'_{\mathrm{II}}$ *: Soit $\alpha\colon \eta \to \xi$ un morphisme cartésien dans $\mathscr{F}$ au-dessus du morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$. Pour tout morphisme $g\colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, et tout $\zeta \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_U)$, l'application $u \mapsto \alpha \circ u$:*

$$\mathrm{Hom}_g(\zeta, \eta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{fg}(\zeta, \xi)$$

est bijective.

En d'autres termes, dans une catégorie *fibrée* sur $\mathscr{E}$, les diagrammes cartésiens sont caractérisés par une propriété, plus forte a priori que celle de la définition (qu'on obtient en faisant $g = \mathrm{id}_T$ dans l'énoncé qui précède).

Corollaire 6.12. — *Soient $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, α un morphisme dans $\mathscr{F}$. Pour que α soit un isomorphisme, il faut que $p(\alpha) = f$ soit un isomorphisme et que α soit cartésien ; la réciproque est vraie si $\mathscr{F}$ est fibrée sur $\mathscr{E}$.*

En effet, si α est un isomorphisme il en est évidemment de même de $f = p(\alpha)$; pour tout $\eta' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_T)$, l'application $u \mapsto \alpha \circ u$

$$\mathrm{Hom}(\eta', \eta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\eta', \xi)$$

est bijective ; comme f est un isomorphisme, on voit de suite qu'un élément du premier membre est un T-morphisme si et seulement si son image dans le second est un f-morphisme, donc on obtient ainsi une bijection

$$\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi)$$

ce qui prouve la première assertion. Réciproquement, supposons que f soit un iso- 170
morphisme et que α satisfasse la condition énoncée dans $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}'}$ (ce qui signifie donc, lorsque $\mathscr{F}$ est fibrée sur $\mathscr{E}$, que α est cartésien), alors on voit tout de suite que pour tout $\zeta \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$, l'application $u \mapsto \alpha \circ u$ de $\mathrm{Hom}(\zeta, \eta)$ dans $\mathrm{Hom}(\zeta, \xi)$ est bijective, donc α est un isomorphisme.

Corollaire 6.13. — *Soient $\alpha\colon \eta \to \xi$ et $\beta\colon \zeta \to \eta$ deux morphismes composables dans la catégorie $\mathscr{F}$ fibrée sur $\mathscr{E}$. Si α est cartésien alors β l'est si et seulement si $\alpha\beta$ l'est.*

On utilise la définition des morphismes cartésiens sous la forme renforcée de 6.11.

7. Catégories clivées sur $\mathscr{E}$

Définition 7.1. — Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. On appelle *clivage* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ une fonction qui attache à tout $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{E})$ un foncteur image inverse pour f dans $\mathscr{F}$, soit f^*. Le clivage est dit *normalisé* si $f = \mathrm{id}_S$ implique $f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}$. On appelle *catégorie clivée* (resp. *catégorie clivée normalisée*) une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ munie d'un clivage (resp. d'un clivage normalisé).

Il est évident que $\mathscr{F}$ admet un clivage si et seulement si $\mathscr{F}$ est préfibrée sur $\mathscr{E}$, et alors $\mathscr{F}$ admet un clivage normalisé. L'ensemble des clivages sur $\mathscr{F}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des parties K de $\mathrm{Fl}(\mathscr{F})$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les $\alpha \in K$ sont des morphismes cartésiens.

b) Pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$, il existe un f-morphisme unique dans K, de but ξ.

Pour que le clivage défini par K soit normalisé, il faut et il suffit que K satisfasse de plus la condition

c) Les morphismes identiques dans $\mathscr{F}$ appartiennent à K.

171 Les morphismes éléments de K pourront être appelés les *« morphismes de transport »* pour le clivage envisagé.

La notion d'isomorphisme de catégories clivées sur $\mathscr{E}$ est claire. Plus généralement, on peut définir les morphismes de $\mathscr{E}$-catégories clivées comme les foncteurs de $\mathscr{E}$-catégories $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ qui appliquent morphismes de transport en morphismes de transport. (Ce sont en particulier des foncteurs cartésiens). De cette façon les catégories clivées sur $\mathscr{E}$ sont les objets d'une catégorie, la *catégorie des catégories clivées sur $\mathscr{E}$*. Le lecteur explicitera l'existence de produits, liée au fait que si une catégorie sur $\mathscr{E}$ est produit de catégories $\mathscr{F}_i$ sur $\mathscr{E}$ munies chacune d'un clivage, alors $\mathscr{F}$ est muni d'un clivage naturel correspondant. On laisse également au lecteur d'expliciter la notion de changement de base dans les catégories clivées.

Nous désignerons par $\alpha_f(\xi)$ le morphisme canonique

$$\alpha_f(\xi)\colon f^*(\xi) \longrightarrow \xi.$$

Il est, on l'a dit, fonctoriel en ξ, i.e. on a un homomorphisme fonctoriel

$$\alpha_f\colon i_T f^* \longrightarrow i_S,$$

où pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, i_S désigne le foncteur d'inclusion

$$i_S\colon \mathscr{F}_S \longrightarrow \mathscr{F}$$

Considérons maintenant des morphismes

$$f\colon T \longrightarrow S \quad \text{et} \quad g\colon U \longrightarrow T$$

dans $\mathscr{E}$, et soit $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$, il existe alors un unique U-morphisme

$$c_{f,g}(\xi)\colon g^*f^*(\xi) \longrightarrow (fg)^*(\xi)$$

rendant commutatif le diagramme 172

$$\begin{tikzcd}
f^*(\xi) \arrow[d, "\alpha_f(\xi)"'] & g^*(f^*(\xi)) \arrow[l, "\alpha_g(f^*(\xi))"'] \arrow[d, "c_{f,g}(\xi)"] \\
\xi & (fg)^*(\xi) \arrow[l, "\alpha_{fg}(\xi)"]
\end{tikzcd}$$

(en vertu de la définition de $(fg)^*(\xi)$). Pour ξ variable, cet homomorphisme est fonctoriel, i.e. : on a un homomorphisme

$$c_{f,g}\colon g^*f^* \longrightarrow (fg)^*$$

de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_U$. Notons tout de suite :

Proposition 7.2. — *Pour que la catégorie clivée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ soit fibrée, il faut et il suffit que les $c_{f,g}$ soient des isomorphismes.*

On en conclut, prenant pour f un isomorphisme, pour g son inverse, et en considérant les isomorphismes $c_{f,g}$ et $c_{g,f}$:

Corollaire 7.3. — *Si $\mathscr{F}$ est une catégorie* fibrée *clivée sur $\mathscr{E}$, alors pour tout isomorphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, f^* est une équivalence de catégories $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$.*

Proposition 7.4. — *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$. On a*

$$A)\qquad \begin{cases} c_{f,\mathrm{id}_T}(\xi) = \alpha_{\mathrm{id}_T}(f^*(\xi)) \\ c_{\mathrm{id}_S,f}(\xi) = f^*(\alpha_{\mathrm{id}_S}(\xi)) \end{cases}$$

$$B)\qquad c_{f,gh}(\xi)\cdot c_{g,h}(f^*(\xi)) = c_{fg,h}(\xi)\cdot h^*(c_{f,g}(\xi))$$

(*Dans ces formules, f, g, h désignent des morphismes* 173

$$V \longrightarrow U \longrightarrow T \longrightarrow S$$

et ξ un objet de $\mathscr{F}_S$).

La première et seconde relation, dans le cas d'un clivage normalisé, prennent la forme plus simple

$$A')\qquad c_{f,\mathrm{id}_T} = \mathrm{id}_{f^*},\quad c_{\mathrm{id}_S,f} = \mathrm{id}_{f^*}.$$

Quant à la troisième, elle se visualise par la commutativité du diagramme

$$(D)\qquad \begin{tikzcd}
h^*g^*f^*(\xi) \arrow[r, "c_{g,h}(f^*(\xi))"] \arrow[d, "h^*(c_{f,g}(\xi))"'] & (gh)^*(f^*(\xi)) \arrow[d, "c_{f,gh}(\xi)"] \\
h^*(fg)^*(\xi) \arrow[r, "c_{fg,h}(\xi)"'] & (fgh)^*(\xi)
\end{tikzcd}$$

Dans le cas des catégories fibrées (où les $c_{f,g}$ sont des isomorphismes), cette commutativité peut s'exprimer intuitivement par le fait que *l'utilisation successive des isomorphismes de la forme $c_{f,g}$ ne conduit pas à des « identifications contradictoires »*. On peut écrire également cette formule sans argument ξ, par l'utilisation du produit de convolution d'homomorphismes de foncteurs :

$$c_{fg,h} \circ (h^* * c_{f,g}) = c_{f,gh} \circ (c_{g,h} * f^*).$$

La démonstration des deux premières formules 7.4 est triviale, esquissons celle de la troisième. Pour ceci, considérons, en plus du carré (D), le carré d'homomorphismes :

$$(D') \qquad \begin{tikzcd} g^*f^*(\xi) \arrow[r, "\alpha_g(f^*(\xi))"] \arrow[d, "c_{f,g}(\xi)"'] & f^*(\xi) \arrow[d, "\alpha_f(\xi)"] \\ (fg)^*(\xi) \arrow[r, "\alpha_{fg}(\xi)"'] & \xi \end{tikzcd}$$

174 qui est commutatif par définition de $c_{f,g}(\xi)$. Considérons le diagramme obtenu en joignant les sommets de (D) aux sommets correspondants de (D') par les homomorphismes de la forme α :

$$\alpha_h(g^*f^*(\xi)),\ \ \alpha_{gh}(f^*(\xi))$$
$$\alpha_h((fg)^*(\xi)),\ \alpha_{fgh}(\xi).$$

Les quatre faces latérales du cube ainsi obtenu sont également commutatives : pour celle de gauche, cela provient du fait que la colonne gauche de (D) se déduit de la colonne gauche de (D') par application de h, et que α_h est un homomorphisme fonctoriel ; pour les trois autres, ce n'est autre que la définition des opérations c des trois côtés restants de (D). Ainsi les cinq faces du cube autres que la face supérieure sont commutatives. Il en résulte que les deux (fgh)-morphismes $h^*g^*f^*(\xi) \to (fgh)^*(\xi)$ définis par (D) ont un même composé avec $\alpha_{fgh}(\xi) \colon (fgh)^*(\xi) \to \xi$, donc ils sont égaux par définition de $(fgh)^*$.

Bornons-nous pour la suite aux catégories clivées *normalisées*. Une telle catégorie donne naissance aux objets suivants :

a) Une application $S \mapsto \mathscr{F}_S$ de $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ dans **Cat**.

b) Une application $f \mapsto f^*$, associant à toute $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{E})$, de source T et de but S, un foncteur $f^* \colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$.

c) Une application $(f, g) \mapsto c_{f,g}$, associant à tout couple de flèches (f, g) de $\mathscr{E}$, un homomorphisme fonctoriel $c_{f,g} \colon g^*f^* \to (fg)^*$.

D'ailleurs ces données satisfont aux conditions exprimées dans les formules A') et B) données plus haut. (N.B. Si on ne s'était pas borné au cas d'un clivage normalisé, il aurait fallu introduire un objet supplémentaire, savoir une fonction $S \mapsto \alpha_S$ qui associe à tout objet S de $\mathscr{E}$ un homomorphisme fonctoriel $\alpha_S \colon (\mathrm{id}_S)^* \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}$; la condition A') se remplacerait alors par la condition A)).

175 Nous allons montrer maintenant comment on peut reconstituer (à isomorphisme unique près) la catégorie clivée normalisée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ à l'aide des objets précédents.

8. Catégorie clivée définie par un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$

Appelons, pour abréger, *pseudo-foncteur* de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** (il faudrait dire, pseudo-foncteur *normalisé*), un ensemble de données a), b), c) comme ci-dessus, satisfaisant les conditions A') et B). Au numéro précédent, nous avons associé, à une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$, un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, ici nous allons indiquer la construction inverse. Nous laisserons au lecteur la vérification de la plupart des détails, ainsi que du fait que ces constructions sont bien « inverses » l'une de l'autre. De façon précise, il y aurait lieu de considérer les pseudo-foncteurs $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$ comme les objets d'une nouvelle catégorie, et de montrer que nos constructions fournissent des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, entre cette dernière et la catégorie des catégories clivées au-dessus de $\mathscr{E}$, définie au numéro précédent.

On pose

$$\mathscr{F}_\circ = \coprod_{S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})} \mathrm{Ob}(\mathscr{F}(S)),$$

ensemble somme des ensembles $\mathrm{Ob}(\mathscr{F}(S))$ (N.B. nous noterons ici $\mathscr{F}(S)$ et non $\mathscr{F}_S$ la valeur en l'objet S de $\mathscr{E}$ du pseudo-foncteur donné, pour éviter des confusions de notation par la suite). On a donc une application évidente :

$$p_\circ \colon \mathscr{F}_\circ \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}.$$

Soient

$$\xi = (S, \xi), \quad \eta = (T, \eta) \qquad\qquad (\text{avec } \xi \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}(S),\ \eta \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}(T))$$

deux éléments de $\mathscr{F}_\circ$, et soit $f \in \mathrm{Hom}(T, S)$, on posera

$$h_f(\eta, \xi) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)).$$

Si on a de plus un morphisme $g \colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, et un $\zeta \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}(U)$, on définit une application, notée $(u, v) \mapsto u \circ v$: 176

$$h_f(\eta, \xi) \times h_g(\zeta, \eta) \longrightarrow h_{fg}(\zeta, \xi),$$

i.e. une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, g^*(\eta)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, (fg)^*(\xi)),$$

par la formule

$$u \circ v = c_{f,g}(\xi) \cdot g^*(u) \cdot v,$$

i.e. $u \circ v$ est le composé de la séquence

$$\zeta \xrightarrow{\ u\ } g^*(\eta) \xrightarrow{\ g^*(u)\ } g^* f^*(\xi) \xrightarrow{\ c_{f,g}(\xi)\ } (fg)^*(\xi).$$

On posera d'autre part

$$h(\eta, \xi) = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(T,S)} h_f(\eta, \xi),$$

et les accouplements précédents définissent des accouplements

$$h(\eta,\xi)\times h(\zeta,\eta)\longrightarrow h(\zeta,\xi),$$

tandis que la définition des $h(\eta,\xi)$ implique une application évidente :

$$p_{\eta,\xi}\colon h(\eta,\xi)\longrightarrow \operatorname{Hom}(T,S).$$

Ceci dit, on vérifie les points suivants :

177 1) La composition entre éléments des $h(\eta,\xi)$ est *associative*.

2) Pour tout $\xi=(\xi,S)$ dans $\mathscr{F}_\circ$, considérons l'élément identité de

$$h_{\mathrm{id}_S}(\xi,\xi)=\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(S)}(\mathrm{id}_S^*(\xi),\xi)=\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(S)}(\xi,\xi),$$

et son image dans $h(\xi,\xi)$. Cet objet est une *unité* à gauche et à droite pour la composition entre éléments des $h(\eta,\xi)$.

Cela montre déjà que *l'on obtient une catégorie* $\mathscr{F}$, en posant

$$\operatorname{Ob}\mathscr{F}=\mathscr{F}_\circ,\quad \operatorname{Fl}\mathscr{F}=\coprod_{\xi,\eta\in\mathscr{F}_\circ}h(\eta,\xi).$$

(N.B. on ne peut prendre simplement pour $\operatorname{Fl}\mathscr{F}$ la *réunion* des ensembles $h(\eta,\xi)$, car ces derniers ne sont pas nécessairement disjoints). De plus :

3) Les applications $p_\circ\colon \operatorname{Ob}\mathscr{F}\to\operatorname{Ob}\mathscr{E}$ et $p_1=(p_{\eta,\xi})\colon \operatorname{Fl}\mathscr{F}\to\operatorname{Fl}\mathscr{E}$ définissent un *foncteur* $p\colon\mathscr{F}\to\mathscr{E}$. De cette façon, $\mathscr{F}$ devient une catégorie sur $\mathscr{E}$, de plus l'application évidente $h_f(\eta,\xi)\to\operatorname{Hom}(\eta,\xi)$ induit une *bijection*

$$h_f(\eta,\xi)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_f(\eta,\xi).$$

4) Les applications évidentes

$$\operatorname{Ob}\mathscr{F}(S)\longrightarrow\mathscr{F}_\circ=\operatorname{Ob}\mathscr{F},\qquad \operatorname{Fl}\mathscr{F}(S)\longrightarrow\operatorname{Fl}\mathscr{F},$$

où la deuxième est définie par les applications évidentes

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(S)}(\xi,\xi')=h_{\mathrm{id}_S}(\xi,\xi')\longrightarrow\operatorname{Hom}(\xi,\xi')$$

définissent un *isomorphisme*

$$i_S\colon\mathscr{F}(S)\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}_S.$$

5) Pour tout objet $\xi=(S,\xi)$ de $\mathscr{F}$, et tout morphisme $f\colon T\to S$ de $\mathscr{E}$, considérons

178 l'élément $\eta=(T,\eta)$ de $\mathscr{F}_T$, avec $\eta=f^*(\xi)$, et l'élément $\alpha_f(\xi)$ de $\operatorname{Hom}(\eta,\xi)$, image de $\mathrm{id}_{f^*(\xi)}$ par le morphisme $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(f^*(\xi),f^*(\xi))=h_f(\eta,\xi)\to\operatorname{Hom}_f(\eta,\xi)$. *Cet élément est cartésien, et c'est l'identité dans* ξ *si* $f=\mathrm{id}_S$, en d'autres termes, l'ensemble des $\alpha_f(\xi)$ définit un *clivage normalisé de* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathscr{E}$. De plus, par construction, on a commutativité dans le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(S) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "i_S"'] & \mathscr{F}(T) \arrow[d, "i_T"] \\
\mathscr{F}_S \arrow[r, "f^*_{\mathscr{F}}"] & \mathscr{F}_T
\end{tikzcd}$$

où $f^*_{\mathscr{F}}$ est le foncteur image inverse par f, relatif au clivage considéré sur $\mathscr{F}$. Enfin :

6) les homomorphismes $c_{f,g}$ donnés avec le pseudo-foncteur sont transformés, par les isomorphismes i_S, en les homomorphismes fonctoriels $c_{f,g}$ associés au clivage de $\mathscr{F}$.

Nous nous bornons à donner la vérification de 1) (qui est, si possible, moins triviale que les autres). Il suffit de prouver l'associativité de la composition entre les objets d'ensembles de la forme $h_f(\eta, \xi)$. Considérons donc dans $\mathscr{E}$ des morphismes

$$S \xleftarrow{\ f\ } T \xleftarrow{\ g\ } U \xleftarrow{\ h\ } V$$

et des objets

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau$$

dans $\mathscr{F}(S), \mathscr{F}(T), \mathscr{F}(U), \mathscr{F}(V)$, enfin des éléments

$$\begin{aligned} u \in h_f(\eta, \xi) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)) \\ v \in h_g(\zeta, \eta) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, g^*(\eta)) \\ w \in h_h(\tau, \zeta) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(V)}(\tau, h^*(\zeta)). \end{aligned}$$

On veut prouver la formule 179

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

qui est une égalité dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(V)}(\tau, (fgh)^*(\xi))$. En vertu des définitions les deux membres de cette égalité s'obtiennent par composition suivant le contour supérieur et inférieur du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\tau \arrow[r, "w"] \arrow[drr, "v \circ w"'] & h^*(\zeta) \arrow[r, "h^*(v)"] \arrow[rrr, bend left, "h^*(u \circ v)"] & h^*g^*(\eta) \arrow[r, "h^*g^*(u)"] \arrow[d, "c_{g,h}(\eta)"] & h^*g^*f^*(\xi) \arrow[r, "h^*(c_{f,g}(\xi))"] \arrow[d, "c_{g,h}(f^*(\xi))"] & h^*(fg)^*(\xi) \arrow[d, "c_{fg,h}(\xi)"] \\
& & (gh)^*(\eta) \arrow[r, "(gh)^*(u)"] & (gh)^*f^*(\xi) \arrow[r, "c_{f,gh}(\xi)"] & (fgh)^*(\xi)
\end{tikzcd}$$

Or le carré médian est commutatif parce que $c_{g,h}$ est un homomorphisme fonctoriel, et le carré de droite est commutatif en vertu de la condition B) pour un pseudo-foncteur. D'où le résultat annoncé.

Bien entendu, il reste à préciser, lorsque le pseudo-foncteur envisagé provient déjà d'une catégorie clivée normalisée $\mathscr{F}'$ sur $\mathscr{E}$, comment on obtient un isomorphisme naturel entre $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}$. Nous en laissons le détail au lecteur.

Nous laissons également au lecteur d'interpréter, en termes de pseudo-foncteurs, la notion d'image inverse d'une catégorie clivée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ par un foncteur changement de base $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$.

9. Exemple : catégorie clivée définie par un foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$; catégories scindées sur $\mathscr{E}$

Supposons qu'on ait un foncteur

$$\varphi\colon \mathscr{E}^\circ \longrightarrow \mathbf{Cat},$$

il définit alors un pseudo-foncteur en posant

$$\mathscr{F}(S) = \varphi(S), \quad f^* = \varphi(f), \quad c_{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)^*}$$

180 Donc la construction du numéro précédent nous donne une catégorie $\mathscr{F}$ clivée sur $\mathscr{E}$, dite associée au foncteur φ. Pour qu'une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$ soit isomorphe à une catégorie clivée définie par un foncteur $\varphi : \mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, il faut et il suffit manifestement qu'elle satisfasse les conditions :

$$(fg)^* = g^* f^*, \quad c_{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)^*}.$$

En termes de l'ensemble K des morphismes de transport, cela signifie aussi simplement que *le composé de deux morphismes de transport est un morphisme de transport*. Un clivage d'une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ satisfaisant la condition précédente est appelé un *scindage* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$, et une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ munie d'un scindage est appelée une *catégorie scindée sur* $\mathscr{E}$. C'est donc un cas particulier de la notion de catégorie clivée. La catégorie des catégories scindées sur $\mathscr{E}$ est donc équivalente à $\mathbf{Hom}(\mathscr{E}^\circ, \mathbf{Cat})$. Noter qu'une catégorie scindée sur $\mathscr{E}$ est a fortiori une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$.

Si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, il n'existe pas toujours de scindage sur $\mathscr{F}$. Supposons par exemple que $\mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ et $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$ soient réduits à un élément, et que l'ensemble des endomorphismes dudit est un groupe E resp. F, de sorte que le foncteur projection p est donné par un homomorphisme de groupes $p\colon F \to E$, surjectif puisque p est fibrant. On vérifie alors aussitôt que l'ensemble des clivages de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des applications $s\colon E \to F$ telles que $ps = \mathrm{id}_E$ (i.e. l'ensemble des « systèmes de représentants » pour les classes mod le sous-groupe G noyau de l'homomorphisme surjectif $p\colon F \to E$). Un clivage est un scindage si et seulement si s est un homomorphisme de groupes. Dire qu'il existe un scindage signifie donc que l'extension de groupes F de E par G est triviale, ce qui s'exprime, lorsque G est commutatif, par la nullité d'une certaine classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^2(E, G)$ (où G est considéré comme un groupe où E opère).

181 Supposons cependant que $\mathscr{F}$ soit une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$ telle que les $\mathscr{F}_S$ soient des catégories *rigides*, i.e. le groupe des automorphismes de tout objet de $\mathscr{F}_S$ est réduit à l'identité. Il est facile alors de prouver que $\mathscr{F}$ admet un scindage sur $\mathscr{E}$. En effet, on constate d'abord que la question d'existence d'un scindage n'est pas modifiée si on remplace $\mathscr{F}$ par une catégorie $\mathscr{E}$-équivalente, ce qui nous ramène en l'occurrence au cas où les $\mathscr{F}_S$ sont des catégories rigides *et réduites* (i.e. deux objets isomorphes dans $\mathscr{F}_S$ sont identiques). Mais si G est une catégorie rigide et réduite, tout isomorphisme de deux foncteurs $H \to G$ (où H est une catégorie quelconque) est une identité. Il s'ensuit

que si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, telle que les catégories-fibres soient rigides et réduites, alors il existe un clivage *unique* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$, qui est nécessairement un scindage. Donc $\mathscr{F}$ est isomorphe à la catégorie définie par un foncteur $\varphi\colon \mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, tel que les $\varphi(S)$ soient des catégories rigides et discrètes, et le foncteur φ est défini à isomorphisme près.

10. Catégories co-fibrées, catégories bi-fibrées

Considérons une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, avec le foncteur projection

$$p\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E},$$

elle définit une catégorie $\mathscr{F}^\circ$ au-dessus de $\mathscr{E}^\circ$, par le foncteur projection

$$p^\circ\colon \mathscr{F}^\circ \longrightarrow \mathscr{E}^\circ.$$

Un morphisme $\alpha\colon \eta \to \xi$ dans $\mathscr{F}$ est dit *co-cartésien* si c'est un morphisme cartésien pour $\mathscr{F}^\circ$ sur $\mathscr{E}^\circ$. Explicitant, on voit que cela signifie que pour tout objet ξ' de $\mathscr{F}_S$, l'application $u \mapsto u \circ \alpha$

$$\mathrm{Hom}_S(\xi, \xi') \longrightarrow \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi')$$

est bijective. On dit alors aussi que (ξ, α) est une *image directe* de η par f, dans la catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$. Si elle existe pour tout η dans $\mathscr{F}_T$, on dit que le foncteur image directe par f existe, et on note ce foncteur $f_*^{\mathscr{F}}$ ou f_*, une fois choisi. Il est donc défini 182
par un isomorphisme de bifoncteurs sur $\mathscr{F}_T^\circ \times \mathscr{F}_S$:

$$\mathrm{Hom}_S(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi).$$

Si donc f_* existe, pour que f^* existe, il faut et il suffit que f_* admette un foncteur adjoint, i.e. qu'il existe un foncteur $f^*\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$ et un isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_S(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(\eta, f^*(\xi)).$$

Soit $g\colon U \to T$ un autre morphisme dans $\mathscr{E}$, et supposons que les images inverses et directes par f, g et fg existent. Considérons alors les homomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} c^{f,g}\colon&\ f_* g_* \longleftarrow (fg)_* \\ c_{f,g}\colon&\ g^* f^* \longrightarrow (fg)^*. \end{aligned}$$

On constate que si on considère $f_* g_*$ et $g^* f^*$ comme un couple de foncteurs adjoints, ainsi que $(fg)_*$ et $(fg)^*$, les deux homomorphismes précédents sont adjoints l'un de l'autre. Donc l'un est un isomorphisme si et seulement si l'autre l'est. En particulier :

Proposition 10.1. — *Supposons que la catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ soit préfibrée et co-préfibrée. Pour qu'elle soit fibrée, il faut et il suffit qu'elle soit co-fibrée.*

Bien entendu, on dit que $\mathscr{F}$ est co-préfibrée resp. co-fibrée sur $\mathscr{E}$, si $\mathscr{F}^\circ$ est préfibrée resp. fibrée sur $\mathscr{E}$. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est bi-fibrée sur $\mathscr{E}$, si elle est à la fois fibrée et co-fibrée sur $\mathscr{E}$.

11. Exemples divers

a) **Catégories des flèches de $\mathscr{E}$.** Soit $\mathscr{E}$ une catégorie. Désignons par $\mathbf{\Delta^1}$ la
183 catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné à deux éléments $[0, 1]$; elle a donc deux objets 0 et 1, et en plus des deux morphismes identiques une flèche $(0, 1)$ de source 0 et but 1. Soit

$$\mathbf{Fl}(\mathscr{E}) = \mathbf{Hom}(\mathbf{\Delta^1}, \mathscr{E})$$

on l'appelle la *catégorie des flèches de $\mathscr{E}$*. L'objet 1 de $\mathbf{\Delta^1}$ définit un foncteur canonique, appelé *foncteur-but*

$$\mathbf{Fl}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{E}$$

(le foncteur défini par l'objet 0 de $\mathbf{\Delta^1}$ est appelé *foncteur-source*). Pour tout objet S de $\mathscr{E}$, la catégorie-fibre $\mathbf{Fl}(\mathscr{E})_S$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathscr{E}_{/S}$ des objets de $\mathscr{E}$ au-dessus de S.

Considérons un morphisme $f \colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, alors il lui correspond un foncteur canonique

$$f_* \colon \mathscr{E}_{/T} = \mathscr{F}_T \longrightarrow \mathscr{E}_{/S} = \mathscr{F}_S$$

et un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi)$$

qui fait donc de f_* un foncteur image directe pour f dans $\mathscr{F}$. On a d'ailleurs ici

$$(\mathrm{id}_S)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}, \quad (fg)_* = f_* g_*, \quad c^{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)},$$

i.e. $\mathscr{F}$ est muni d'un co-scindage sur $\mathscr{E}$. A fortiori, $\mathscr{F}$ est co-fibrée sur $\mathscr{E}$. Notons maintenant que l'ensemble des morphismes dans $\mathscr{F}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des diagrammes carrés commutatifs dans $\mathscr{E}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "v"] \\ S & T \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

184 Par définition, le morphisme en question est cartésien si le carré est cartésien dans $\mathscr{E}$, i.e. s'il fait de Y un produit fibré de X et T sur S. Le foncteur image inverse f^* existe donc si et seulement si pour tout objet X sur S, le produit fibré $X \times_S T$ existe. Il résulte de 10.1 que si le produit de deux objets sur un troisième existe toujours dans $\mathscr{E}$, i.e. si $\mathscr{F}$ est préfibrée sur $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{F}$ est même fibrée sur $\mathscr{E}$.

b) **Catégorie des préfaisceaux ou faisceaux sur des espaces variables**

Soit $\mathscr{E} = \mathbf{Top}$ la catégorie des espaces topologiques. Si T est un espace topologique, nous noterons $\mathscr{U}(T)$ la catégorie des ouverts de T, où les morphismes sont les applications d'inclusion. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, un foncteur $\mathscr{U}(T)^\circ \to \mathscr{C}$ s'appelle un *préfaisceau* sur T à valeurs dans $\mathscr{C}$, et un *faisceau* s'il satisfait une condition d'exactitude à gauche que nous ne répétons pas ici. La *catégorie $\mathscr{P}(T)$ des préfaisceaux* *sur T à valeurs dans $\mathscr{C}$*, est par définition la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C})$, et la catégorie $\mathscr{F}(T)$ des faisceaux sur T à valeurs dans $\mathscr{C}$ est la sous-catégorie pleine dont les objets sont les objets de $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C})$ qui sont des faisceaux. Si $f\colon T \to S$ est un morphisme dans $\mathscr{E}$, i.e. une application continue d'espaces topologiques, il lui correspond par l'application croissante $U \mapsto f^{-1}(U)$ un foncteur $\mathscr{U}(S) \to \mathscr{U}(T)$, d'où un foncteur

$$f_*\colon \mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathscr{U}(S)^\circ, \mathscr{C})$$

appelé *foncteur image directe de préfaisceaux par f*. On voit aussitôt que l'image directe d'un faisceau est un faisceau, donc le foncteur $f_*\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(S)$ induit un foncteur, également noté $f_*\colon \mathscr{F}(T) \to \mathscr{F}(S)$. On vérifie de plus trivialement (par l'associativité de la composition des foncteurs) qu'on a, pour une deuxième application continue $g\colon U \to T$, l'identité

$$(gf)_* = g_* f_*, \qquad \text{de même} \ \ (\mathrm{id}_S)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(S)}.$$

De cette façon, on a obtenu un foncteur

$$S \longmapsto \mathscr{P}(S)$$

resp.

$$S \longmapsto \mathscr{F}(S)$$

de $\mathscr{E}$ dans **Cat**. En fait, nous nous intéressons au foncteur correspondant 185

$$S \longmapsto \mathscr{P}(S)^\circ, \qquad \text{resp. } S \longmapsto \mathscr{F}(S)^\circ.$$

Il définit une catégorie co-fibrée, et même co-scindée, sur la catégorie des espaces topologiques qu'on appelle la *catégorie co-fibrée des préfaisceaux* (resp. *faisceaux*) *à valeurs dans $\mathscr{C}$* (sous-entendu : sur des espaces variables). Explicitant la construction du N° 8, on voit qu'un morphisme d'un préfaisceau B sur T dans un préfaisceau A sur S est un couple (f, u) formé d'une application continue de T dans S, et d'un morphisme $u\colon A \to f_*(B)$ dans la catégorie $\mathscr{P}(S)$. Cette description vaut également pour les morphismes de faisceaux, $\mathscr{F}$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}$.

Dans les cas les plus importants, la catégorie $\mathscr{P}$ et la catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ sont aussi des catégories fibrées, i.e. pour toute application continue, les foncteurs image directe $\mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(S)$ et $\mathscr{F}(T) \to \mathscr{F}(S)$ ont un foncteur adjoint, qui est alors noté f^* et appelé foncteur image inverse de préfaisceaux resp. foncteur image inverse de faisceaux, par l'application continue f. Ce foncteur existe par exemple si $\mathscr{C} = \mathbf{Ens}$. On peut montrer que le foncteur $f^*\colon \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(T)$ existe chaque fois que dans $\mathscr{C}$ les limites inductives (relatives à des diagrammes dans l'Univers considéré) existent. La question est moins facile pour $\mathscr{F}$; on notera en effet que (même dans le cas $\mathscr{C} = \mathbf{Ens}$) l'image inverse d'un préfaisceau qui est un faisceau n'est en général pas un faisceau, en d'autres termes le foncteur image inverse de faisceau n'est pas isomorphe au foncteur induit par le foncteur image inverse de préfaisceaux (malgré la notation commune f^*). Ainsi, $\mathscr{F}$ est une sous-catégorie co-fibrée de $\mathscr{P}$, mais pas une sous-catégorie fibrée, i.e. *le foncteur d'inclusion $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ n'est pas fibrant.*

La catégorie co-fibrée $\mathscr{P}$ peut se déduire d'une catégorie co-fibrée (ou plutôt fibrée) plus générale, obtenue ainsi. Pour toute catégorie $\mathscr{U}$ (dans l'Univers fixé), on pose

$$\mathscr{P}(\mathscr{U}) = \mathbf{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{C})$$

186 et on note que $\mathscr{U} \mapsto \mathscr{P}(\mathscr{U})$ est de façon naturelle un foncteur contravariant en $\mathscr{U}$, de la catégorie **Cat** dans **Cat**. Il définit donc une catégorie scindée au-dessus de $\mathscr{E} = \mathbf{Cat}$, que nous noterons $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$. Les objets de cette catégorie sont les couples $(\mathscr{U}, p)$ d'une catégorie $\mathscr{U}$ et d'un foncteur $p\colon \mathscr{U} \to \mathscr{C}$, et un morphisme de $(\mathscr{U}, p)$ dans $(\mathscr{V}, q)$ est essentiellement un couple (f, u), où f est un foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ et u un homomorphisme de foncteurs $u\colon p \to qf$. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la composition des morphismes dans $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$. Le foncteur-projection

$$\mathscr{F} = \mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{E} = \mathbf{Cat}$$

associe au couple $(\mathscr{U}, p)$ l'objet $\mathscr{U}$; la catégorie-fibre en $\mathscr{U}$ est la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{C})$ (à isomorphisme près). Lorsque dans $\mathscr{C}$ les limites inductives existent, on montre facilement que la catégorie fibrée $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$ sur **Cat** est également co-fibrée sur **Cat**, i.e. on peut définir la notion d'*image directe d'un foncteur $p\colon \mathscr{U} \to \mathscr{C}$* par un foncteur $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$. La catégorie des préfaisceaux se déduit de la catégorie fibrée précédente par le changement de base

$$\mathbf{Top}^\circ \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

(foncteur $S \mapsto \mathscr{U}(S)$ défini plus haut), ce qui donne une catégorie fibrée sur $\mathbf{Top}^\circ$, et en passant à la catégorie opposée, on obtient la catégorie co-fibrée $\mathscr{P}$ des préfaisceaux au-dessus de **Top**. La notion d'image inverse d'un foncteur correspond à celle d'image directe de préfaisceau, la notion d'image directe d'un foncteur à celle d'image inverse d'un préfaisceau.

c) **Objets à opérateurs au-dessus d'un objet à opérateurs**

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, et soit S un objet de $\mathscr{E}$ où un groupe G opère, à gauche pour fixer les idées. Cet objet à opérateurs peut s'interpréter comme correspondant à un foncteur $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ de la catégorie (à un seul objet, ayant G comme groupe d'endomorphismes) $\mathscr{E}'$ définie par G, dans la catégorie $\mathscr{E}$, et définie donc par changement de base une catégorie $\mathscr{F}'$ au-dessus de $\mathscr{E}'$, qui est fibrée resp. co-fibrée lorsque
187 $\mathscr{F}$ l'est sur $\mathscr{E}$. Une section de $\mathscr{E}'$ sur $\mathscr{F}'$ (nécessairement cartésienne, car $\mathscr{E}'$ est un groupoïde, et tout isomorphisme dans $\mathscr{F}'$ est cartésien en vertu de 6.12), peut aussi s'interpréter comme un $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{E}' \to \mathscr{F}$ au-dessus de λ, ou aussi comme un objet à opérateurs ξ dans $\mathscr{F}$ « au-dessus » de l'objet à opérateurs S.

d) **Couples de foncteurs adjoints quasi-inverses ; autodualités**

Lorsque la catégorie-base $\mathscr{E}$ est réduite à deux objets a, b et, en plus des flèches identiques, à deux isomorphismes $f\colon a \to b$ et $g\colon b \to a$ inverse l'un de l'autre (i.e. $\mathscr{E}$

est un groupoïde connexe rigide avec deux objets), une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$ est essentiellement la même chose que le système formé par deux catégories $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ et un *couple de foncteurs adjoints* $G\colon \mathscr{F}_a \to \mathscr{F}_b$ et $F\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_a$, qui soient des équivalences de catégories (donc quasi-inverses l'un de l'autre). On prendra pour $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ les catégories fibres de $\mathscr{F}$, pour F et G les foncteurs f^* et g^*, et les deux isomorphismes

$$u\colon FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}_a} \qquad v\colon GF \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}_b}$$

sont $c_{g,f}$ et $c_{f,g}$. Les deux conditions usuelles de compatibilité entre u et v ne sont autres que la condition 7.4 B) pour les composés fgf et gfg. Il est facile de montrer que ces conditions suffisent à impliquer qu'on a bien un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$.

Un cas intéressant est celui où l'on a

$$\mathscr{F}_b = \mathscr{F}_a^\circ, \quad G = F^\circ, \quad v = u^\circ.$$

On appelle *autodualité* dans une catégorie $\mathscr{C}$, la donnée d'un foncteur $D\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^\circ$, et d'un isomorphisme $u\colon DD^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, tels que u et l'isomorphisme $u^\circ\colon D^\circ D \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}^\circ}$ fassent de (D, D°) un couple de foncteurs adjoints, (nécessairement quasi-inverses l'un de l'autre). Cette condition s'écrit :

$$D(u(x)) = u(D(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}).$$

e) **Catégories au-dessus d'une catégorie discrète $\mathscr{E}$.** On dit que $\mathscr{E}$ est une 188
catégorie discrète si toute flèche y est une flèche identique, de sorte que $\mathscr{E}$ est défini à isomorphisme unique près par la connaissance de l'ensemble $I = \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$. La donnée d'une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ équivaut donc (à isomorphisme unique près) à la donnée d'une famille de catégories $\mathscr{F}_i$ $(i \in I)$, les catégories fibres. Toute catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est fibrée, tout $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est cartésien, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathbf{Hom}(\mathscr{F}_i, \mathscr{G}_i).$$

En particulier, on obtient

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}/\mathscr{E}) = \varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathscr{E}_i.$$

f) **Supposons que $\mathscr{E}$ ait exactement deux objets S et T,** et en plus des **morphismes identiques, un morphisme** $f\colon T \to S$. Alors une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ est définie, à $\mathscr{E}$-isomorphisme unique près, par la donnée de deux catégories $\mathscr{F}_S$ et $\mathscr{F}_T$ et d'un bifoncteur $H(\eta, \xi)$ sur $\mathscr{F}_T^\circ \times \mathscr{F}_S$, à valeurs dans **Ens**. En effet, si $\mathscr{F}$ est une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$, on lui associe les deux catégories-fibres $\mathscr{F}_S$ et $\mathscr{F}_T$ et le bifoncteur $H(\eta, \xi) = \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi)$. On laisse au lecteur le soin d'expliciter la construction en sens inverse. Pour que la catégorie envisagée soit fibrée (ou préfibrée, cela revient au même) il faut et il suffit que le foncteur H soit représentable par rapport à l'argument ξ. Pour qu'elle soit co-fibrée, il faut et il suffit que H soit représentable par rapport à l'argument η.

g) Soit $\mathscr{F} = \mathscr{C} \times \mathscr{E}$, considérée comme catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ grâce à pr_2. Alors $\mathscr{F}$ est fibrée et co-fibrée sur $\mathscr{E}$, et est même munie d'un scindage et d'un co-scindage canonique, correspondant au foncteur constant sur $\mathscr{E}$, resp. sur $\mathscr{E}^\circ$, à valeurs dans **Cat**, de valeur $\mathscr{C}$. On a

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}/\mathscr{E}) \simeq \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{C})$$

189 et $\varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{E}$ correspond à la sous-catégorie pleine formée des foncteurs $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ transformant morphismes quelconques en isomorphismes.

12. Foncteurs sur une catégorie clivée

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$. Pour tout objet S de $\mathscr{E}$ on désigne par

$$i_S\colon \mathscr{F}_S \longrightarrow \mathscr{F}$$

le foncteur d'inclusion. On a donc un homomorphisme fonctoriel, pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$:

$$\alpha_f\colon i_T f^* \longrightarrow i_S,$$

où f^* est le foncteur changement de base $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$ pour f défini par le clivage. Soit maintenant

$$F\colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}$$

un foncteur de $\mathscr{F}$ dans une catégorie $\mathscr{C}$, posons, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$,

$$F_S = F \circ i_S\colon \mathscr{F}_S \longrightarrow \mathscr{C}$$

et pour tout $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$,

$$\varphi_f = F * \alpha_f\colon F_T f^* \longrightarrow F_S$$

On a ainsi, à tout foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$, associé une famille (F_S) de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$, et une famille (φ_f) d'homomorphismes de foncteurs $F_T f^* \to F_S$. Ces familles satisfont aux conditions suivantes :

a) $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$.

b) Pour deux morphismes $f\colon T \to S$ et $g\colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans le carré d'homomorphismes fonctoriels :

$$\begin{tikzcd}
F_U g^* f^* \arrow[r, "F_U * c_{f,g}"] \arrow[d, "\varphi_g * f^*"'] & F_U (fg)^* \arrow[d, "\varphi_{fg}"] \\
F_T f^* \arrow[r, "\varphi_f"] & F_S.
\end{tikzcd}$$

190 La première relation est triviale, et la deuxième relation s'obtient en appliquant le

foncteur F au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} g^*f^*(\xi) \arrow[r, "c_{f,g}(\xi)"] \arrow[d, "\alpha_g(f^*(\xi))"'] & (fg)^*(\xi) \arrow[d, "\alpha_{fg}(\xi)"] \\ f^*(\xi) \arrow[r, "\alpha_f(\xi)"] & \xi \end{tikzcd}$$

pour un objet variable ξ dans $\mathscr{F}_S$.

Si G est un deuxième foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{C}$, donnant naissance à des foncteurs $G_S \colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$ et des homomorphismes fonctoriels $\psi_f \colon G_T f \to G_S$, et si $u \colon F \to G$ est un homomorphisme fonctoriel, alors il lui correspond des homomorphismes fonctoriels $u * i_S$:

$$u_S \colon F_S \longrightarrow G_S$$

et on constate aussitôt que pour tout morphisme $f \colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans les carrés

c)
$$\begin{tikzcd} F_T f^* \arrow[r, "\phi_f"] \arrow[d, "u_T * f^*"'] & F_S \arrow[d, "u_S"] \\ G_T f^* \arrow[r, "\psi_f"] & G_S \end{tikzcd}$$

Proposition 12.1. — *Soit $\mathscr{H}(\mathscr{F},\mathscr{C})$ la catégorie dont les objets sont les couples de familles (F_S) $(S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}))$ de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$, et de familles (φ_f) $(f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{F}))$ d'homomorphismes fonctoriels $F_T f^* \to F_S$, satisfaisant les conditions* a) et b)*, et où les morphismes sont les familles (u_S) $(S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}))$ d'homomorphismes $F_S \to G_S$,* 191
vérifiant la condition de commutativité c) *écrite plus haut,* (*la composition des morphismes se faisant par la composition des homomorphismes de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$*)*. Alors les deux lois explicitées plus haut définissent un* isomorphisme K *de la catégorie* $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{C})$ *avec la catégorie $\mathscr{H}(\mathscr{F},\mathscr{C})$.*

Il est trivial qu'on a bien là un *foncteur* de la première catégorie dans la seconde. Ce foncteur est pleinement fidèle, car pour F, G donnés, $\mathrm{Hom}(F,G) \to \mathrm{Hom}(K(F),K(G))$ est trivialement injectif ; pour montrer que c'est surjectif, il suffit de noter que la condition de commutativité c) exprime la fonctorialité des applications $u(\xi) = u_S(\xi) \colon F(S) = F_S(\xi) \to G(\xi) = G_S(\xi)$ pour les homomorphismes de la forme $\alpha_f(\xi)$ dans $\mathscr{F}$, d'autre part on a la fonctorialité sur chaque catégorie fibre i.e. pour les morphismes dans $\mathscr{F}$ qui sont des T-morphismes $(T \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E}))$, d'où la fonctorialité pour tout morphisme dans $\mathscr{F}$, puisqu'un f-morphisme (où $f \colon T \to S$ est un morphisme dans $\mathscr{E}$ est de façon unique) un composé d'un morphisme $\alpha_f(\xi)$ et d'un T-morphisme. Il reste donc à prouver que le foncteur K est bijectif pour les objets. L'argument précédent montre déjà que K est injectif pour les objets, reste à prouver qu'il est surjectif, i.e. que si on part d'un système $(F_S), (\varphi_f)$, satisfaisant a) et b) ; et si on définit une application $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ par

$$F(\xi) = F_S(\xi) \quad \text{pour } \xi \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}_S \subset \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$$

et une application $\mathrm{Fl}(\mathscr{F}) \to \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ par

$$F(\alpha_f(\xi)u') = \varphi_f(\xi)\, F_T(u')$$

pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, tout objet ξ de $\mathscr{F}_S$ et tout T-morphisme u' de but $f^*(\xi)$, alors on obtient un *foncteur* F de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{C}$. En effet, la relation $F(\mathrm{id}_\xi) = \mathrm{id}_{F(\xi)}$ est triviale, il reste à prouver la multiplicativité $F(uv) = F(u)F(v)$ lorsqu'on a un f-morphisme $u\colon \eta \to \xi$ et un g-morphisme $v\colon \zeta \to \nu$, avec $f\colon T \to S$ et $g\colon U \to T$ des morphismes de $\mathscr{E}$. Posant $w = uv$, on aura

$$u = \alpha_f(\xi)u', \quad v = \alpha_g(\eta)v', \quad w = \alpha_{fg}(\xi)w'$$

192 avec

$$w' = c_{f,g}(\xi)g^*(u')v' \quad (\text{cf. N}^{\text{o}}\ 8).$$

Avec ces notations, il faut prouver la commutativité du contour extérieur du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
F_U(\zeta) \arrow[r, "F_u(v')"] \arrow[rrr, bend left, "F(w')"] \arrow[dr, "F(v)"'] & F_U g^*(\eta) \arrow[r, "F_u g^*(u')"] \arrow[d, "\varphi_g(\eta)"] & F_U g^* f^*(\xi) \arrow[r, "F_U(c_{f,g}(\xi))"] \arrow[d, "\varphi_g(f^*(\xi))"] & F_U(fg)^*(\xi) \arrow[d, "\varphi_{fg}(\xi)"] \\
 & F_T(\eta) \arrow[r, "F_T(u')"'] \arrow[rr, bend right, "F(u)"'] & F_T f^*(\xi) \arrow[r, "\varphi_f(\xi)"'] & F_S(\xi)
\end{tikzcd}$$

Or le triangle gauche est commutatif par définition de $F(v)$, le carré médian est commutatif car déduit de l'homomorphisme $u'\colon \xi \to f(\eta)$ par l'homomorphisme fonctoriel α_g, enfin le carré de droite est commutatif en vertu de la condition b). La conclusion voulue en résulte.

Supposons maintenant que $\mathscr{C}$ soit également une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$, que nous appellerons dorénavant $\mathscr{G}$, et que nous nous intéressons aux $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Si F est un tel foncteur, il induit des foncteurs

$$F_S\colon \mathscr{F}_S \longrightarrow \mathscr{G}_S$$

pour les catégories fibres. D'autre part, pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, et tout objet ξ dans $\mathscr{F}_S$, le f-morphisme $F(\alpha_f(\xi))$ se factorise de façon unique par un T-morphisme

$$\varphi_f(\xi)\colon F_T(f^*_{\mathscr{F}}(\xi)) \longrightarrow f^*_{\mathscr{G}}(F_S(\xi))$$

(où le $\mathscr{F}$ ou le $\mathscr{G}$ en indice indique la catégorie clivée pour laquelle on prend le foncteur image inverse), d'où un homomorphisme fonctoriel de foncteurs de $\mathscr{F}_S$ dans $\mathscr{G}_T$:

$$\varphi_f \colon F_T f^*_{\mathscr{F}} \longrightarrow f^*_{\mathscr{G}} F_S.$$

Les deux systèmes (F_S) et (φ_f) satisfont les conditions suivantes : 193

a') $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$.

b') Pour deux morphismes $f\colon T \to S$ et $g\colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans le diagramme d'homomorphismes fonctoriels suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_U g^*_F f^*_F \arrow[r, "F_U * c^{\mathscr{F}}_{f,g}"] \arrow[d, "\varphi_{g^*} f^*_{\mathscr{F}}"'] & F_U (fg)^*_F \arrow[dd, "\varphi_{fg}"] \\
g^*_{\mathscr{G}} F_T f^*_F \arrow[d, "g^*_{\mathscr{G}} * \varphi_f"'] & \\
g^*_{\mathscr{G}} f^*_{\mathscr{G}} F_S \arrow[r, "c^{\mathscr{G}}_{f,g} * F_S"] & (fg)^*_{\mathscr{G}} F_S.
\end{tikzcd}$$

Nous en laissons la vérification au lecteur, ainsi que l'énoncé et la démonstration de l'analogue de la proposition 12.1, impliquant que l'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, et l'ensemble des systèmes (F_S),(φ_f) satisfaisant les conditions a') et b') ci-dessus. Bien entendu, dans cette correspondance, les foncteurs cartésiens sont caractérisés par la propriété que les homomorphismes φ_f sont des isomorphismes.

Remarque. — Bien entendu, il y a intérêt le plus souvent à raisonner directement sur des catégories fibrées sans utiliser des clivages explicites, ce qui dispense en particulier de faire appel, pour la notion simple de $\mathscr{E}$-foncteur ou de $\mathscr{E}$-foncteur cartésien, à une interprétation pesante comme ci-dessus. C'est pour éviter des lourdeurs insupportables, et pour obtenir des énoncés plus intrinsèques, que nous avons dû renoncer à 194
partir comme dans [**2**] de la notion de catégorie clivée (appelée « catégorie fibrée » dans loc. cit.), qui passe au second rang au profit de celle de catégorie fibrée. Il est d'ailleurs probable que, contrairement à l'usage encore prépondérant maintenant, lié à d'anciennes habitudes de pensée, il finira par s'avérer plus commode dans les problèmes universels, de ne pas mettre l'accent sur *une* solution supposée choisie une fois pour toutes, mais de mettre toutes les solutions sur un pied d'égalité.

13. Bibliographie

[1] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. **9** (1957) p. 119–221.

[2] A. Grothendieck, Technique de descente et Théorèmes d'existence, I, Séminaire Bourbaki 190, décembre 1959.