
Prueba 1 SOL114

1) Pregunta 1

En una ciudad se estudian los hábitos de fumar y hacer deporte. La probabilidad de que una persona **fume** es 0.30, la probabilidad de que haga **deporte** es 0.40 y la probabilidad de que **fume y haga deporte** al mismo tiempo es 0.12. Con esta información, responde lo siguiente:

a) ¿Son fumar y hacer deporte eventos independientes? Explica usando la definición de independencia. (10%)

Respuesta:

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no fume ni haga deporte?
(10%)

Respuesta:

2) Pregunta 2 (20%)

Imagina un concurso en el que los participantes deben responder 10 preguntas de opción múltiple. Cada pregunta se contesta correctamente con probabilidad $p = 0.6$, de forma independiente. El puntaje total se calcula como:

$$T = 2S + 5,$$

donde S es el número de respuestas correctas.

Calcula el valor esperado y la varianza de T y explica su significado sustantivo.

Respuesta:

3) Pregunta 3: Salarios de hombres y mujeres

Un estudio analiza las diferencias salariales entre hombres y mujeres. Se observa que los salarios (en miles de pesos) siguen distribuciones normales distintas para cada grupo:

- Hombres: $Y_h \sim N(\mu = 100, \sigma = 10)$
- Mujeres: $Y_w \sim N(\mu = 70, \sigma = 5)$

Con esta información, responde lo siguiente:

a) Un hombre gana 120 y una mujer 100. ¿Quién está mejor posicionado respecto de su grupo? Explica tu respuesta en términos de desviaciones estándar (valores-z). (15%)

Respuesta:

b) Probabilidad de que una mujer gane \leq que el promedio masculino. (15%)

¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso de una mujer esté por debajo del promedio de los hombres? Para responder esta pregunta sigue los siguientes pasos:

1. Lleva el valor 100 a la escala de la distribución femenina, estandarizándolo:

$$z_0 = \frac{100 - 70}{5} = 6.$$

2. Expresa la probabilidad en términos de la normal estándar:

$$P(Y_w \leq 100) = P(Z \leq z_0).$$

3. Usa la distribución normal estándar para encontrar la probabilidad solicitada.

Respuesta:

c) Ingreso mínimo para estar en el 10% más rico de cada grupo. (15%)

¿Cuál es el umbral de ingreso que permite a una persona estar en el 10% más rico de su grupo? Para responder esta pregunta usa el concepto de percentil en una distribución normal:

El percentil 90 de una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ se obtiene con la fórmula:

$$x_{0.90} = \mu + z_{0.90}\sigma.$$

El valor $z_{0.90}$ corresponde al punto de la distribución normal estándar donde la probabilidad acumulada alcanza 0.90. Dicho de otro modo, es el valor de z tal que un 90% de las observaciones se ubican por debajo de él y solo un 10% por encima.

Calcula $z_{0.90}$ y usa dicho valor para encontrar las cantidades solicitadas:

- Percentil 90 para hombres: $100 + z_{0.90} \times 10$.
- Percentil 90 para mujeres: $70 + z_{0.90} \times 5$.

Respuesta:

d) Percentil 10 y razón entre percentil 90 y percentil 10. (15%)

Calcula el percentil 10 de hombres y mujeres. Si el cociente entre el percentil 90 y el percentil 10 se interpreta como una medida de desigualdad (razón entre ingresos del 10% más rico y el 10% más pobre), determina qué grupo presenta mayor desigualdad.

Respuesta:

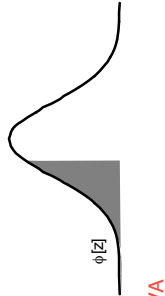


Tabla de valores de probabilidad acumulada (Φ) para la Distribución Normal Estándar

MITAD NEGATIVA

MITAD POSITIVA

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983
2.9	0.9984	0.9985	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993
3.0	0.9994	0.9995	0.9996	0.9997	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1. Si una variable normal X no es estándar, entonces sus valores deben ser estandarizados mediante la transformación: $Z=(X-\mu)/\sigma$ es decir, $P(X < x) = \Phi[(x-\mu)/\sigma]$
2. Para valores de $z > 4$, $\Phi(z) = 1$, a una precisión de cuatro decimales; para valores de $z < -4$, $\Phi(z) = 0$, con cuatro decimales significativos.
3. Aquellos valores al lado del valor de 3 corresponden a las probabilidades acumuladas de z igual a 3.0, 3.1, 3.2, etc.