
Prueba 1 SOL114

1) Pregunta 1

En una ciudad se estudian los hábitos de fumar y hacer deporte. La probabilidad de que una persona **fume** es 0.30, la probabilidad de que haga **deporte** es 0.40 y la probabilidad de que **fume y haga deporte** al mismo tiempo es 0.12. Con esta información, responde lo siguiente:

- a) ¿Son fumar y hacer deporte eventos independientes? Explica usando la definición de independencia. (10%)

Respuesta:

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no fume ni haga deporte?
(10%)

Respuesta:

2) Pregunta 2 (20%)

Imagina un concurso en el que los participantes deben responder 10 preguntas de opción múltiple. Cada pregunta se contesta correctamente con probabilidad $p = 0.6$, de forma independiente. El puntaje total se calcula como:

$$T = 2S + 5,$$

donde S es el número de respuestas correctas.

Calcula el valor esperado y la varianza de T y explica su significado sustancial.

Respuesta:

3) Pregunta 3: Salarios de hombres y mujeres

Un estudio analiza las diferencias salariales entre hombres y mujeres. Se observa que los salarios (en miles de pesos) siguen distribuciones normales distintas para cada grupo:

- Hombres: $Y_h \sim N(\mu = 100, \sigma = 10)$
- Mujeres: $Y_w \sim N(\mu = 70, \sigma = 5)$

Con esta información, responde lo siguiente:

a) Un hombre gana 120 y una mujer 100. ¿Quién está mejor posicionado respecto de su grupo? Explica tu respuesta en términos de desviaciones estándar (valores-z). (15%)

Respuesta:

b) Probabilidad de que una mujer gane \leq que el promedio masculino. (15%)

¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso de una mujer esté por debajo del promedio de los hombres? Para responder esta pregunta sigue los siguientes pasos:

1. Lleva el valor 100 a la escala de la distribución femenina, estandarizándolo:

$$z_0 = \frac{100 - 70}{5} = 6.$$

2. Expresa la probabilidad en términos de la normal estándar:

$$P(Y_w \leq 100) = P(Z \leq z_0).$$

3. Usa la distribución normal estándar para encontrar la probabilidad solicitada.

Respuesta:

c) Ingreso mínimo para estar en el 10% más rico de cada grupo. (15%)

¿Cuál es el umbral de ingreso que permite a una persona estar en el 10% más rico de su grupo? Para responder esta pregunta usa el concepto de percentil en una distribución normal:

El percentil 90 de una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ se obtiene con la fórmula:

$$x_{0.90} = \mu + z_{0.90}\sigma.$$

El valor $z_{0.90}$ corresponde al punto de la distribución normal estándar donde la probabilidad acumulada alcanza 0.90. Dicho de otro modo, es el valor de z tal que un 90% de las observaciones se ubican por debajo de él y solo un 10% por encima.

Calcula $z_{0.90}$ y usa dicho valor para encontrar las cantidades solicitadas:

- Percentil 90 para hombres: $100 + z_{0.90} \times 10$.
- Percentil 90 para mujeres: $70 + z_{0.90} \times 5$.

Respuesta:

d) Percentil 10 y razón entre percentil 90 y percentil 10. (15%)

Calcula el percentil 10 de hombres y mujeres. Si el cociente entre el percentil 90 y el percentil 10 se interpreta como una medida de desigualdad (razón entre ingresos del 10% más rico y el 10% más pobre), determina qué grupo presenta mayor desigualdad.

Respuesta: