Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Faculdade de Engenharia

Programa de Graduação em Engenharia da Computação

O que este número tem de especial?

π

Aluno: Maiki Buffet

Professora: Beatriz R. Tavares Franciosi

Porto Alegre

Abril, 2017

Sumário

A. Número

Na matemática, número, é um objeto utilizado para descrever quantidade, ordem ou medida; e seu conceito, em sua forma mais simples, é claramente abstrato e intuitivo, embora tenha sido objeto de estudo de inúmeros pensadores. Algumas definições para número estão dispostas abaixo:

- É uma coleção de unidades – *Tales de Mileto (623 a.C. – 556 a.C.)*;
- É a essência e o princípio de todas as coisas – *Pitágoras de Samos (571 a.C. – 490 a.C.)*;
- É o movimento acelerado ou retardado – *Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.)*;
- É um composto da unidade – *Euclides de Alexandria (360 a.C. – 295 a.C.)*;
- É a relação entre a quantidade e a unidade – *Isaac Newton (1643 - 1727)*;
- É a razão entre uma quantidade abstrata e uma outra quantidade da mesma espécie - *Isaac Newton (1643 - 1727)*;
- É uma coleção de unidades – *Marie Jean Antoine Nicolas Caritat (1743 - 1794)*;
- É o resultado da comparação de qualquer grandeza com a unidade – *Benjamin Constant (1767 - 1830)*;
- É a ciência do tempo puro – *Arthur Schopenhauer (1788 - 1860)*;
- É uma coleção de objetos de cuja natureza fazemos abstração – *Émile Boutroux (1845 - 1921)*;
- É a classe de todas as classes equivalente a uma dada classe – *Bertrand Russell (1872 - 1970)*.

Os números podem ser classificados de acordo com uma coleção de elementos, representados a seguir:

$$\mathbb{C}\ \text{Complexos}\begin{cases}\mathbb{R}\ \text{Reais}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \text{Racionais}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Inteiros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \text{Naturais}\\ \text{Inteiros negativos}\end{cases}\\ \text{Fracionários}\end{cases}\\ \text{Irracionais}\end{cases}\\ \text{Imaginários}\end{cases}$$

Dentro da coleção de elementos, temos os números irracionais, que são classificados como os números reais que não podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais, mas não racionais. Em uma análise ainda mais aprofundada, temos dois tipos de números irracionais, sendo os números reais algébricos irracionais e os números reais transcendentes. Os transcendentes são caracterizados por serem números reais ou complexos, que não são raízes de nenhuma equação polinomial a coeficientes racionais, sendo transcendente somente se ele não for algébrico, ou seja, são irracionais e não podem ser escritos na forma de fração. Várias, são as constantes matemáticas transcendentes, como por exemplo Pi (π), que será o número apresentado neste trabalho.

B. Pi (π)

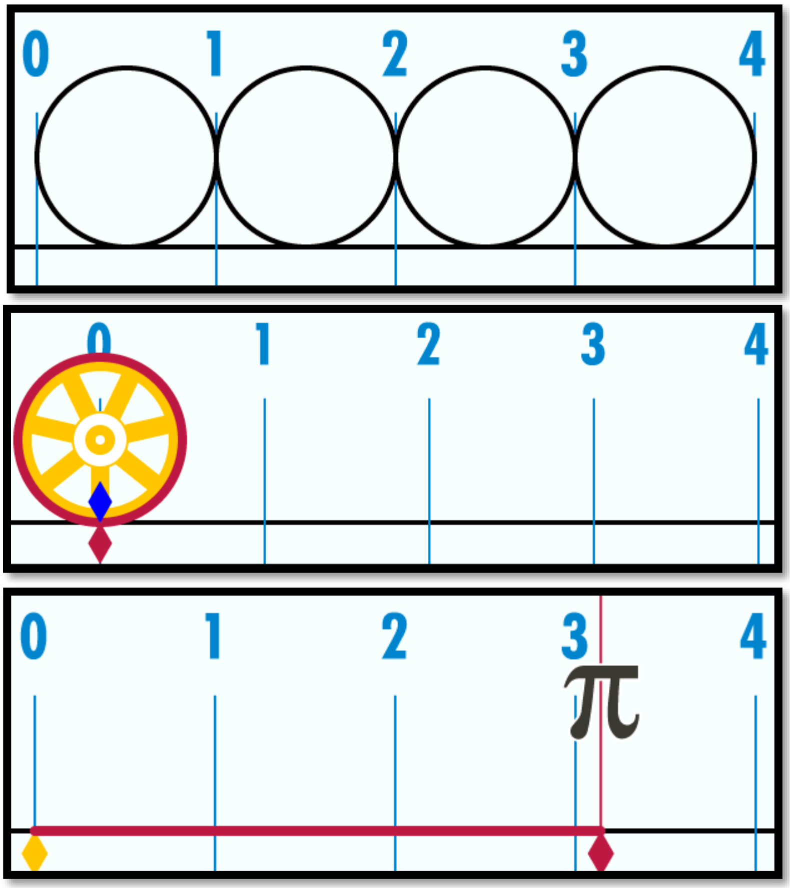
Representa o número equivalente à razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro de um círculo, além de ter outros significados, dependendo da área de sua utilização:

- Na economia representa a taxa de inflação;
- Representa a décima sexta letra do alfabeto grego;
- Corresponde ao valor de 80 como um numeral grego;
- Na química é utilizado para representar pressão osmótica;
- Além de que, se utilizado em maiúsculo, representa um produtório (piatório).

Por ser um número irracional e transcendente, π, não pode ser expresso exatamente através de uma fração. Sua representação decimal aparenta ser distribuída aleatoriamente. É definido pela razão da circunferência do círculo (C) pelo seu diâmetro (d):

$$\pi = \frac{C}{d}$$

A razão é uma constante, independentemente do tamanho do círculo, podendo-se perceber no exemplo abaixo:



C. Valor de π

A representação decimal de π nunca termina e nunca converge a algum padrão de repetição. Para a maioria dos cálculos é comum aproximar π por 3,14. Embora já se saiba de 12.1 trilhões de dígitos (94 dias para ser computado) para π, a própria NASA utiliza apenas 15 casas decimais - 3.141592653589793. Outro dado interessante é que para ser calculado um círculo com 46 bilhões de anos-luz de raio, em volta do universo observável, seria suficiente uma aproximação com apenas 40 casas decimais, para que se garanta uma precisão de um átomo de hidrogênio.

Algumas formas de frações são utilizadas para se aproximar o valor de π, como por exemplo:

$$\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{52163}{16604}, \frac{103993}{33102}\ e\ \frac{245850922}{78256779}.$$

A representação do valor das 300 primeiras casas decimais é representada por 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273.

D. Aplicação

Pi possui inúmeras aplicações, algumas delas podem ser vistas abaixo:

- Geometria e trigonometria;
- Método de Monte Carlo;
- Análise e números complexos;
- Teoria dos números e função zeta de Riemann;
- Probabilidade e estatísticas;
- Descrição de fenômenos físicos;
- Memorização de dígitos;
- Análise de desempenho;
- Aplicações elétricas;
- Estudos envolvendo o olho humano;
- Estudo da estrutura/função do DNA;
- Projeção de pêndulos para relógios;
- Sinais e ondas;
- Navegação;
- Astronomia.

O seu uso na ciência da computação é bastante difundido, sendo muito utilizado para testes em computadores (hardware e software). Por exemplo, uma diferença em um dos algarismos pode indicar uma falha na arquitetura do mesmo.

Outra aplicação direta, é na navegação, quando aviões voam em grandes distâncias, estes atualmente estão voando num arco de círculo. A trajetória deve ser calculada sempre se buscando a precisão de acordo com o uso de combustível e outras variáveis. Adicionalmente, quando alguém se localiza através da utilização de um GPS em algum lugar do globo, Pi está sempre presente nos métodos utilizados para o cálculo das coordenadas.

Além disto, outra aplicação de Pi é no processamento de som e sinais, onde as frequências utilizadas para a geração dos sons – quando tocados – são processadas em múltiplos de $2\times\pi$.

Ainda na área das ciências da computação, mais especificamente na área de criptografia, o Pi possui sua relativa importância, sendo que uma fração de seus dígitos decimais, foram utilizados para a geração de uma S-table/box de 256-bytes no modelo de criptografia hash MD2.

Abaixo está demonstrado o código de um exemplo de uso para Pi na área de criptografia. Ele utiliza os 1000 primeiros dígitos decimais de Pi, ao qual são responsáveis por codificar a chave de autenticação.

```
set pi [join {
14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534
21170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446
22948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326
64821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053
05488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799
62749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860
94370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363
71787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136
29774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908302642522308
25334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873
11595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989
 } ""]
proc picryp {str pad {sgn ""}} {
    set res ""
    foreach char [split $str ""] digit [split $pad ""] {
        append res [rot $char $sgn$digit]
    }
    return $res
}
proc rot {char amount} {
  set alphabet "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
   set pos [string first $char $alphabet]
   return [expr {$pos == -1 ? $char : [string index $alphabet [expr {($pos + $amount)%[string length $alphabet]}]]}]
}

Criptografando: % set cr [picryp "Hello Tcl world" [string range $pi 42 end]]
Descriptografando: % picryp $cr [string range $pi 42 end]]
```

Abaixo segue outro exemplo de uma aplicação de Pi. Um programa cuja finalidade é a de calcular o comprimento e a área de uma circunferência, além de calcular o volume e a área de superfície de uma esfera.

Estes valores podem ser utilizados por exemplo:

- Na área da engenharia civil para o cálculo da quantidade de materiais de construção;
- Na área de processamento de imagem para a aplicação de filtros;
- Na astronomia para o cálculo de trajetória de astros celestes;
- Na área de navegação para o cálculo de posicionamento global.

```c
#include <stdio.h>

#include <stdlib.h>

#include <assert.h>

#include <math.h>

#include <float.h>

int main (int argc, char *argv[]) {

	assert(atof(argv[1]) > 0);


	double raio = atof(argv[1]);

	double comprimento = 2*M_PI*raio;

	double area = M_PI*pow(raio, 2);

	double volume = (4/3)*M_PI*pow(raio, 3);

	double area_superficie = 4*M_PI*pow(raio, 2);


	printf("Pi: %.16lf\nRaio: %.1lfcm\nComprimento: %.16lfcm\nArea: %.16lfcm2\nVolume: %.16lfcm3\nArea Superficie: %.16lfcm2\n", M_PI, raio, comprimento, area, volume, area_superficie);

	return EXIT_SUCCESS;

}
```

Exemplo de execução utilizando um raio imaginário de tamanho 5mm.

```
Pi: 3.1415926535897931

Raio: 0.5cm

Comprimento: 3.1415926535897931cm

Area: 0.7853981633974483cm2

Volume: 0.3926990816987241cm3

Area Superficie: 3.1415926535897931cm2
```

E. Modelagem matemática computacional de π

O número de π pode ser modelado computacionalmente de diferentes formas, abrangendo inúmeros métodos, alguns mais rápidos que outros, embora todos possam ser utilizados para computar π. Neste trabalho serão apresentados alguns métodos – e alguns scripts para serem utilizados em ambientes matemáticos como por exemplo o MATLAB.

- **Algoritmo de Chudnovsky**: é um dos algoritmos mais utilizados para cálculos de alta precisão para algarismos de π. Este algoritmo se baseia em uma das fórmulas de Ramanujan, além de implementar uma série de convergência rápida após uma função hipergeométrica (exemplificada abaixo).

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(545140134k+13591409)}{(3k)!(k!)^3(640320^3)^{k+1/2}}$$

```
function P = chud_pi(d)
k = sym(0);
s = sym(0);
sig = sym(1);
n = ceil(d/14);
for j = 1:n
  s = s + sig * prod(3*k+1:6*k)/prod(1:k)^3 * ...
     (13591409+545140134*k) / 640320^(3*k+3/2);
  k = k+1;
  sig = -sig;
end
S = 1/(12*s);
P = vpa(S,d);

Input: chud_pi(40)
Output: 3. 1415926535897932384626433832795028841971...
```

- **Algoritmo da Média Aritmética-Geométrica**: este algoritmo funciona primeiramente através da obtenção da média aritmética de X e Y, denominando-os a1. Depois disso, constrói-se a média geométrica g1, a qual é a raiz quadrada de a1. Após isto, uma sequência é estabelecida, sendo:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2} \qquad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}$$

Ambas sequencias convergem a um mesmo número, denominado M:

$$M(x,y) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x+y}{K\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} \qquad \pi = \frac{M^2}{S} \qquad S = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}2^n c_n^2$$

$$c_n = a_{n+1} - a_n$$

```
function P = agm_pi(d)
digits(d)
a = vpa(1,d);
b = 1/sqrt(vpa(2,d));
s = 1/vpa(4,d);
p = 1;
n = ceil(log2(d));
for k = 1:n
  c = (a+b)/2;
  b = sqrt(a*b);
  s = s - p*(c-a)^2;
  p = 2*p;
  a = c;
end
P = a^2/s;

Input: agm_pi(40)
Output: 3.141592653589793238462643383279502884197...
```

- **Fórmula de Leibniz**: é uma série infinita que converge lentamente. Para se ter uma ideia, o cálculo dos 10 primeiros decimais corretos utiliza aproximadamente 5 bilhões de termos, já que:

$$\boxed{\frac{1}{2k+1} < 10^{-10}} \qquad \boxed{k > \frac{10^{10}-1}{2}} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

```
function P = leibniz_pi(d)
digits(d)
p = 0;
for i = 0:d
  p = p + (4*((-1)^i))/(2*i + 1);
  if rem(i,2) == 0
     p1 = p;
  else
     p2 = p;
  end
end
fprintf('%1.16f\n',(p1+p2)/2)

Input: leibniz_pi(40)
Output: 3.1412879148185242...
```

- **Série de Ramanujan-Sato**: obedece uma relação de recorrência a partir de uma série infinita, sendo este o resultado baseado no discriminante fundamental negativo.

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{k!^4} \frac{26390k + 1103}{396^{4k}}}$$

```
function P = ram_pi(d)
pi_ram=0;
for i=0:1:d-1
   pi_ram=pi_ram+2*sqrt(2)/9801.0*(factorial(4*i))*...
      (1103.0+26390.0*i)/((factorial(i)^4)*(396)^(4*i));
   pi_ram_array(i+1)=1/pi_ram;
end
fprintf('%1.16f\n',1/pi_ram)

Input: ram_pi(40)
Output: 3.1415926535897931...
```

Comparação de diferentes métodos de modelagem para π:

Obs: todos os métodos usaram no máximo 1000000 iterações a fim de determinar quantos dígitos exatos cada método pode computar no número de iterações pré-definido.

Madhava of Sangamagrama 1, **James Gregory** e **Gottfried Wilhelm Leibniz**

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Madhava of Sangamagrama 2

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 1 - \frac{1}{3\times 3^1} + \frac{1}{5\times 3^2} - \frac{1}{7\times 3^3} + \frac{1}{9\times 3^4} - \frac{1}{11\times 3^5} + \cdots$$

François Viète

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

John Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \cdots$$

Isaac Newton

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3\times 2^3}\right) + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4} \times \frac{1}{5\times 2^5}\right) + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6} \times \frac{1}{7\times 2^7}\right) + \cdots$$

Nilakantha Somayaji

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} - \cdots$$

Taner Yönder

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{(2 \times 1)^2 - 1} + \frac{1}{(2 \times 3)^2 - 1} + \frac{1}{(2 \times 5)^2 - 1} + \cdots$$

Leonhard Euler 1

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 5} + \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 5 \times 7 \times 9} + \cdots$$

Leonhard Euler 2

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

Método	Iterações	Exatidão Decimal
Isaac Newton	1654	1000
François Viète	1662	1000
Madhava of Sangamagrama 2	2091	1000
Loenhard Euler 1	3319	1000
Nilakantha Somavaji	1000000	18
Taner Yönder	1000000	6
Madhava of Sangamagrama 1	1000000	5
James Gregory	1000000	5
Gottfried Willhelm Leibniz	1000000	5
John Wallis	1000000	5
Leonhard Euler 2	1000000	5

Tabela 1: Resultados em ordem decrescente de desempenho na computação de π.

F. Referências Bibliográficas

João Milton de Oliveira, "A Irracionalidade e Transcendência do Número π", Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2013

Carl D. Offner, "Computing the Digits in π", 2015

https://en.wikipedia.org/wiki/Number

https://en.wikipedia.org/wiki/Irrational_number

https://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_number

https://en.wikipedia.org/wiki/Pi_(letter)

https://en.wikipedia.org/wiki/Pi

https://en.wikipedia.org/wiki/%CE%A0-calculus

https://en.wikipedia.org/wiki/Theoretical_computer_science

https://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic%E2%80%93geometric_mean

http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-12t/

http://www.ebyte.it/library/educards/constants/MathConstants.html

https://www.barcodesinc.com/articles/resource-list-mathematical-constants.htm

https://www.quora.com/What-applications-outside-of-pure-mathematics-require-the-most-precise-definitions-of-%CF%80-Any-besides-computer-science-How-many-significant-digits-are-necessary-for-these-applications

http://stackoverflow.com/questions/31861160/get-printf-to-print-all-float-digits

https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/pi/glseries.html

https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/pi/ramanujan.html

http://www.mpfr.org/

https://www.advanpix.com/

https://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/computing-pi.html

https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29554-leibniz-approximation-of-pi

https://es.mathworks.com/company/newsletters/articles/improvements-to-tic-and-toc-functions-for-measuring-absolute-elapsed-time-performance-in-matlab.html?s_cid=fb_wall_11-8-11_newsletter_tictoc

http://mathworld.wolfram.com/Pi.html

http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html

https://reference.wolfram.com/language/ref/Pi.html

http://www2.hawaii.edu/~taha/physcompclass/p1/leibniz.html

https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-chudnovsky/

https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-gregorys-series/

https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-archimedes/

https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-machin/

http://www.pi314.net/eng/programmes.php

http://numbers.computation.free.fr/Constants/subjects.html

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pi.html

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/nthdigit.html

https://autarkaw.org/2008/10/30/comparing-two-series-to-calculate-pi/

https://aydos.com/pi/

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcomp1.html

http://wiki.tcl.tk/2889

http://wiki.tcl.tk/38335

http://tcl.tk/

http://wiki.tcl.tk/

https://en.wikipedia.org/wiki/Tcl

http://www.studentguide.org/all-about-pi-everything-you-need-to-know-then-some/