



机率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo 脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 5-1: 机率密度函数 PDF
- 5-2: 连续机率分布 I





5-1: 机率密度函数 PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

第五周



人家有，我也想要有...



- 离散的随机变数有 PMF 告诉我们某个数字发生的机率
- 连续变数的机率分布常有不均等的情况发生，
Ex: 睡觉的时间长度
- 对连续的随机变量，我们也想知道某个数字发生的机会多大，可以用 PMF 吗？



连续R.V. 的先天问题

- 以幸运之轮为例 $X \sim [0, 1)$,

$$p_X(0.7) = ?$$

$[0, 1)$ 中每个数字发生机率均等，令其为 p

$[0, 1)$ 中有没有超过 10^6 个数字？有！ $\Rightarrow 10^6 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-6}$

$[0, 1)$ 中有没有超过 10^8 个数字？有！ $\Rightarrow 10^8 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-8}$

...

所以 $p_X(0.7) = p = 0$?!!!!



悲哀啊...

- 连续随机变量跟 PMF 注定就是没办法在一起，悲哀啊！
- 关键在于每个数字发生的机率都是 0！
- 还是很想知道在某个数字发生的机会多大，怎么办？



先看个乱七八糟的例子



- 因为拍戏，特别订做合金宝剑
- 铜、金打造，如何得知有无偷工减料？
- 整根有质量，但是每点质量都是零？好熟悉！
- 不看质量看什么？看密度！



$$\text{密度 at } x \approx \frac{\text{质量 in } [x, x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$



连续的东西，关键是密度！

- 宝剑有密度，机率也可有密度！
- 对随机变数 X 而言，其机率密度：

$$\begin{aligned} \text{PDF: } f_X(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \\ &= F'_X(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \text{ CDF } F_X(x) \Leftrightarrow \text{PDF } f_X(x) \int_{-\infty}^x$$



PDF 跟机率的关系

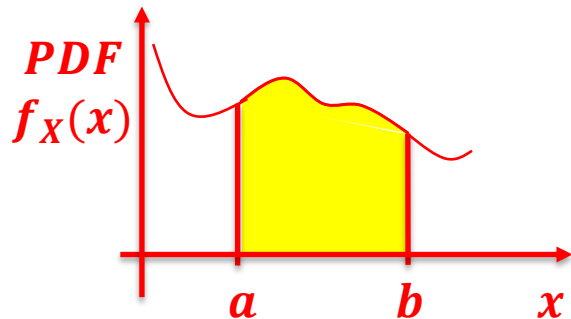
- 因为我们习惯处理机率，看到 PDF 如何把它跟机率连结呢？



$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$$

$$= \int_a^b f_X(x) dx$$

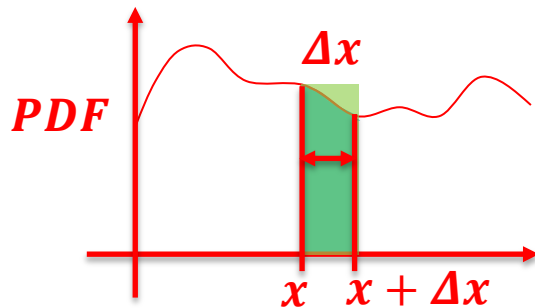


PDF 跟机率的关系

- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$

- 当 Δx 很小时：

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$$



PDF 有哪些性质呢?

- $f_X(x) = F'_X(x)$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- $f_X(x) \geq 0$



本节回顾

- 连续随机变数每点发生机率是？
- 什么是机率密度函数 PDF？
- PDF 跟 CDF 的关系？
- PDF 的性质？





5-2: 连续机率分布 I (CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

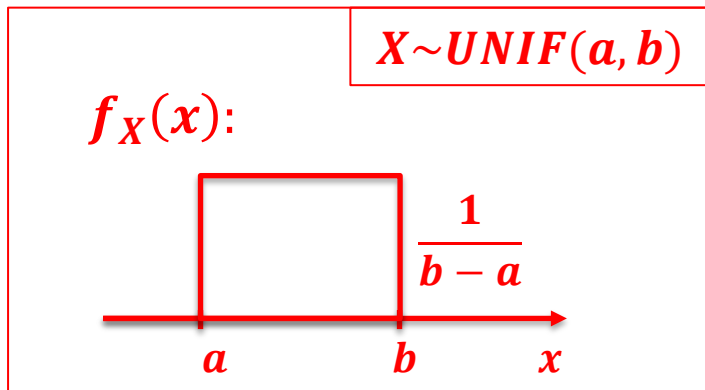
第五周



Uniform 机率分布

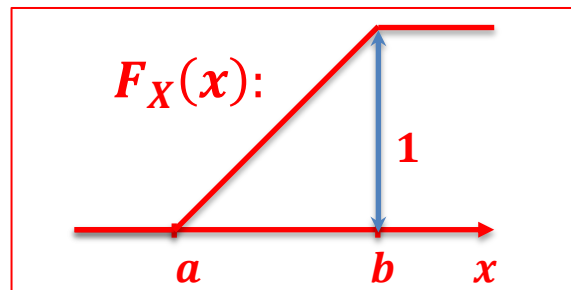
- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



- CDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$
$$= \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Uniform 机率分布

- Ex: 已知1路公交车每十分钟一班。

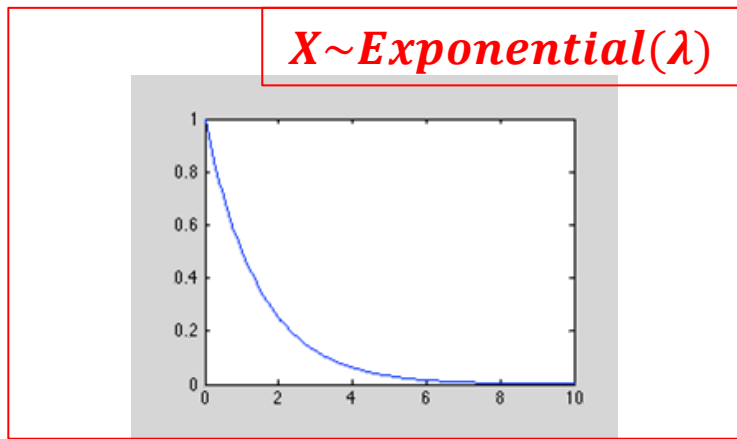
小美随意出发到公车站，小美须等候公交车之时间为 X



Exponential 机率分布

- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



- CDF:

- If $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(u) du \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= - \int_0^x e^{-\lambda u} d(-\lambda u) \\ &= -[e^{-\lambda u}]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x}} \end{aligned}$$

- If $x < 0$: $F_X(x) = 0$.



Exponential 机率分布

- Exponential 分布有失忆的性质 (memoryless)，常被用来 model 有这种性质的事情
 - Ex: 小美出门化妆所需之时间
 - Ex: 某宅打LOL所花的时间



Erlang 机率分布

- $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$

Gamma Distribution



$$\text{PDF: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{※ } f_X(x) = \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) * (\lambda e^{-\lambda x}) * \dots * (\lambda e^{-\lambda x})}_{n \text{ 次 convolution}}$$



Erlang 机率分布



- CDF: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & , x \geq 0; \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$



Erlang 机率分布



- ***Erlang***(n, λ) 常被用来 model 一件有多个关卡事情的总时间，而每个关卡所需时间都是随机的
 - 关卡数： n
 - 每关卡所需时间之机率分布 ***Exponential***(λ)
 - Ex: 打电动过三关所需时间
 - Ex: 写完五科作业所需时间



本节回顾

- Uniform 机率分布？
- Exponential 机率分布？
 - 有失忆性（以后会证明）
- Erlang 机率分布？
 - 跟 Exponential 的关系？

