机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 9-1: 随机变数之和
- 9-2: MGF
- 9-3: 多个随机变数和
- 9-4: 中央极限定理 (万佛朝宗)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-1: 随机变数之和

第九周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$Z = X + Y$ 的机率分布？

- Ex: 老张面店只卖牛肉面跟豆腐脑已知每天的面销量 X 碗与豆腐脑销量 Y 碗的联合机率分布 $p_{X,Y}(x,y)$ 兄弟们约老张收摊后喝酒小聚。老婆规定老张洗完碗后才能赴约。请问老张洗碗数量的机率分布是？

$$p_Z(3) = p(X+Y=3) = \begin{array}{l} p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) \\ p_{X,Y}(0,3) + p_{X,Y}(3,0) \\ \vdots \end{array}$$

如果是处理 一般的问题， 比如X 可能为负数

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, 3-x)$$

若是以Y为主 ->

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(3-y, y)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_Z(z)} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(z-y, y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$Z = X + Y$ 的机率分布？

- Ex: 小明写国文作业的时间 X 与算术作业 Y 的联合机率分布 $f_{X,Y}(x, y)$。兄弟们约小明喝酒小聚老妈规定小明写完作业后才能赴约。请问小明兄弟要等多久时间的机率分布是？

连续随机变量的情况，求和变积分

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z - y, y)\,dy$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X, Y 独立？

$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

摺積

- 离散：$Z = X + Y$

$$p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \underbrace{\sum_{x=-\infty}^{\infty} p_X(x)\cdot p_Y(z-x)}^{\text{discrete convolution}} = \underbrace{\sum_{y=-\infty}^{\infty} p_X(z-y)\cdot p_Y(y)}_{\text{discrete convolution}}$$

$$= p_X(z) * p_Y(z)$$

- 连续：$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx}^{\text{continuous convolution}} = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy}^{\text{continuous convolution}}$$

$$= f_X(z) * f_Y(z)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如果有不只两个随机变量?

- $\boxed{X} = \boxed{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$，

若 $X_1, \ldots, X_n$ 独立

$p_{X_1+X_2}(x)$ $\quad$ $p_{X_1+X_2+X_3}(x)$

(离散): $p_X(x) = \underbrace{\underbrace{p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x)}_{p_{X_1+X_2}(x)} * p_{X_3}(x)}_{p_{X_1+X_2+X_3}(x)} * \cdots * p_{X_n}(x)$

(连续): $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * f_{X_3}(x) * \cdots * f_{X_n}(x)$

- 很复杂，怎么办？MGF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-2: MGF (MOMENT GENERATING FUNCTION)

第九周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎办？

- 先看个例子吧！辛苦的红娘业

小园超宅、小丽超夯
任务：撮合他们
（超难！）

转换：分别送去亚马逊荒野换新的洋名、造型、身分

撮合：一男一女、荒郊野岭周围鬼哭神号，只有营火，和你我的相互依偎！
（超简单！）

逆转换：送他们回文明世界从此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎办？

- 辛苦的 convolution，有法偷懒？

转换：送他们到 s 世界，分别作 MGF 变身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}]$, $\phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}]$

$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_{X_1}(x)$

给定 $p_{X_1}(x)$、$p_{X_2}(x)$

任务：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x)$

（超麻烦！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s)$

（超简单！）

逆转换：从 s 世界送回 x 世界

从此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎办？

- 辛苦的 convolution，有法偷懒？

转换：送他们到 s 世界，分别作 MGF 变身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

给定：$p_{X_1}(x), p_{X_2}(x), \cdots, p_{X_n}(x)$

任务：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x) * \cdots * p_{X_n}(x)$

（超麻烦！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超简单！）

逆转换：从 s 世界送回 x 世界

从此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎办？

- 辛苦的 convolution，有法偷懒？

转换：送他们到 s 世界，分别作 MGF 变身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_{X_1}(x)dx$

给定：$f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \cdots, f_{X_n}(x)$

任务：$f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \cdots * f_{X_2}(x)$

（超麻烦！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超简单！）

逆转换：从 s 世界送回 x 世界

从此在一起了！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF (Moment Generation Function)

- MGF $\phi_X(s)$ 定义：

$$\boxed{\phi_X(s) = E[e^{sX}]} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x) & (离散) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx & (连续) \end{cases}$$

- 逆转换怎么做？

通常靠查表

$p_X(x)$	$\phi_X(s)$

$f_X(x)$	$\phi_X(s)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我说 MGF 为什么叫 MGF 呢？

- 还记得什么叫 moment 吗？ $E[X^n]$ n th moment
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有关系吗？离散 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x)$$

$$\phi_X'(s) = \frac{d}{ds} \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{de^{sx}}{ds}}_{x \cdot e^{sx}} p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\, e^{sx} \cdot p_X(x)$$

- $\phi_X'(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot e^{0 \cdot x} \cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot 1 \cdot p_X(x) = E[X]$ 1st moment
- $\phi_X^{(n)}(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n \cdot e^{sx} \cdot p_X(x)|_{s=0} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n \cdot p_X(x) = E[X^n]$ n th moment

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我说 MGF 为什么叫 MGF 呢？

- 还记得什么叫 moment 吗？ $E[X^n]$
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有关系吗？连续 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\phi'_X(s) = \boxed{\frac{d}{ds}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{de^{sx}}{ds}}}_{xe^{sx}} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

- $\phi'_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot 1 \cdot f_X(x)\, dx = E[X]$
- $\phi^{(n)}_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx \Big|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_x(x)\, dx = E[X^n]$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF 的重要性质

- $Y = aX + b$

$$\phi_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{s(aX+b)}]$$

$$= E[e^{saX} \cdot e^{sb}]$$

$$= \boxed{e^{sb}} \cdot E[e^{\boxed{sa}X}]$$

$$= \boxed{e^{sb}} \cdot \phi_X(as) \quad = \phi_X(as)$$

$$\phi_X(s) = E[e^{\boxed{s}X}]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见离散机率分布之 MGF

$\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$

- $X \sim Bernoulli(p)$: $p_X(0) = 1 - p, p(1) = p$

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = e^{s\cdot 0}\cdot p_X(0) + e^{s\cdot 1}\cdot \underbrace{p_X(1)}_{p}$$
$$= \boxed{1\cdot(1-p) + e^s\cdot p} = 1 - p + pe^s$$

- $X\sim BIN(n,p)$: 作 n 次实验成功次数等于各实验成功次数的总和

$$\Rightarrow X = \boxed{X_1+X_2+\cdots+X_n},\ X_i \text{ 独立},\ X_i\sim Bernoulli(p),$$
$$\phi_{X_i}(s) = 1-p+pe^s$$
$$\Rightarrow \phi_X(s) = \boxed{\phi_{X_1}(s)\cdot\phi_{X_2}(s)\cdots\phi_{X_n}(s)} = [1-p+pe^s]^n$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见离散机率分布之 MGF

- $X \sim Geometric(p)$:

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$$

- $X \sim Pascal(k, p)$: 看到第 k 次成功的花的总实验次数等于第 1 号成功花多少次＋第 2 号成功花多少次＋…＋第 k 号成功花多少次

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, X_i 独立, $X_i \sim Geometric(p)$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdots \phi_{X_k}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^k$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见离散机率分布之 MGF

- $X \sim Poisson\,(\alpha)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim UNIF\,(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续机率分布之 MGF

- $X \sim Exponential(\lambda)$:

$\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim Erlang(n, \lambda)$:

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_i 独立, $\boxed{X_i \sim Exponential(\lambda)}$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdot \cdots \phi_{X_n}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^n$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续机率分布之 MGF

- $X \sim UNIF(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim Gaussian(\mu, \sigma)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-3: 多个随机变数之和

第九周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

独立随机变数之和

- $X_1, X_2, \ldots$ 独立，且各自都有一模一样的机率分布，表示为

$$\{X_i\}\ I.I.D.$$

$$Independently\ and\ Identically\ Distributed$$

- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $\boxed{n \text{ 为常数}}$，请问 X 的机率分布？

离散: $p_X(x) = p_{X_1}(x) * p_{X_1}(x) * \cdots * p_{X_1}(x)$

$p_{X_1}(x)$
$\shortparallel$
$p_{X_i}(x)$

连续: $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_1}(x) * \cdots * f_{X_1}(x)$

$f_{X_i}(x) = f_{X_1}(x)$

$$\phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^{n}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 将太的寿司

- 寿司饭团的理想重量是13公克。将太初当学徒，每次抓饭量为常态分布，期望值是14，标准偏差是3。师父要将太每天练习作 100 个寿司才能休息，做完的寿司都得自己吃掉。请问将太每天吃的饭量的机率分布？

$N(\mu,\sigma^2)$

$\downarrow$ MGF

X_i: 第 i 个寿司的饭量, $\boxed{\{X_i\}\ I.I.D}$

$X_i \sim N(14,9) \Rightarrow \phi_{X_i}(s) = \phi_{X_1}(s) = \boxed{e^{\mu s+\frac{\sigma^2}{2}s^2}} = \boxed{e^{14s+\frac{9}{2}s^2}}$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\Rightarrow \phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^{100} = [e^{14s+\frac{9}{2}s^2}]^{100} = \boxed{e^{1400s+\frac{900}{2}s^2}}$

$\Rightarrow X \sim N(1400, 900), \mu_X = 1400, \sigma_X^2 = 900$

$N(1400, 900)$

μ $\quad$ σ^2

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机个数之独立随机变数和

- $X_1, X_2, \ldots$ I.I.D.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

若 N 本身也为随机变量，其机率分布已知，那 X 的机率分布找的到吗？

N: $p_N(n)$ 已知

$$\Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tilde{s}\,n} \cdot p_N(n)$$

$$\tilde{s} = \ln \phi_{X_1}(s)$$

$X = X_1 + \cdots + X_N$

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = E[e^{sX_1 + sX_2 + \cdots + sX_N}]$$
$$= E[e^{sX_1} \cdot e^{sX_2} \cdot \ldots \cdot e^{sX_N}]$$
$$= E_N\left[E[e^{sX_1}] \cdot E[e^{sX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{sX_N}]\right]$$
$$= E_N\left[[\phi_{X_1}(s)]^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_{X_1}(s))^n \cdot p_N(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\ln(\phi_X(s))\,n} \cdot p_N(n) = \phi_N\Big(\underbrace{\ln\big(\phi_{X_1}(s)\big)}_{\tilde{s}}\Big)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 如果不景气呢？

- 因为不景气，师父的生意有一搭没一搭，没那么多钱让将太挥霍。每天可以练习的寿司数量是由当天生意决定的。每天可以练习的寿司数量是一个 Poisson 分布，期望值为 75；将太功夫依然没有长进，每次抓的饭量为常态分布，期望值是 14 ，标准偏差是 4。请问阿明每天吃的饭量的

机率分布？

$$N \sim POI(75) \Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = \boxed{e^{75(e^{\tilde{s}}-1)}}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,\ \boxed{X_1 \sim N(14, 16)}$$

$$\Rightarrow \phi_{X_1}(s) = e^{14s+8s^2}$$

$$\phi_X(s) = \phi_N\left(\ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)\right) = e^{75\left(e^{\overbrace{\ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)}^{\tilde{s}}}-1\right)} = e^{75\left(\phi_{X_1}(s)-1\right)} = e^{75\left(e^{14s+8s^2}-1\right)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

9-4: 中央极限定理 (万佛朝宗)

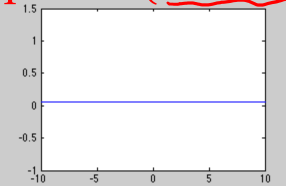
第九周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

$X_1 \sim UNIF(\underbrace{-10, 10})$

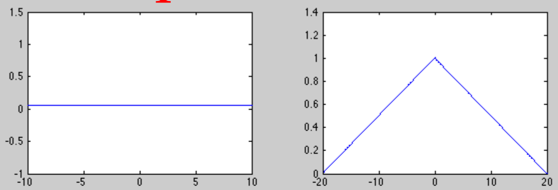


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

X_1 $\qquad$ $X_1 + X_2$

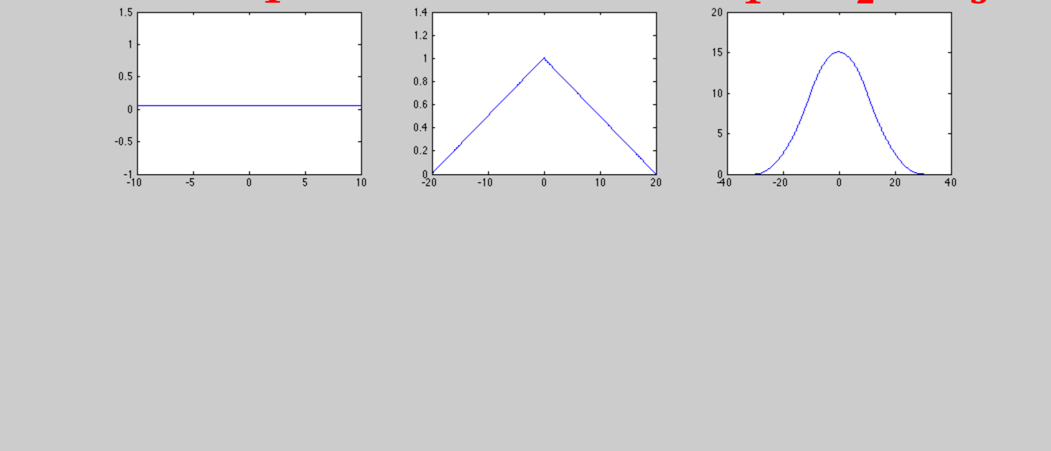


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

X_1 X_1+X_2 $X_1+X_2+X_3$

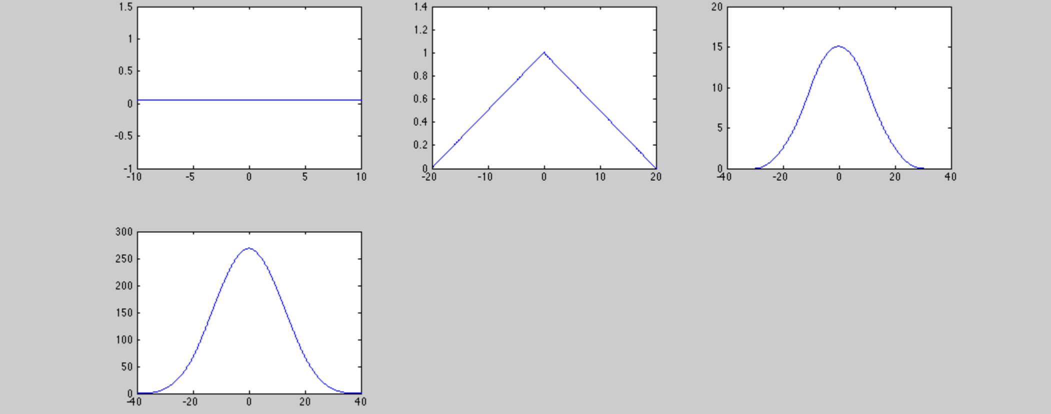


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

X_1 $\qquad$ $X_1 + X_2$ $\qquad$ $X_1 + X_2 + X_3$



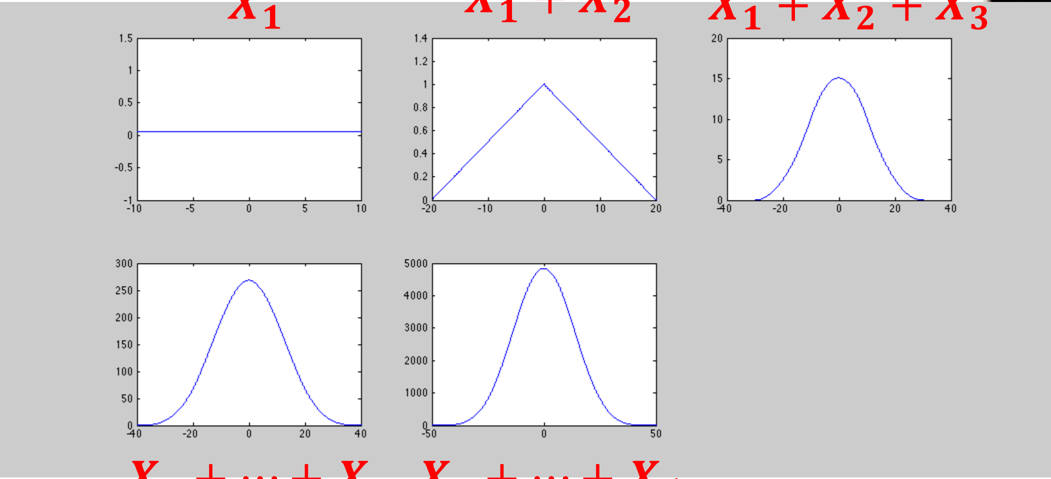
$X_1 + \cdots + X_4$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

X_1 $\quad X_1+X_2$ $\quad X_1+X_2+X_3$



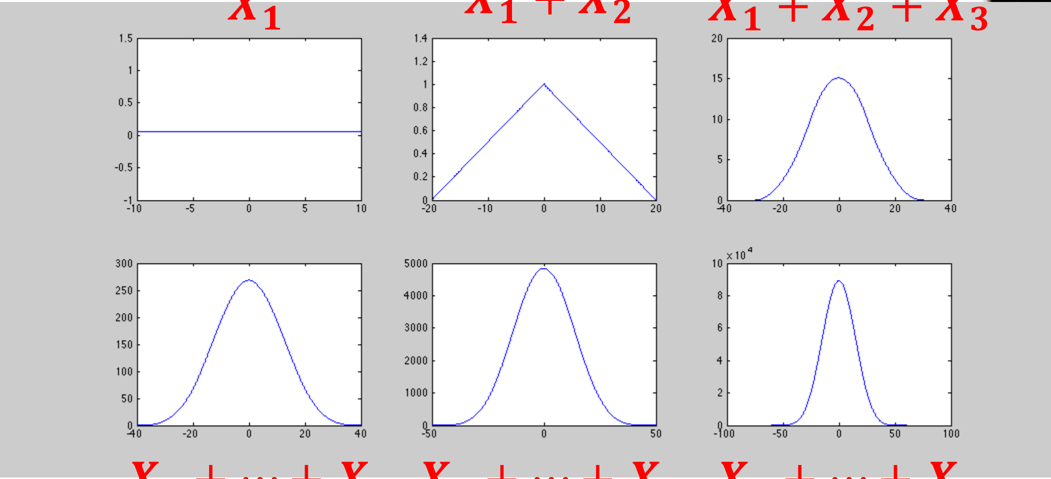
$X_1+\cdots+X_4$ $\quad X_1+\cdots+X_5$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 连续随机变量和

PDF:

X_1 $\quad X_1 + X_2$ $\quad X_1 + X_2 + X_3$

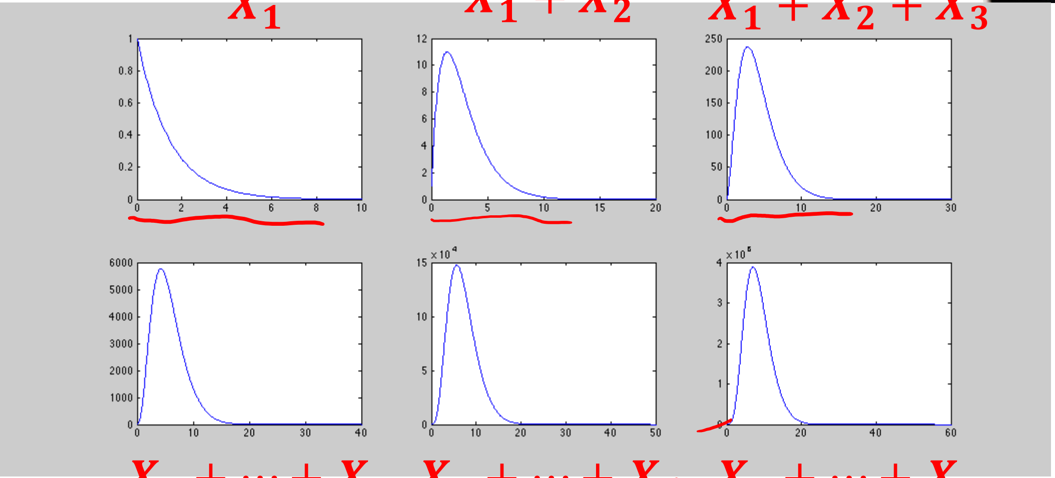


$\underbrace{X_1 + \cdots + X_4}$ $\quad X_1 + \cdots + X_5$ $\quad X_1 + \cdots + X_6$

数个独立 Exponential 随机变数和

PDF:

X_1 $\quad X_1+X_2$ $\quad X_1+X_2+X_3$

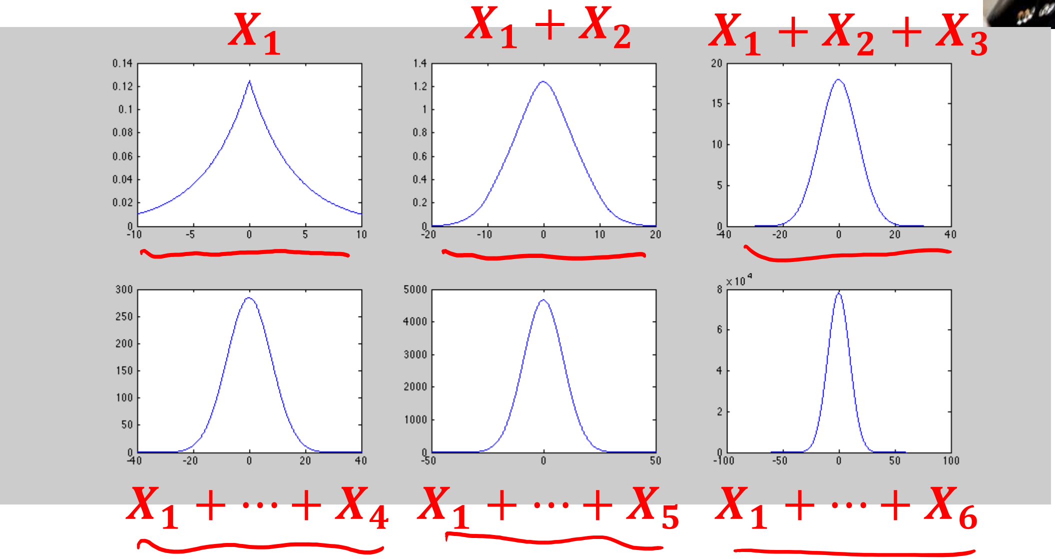


$X_1+\cdots+X_4$ $\quad X_1+\cdots+X_5$ $\quad X_1+\cdots+X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Laplace 随机变数和

PDF:

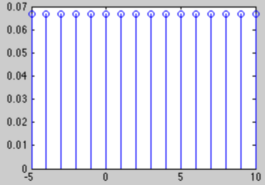


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

PMF:

X_1

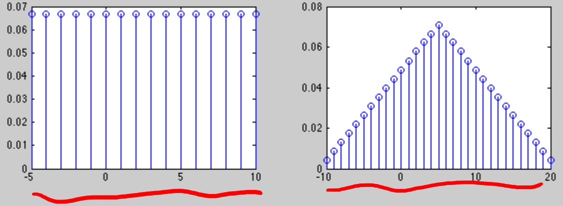


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

PMF:

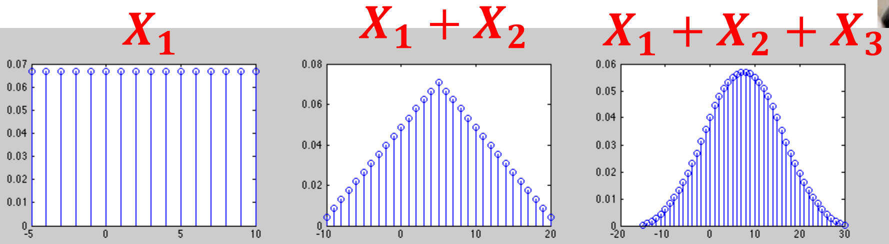
X_1 $\quad\quad$ $X_1 + X_2$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

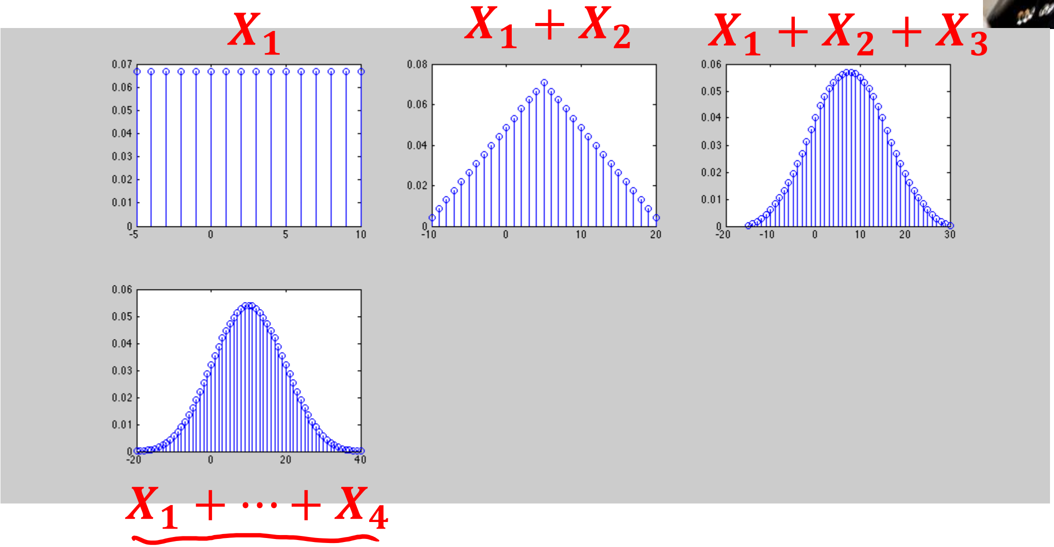
PMF:



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

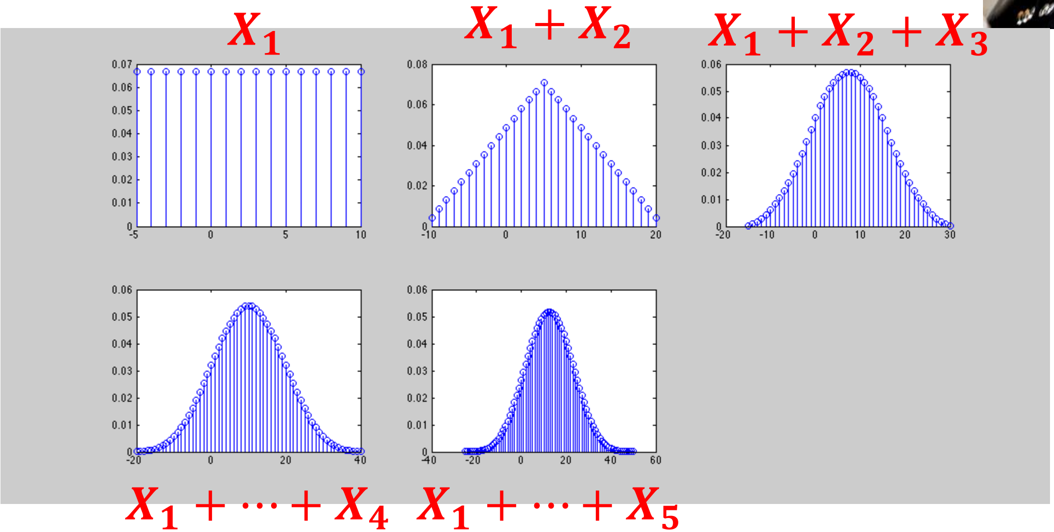
PMF:



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

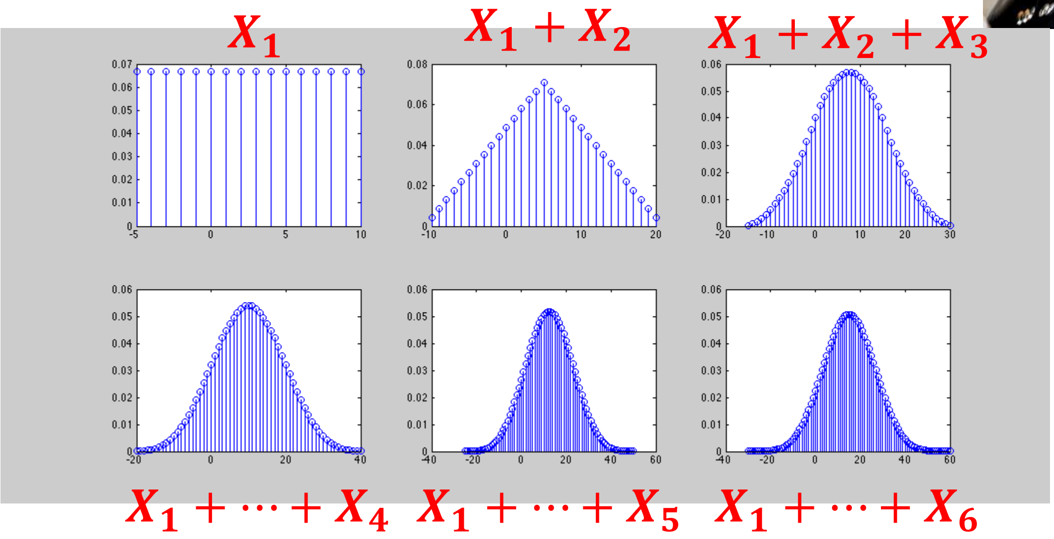
PMF:



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数个独立 Uniform 离散随机变数和

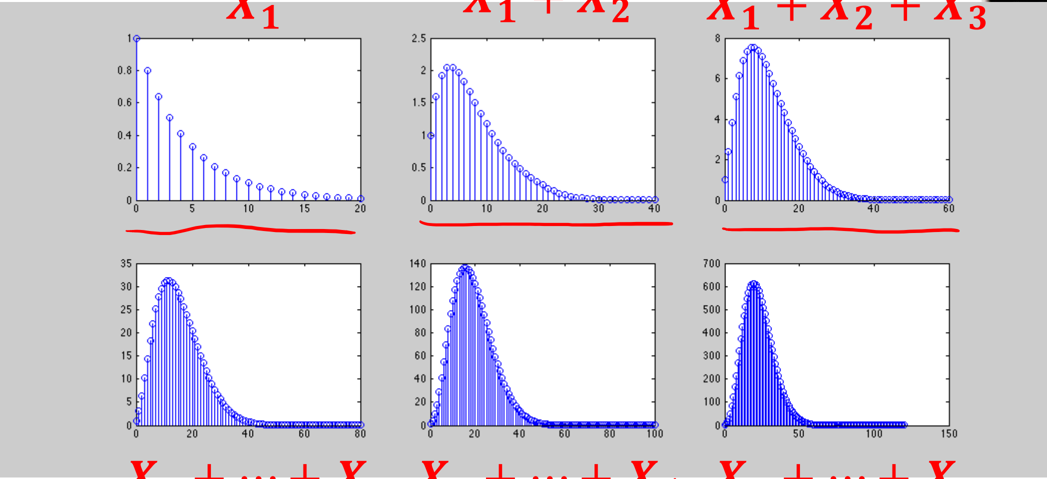
PMF:



数个独立 Geometric 随机变数和

PMF:

X_1 $\quad X_1 + X_2$ $\quad X_1 + X_2 + X_3$



$X_1 + \cdots + X_4$ $\quad X_1 + \cdots + X_5$ $\quad X_1 + \cdots + X_6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央极限定理 (Central Limit Theorem)

- 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 $I.I.D.$ ，

  则当 n 趋近于无穷大时：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n}, \sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n}\right)$$

$$\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \cdots . + \mu_{X_n} = n\mu_{X_1}$$

$$\sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \cdots + \sigma^2_{X_n} = n\sigma^2_{X_1}$$

中央极限定理 (CLT) 的应用

- 当要处理多个独立的随机变量的和时，我们可以 CLT 将其机率分布近似为常态分布后计算机率
- 另若某机率分布等同于多个独立随机变量的和，此机率分布便可以用常态分布近似之，再计算器率

例：$X \sim BIN(100, 0.3)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\{X_i\}\ I.I.D., X_i \sim Berinoulli(0.3)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央极限定理 (CLT) 的应用

- Ex: 天团五五六六有百万粉丝。每位粉丝各自独立，但有 0.2 的机率会买天团发片的 CD。若是天团发精选辑，请问天团精选辑发售超过 200,800 张之机率为何？

$$X \sim BIN(1000000, 0.2) \Rightarrow P(X > 200800) = \sum_{x=200801}^{10^6} \binom{1000000}{x} 0.2^x 0.8^{10^6-x}$$

$$\binom{1000000}{200801} = \frac{1000000!}{200801!\,799199!}$$

$N(0,1)$

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \sim N(0,1)$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000000},\ X_i \sim Bernoulli(0.2) \Rightarrow \mu_{X_1} = 0.2, \sigma_{X_1}^2 = 0.16$$

$$By\ CLT \Rightarrow X \sim N\left(\underbrace{1000000 \cdot \mu_{X_1}}_{\mu_X}, \underbrace{1000000 \cdot \sigma_{X_1}^2}_{\sigma_X^2}\right) \Rightarrow \mu_X = 200000, \sigma_X = 400$$

$$P(X > 200800) = P\left(\frac{X - 200000}{400} > \frac{200800 - 200000}{400}\right) = P(Z > 2) = Q(2) \cong 0.023$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X 是离散的随机变数和…

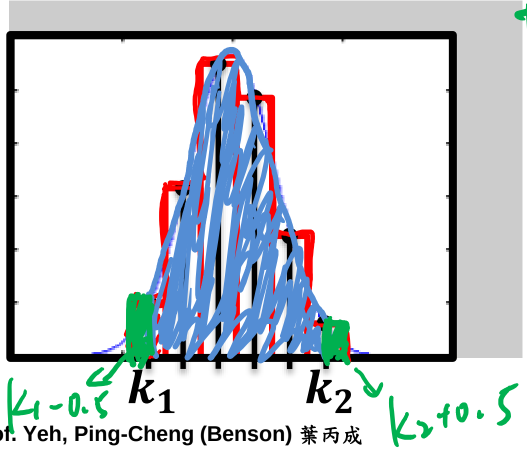
- 我们可以算的更精确！ $X = X_1 + \cdots + X_n$
- De Moivre – Laplace Formula:

$$\boxed{P(k_1 \le X \le k_2)} \approx P\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \le \frac{X - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \le \frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)$$

$$\boxed{\Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)}$$

$$= \boxed{P_X(k_1) + P_X(k_1+1) + \cdots + P_X(k_2)}$$

$$= \boxed{1 \cdot P_X(k_1)} + 1 \cdot P_X(k_1+1) + \cdots + 1 \cdot P_X(k_2)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X 是离散的随机变数和…

- Ex:萱萱为 5566 忠实粉丝，帮粉友去 20 家店买 CD。每家店限购一张，缺货机率 0.5。请问萱萱买到 7 张之机率为？

$$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow p_X(7) = \binom{20}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^{13} = \boxed{0.0739}$$

用中央极限定理估算：

$$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20},$$

$$\{X_i\}\ I.I.D., X_i \sim Bernoulli(0.5), \mu_{X_1} = 0.5, \sigma_{X_1}^2 = 0.25$$

$$\Rightarrow X \sim N(20 \cdot 0.5, 20 \cdot 0.25) = N(10, 5)$$

$$\Rightarrow P_X(7) = P(7 \le X \le 7) = \Phi\left(\frac{7.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{6.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) = \boxed{0.0732}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周回顾

- 随机变数的和的机率分布？
- 为何要学MGF？
- 多个随机变数之和如何找机率分布？
- 中央极限定理(万佛朝宗)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University