机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 4-1: 随机变数
- 4-2: 累积分布函数 CDF
- 4-3: 机率质量函数 PMF
- 4-4: 离散机率分布 I
- 4-5: 离散机率分布 II

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

4-1: 随机变数 (RANDOM VARIABLE)

第四周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

考虑费雯兄的例子：

- 「继前述费雯兄好发废文之例。若根据统计，费雯兄一楼推文不同型态之出现机率为：
  - P(「你妈知道你在发废文吗」) = 0.4
  - P(「见此唉滴必嘘」) = 0.2
  - P(「在五楼...」) = 0.1
  - P(「妈！我在这！」) = 0.3
- P(「妈！我在这！」) = 1 − P(「你妈知道你在发废文吗」) − P(「见此唉滴必嘘」) − P(「在五楼...」) = 0.3
- 你，觉得有什么问题呢？

光写字就累翻了！哥用的可是繁体啊!!!

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

考虑费雯兄的例子：

- 若改为：「继前述费雯兄好发废文之例。根据费雯兄一楼推文，我们会定义 X 为不同值：
  - 「你妈知道你在发废文吗」：$X = 0$
  - 「见此唉滴必嘘」：$X = 1$
  - 「在五楼...」：$X = 2$
  - 「妈！我在这！」：$X = 3$
- 根据统计：
  - $P(X = 0) = 0.4; P(X = 1) = 0.2; P(X = 2) = 0.1; P(X = 3) = 0.3$
- $P(X = 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$
- 跟前面比起来，你觉得如何呢？

这...这...真是太清爽、太给力了啊!!!

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变数
(Random Variable, R.V.)

- 这是一个用来把实验结果 (outcome) 数字化的表示方式
- 目的是可以让机率的推导更数学、更简明
- 前面例子中的 X 就是所谓的随机变数
- 随机变数通常都是用大写的英文字母表示！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

探究它的本质！

- 随机变量的本质是什么？是~~变数~~吗？**函数**
  - 「你妈知道你在发废文吗」：$X = 0$

    $\Rightarrow X($「你妈知道你在发废文吗」$) = 0$
  - 「见此唉滴必嘘」：$X = 1$

    $\Rightarrow X($「见此唉滴必嘘」$) = 1$
  - 「在五楼…」：$X = 2$

    $\Rightarrow X($「在五楼…」$) = 2$
  - 「妈！我在这！」：$X = 3$

    $\Rightarrow X($「妈！我在这！」$) = 3$

随机变数 X 其实是一种函数，喂 X 吃一个 outcome，就吐出一个对应的数字。数学上的表示法：

$$X: S \rightarrow \mathcal{R}$$

随机变数的种类

- 离散随机变数 (Discrete R. V.)
  - Ex: 宅 vs.店员：$\boldsymbol{X}(\text{微笑}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{X}(\text{不笑}) = \mathbf{1}$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}$
  - Ex: 小美选男友：：$\boldsymbol{X}(\text{明}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{X}(\text{华}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{X}(\text{园}) = \mathbf{2}$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}, \boldsymbol{X} = \mathbf{2}$
  - Ex: 小明告白多少次才成功：$\boldsymbol{X}(\mathbf{0}\text{次}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{X}(\mathbf{1}\text{次}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{X}(\mathbf{2}\text{次}) = \mathbf{2}, \ldots$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}, \boldsymbol{X} = \mathbf{2}, \ldots$

离散 R.V. 的值是有限个，或是「可数的」无穷多个

- 连续随机变数 (Continuous R. V.)
  - 幸运之轮：$\boldsymbol{X}$ 可以是 **0** 到 **1** 间内的任意数字

连续 R.V. 的值是有无穷多个，而且是「不可数」的无穷多个

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神马叫可数？神马叫不可数？

- 可数的：一个集合如果是「可数的」这代表它包含的东西是可以一个个被数的。不管用什么方法数它里面的东西，它里面的任何一样东西，总是会被数到的！

例：正偶数集合 $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ 是可数的
随意取一个数字 8928307012374097112379 22
身为有恒心跟课的 MOOC 小子，总有一天会数到它的!!

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神马叫可数？神马叫不可数？

- 不可数的：一个集合若是「不可数的」这代表它包含的东西是无法可以一个个被数的。不管用什么方法数它里面的东西，它里面一定有一样东西是你没数到的！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神马叫可数？神马叫不可数？

重要性质：0 到 1 之间的所有数字的集合是不可数的！

小子：你这废大叔，我超有恒心，绝对可以把这些数字一个个全部数出来。
丙绅：不可能的。假设你真有办法数这集合中所有的数字。你就按照数的顺序，把数字一个个写下来！
小子：写就写！你这废大叔！

$$\begin{array}{l} 0.\boxed{2}5281\ldots \\ 0.3\boxed{8}290\ldots \\ 0.12\boxed{3}75\ldots \\ \quad\vdots \end{array}$$

丙绅抚须笑说：无知小子，你失算啦！有一个数字是你绝对没数到的！
小子：我不信！
丙绅：小子，猖狂！我包你没数到 $0.716\ldots$ (第 N 位数字定为 “$9-$第 N 个被数数字的第 N 位数字”)

小子虎躯一震！这才惊见自身之狂妄无知，才知眼前大叔威能。小子随即跪下恳求丙绅收其为徒，泣言日后必当用心向学。丙绅抚须沉吟...你去 Coursera 注册吧（后话不表）

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

在无穷多的世界很有趣啊！

- 「正整数的集合」跟「正偶整数」的集合相比，哪个集合里面东西比较多？
- 「长度为一的线段上的点」跟「边长为一的正方形上的点」，这两个集合，哪一个点的数量比较多？

都一样多！因为都可以找到一对一对应的方法。
要好好记住！这是跟正妹开启聊天话题的一等素材啊！
是谁说学数学没用的？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变量的函数？

- 阿宅若看到店员微笑，就会点 **\$200** 的套餐。如果店员不笑，他就买 **\$15** 的饮料。请问阿宅的消费金额 W 是随机变数吗？

店员表情可以由随机变量 X 代表： $X(\text{微笑}) = 0, X(\text{不笑}) = 1$

W 是 X 的函数：$W(X(\text{微笑})) = 200, W(X(\text{不笑})) = 15$

所以 W 也是喂 outcome 吐数字！因此 W 也是一个随机变数！

记住：随机变量的函数，也是一个随机变量喔！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 随机变数的目的？
- 随机变数的本质？
- 随机变量的类型？
- 可数 vs. 不可数？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

4-2: 累积分布函数 CDF
(CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

第四周

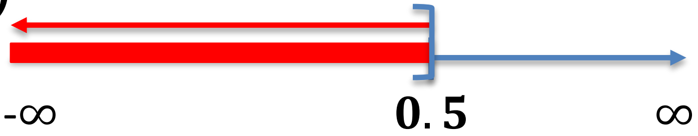
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

啥是累积分布函数 CDF?

- 对任一个随机变数 X ，我们定义其 CDF 为函数：

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x)$$

随机变数



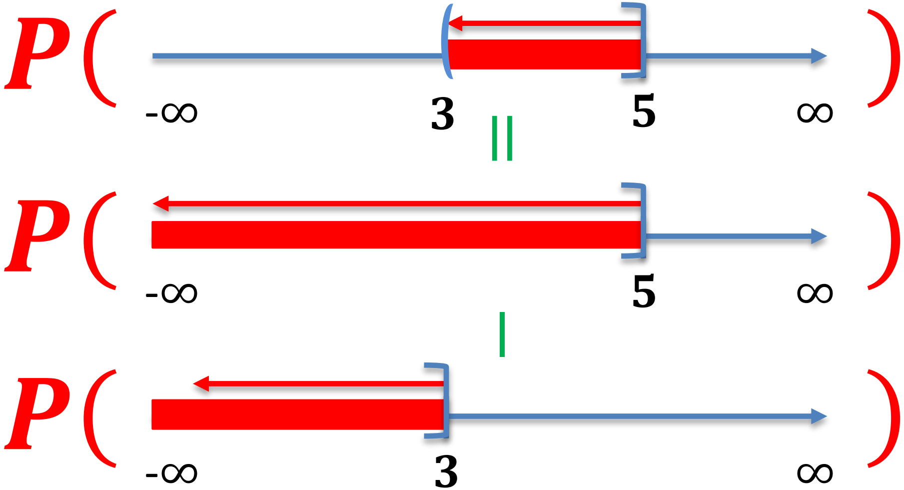
Ex: 幸运之轮

$$F_X(0.5) = P(X \leq 0.5) = \frac{1}{2}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 有什么用？

- 最有用的用途：
  计算 X 落在某范围内的机率



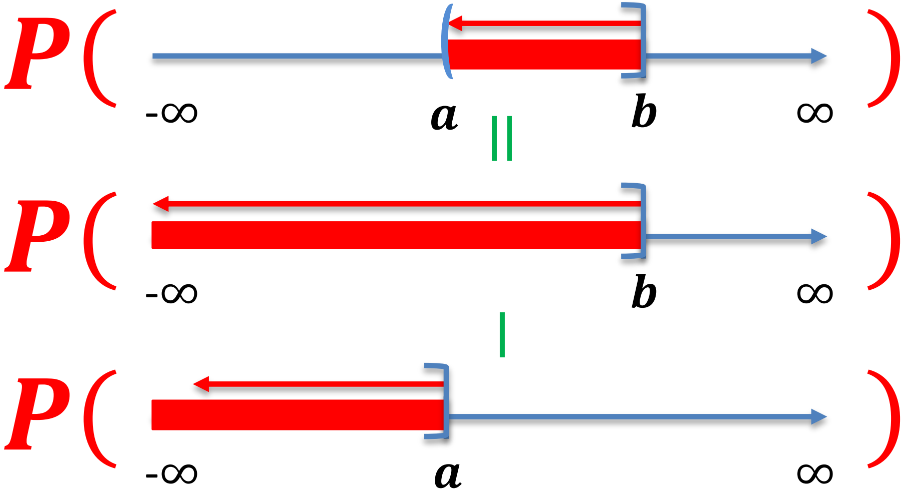
$$
\begin{aligned}
&P(3 < X \leq 5) \\
&= P(-\infty < X \leq 5) \\
&\qquad - P(-\infty < X \leq 3) \\
&= P(X \leq 5) - P(X \leq 3) \\
&= \boxed{F_X(5) - F_X(3)}
\end{aligned}
$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 有什么用？

- 最有用的用途：

  计算 X 落在某范围内的机率



$$P(a < X \le b)$$

$$= \boxed{F_X(b) - F_X(a)}$$

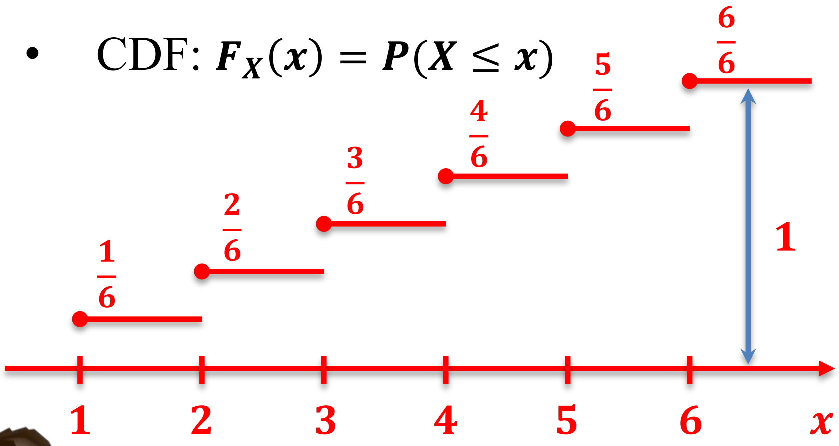
$$P(a \le X \le b)$$

$$= \boxed{F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散随机变数的 CDF 长怎样？

- Ex: X 为骰子的点数，故 $P(X=1)$
  $= P(X=2) = P(X=3) = P(X=4)$
  $= P(X=5) = P(X=6) = 1/6$
- CDF: $F_X(x) = P(X \le x)$



$\boxed{P(a < X \le b)} = \boxed{F_X(b) - F_X(a)}$

– $P(3 < X \le 5)$

$= F_X(5) - F_X(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$

– $P(3 < X < 5)$

$= P(3 < X \le 5^-)$

$= F_X(5^-) - F_X(3) = F_X(5) - P(X=5) - F_X(3) = \frac{1}{6}$

– $P(3 \le X < 5) =?$

– $P(3 \le X \le 5) =?$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续随机变数的 CDF 长怎样？

- Ex: $\boldsymbol{X}$ 为幸运之轮所停下的数字，$\boldsymbol{X} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})$
  - CDF: $\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leq x)}$

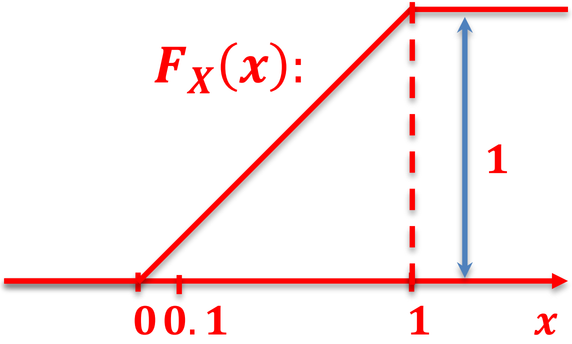
$\boldsymbol{F_X(-0.1) = P(X \leq -0.1) = 0}$

$\boldsymbol{F_X(0.1) = P(0 \leq X \leq 0.1) = 0.1}$

$\boldsymbol{F_X(0.5) = P(0 \leq X \leq 0.5) = 0.5}$

$\boldsymbol{F_X(1) = P(0 \leq X \leq 1) = 1}$

$\boldsymbol{F_X(1.7) = P(0 \leq X \leq 1.7) = 1}$



- $\boldsymbol{P(0.3 < X \leq 0.5)}$
  $\boldsymbol{= F_X(0.5) - F_X(0.3) = 0.5 - 0.3 = 0.2}$
- $\boldsymbol{P(0.3 < X < 0.5)}$
  $\boldsymbol{= F_X(0.5^-) - F_X(0.3) = 0.5 - 0.3 = 0.2}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 的性质

- 离散随机变数之 CDF：

$$F_X(x^+) = F_X(x)$$

$$F_X(x^-) = F_X(x) - P(X = x)$$

- 连续随机变数之 CDF：

$$F_X(x^-) = F_X(x) = F_X(x^+)$$

- 共同性质
  - $F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$
  - $F_X(\infty) = P(X \leq \infty) = 1$
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$

本节回顾

- CDF 的定义?
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- CDF 的用途?
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- CDF 的性质?

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

4-3: 机率质量函数 PMF (PROBABILITY MASS FUNCTION)

第四周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

啥是机率质量函数 PMF？

- 对任一个整数值的离散随机变数 X，我们定义其 PMF 为函数：

$$p_X(x) \overset{\text{def}}{=} P(X = x)$$

Ex: X 为公平骰子之点数

$$p_X(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PMF 跟 CDF 的关系？

$$F_X(2.5) = P(X \leq 2.5)$$

$$= P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) + P(X = -1) + \cdots$$

最接近 2.5 且不大于 2.5 的整数

$$= \sum_{n=-\infty}^{2=\lfloor 2.5 \rfloor} P(x = n)$$

对任何 x：

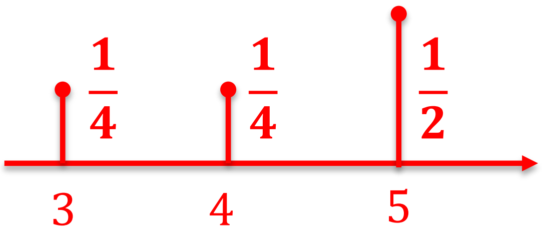
$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

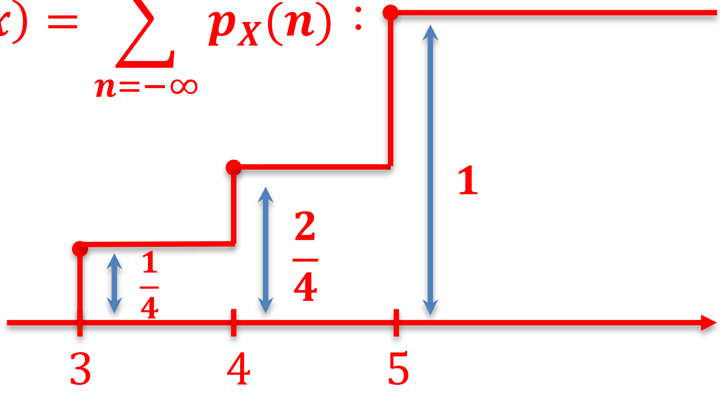
PMF 跟 CDF 的关系？

- Ex: PMF ➔ CDF

$P_X(x)$：



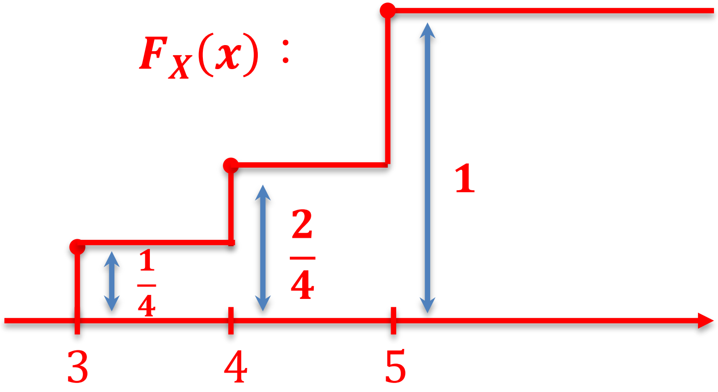
$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$：



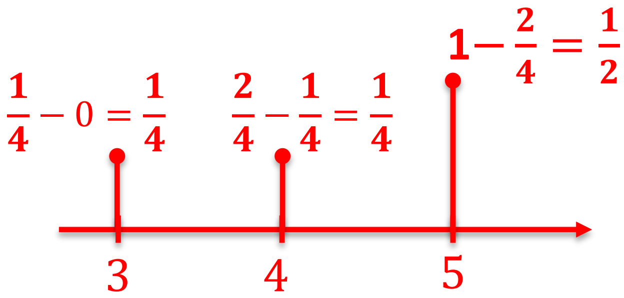
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PMF 跟 CDF 的关系？

- Ex: CDF ➔ PMF



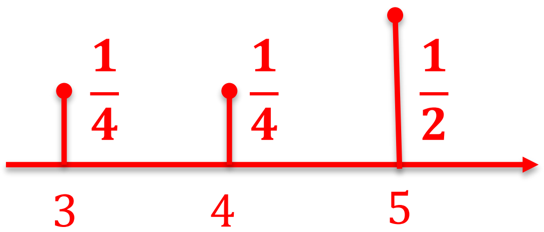
$P_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-)$：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率分布 (Probability Distribution)

- 任何一个 PMF（或是之后介绍的 PDF）都称作是一种**机率分布**（将总和为 1 的机率分布在点上之故）



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- PMF的定义？
- PMF 跟 CDF 的关系？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

4-4: 离散机率分布 I
(DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第四周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下...

- 丢掷铜板：非正面，即反面，正面机率为 0.5
- 阿宅告白：非成功，即失败，成功机率为 0.7
- 出门天气：非晴天，即雨天，晴天机率为 0.6

1 次实验，2 种结果。
在意某结果发生否 → Bernoulli 机率分布

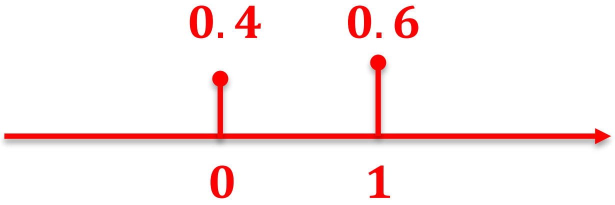
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Bernoulli 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 **0.6**
  作 **1** 次实验，***X*** 表成功次数

$X \sim Bernoulli(0.6)$

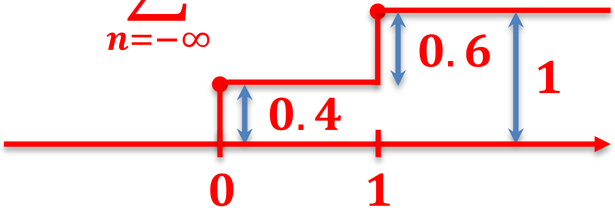
$P_X(x)$:



$$p_X(x) = \begin{cases} 0.6 & , x = 1, \\ 0.4 & , x = 0, \\ 0 & , otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$



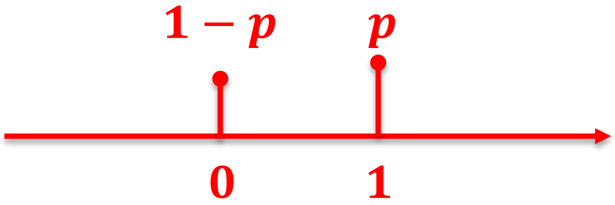
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ 0.4 & , 0 \le x < 1, \\ 1 & , x \ge 1. \end{cases}$$

Bernoulli 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 p
  作 1 次实验，X 表成功次数

$X \sim Bernoulli(p)$

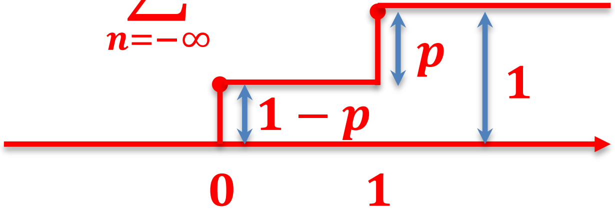
$P_X(x)$:



$$p_X(x) = \begin{cases} p & , x = 1, \\ 1-p & , x = 0, \\ 0 & , otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ 1-p & , 0 \le x < 1, \\ 1 & , x \ge 1. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下…

- 阿宅鼓起勇气搭讪 10 人，若每次搭讪成功机率为 0.6，10 次成功 8 次的机率为？
- 一周 5 天午餐在晓福买魔石汉堡，若每次制作超时机率为 0.9，5 天中有 3 天制作超时的机率为？
- 一周有 3 系夜，在活大乱停车 3 次，若每次遭阿伯拖之机率为 0.8，那这 3 次被拖 2 次之机率为？

作 n 次实验，1 个机率，在意 n 次实验出现某结果 k 次之机率→ Binomial 机率分布

Binomial 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 **0.6** 作 **10** 次实验， X 表成功次数

$X \sim BIN(10, 0.6)$

$p_X(8)$

$= P(X = 8)$

$\#成功 = 8$

$\#失败 = 10 - 8$

$$= \binom{10}{8} 0.6^8 (1 - 0.6)^{10-8}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} \binom{10}{m} \cdot 0.6^m \cdot (1 - 0.6)^{10-m}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Binomial 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 p 作 n 次实验，X 表成功次数

$X \sim BIN(n,p)$

$$p_X(x)$$

$$= P(X = x)$$

#成功 $= x$

#失败 $= n - x$

$$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下…

- 丢公平骰：1 到 6 各点数出现机会均等
- 混哥考试：作答 A, B, C, D 机会均等
- 狡兔三窟：出现在窟 1、窟 2、窟 3 机会均等

1 次实验，n 种结果，各结果机率均等。
在意某结果发生否 → Uniform 机率分布

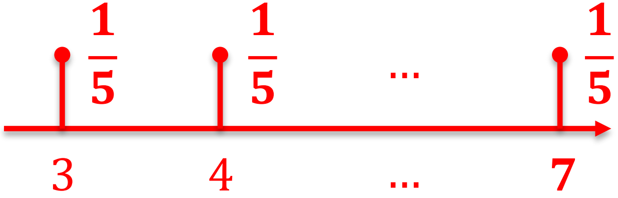
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 机率分布

- PMF: 如果 X 等于 $3,4,\ldots,7$ 的机率均等

$P_X(x)$:

$X \sim UNIF(3,7)$



$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7-3+1} = \dfrac{1}{5}, & x = 3,4,\ldots,7, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < 3, \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor - 3 + 1}{5} & , 3 \le x \le 7, \\ 1 & , x > 7. \end{cases}$$

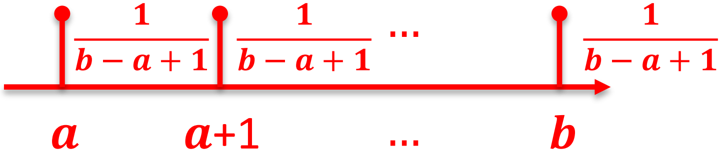
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 机率分布

- PMF: 如果 X 等于 $a, a+1 \dots, b$ 的机率均等

$P_X(x)$：

$\boxed{X \sim UNIF(a,b)}$



$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1}, & x = a, a+1, \dots, b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < a, \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor - a + 1}{b-a+1} & , a \le x < b, \\ 1 & , x \ge b. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

学机率分布有何用？

- 很多事物背后机率模型是未知的
- 对事物的运作方式、本质清楚后，若跟某机率分布的本质相同或是接近，我们便可采用该机率分布来近似、模拟该事物的运作
- 在这近似、仿真的机率模型上，便可以开始估算各式各样事件的机率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 机率分布？
- Bernoulli 机率分布？
- Binomial 机率分布？
- Uniform 机率分布？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

4-5: 离散机率分布 II
(DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第四周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下…

- 阿宅告白：成功机率为 0.3，不成功誓不休。问到第 5 次才告白成功之机率？
- 孙文革命：成功机率为 0.1，不成功誓不休。问到第 11 次才成功之机率？
- 六脉神剑：那纠缠狂妈宝废物段誉每次要打出六脉神剑，打的出来的机率为 0. 1。他在 10 次才打出六脉神剑的机率？

实验中出现某结果机率已知，重复操作实验至该结果出现为止。在意某结果是在第几次实验才首次出现→ Geometric 机率分布

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 0.1。他在第 10 次才打出六脉神剑的机率？

败 败 败 败 败 败 败 败 败 成

$$\Rightarrow \text{机率} = 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.1$$
$$= 0.9^9 \times 0.1$$

※ 不是老师爱吐槽，我觉得机率应该是... 0

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 p 。他在第 X 次尝试才成功打出六脉神剑。 $X=x$ 的机率？

$\underbrace{\text{败 败 败 败 败 败 败 … 败}}_{x-1}$ 成

$\Rightarrow$ 机率 $=(1-p)^{x-1}\times p$

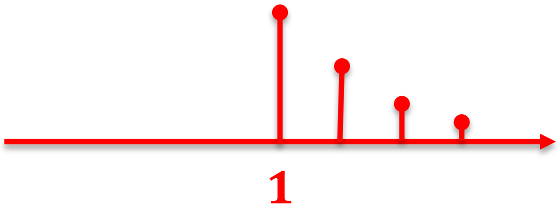
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 机率分布 有失忆性！

- PMF: 若实验成功机率为 p，尝试到成功为止，作了 X 次尝试

$X \sim Geometric(p)$

$P_X(x)$:



$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} x \geq 1: \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^{n-1} p = p \cdot \frac{1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}}{1-(1-p)} \\ x < 1: \ 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} & , x \geq 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下...

- 自尊阿宅：阿宅邀约店员失败机率为 0.9，若邀约失败达 4 次，阿宅便会自尊有损而放弃追求。问在阿宅第 7 次邀约时决定放弃追求之机率？
- 六脉神剑：妈宝废物段誉每次打成功 5 次六脉神剑便功力耗尽。若每次打的出来的机率为 0. 1。请问他在第 9 次时刚好功力耗尽的机率？

实验中出现某结果机率已知，重复操作实验至该结果出现第 k 次为止。在意到底在第几次实验才结束→ Pascal 机率分布

Pascal 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 0.1。成功 5 次便功力耗尽。请问他在第 9 次时刚好功力耗尽的机率？

可能情况之一：败 成 败 成 败 成 成 败 成

$$\Rightarrow \text{此情况机率} = 0.9 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1$$
$$= 0.9^4 \times 0.1^5$$

刚好第 9 次才成功第 5 次的情况有几种？$\binom{8}{4}\binom{1}{1} = \binom{8}{4}$

$$\Rightarrow \text{所求机率} = \binom{8}{4} \times 0.9^4 \times 0.1^5$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Pascal 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 p。成功 k 次便功力耗尽。他在第 X 次尝试才成功打出 k 次六脉神剑。$X = x$ 的机率？

可能情况之一：$\underbrace{\text{败 成 败 成 败 成 成 败 …}}_{x-1}$ 成

$\Rightarrow$ 此情况机率 $= (1-p)^{x-k} \times p^k$

刚好第 x 次才成功第 k 次的情况有几种？$\binom{x-1}{k-1}\binom{1}{1} = \binom{x-1}{k-1}$

$\Rightarrow$ 所求机率 $= \binom{x-1}{k-1} \times (1-p)^{x-k} \times p^k$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Pascal 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 $\boldsymbol{p}$，试到第 $\boldsymbol{k}$ 次成功为止共作了 $\boldsymbol{X}$ 次

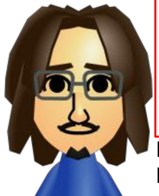
$X \sim Pascal(k, p)$

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k & , x = k, k+1, \ldots \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
$$= P(\text{第 } k \text{ 次成功在第 } x \text{ 次以前发生})$$
$$= P(\text{在 } x \text{ 次实验中} \geq k \text{ 次成功})$$
$$= P(Y \geq k), Y \sim BIN(x, p)$$

※故 *Pascal* 又称作 *Negative Binomial*



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下…

- 转角夜宵：在晚上平均每小时会有 10 人来跟转角哥买夜宵。问摆摊 5 小时有 60 人光顾之机率？
- 费雯被嘘：费雯兄 po 文后，平均每分钟会有 5 人嘘之。问发文后二十分钟变成 XX (100 嘘) 之机率？

某结果出现之平均速率（rate: 次数/时间）已知。问持续观察某时间长度后，看到该结果出现 *k* 次之机率？→ Poisson 机率分布

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 机率分布

- PMF: 已知某事发生速率为每单位时间 λ 次，观察时间为 T 时间单位。X 为该观察时间内发生该事的总次数。则：

$X \sim POI(\lambda T)$

$$p_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{(\lambda T)^x}{x!}$$

※ $\boxed{\mu = \lambda T}$, $X \sim POI(\mu) \Rightarrow P_X(x) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^x}{x!}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 机率分布

- CDF:

$$X \sim POI(\lambda T)$$

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^n}{n!}, & x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 机率分布

- 费雯被嘘：费雯兄 po 文后，平均每分钟会有 5 人嘘之。问发文后 20 分钟变成 XX (100 嘘) 之机率？

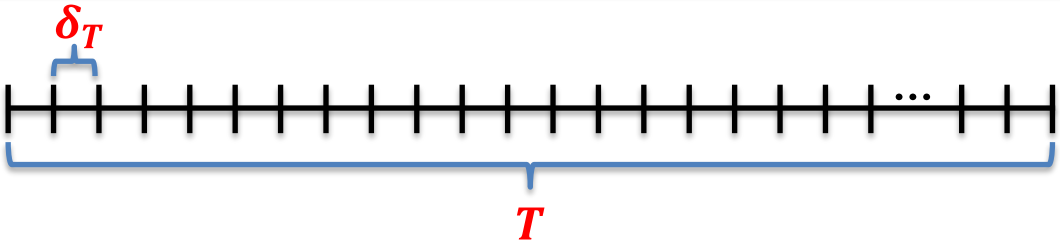
$\lambda = 5$ 嘘/分，若定义随机变量 X 为 20 分钟内的嘘数

$$\Rightarrow X \sim POI(\lambda T) = POI(100)$$

$$\Rightarrow p_X(100) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{\lambda T^{100}}{100!} = e^{-100} \cdot \frac{100^{100}}{100!}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 是怎么来的？



将 T 切成长度为 δT 的极小段

$\delta T \to 0 \Rightarrow$共有 $n = \frac{T}{\delta_T} \to \infty$ 个小段。若发生速率为 λ 次/分，每个小段会发生的机率 $p = \lambda\delta_T = \frac{\lambda T}{n}$.

故 T 时间内发生的次数 $X \sim BIN(n,p) = BIN\left(n, \frac{\lambda T}{n}\right)$.

$$\lim_{\delta_T \to 0} p_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \frac{(\lambda T)^x}{n^x}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}(\lambda T)^x \left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-x} = \frac{(\lambda T)^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n} = \frac{(\lambda T)^x}{x!}e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow X \sim POI(\lambda T)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

你也懂 Poisson？略懂、略懂

- 草船借箭：曹军落箭平均密度为每尺见方三矢。诸葛孔明于船上置放草人六百。各草人正面面积为六尺见方。周瑜问诸葛孔明可借得万箭机率为何？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- Geometric 机率分布？
- Pascal 机率分布？
- Poisson 机率分布？
  - 跟 Binomial 的关系？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University