

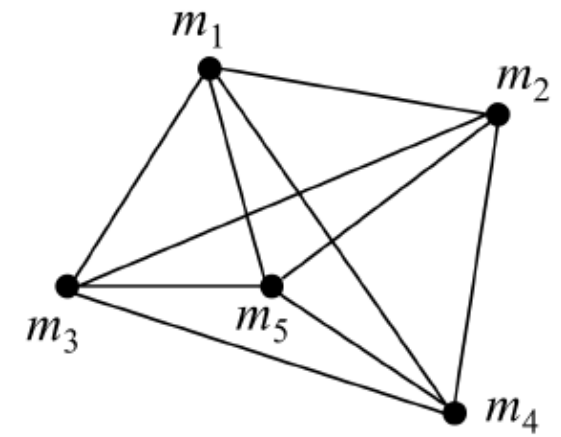
Mecánica de los Cuerpos Rígidos

MECANICA RACIONAL - 2019

Cuerpo rígido: conjunto de partículas masivas sometidas a vínculos holonómicos que mantienen fijas las distancias relativas (idealmente).

Las distancias entre las partículas **no cambian**.

Buena aproximación para la mayoría de los cuerpos macroscópicos (de interés en Física e Ingeniería) en movimiento generado por **interacciones mutuas o fuerzas externas**.



GRADOS DE LIBERTAD = $3 \cdot N$ partículas - #Vínculos holónomos
distancias constantes

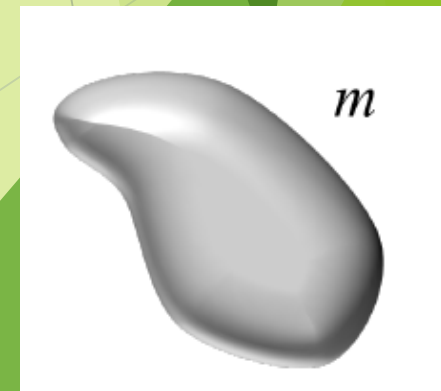
Esta reducción permite tratamiento accesible del problema con:

- Conjunto finito de partículas materiales
- Continuo de infinitos puntos materiales caracterizados por una densidad de masa ρ .
Para el calculo de la masa:

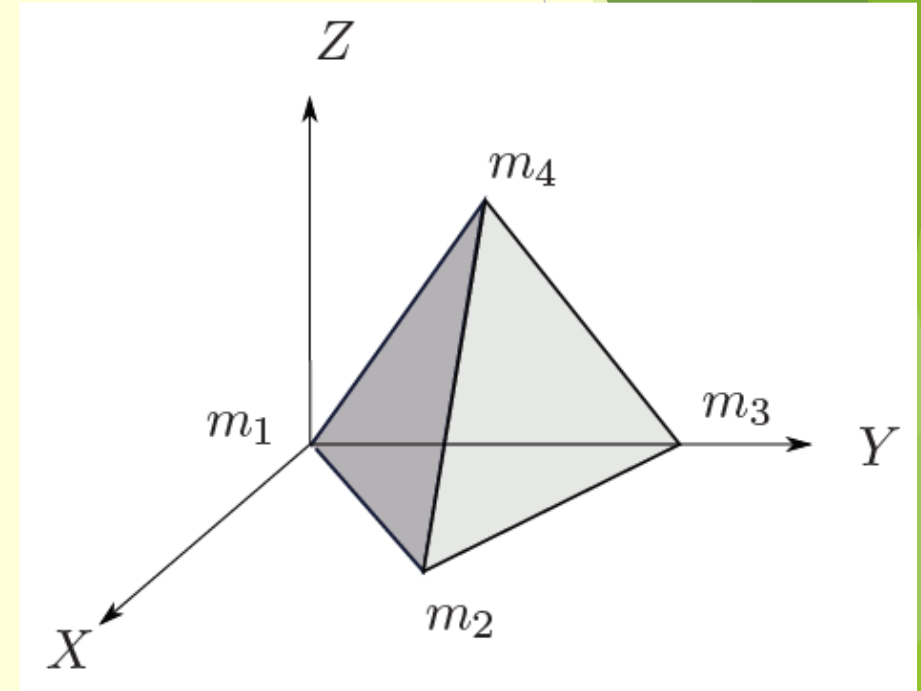
$$m = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \rightarrow m = \int \rho(r) dr$$

Para la posición del CM:

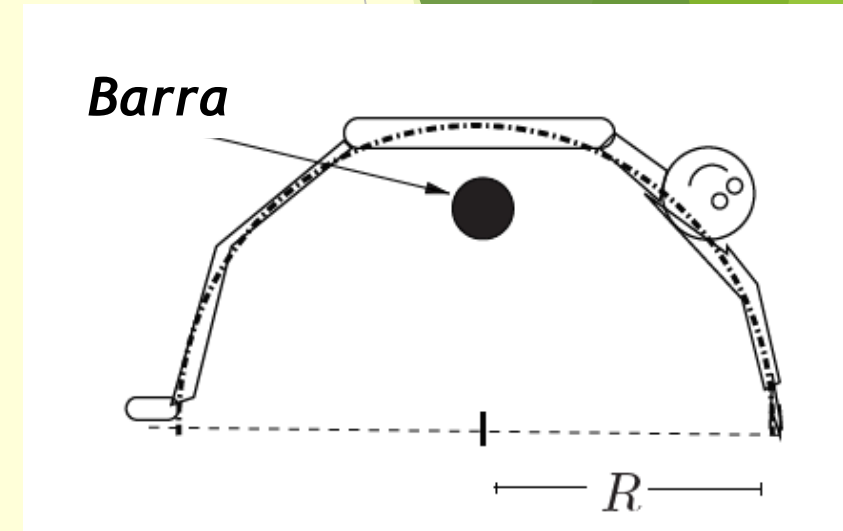
$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \rightarrow \vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$



Un sistema posee 4 partículas de masa m están situadas según se muestra en la figura. Las aristas del tetraedro miden a . En este sistema: $\vec{r}_1 = (0,0,0)$, $\vec{r}_2 = (a\sqrt{3}/2, a/2, 0)$, $\vec{r}_3 = (0, a, 0)$ y $\vec{r}_4 = (a\sqrt{3}/6, a/2, a\sqrt{6}/3)$. Calcular la posición del centro de masas.



Un deportista realiza un salto en alto. Determinar el centro de masa del deportista suponiendo que el saltador en el aire toma la forma de la figura.



La posición de un punto (O) del cuerpo con respecto a un sistema de referencia inercial requiere **tres grados de libertad**, r_O .

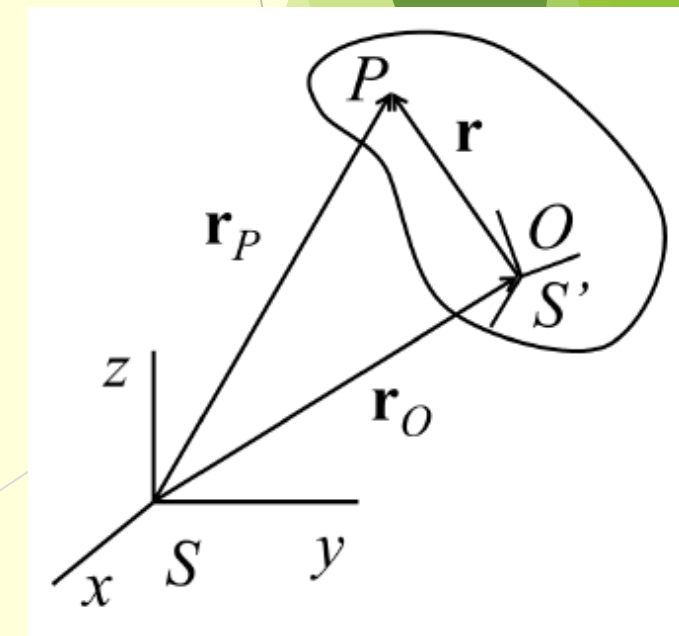
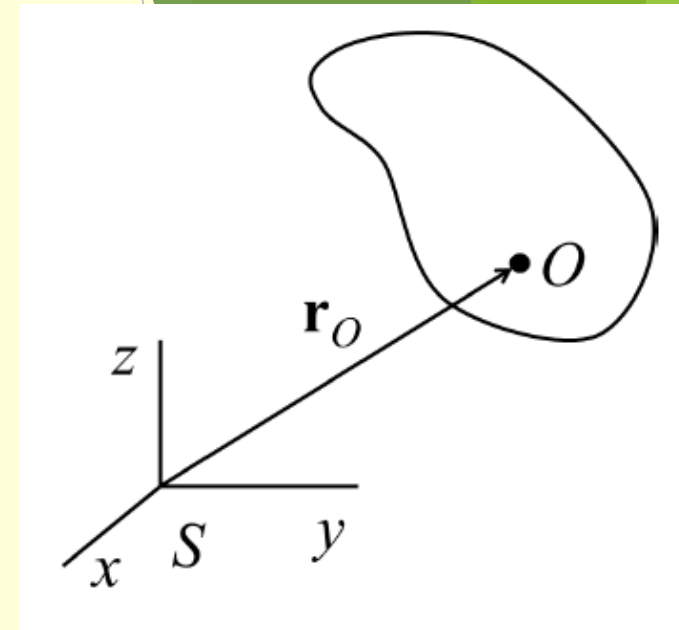
Dado r_O , la posición de todos los demás puntos del cuerpo está determinada por la **orientación** del cuerpo en el espacio \Rightarrow por 3 ángulos con respecto a los ejes de un sistema S .

En definitiva, son **6 grados de libertad**.

Las coordenadas de los puntos del cuerpo rígido son constantes en un sistema fijo al cuerpo \Rightarrow Se usará un **sistema fijo al cuerpo** para muchos cálculos.

El sistema fijo al cuerpo estará en general **acelerado** con respecto al inercial S , así que aparecerán fuerzas inerciales en los cálculos.

- Sistema inercial $S = (x; y; z)$
- Sistema fijo al cuerpo $S' = (x'; y'; z')$
- Punto P en el cuerpo con coordenadas en S (con r_P) y en S' (con r). La relación entre ambas coordenadas: $r_P = r_O + r$



Velocidad angular ω :

Si un cuerpo rígido cambia su posición infinitesimalmente $\Rightarrow r_P$ cambia.

La posición del cuerpo está determinada por la **posición de un punto cualquiera** (O) y una **orientación**.

El desplazamiento infinitesimal de P es un **desplazamiento infinitesimal** de O más una **rotación infinitesimal**:

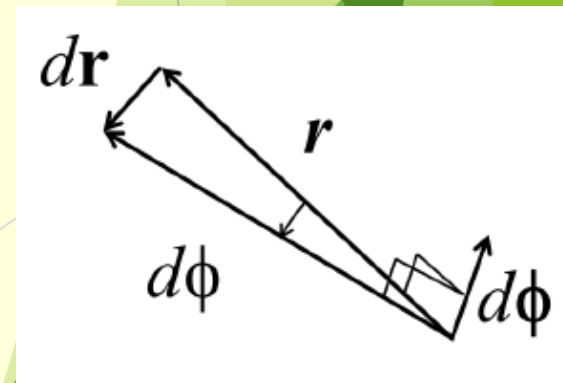
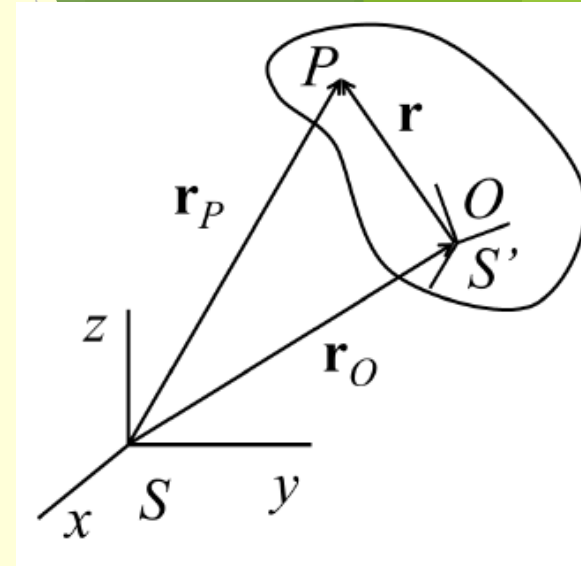
$$dr_P = dr_O + dr \quad \text{donde } dr = d\phi \times r \Rightarrow dr_P = dr_O + d\phi \times r$$

Considerando que esto se da en un dt :

$$\frac{dr_P}{dt} = \frac{dr_O}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times r \Rightarrow \boxed{v_P = v_O + \omega \times r}$$

donde $r = r_{OP}$ (posición de P respecto de O)

Relación de la v entre dos puntos con la distancia entre ellos y el movimiento de rotación: es un **Campo de velocidades**



¿Qué pasa si se cambia el origen del punto O a O' ?

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \quad (1) \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$$

Originalmente: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' + \mathbf{a})$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \left(\underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}}_{\mathbf{v}_{O'}: \text{es la velocidad en } O'} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

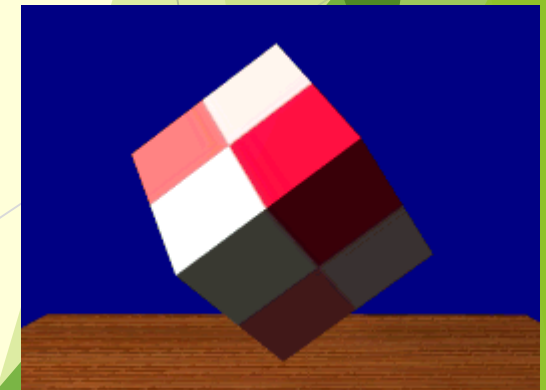
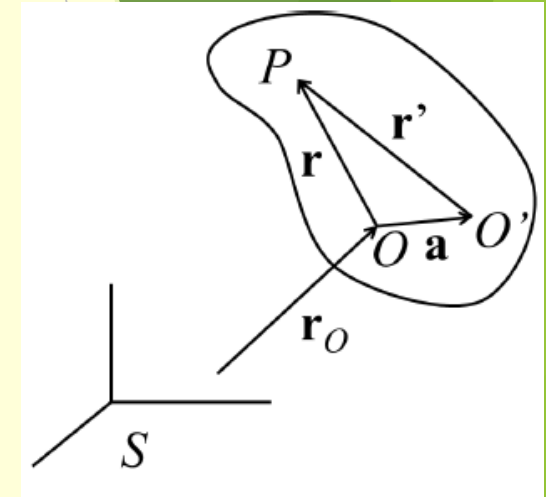
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (2)$$

Como (1) = (2): $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$

$\boldsymbol{\omega}$ es independiente de la elección del origen del sistema S'

$\boldsymbol{\omega}$ es la **velocidad angular del cuerpo rígido**

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Vimos que $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de la elección del origen del sistema S'

$\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del **cuerpo rígido**. Esto **no** puede afirmarse para un **cuerpo no rígido**

¿Que punto elegir como origen del cuerpo rígido?

Para determinar la velocidad de un punto del cuerpo rígido, se puede elegir el origen del sistema S' . Hay dos situaciones generales:

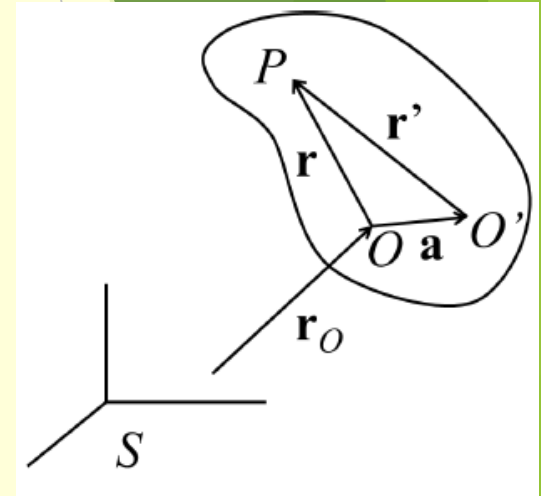
- Si el cuerpo presenta un **punto estático** (aunque sea instantáneamente estático, por ejemplo rodadura), se elige O como referencia, y $\mathbf{v}_O = 0$.
- Si el cuerpo no tiene ningún punto estático, se elige **O en el centro de masa**, y $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{CM}$.

A veces conviene elegir algún otro punto particular que simplifique el planteo. Depende de cada caso en particular.

Se eligen las seis coordenadas generalizadas utilizando un sistema de ejes cartesianos **solidario al cuerpo y otro independiente**.

La posición del cuerpo queda totalmente definida por:

- **Tres coordenadas del origen de la terna solidaria S'**
- **Tres ángulos** que definen la orientación de esta terna respecto del **sistema coordenado inercial S** elegido, que es externo al cuerpo.



El cuerpo rígido visto desde “arriba”, a lo largo de la dirección de ω .

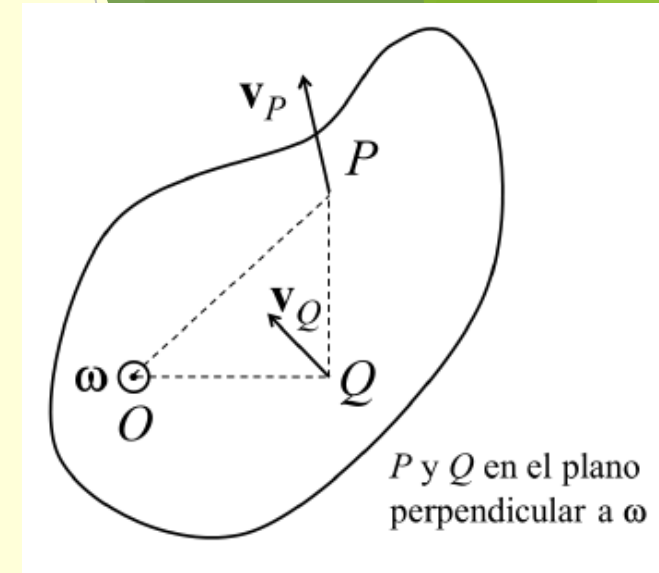
Suponga “rodajas” del cuerpo, perpendiculares al eje instantáneo de rotación (la dirección de ω).

En cada una de estas rodajas puede encontrarse un **punto estático** ($\mathbf{v}_O = 0$)

La velocidad de un punto cualquiera Q de cada rodaja satisface: $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v}_Q \perp \omega$

Las velocidades de cualquier punto Q de cada rodaja están en **un mismo plano** que es \perp a ω .

Por otro lado, los puntos estáticos de todas las rodajas están alineados y forman el **eje de rotación** (instantáneo, ya que puede ir cambiando).



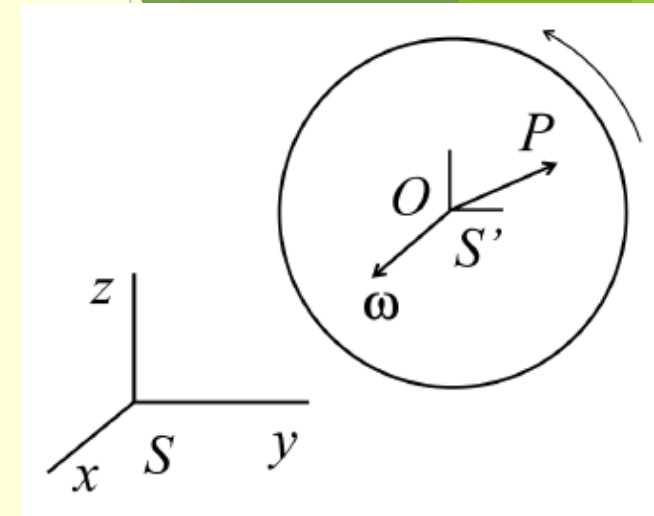
Un cilindro girando en el aire:

Considere un cilindro girando en el aire sujeto por su eje.

El eje instantáneo de rotación coincide con el eje de la rueda: $\omega = \omega \hat{x}$.

¿Cuál es la velocidad del punto P ? Se sabe que $\mathbf{v}_O = 0$ (porque está sujeta). Entonces:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OP} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_{OP} = r \hat{r} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \omega \hat{x} \times r \hat{r} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \omega r \hat{\phi} \quad \forall P$$

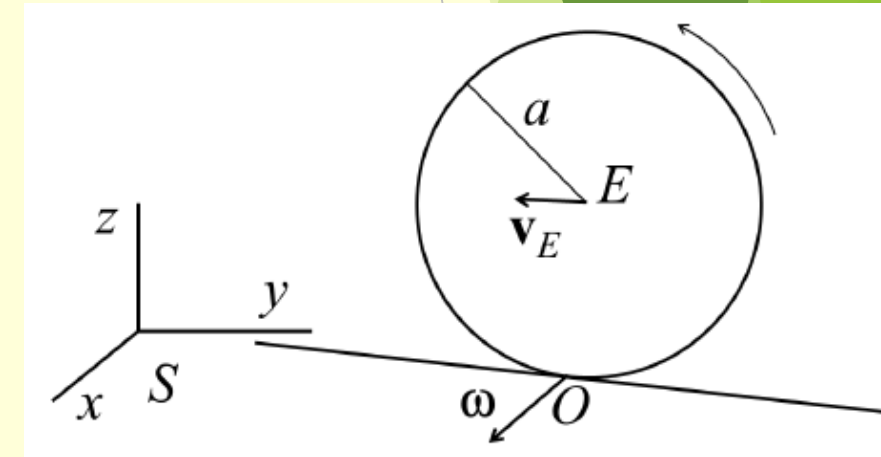


Un cilindro rodando:

La condición de rodadura dice que $\mathbf{v}_O = 0 \Rightarrow$ el eje instantáneo de rotación pasa por O. **No coincide** con el eje de la rueda.

¿Cuál es la velocidad del eje?

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OE} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_{OE} = a \hat{z} \Rightarrow \mathbf{v}_E = -\omega a \hat{y} \quad \forall t$$



Aunque cambie el punto de contacto, el \mathbf{r}_{OE} no varía $\Rightarrow \mathbf{v}_E$ es siempre horizontal, lo cual es muy útil si se quiere transportar una carga sujeta al eje.

Un cono rodando:

Cono rodando sobre su generatriz. Conocemos su altura h , su apertura y la velocidad del punto P , constante.

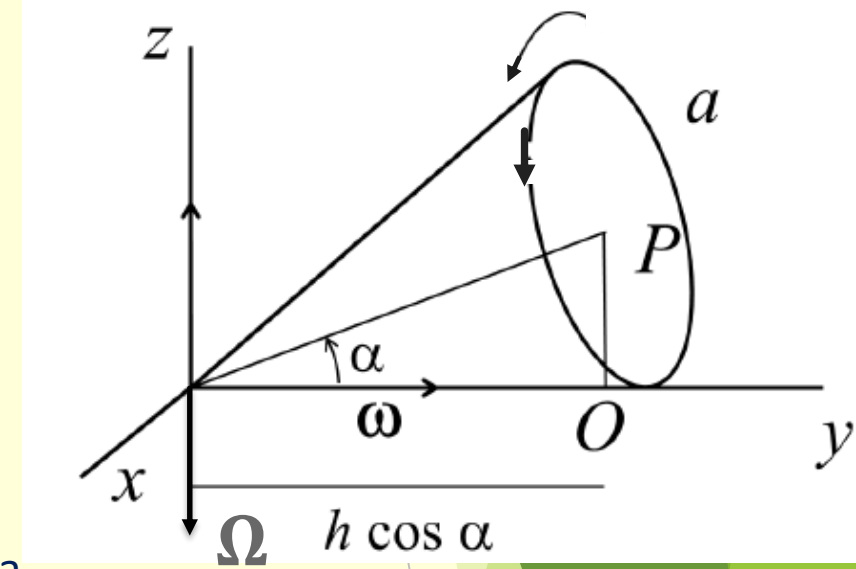
¿Cuál es la velocidad angular del cono?

Todos los puntos de la generatriz tienen $\mathbf{v}_O = 0$. El eje de rotación coincide con la generatriz apoyada y $\boldsymbol{\omega}$ está en la misma dirección. Además que $\boldsymbol{\omega}$ gira junto con el cono alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}}$.

Asociada a este movimiento alrededor de z hay una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$.

El punto P está siempre a la misma altura sobre el plano XY , así que se mueve escribiendo un círculo. La velocidad angular de ese movimiento es $\boldsymbol{\Omega}$:

$$v_P = \Omega h \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{v_P}{h \cos \alpha}} \neq \omega$$

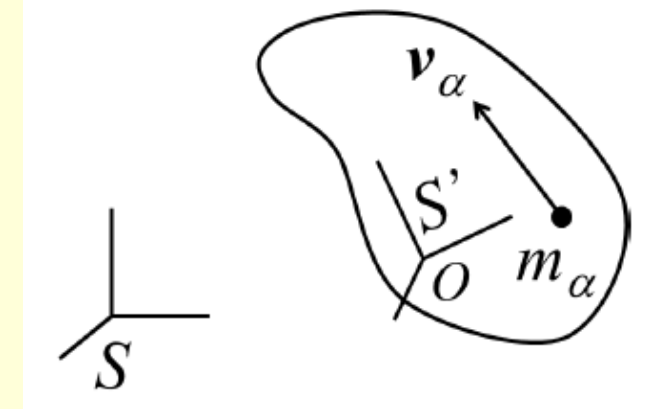


T de un cuerpo rígido es la suma de las T_i de las partículas que componen (o la integral correspondiente).

Pero habrían demasiadas coordenadas \Rightarrow con la cinemática desarrollada se va a encontrar una expresión de T que involucre apenas una \mathbf{v} lineal y una $\boldsymbol{\omega}$. Respecto a S :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} \quad \text{donde } r_{\alpha} = r_{O\alpha} \text{ y tanto } \mathbf{v}_O \text{ como } \boldsymbol{\omega} \text{ son}$$

$$\text{las mismas para todo } \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$



Propiedad cíclica del producto mixto:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= \\ b \cdot (c \times a) &= \\ c \cdot (a \times b) &= \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_O^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

$$T = \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \underbrace{(\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega})}_{\text{indep de } \alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + (\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

T de una masa M puntual

términos que involucran el movimiento de rotación

Sólo si el punto O es el CM:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_O^2 + (\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = 0$ porque es la posición del centro de masa

en el sistema del centro de masa: $T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_O^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$

Trabajando la expresión: $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \omega^2 r_{\alpha}^2 \sin^2 \beta = \omega^2 r_{\alpha}^2 (1 - \cos^2 \beta) = \omega^2 r_{\alpha}^2 - \omega^2 r_{\alpha}^2 \cos^2 \beta$ $\beta = \text{ang}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{\alpha})$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

Finalmente:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2]$$

Sólo si $O = CM$

T traslacional

T rotacional

Si el CM está estático \Rightarrow se anula el primer término también porque $\mathbf{v}_{CM} = 0$.

Pero no confundir el motivo por el cual se anula el 2do término de la expresión general (porque $O = CM$).

Es clave el planteo de cada problema y la elección de los sistemas de referencias.

Rotación alrededor de un eje fijo

$$\mathbf{L} = \sum \ell_{\alpha} = \sum \mathbf{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}.$$

Si consideramos que $\vec{\omega}$ coincide con la dirección del eje z: $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$

Como $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}). \Rightarrow \mathbf{v}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} = (-\omega y_{\alpha}, \omega x_{\alpha}, 0)$

$$\ell_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} = m_{\alpha} \omega (-z_{\alpha} x_{\alpha}, -z_{\alpha} y_{\alpha}, x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2).$$

El momento angular respecto al eje z será:

$$L_z = \sum m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \omega.$$

Como sobre el plano xy:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\Rightarrow L_z = \sum m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 \omega = I_z \omega,$$

con

$$I_z = \sum m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2$$

Tengamos en cuenta que:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} v_{\alpha}^2,$$

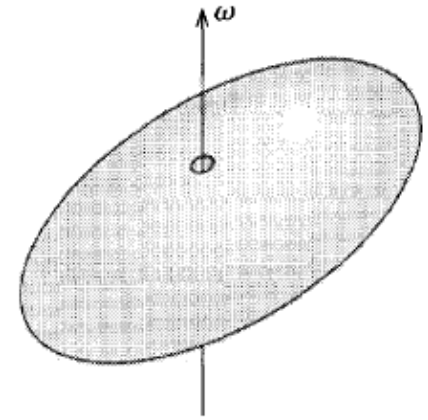
\Rightarrow

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

Calculando para x y para y:

$$L_x = - \sum m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \omega$$

$$L_y = - \sum m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \omega.$$



Productos de inercia: $L_x = - \sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega$ $L_y = - \sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega$. $L_z = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \omega$.

Como $L_x = I_{xz} \omega$, $L_y = I_{yz} \omega$ y $L_z = I_{zz} \omega$:

$$I_{xz} = - \sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha$$

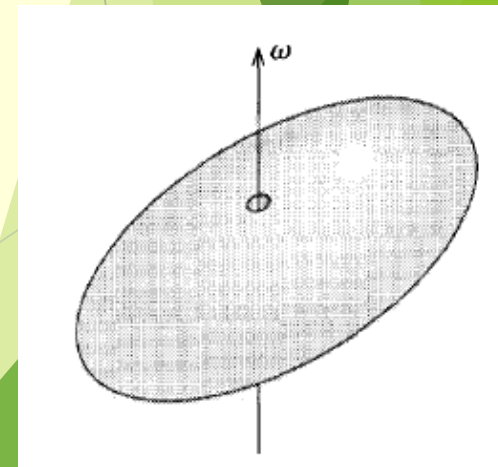
$$I_{yz} = - \sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha .$$

$$I_{zz} = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2).$$

I_{xz} e I_{yz} se llaman **Productos de Inercia** y I_{zz} se llama **Momento de Inercia**

Para un cuerpo que rota con su eje de rotación coincidente al eje z, su momento angular será:

$$\mathbf{L} = (I_{xz} \omega, I_{yz} \omega, I_{zz} \omega).$$



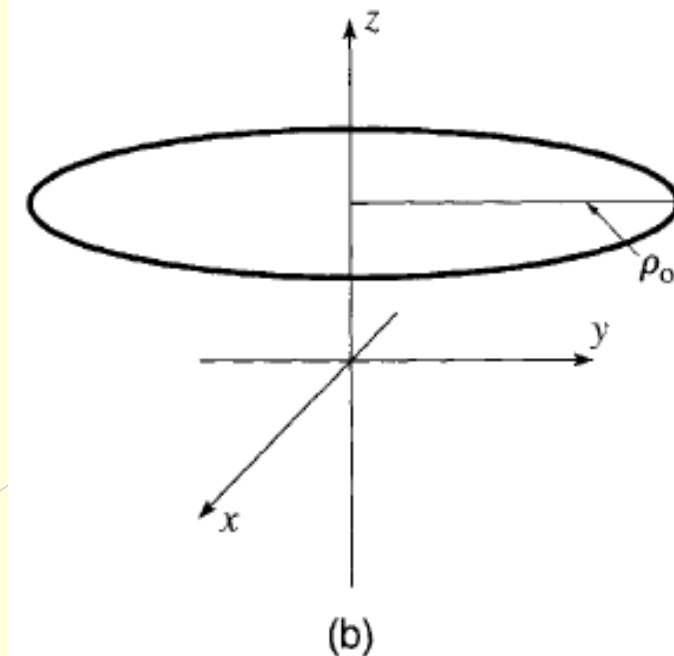
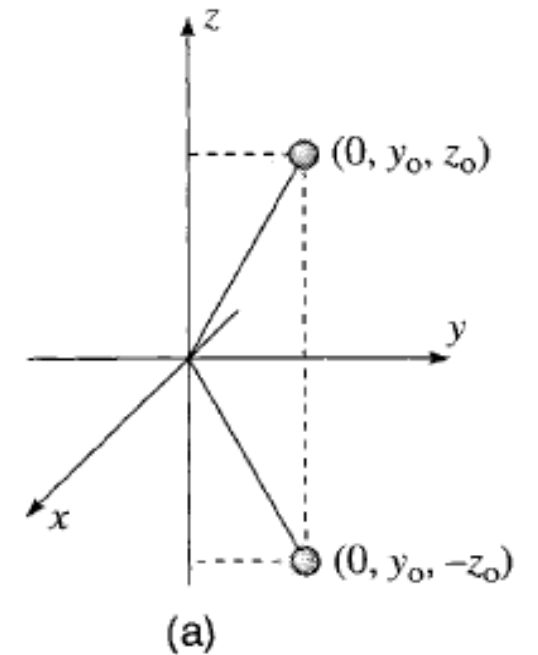
Calcule el momento de inercia y los productos de inercia para la rotación alrededor del eje z para los siguientes cuerpos rígidos:

- a) Una masa m localizada en $(0, y_0, z_0)$
- b) Ídem punto a) pero con una segunda masa m ubicada en $(0, y_0, -z_0)$
- c) Un anillo de masa uniforme M y radio r_0 centrado en el eje z y paralelo al plano xy

$$I_{xz} = - \sum m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha}$$

$$I_{yz} = - \sum m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha}.$$

$$I_{zz} = \sum m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 = \sum m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2).$$



Tensor de Inercia

Rotación alrededor de cualquier eje:

EL TENSOR DE INERCIA

¿Qué ocurre cuando el eje de rotación cambia en el tiempo? Nos centramos en el análisis del CM:

Momento angular \vec{L} para una velocidad angular arbitraria $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$:

$$\mathbf{L} = \sum m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} = \sum m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}).$$

Repetimos como en el caso anterior:

Para cada \vec{r} se calcula $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ y finalmente $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = & (y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z, \\ & -yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z, \\ & -zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z. \end{aligned}$$

Llevado a la expresión de \vec{L} :

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

Donde:

I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} son **momentos de inercia** y $I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, \dots$ son **productos de inercia**



Tensor de Inercia

MECÁNICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

Para I_{xx} :

$$I_{xx} = \sum m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2)$$

y lo mismo para I_{yy} y para I_{zz}

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

Mientras que para:

$$I_{xy} = - \sum m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha}$$

y el resto de los productos de inercia

Reemplazando los subíndices x, y, z por 1, 2, 3 respectivamente; tenemos en líneas generales:

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j .$$

De esta manera podemos definir el **Tensor de Inercia** como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Considerando matricialmente:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

se transforma en:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

Tensor de Inercia: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$

Tensor de Inercia

Sus componentes son:

$$I^0 = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{bmatrix}$$

MECÁNICA DE L

$$I_{xx} = \sum m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Es una matriz simétrica: $I_{ij} = I_{ji}$

De manera genérica, las componentes del tensor de inercia:

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^2\delta^{ij} - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^i r_{\alpha}^j$$

δ^{ij} : Delta de Kronecker

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si $i = x$ y $j = x$:

$$I_{xx} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^2\delta^{xx} - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^x r_{\alpha}^x = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) \cdot 1 - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}x_{\alpha}x_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2)$$

Si $i = x$ y $j = z$:

$$I_{xz} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^2\delta^{xz} - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}r_{\alpha}^x r_{\alpha}^z = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) \cdot 0 - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha} = -\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_{ij}^{CM} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \delta^{ij} - r_{\alpha}^i r_{\alpha}^j]$$

→ El tensor de inercia de un cuerpo depende únicamente de la posición de las partículas con respecto a un cierto sistema de referencia. Captura matemáticamente la geometría de la distribución de masa alrededor de este punto.

→ Si el cuerpo rígido está constituido por una distribución continua de masa definida por una densidad $\rho(\vec{r})$, la Σ sobre puntos discretos se reemplaza por una **integral sobre el volumen** del cuerpo.

→ Es **simétrico**: $I_{ij} = I_{ji}$.

→ Es **aditivo**: todos los elementos son Σ_{α}

→ El valor de sus componentes **depende de la elección del punto de ref O y del sistema S'**. Si varía S' (con el mismo O), cambia de base y cambian las componentes

→ Como es un tensor real y simétrico, siempre existe una base donde es diagonal: $I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$ donde los ejes de esa base son los **ejes principales de inercia** del cuerpo rígido y los I_1 , I_2 e I_3 son los **momentos principales de inercia**.

→ Si el cuerpo es homogéneo y tiene simetrías (geométricas), los **ejes principales son los ejes de simetría**. Pero aun si es heterogéneo y no tiene simetrías, igual tiene ejes principales (para todo O).

→ En la base de los ejes principales la energía de rotación es sencillo:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$
$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

→ Puede demostrarse que: $I_1 + I_2 \geq I_3$

→ Si $I_1 = I_2 \neq I_3$, el cuerpo rígido se denomina peonza o trompo simétrico (un huevo, una pelota de rugby, la Tierra, un cilindro, un trompo)

→ Si $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ se llama trompo asimétrico

→ Si $I_1 = I_2 = I_3$ se llama peonza o trompo esférico (una pelota, un cubo).

→ Si es plano en (\hat{x}, \hat{y}) : $I_3 = I_1 + I_2$

→ Si es unidimensional en \hat{z} : $I_3 = 0, I_1 = I_2$ (se llama rotor).

Calcular el tensor de inercia del sistema de la figura

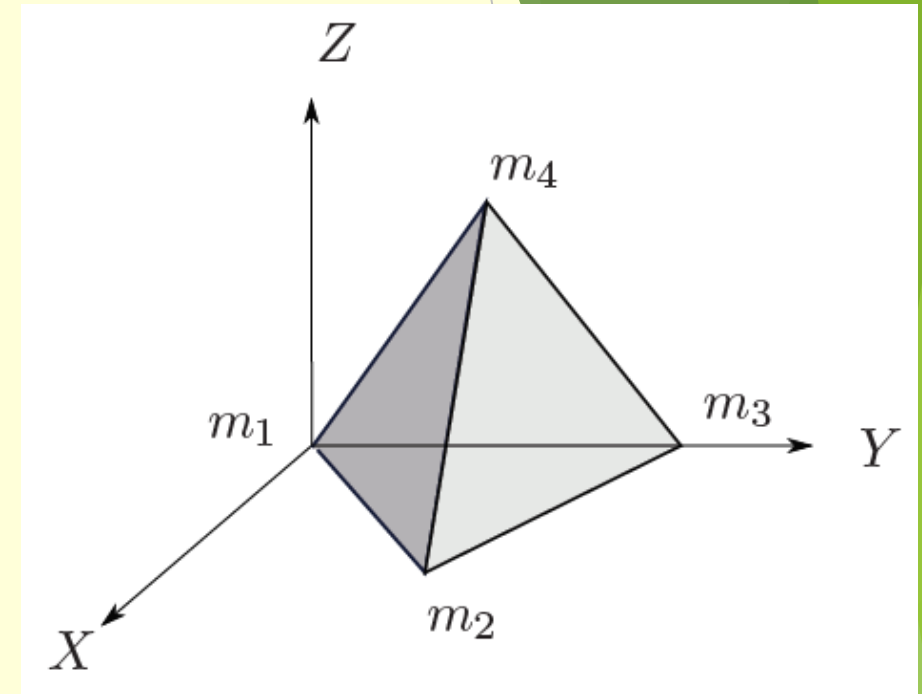
$$I^O = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$$

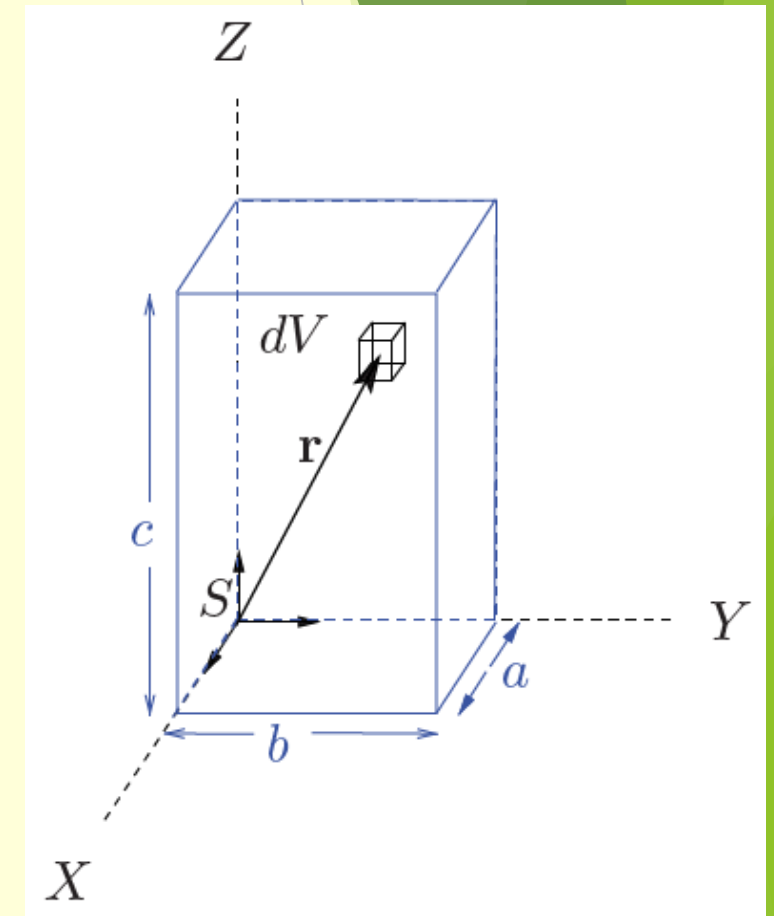
$$\vec{r}_3 = (0, a, 0)$$

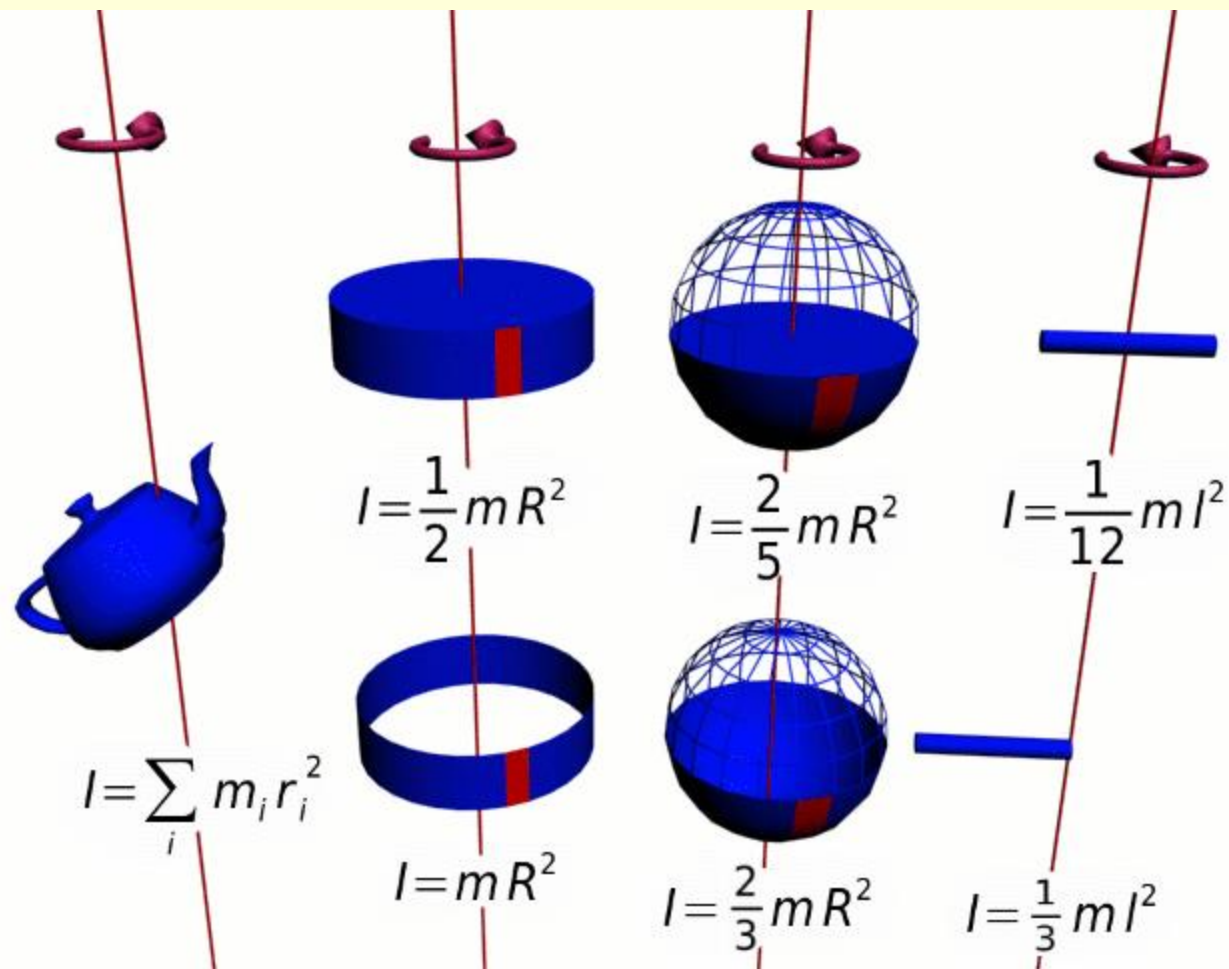
$$\vec{r}_4 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{6}}{3} \right)$$



Tensor de inercia

Calcular el tensor de inercia de un paralelepípedo de densidad homogénea de masa M según la figura:





Energía cinética: Ejemplo

Una rodaja cilíndrica en una media circunferencia: Calcular T.

Si se elige como origen del sistema fijo al cuerpo el centro de masa:

$$T = T_{CM} + T_{rot} ; T_{CM} = f(M, \mathbf{v}_{CM}) ; T_{rot} = f(I, \boldsymbol{\omega})$$

✓ ✗ ✗ ✗

Grados de libertad: 1 (sólo rodadura) $\Rightarrow q_1 = \phi$

El movimiento del CM es circular \Rightarrow coordenadas polares

$$\mathbf{r}_{CM} = r_{CM} \hat{\rho} = (R - a) \hat{\rho} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = (R - a) \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (\text{sin } \dot{\mathbf{r}})$$

$$T_{CM} = \frac{1}{2} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2$$

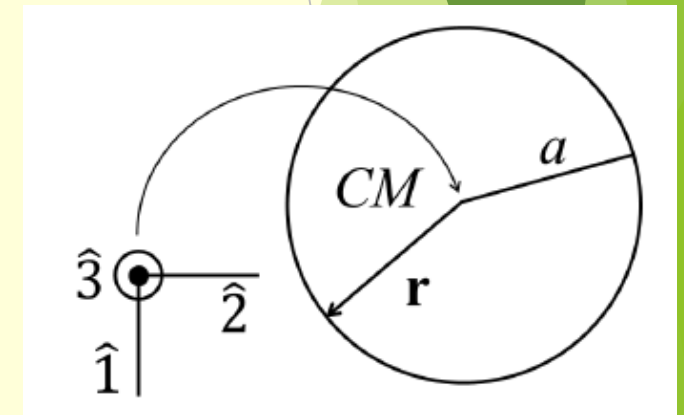
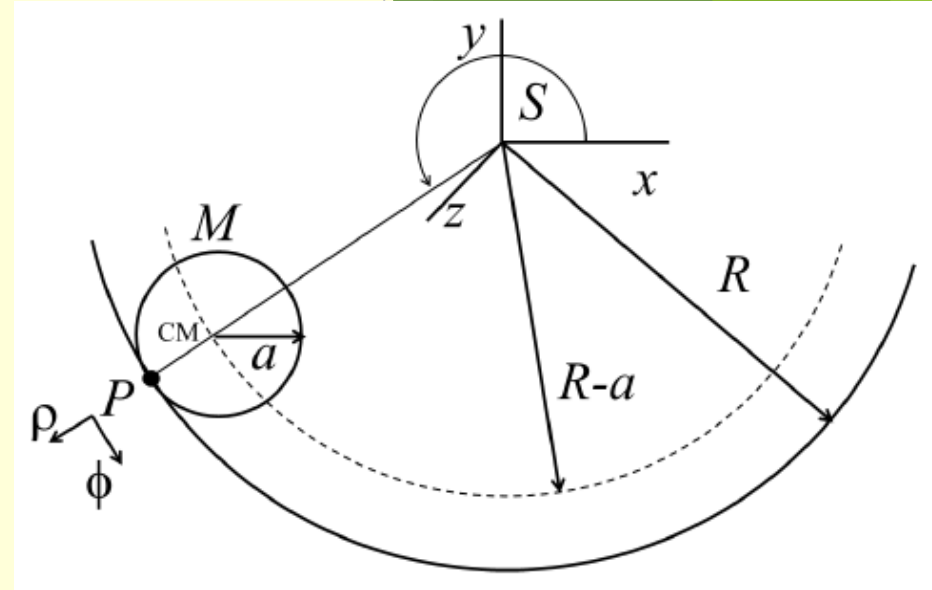
Rotación: el eje instantáneo pasa por P y es \perp al plano del movimiento.

Se toma la dirección del eje como eje $\hat{3}$ del sistema fijo al cuerpo (además es eje de simetría del cuerpo \Rightarrow es eje principal del cuerpo).

$$\boldsymbol{\omega} \parallel \hat{3} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega_3 \hat{3} \equiv \omega \hat{3} \equiv \omega \hat{z}$$

Se usan los ejes principales para que el tensor de inercia sea diagonal:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1^{CM} \omega_1^2 + I_2^{CM} \omega_2^2 + I_3^{CM} \omega_3^2) \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} I_3^{CM} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{M a^2}{2} \omega^2$$



$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_3^{CM} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{Ma^2}{2} \omega^2 \quad ; \quad I_3^{CM} \text{ se calcula por definición o se busca por tabla}$$

Para ω : se usa la condición de rodadura

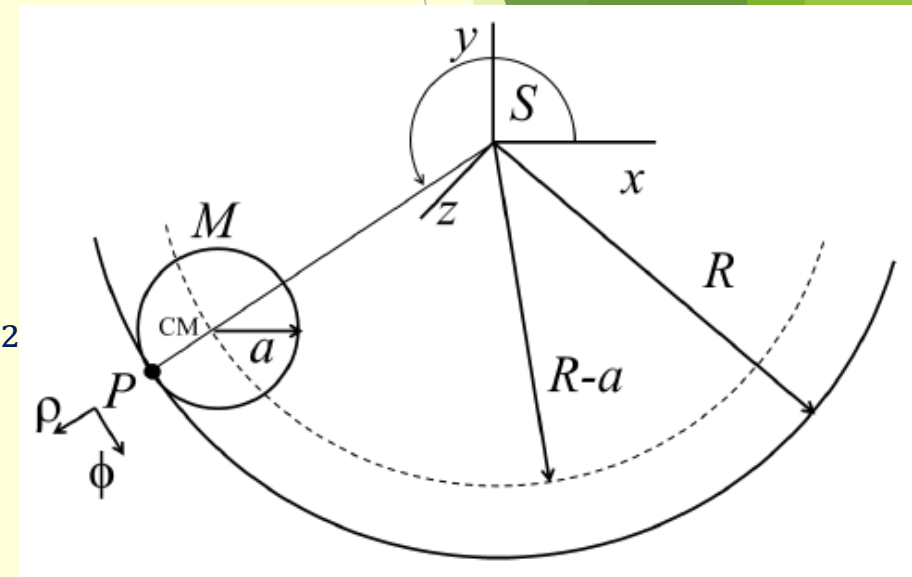
$$\mathbf{v}_P = 0 = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CMP} \Rightarrow 0 = (R - a)\dot{\phi}\hat{\phi} + \omega\hat{z} \times a\hat{\rho} \Rightarrow 0 = (R - a)\dot{\phi}\hat{\phi} + \omega a\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{R-a}{a}\dot{\phi}\hat{z} \quad (\omega \text{ es opuesta al avance de la rodadura})$$

$$T_{rot} = \frac{Ma^2}{4} \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\phi}^2 \Rightarrow T_{rot} = \frac{M(R-a)^2}{4} \dot{\phi}^2$$

$$T = \frac{M}{2} (R - a)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{M}{4} (R - a)^2 \dot{\phi}^2$$

$$T = \frac{3}{4} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2$$



Energía potencial

La energía potencial de un cuerpo rígido es la **suma de todas las energías potenciales** de las partículas que forman el cuerpo. Puede haber de dos tipos:

- **Potenciales externos** actuando sobre cada partícula
- **Energía de interacción** de cada partícula con las demás del cuerpo

$$U = U_{ext} + U_{int} \quad \text{donde} \quad U_{int} = \sum_{\alpha < \beta} U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$$

Pero en un cuerpo rígido, las $r_{\alpha\beta}$ están fijas, así que U_{int} es una constante y se puede ignorarla.

Para la dinámica sólo nos importa la **energía potencial externa**.

Por ejemplo: considere el sistema de la figura. Su T será:

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2$$

$$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}^2$$

La E_{pg} es cte si el movimiento de la rueda es horizontal: las partículas de la rueda suben y bajan y, al ser homogénea, la rueda tiene siempre la misma E_{pg} . Y la E_{pel} está asociada a la elongación del resorte, que se puede escribir en términos de la coordenada generalizada ϕ :

$$U = \frac{1}{2}kR^2\phi^2$$

