Trabajo Práctico N° 6 — Fuerzas Centrales

1. Dos esferas de plomo ($\rho = 11{,}35\, g/cm^3$) de 1 kg están casi en contacto.
   Encuentre la atracción gravitatoria entre ellas. Exprésela como una fracción del peso de cada esfera F/w

2. Demuestra que la atracción de un cascarón esférico uniforme es igual al de una partícula de igual masa ubicada en su centro

3. Encuentre una fuerza central $f(r)$ tal que produzca que todas las orbitas circulares tengan la misma velocidad de área $\dot{A}$

4. Una partícula se mueve en una orbita en espiral $r = c\,.\,\phi^2$. Encuentre $\phi(t)$

5. Calcule el período de un satélite artificial orbitando a una altura tan baja que es despreciable en comparación con el radio de la tierra $r_t = 6.4\,.\,10^6\, m$

6. Calcule la velocidad de un satélite de orbita circular alrededor de la tierra a una altura tan baja que puede aproximas su radio al radio de la tierra $r_t = 6.4\,.\,10^6\, m$

7. La forma más eficiente de mandar una nave a la luna es aumentar su velocidad mientras está en una órbita circular en la tierra, de modo tal que su nueva órbita sea una elipse. Calcule el valor del cociente entre la velocidad antes y después v_2/v_1 . Considere que la nave comienza con una orbita circular de baja altura aproximadamente igual al radio de la tierra $r_t = 6.4\,.\,10^6\, m$ y la luna se encuentra a una distancia $r_1 = 60\,.\,r_t$

Alguna fórmulas y conceptos útiles (en revisión)

Contante de gravitación universal $G=6{,}67\,.10^{-11}\,\dfrac{Nm^2}{kg^2}$

Fuerza de atracción entre dos cuerpos $F=\dfrac{G\,m_1 m_2}{r^2}$

Expresión de masa reducida $\mu=\dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1\,m_2}{M}$

En el problema de dos cuerpos y una fuerza central, al no haber torque el momento angular L se conserva $L=r\,\boldsymbol{x}\,p=\mu\,r\,\boldsymbol{x}\,\dot{r}=cte$

Al representarse el movimiento en un plano se puede usar coordenadas polares, el Lagrangiano es:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}=\frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-U(r)$$

En una orbita, el radio vector al moverse en su trayectoria barre un área

$$dA=\frac{r^2}{2}\,d\phi \qquad \Rightarrow \dot{A}=\frac{r^2}{2}\dot{\phi}=\frac{L}{2\mu}$$

$$\Rightarrow L=\mu\,r^2\dot{\phi}=2\mu\,\dot{A} \qquad \Rightarrow \dot{\phi}=\frac{L}{\mu\,r^2}$$

Desarrollando el Lagrangiano y reemplazando la ecuación anterior llegamos a

$$\mu\,\ddot{r}=\frac{L^2}{\mu\,r^3}-\frac{\partial U}{\partial r}$$

La ecuación de orbita puede expresarse como $s=\dfrac{1}{r}=\dfrac{k\mu}{L^2}(1+\varepsilon\cos\phi)$

donde la expresión de la excentricidad es : $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2E\,L^2}{\mu\,k^2}}$, donde $k=G\,m_1\,m_2$

En una orbita circular $\varepsilon=0$

Entonces podemos llegar a la siguiente expresión: $r(\phi)=\dfrac{L^2}{\mu\,k}\,\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\phi}$

cuando estamos en el apogeo $\phi=\pi$ $\Rightarrow$ $r(\phi)=\dfrac{L^2}{\mu\,k}\,\dfrac{1}{1+\varepsilon}$

cuando estamos en el perigeo $\phi=0$ $\Rightarrow$ $r(\phi)=\dfrac{L^2}{\mu\,k}\,\dfrac{1}{1-\varepsilon}$

El período de una órbita es $T^2=\dfrac{4\pi^2}{G\,M_0}\,r^3$