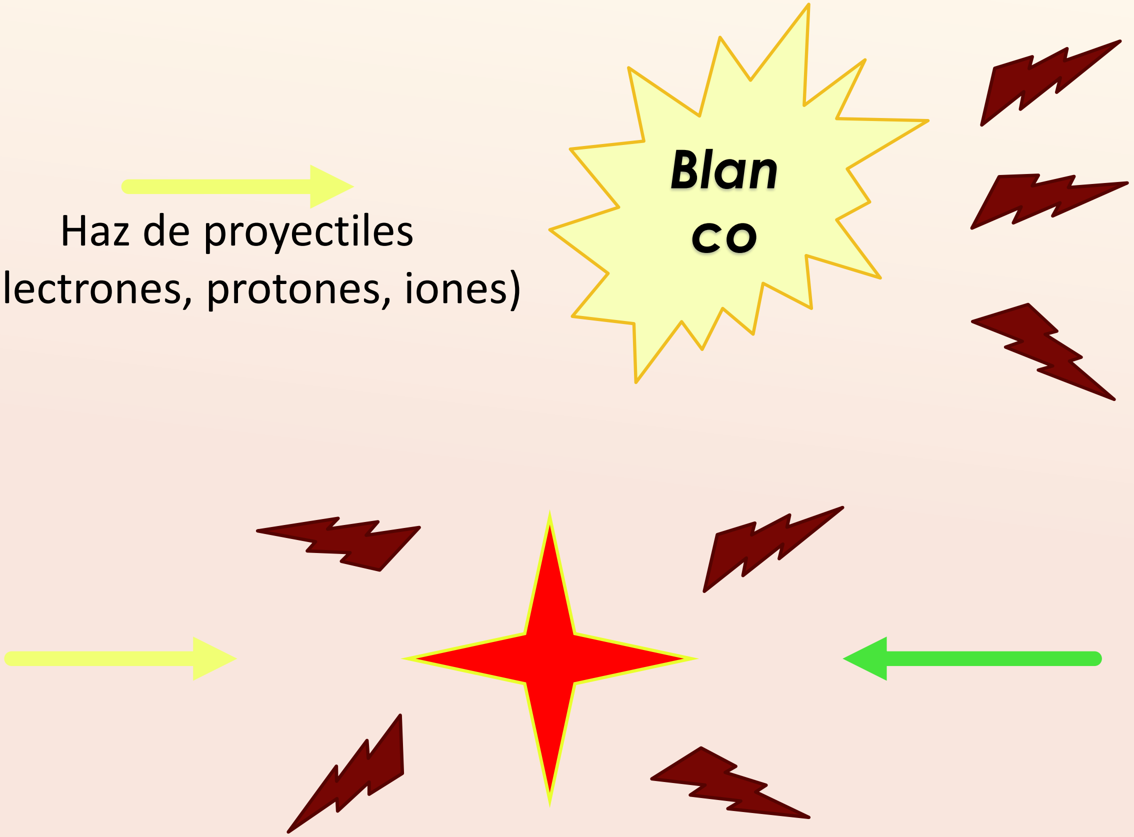
El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Fenómeno de Dispersión o Scattering de las partículas

En el sistema solar → pocas órbitas hiperbólicas

Las órbitas hiperbólicas describen la trayectoria de las partículas → experimentos de colisión de partículas

↓

Física atómica y subatómica

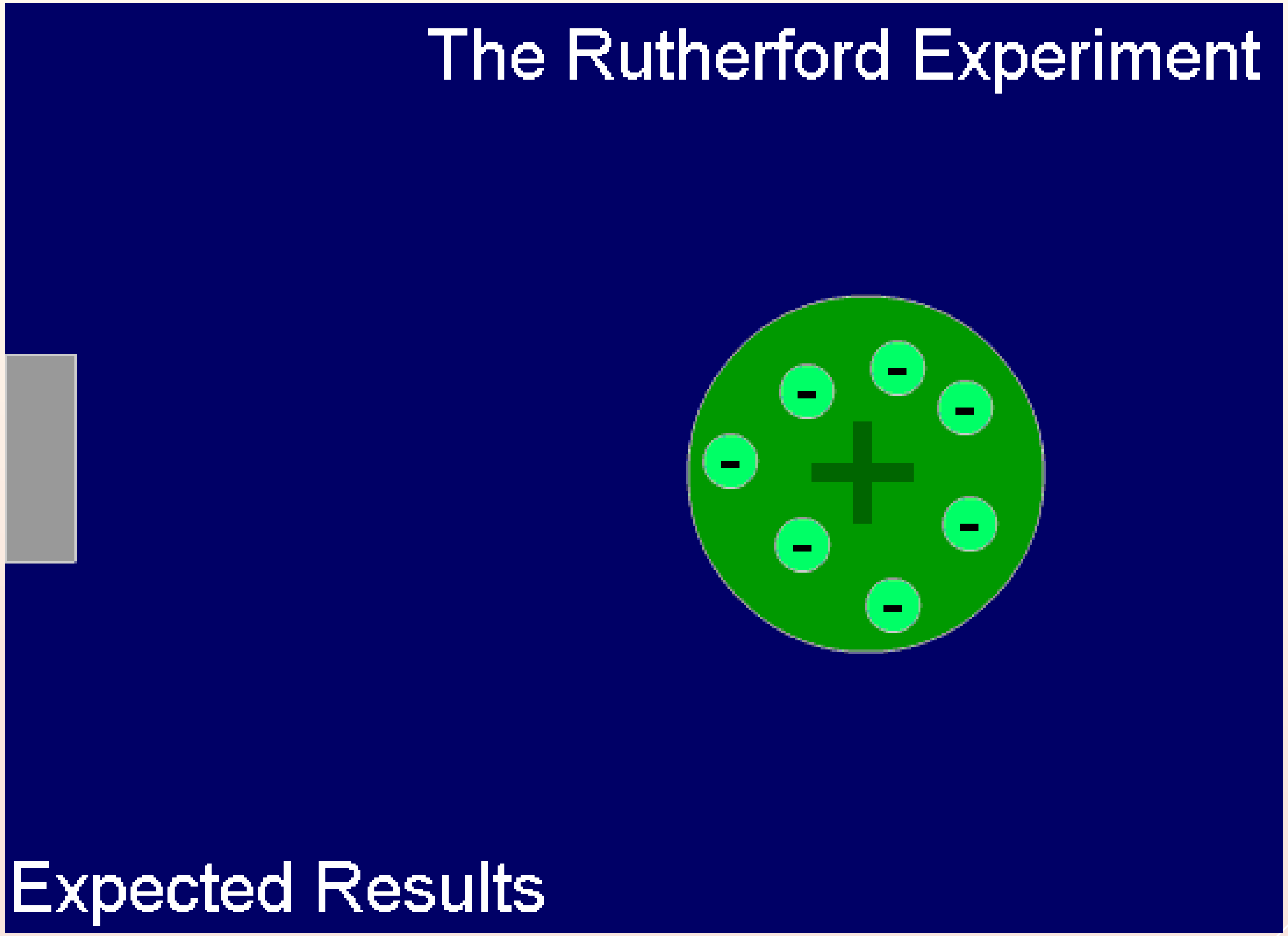


Estructura átomo – Rutherford 1910

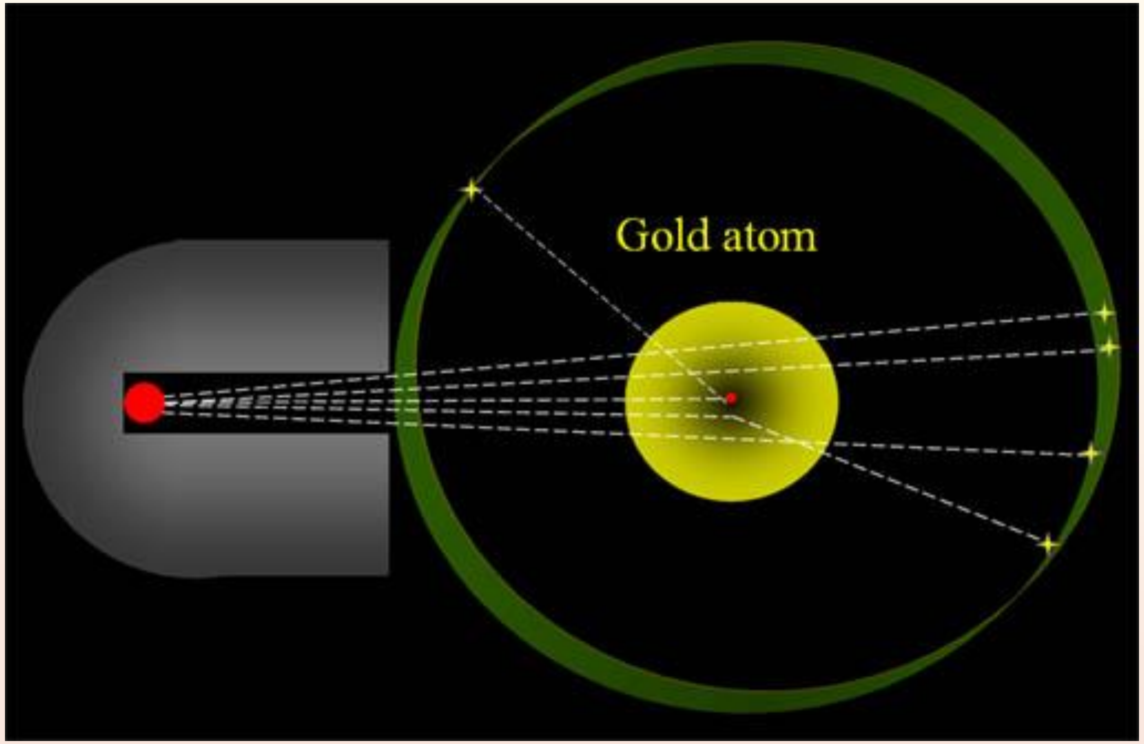
La observación de la distribución de las ***partículas dispersadas*** pueden reconstruir las propiedades del blanco y la interacción entre las partículas.

Bosson Higgs – LHC – CERN 2012

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Scattering de las partículas: El experimento de Rutherford



El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Scattering de las partículas: El experimento de Rutherford



Se bombardea con un haz de partículas α una lámina delgada de oro.

Se observó:

- Muchas partículas siguen en la misma dirección.
- Algunas se desvían.
- Otras “rebotan”.

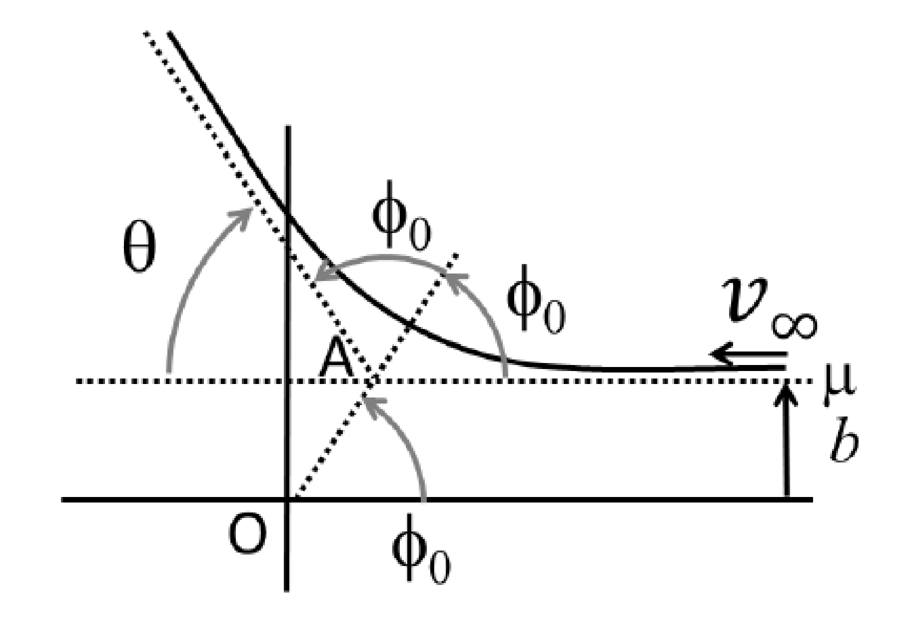
Se descubrió:

- Casi toda la masa del oro estaba concentrada en un pequeño Núcleo.
- El núcleo está cargado positivamente.

Particular interés: → ***partículas desviadas*** → ***SCATTERING***

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering: ***Geometría del scattering de una partícula en un centro de fuerzas.***

Para describir el resultado del choque de dos partículas que interactúan mediante una fuerza central hay que resolver sus ecuaciones de movimiento según la teoría vista: ***r = r(t)*** y ***$\phi = \phi(t)$***



Se va a analizar la desviación de una partícula de masa μ en un potencial central $U(r)$.

Se buscará el ***ángulo de scattering θ*** para una partícula que incide desde el infinito con cierta energía.

Para una partícula con suficiente energía la trayectoria es una hipérbola (una cónica tipo Kepler si el potencial es *1/r*).

Como se vio anteriormente, la trayectoria es simétrica con respecto al punto de máximo acercamiento, el ***periapsis A***, con dos asíntotas simétricas con respecto a la línea OA. El ángulo que se usa es ϕ

ϕ_0 es el ángulo correspondiente al ***ápside***. El ángulo de scattering, que se mide en los experimentos, es el ángulo θ, relacionado con ϕ de la siguiente manera: $\theta = \pi - 2\phi_0$

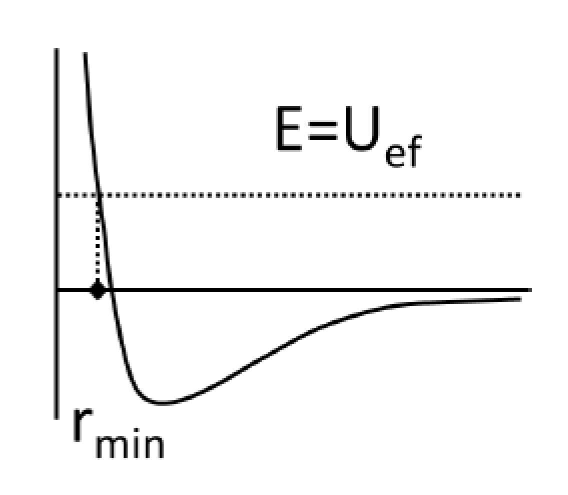
(Ápside: punto de mayor (apoapsis) o de menor (periapsis) distancia dentro de una órbita a su centro de atracción, que es generalmente el CM.)e

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering

La relación entre ϕ y r (válida para cualquier potencial central) obtenida anteriormente:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mu}{L^2}(E-U) - \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{L}\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}$$

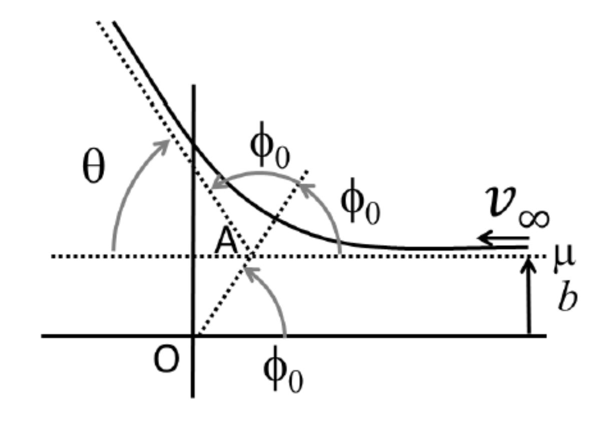
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{L^2}{r^2}} \Rightarrow \int d\phi = \int \frac{L/r^2\, dr}{\sqrt{2\mu(E-U(r)) - L^2/r^2}}.$$



Una órbita abierta sólo tiene un punto de retorno, r_{min}.

Para encontrar ϕ_0 podemos integrar entre r_{min} y r_{max}, es decir entre el ápside e ∞:

$$\int_{\phi_0}^{2\phi_0} d\phi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L/r^2\, dr}{\sqrt{2\mu(E-U(r)) - L^2/r^2}} \Rightarrow \phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L/r^2\, dr}{\sqrt{2\mu(E-U(r)) - L^2/r^2}}$$



donde r_{min} se indica en la figura superior.

Cuando se trata de una órbita abierta, en lugar de las constantes E y L conviene usar la *velocidad* v_∞ y el *parámetro de impacto b*. La relación entre ambos es: $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$ y $L = \mu b v_\infty$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering

Sustituyendo:

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\mu b v_\infty}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \frac{\mu v_\infty^2}{2} - \frac{\mu^2 b^2 v_\infty^2}{r^2} - 2\mu U}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\mu b v_\infty / r^2 \, dr}{\mu v_\infty \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_\infty^2}}} \Rightarrow \phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2 \, dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_\infty^2}}}.$$

Si el potencial es *U(r) = k/r* (*k* positivo o negativo):

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2 \, dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2k}{\mu v_\infty^2}\frac{1}{r}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r \, dr}{\sqrt{r^2 - b^2 - \frac{2k}{\mu v_\infty^2} r}},$$

Integrando:

$$\phi_0 = \operatorname{acos} \frac{\frac{k}{\mu v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{\mu v_\infty^2 b}\right)^2}}.$$

Reacomodando con $\kappa = \frac{k}{\mu v_\infty^2} = \frac{k}{2T_\infty}$; T_∞ es la energía cinética en el infinito:

$$\cos\phi_0 = \frac{\kappa/b}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}},$$

Considerar que: $cos\phi_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x = \frac{\kappa}{b}\ ; y = 1$

$$\tan\phi_0 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\kappa/b} = \frac{b}{\kappa} \Rightarrow b = \kappa \tan\phi_0.$$

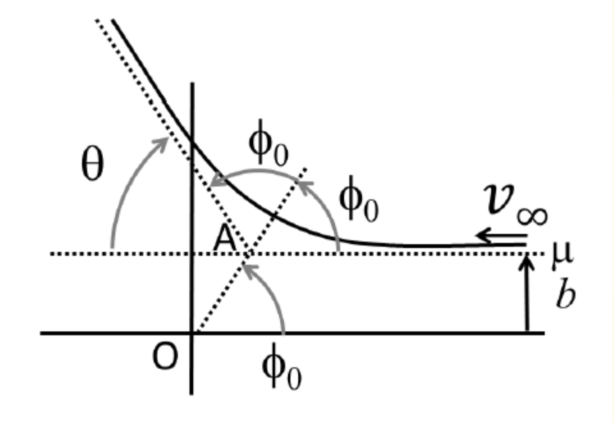
Como $\theta = \pi - 2\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

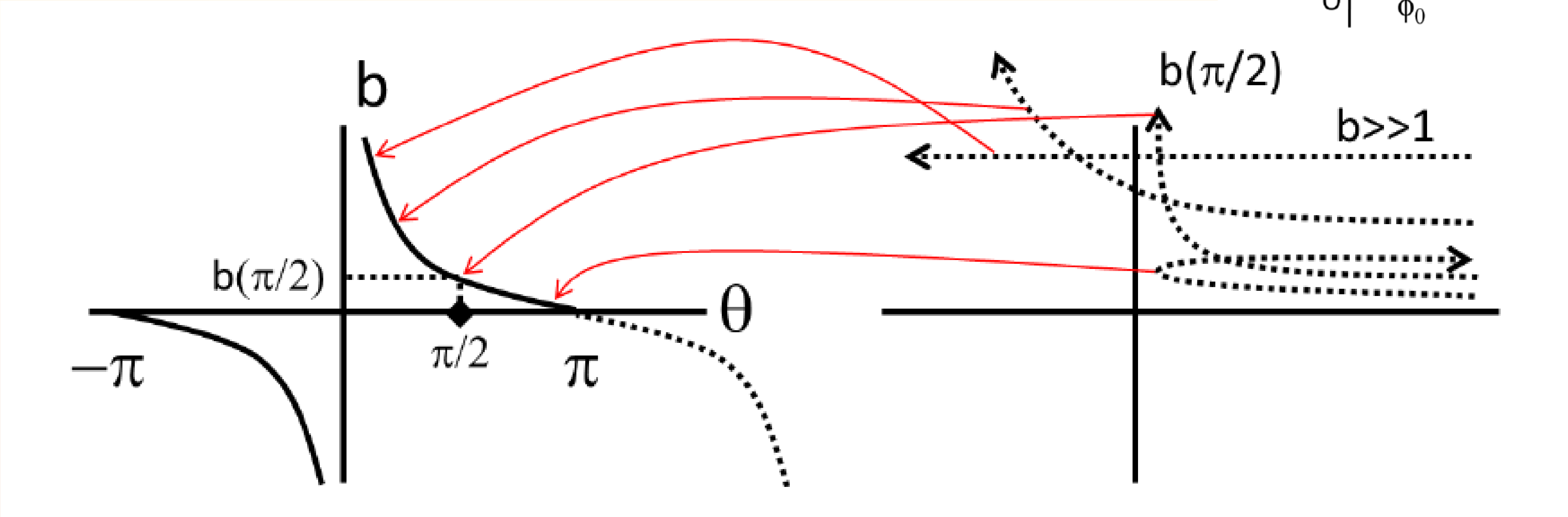
$$\Rightarrow b = \kappa \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \kappa \cot\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \kappa \cot\frac{\theta}{2}},$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering

$$b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}$$





Relación entre el parámetro de impacto ***b*** y el ángulo de scattering ***θ***, y representación de las trayectorias para distintos valores de ***b*** y una misma energía del proyectil. Notar que hay rebotes hacia atrás cuando el parámetro de impacto es pequeño.

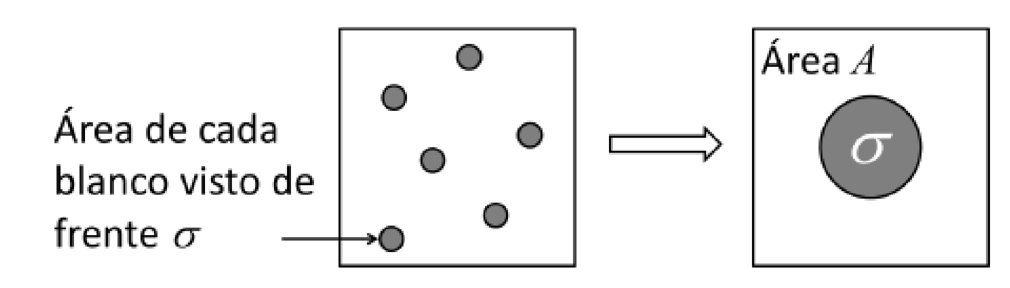
El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz

En experimentos de scattering no se tiene un único proyectil sino ***un haz compuesto por muchos proyectiles***, cada uno con un parámetro de impacto diferente.

En una experiencia, el ángulo de scattering se mide fácilmente, el parámetro de impacto no se puede medir directamente.

La fórmula $\boxed{b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}}$ no es útil. Se debe poder ***describir cómo deflecta el haz***. Se usa el concepto de ***Sección Eficaz***.

Se lanza un proyectil de tamaño despreciable hacia un blanco compuesto por esferas duras de radio ***R***. El blanco visto de frente muestra una parte del blanco ocupada por los blancos individuales. Si la densidad de blancos es uniforme, se puede pensar que cada blanco ocupa un área $\sigma = \pi R^2$ en medio de un área A por donde el proyectil puede pasar libremente.



El blanco, compuesto por N_t esferas duras, visto de frente.

La probabilidad de que ocurra un evento de scattering (por cada blanco): $prob\ scattering = \frac{área\ ocupada}{área\ total} = \frac{\sigma}{A}$

Si el haz contiene N_p proyectiles puntuales contra el área A, el número de eventos de scattering será:

$$\#eventos\ scattering = N_{sc} = \frac{N_p \sigma}{A}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz

Las partículas se cuentan considerándolas como un caudal (proyectiles por unidad de tiempo), o un flujo (por unidad de área).

La Sección Eficaz se define como:

$$\boxed{\sigma = \frac{N_{sc}}{N_p/A} = \frac{N_{sc}/\Delta t}{N_p/(A\Delta t)} \equiv \frac{\#\text{ eventos por u.d.t.}}{\text{flujo de proyectiles}}}$$

En un experimento, $\boldsymbol{N_{sc}}$ se mide y $\boldsymbol{\sigma}$ se calcula.

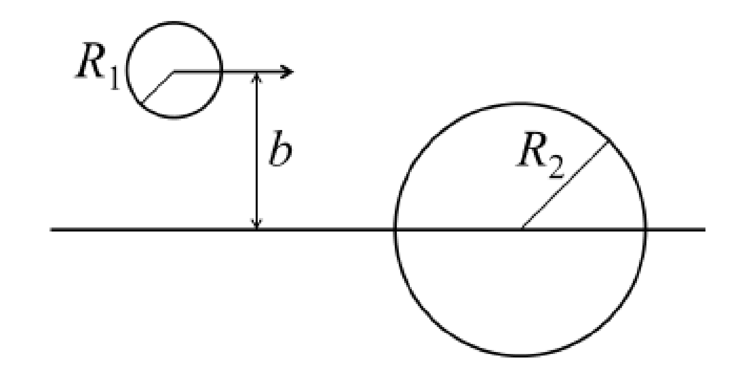
$\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de área, o sea metros cuadrados. Pero las secciones eficaces atómicas y subatómicas son muy pequeñas para expresarlas en metros cuadrados. Por tanto, se mide em un submúltiplo que tiene aproximadamente la sección transversal de un núcleo atómico, llamado ***barn***:

$$1\ \text{barn} = 10^{-28}\ \text{m}^2.$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

El *camino libre medio* de una molécula en el aire.

Las moléculas de N_2 y de O_2 son aproximadamente esferas de radio medio $R \approx 0{,}15nm$. Se quiere calcular la distancia promedio que una molécula ***viaja*** entre colisiones con otras moléculas. Es una cantidad representativa en muchas propiedades físicas del aire: conductividad, viscosidad, coeficiente de difusión, etc.



La colisión de dos esferas es un poco más complicada que la de una partícula contra una esfera.

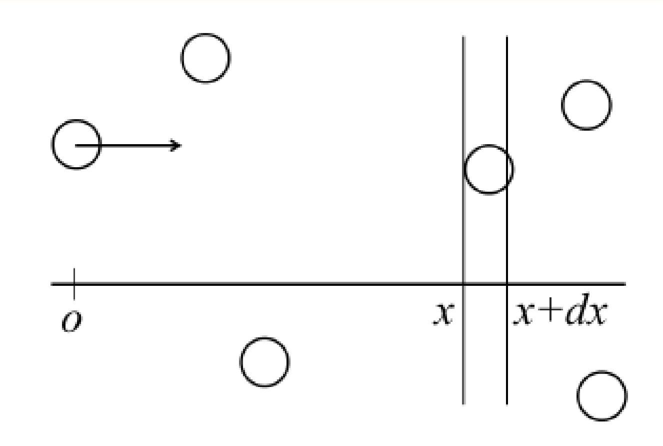
Las esferas chocan sólo si el parámetro de impacto $\boldsymbol{b \leq R_1+R_2}$, es decir, si el centro del proyectil pasa dentro de una esfera de radio R_1+R_2 ubicada en el

centro del blanco. Por tanto, $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$

En el caso del aire, $R_1 \approx R_2$ => $\sigma = 4\pi R^2$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

Si se supone que todas las moléculas están quietas salvo una (proyectil) impactando sobre las demás.
En una rodaja de espesor *dx* perpendicular a la trayectoria de esta molécula



hay una ***densidad de blancos***: $n_t = \frac{N_t}{V} dx$

La ***probabilidad de colisión en esa rodaja*** es: $p_c = n_t \sigma = \frac{N_t \sigma}{V} dx.$

La ***cantidad de moléculas que llegan a (x + dx) sin chocar*** es la cantidad que llegaron a ***x*** menos las que chocaron en la rodaja de espesor ***dx***:

$$N(x + dx) = N(x) - N(x) \frac{N_t \sigma}{V} dx.$$

Dividiendo por la cantidad de moléculas proyectiles usados $\boldsymbol{N_p}$, la ecuación se transforma en la probabilidad de llegar a ***x*** sin chocar, y luego chocar entre ***x*** y ***x + dx***:

$$p(x + dx) = p(x) - p(x) \frac{N_t \sigma}{V} dx.$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

$$p(x+dx) = p(x) - p(x)\frac{N_t\sigma}{V}dx.$$

Si la rodaja es diferencial => la ecuación es diferencial. Reordenando:

$$\frac{p(x+dx)-p(x)}{dx} = -p(x)\frac{N_t\sigma}{V} \Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} = -\frac{N_t\sigma}{V}p(x) \;\Rightarrow p(x) = c\,e^{-\frac{N_t\sigma}{V}x}$$

donde $c = \dfrac{N_t\sigma}{V}$

El *camino libre medio* es el valor medio de

$$\lambda = \langle x\rangle = \int_0^\infty x\,p(x)\,dx = \int_0^\infty x\,\frac{N_t\sigma}{V}e^{-\frac{N_t\sigma}{V}x}dx = \frac{V}{N_t\sigma} \;\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{V}{N_t 4\pi R^2}}.$$

Usando valores, sabemos que hay N_{Av} moléculas en 22,4 litros:

$$\lambda = \frac{22.4\,l}{N_{Av}4\pi R^2} = \frac{22.4\times10^{-3}m^3}{6.02\times10^{23}\;4\pi(0.15\times10^{-9}m)^2} \approx 0.132\times10^{-6}m \approx 130\;nm.$$

Tamaño del át de oxígeno $\approx$ 0,048 nm

Dist interatómica de eq. en el $O_2 \approx$ 1,208 Å $\approx$ 0,1208 nm

Tamaño del át de nitrógeno $\approx$ 0,056 nm

Dist interatómica de eq. en el $N_2 \approx$ 1,094 Å $\approx$ 0,1094 nm

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Otros procesos:

Proyectil

- Scattering
- Captura por el blanco (neutrón por un núcleo, electrón por un halógeno, …)
- Generar Ionización en el blanco
- Generar fisión de un átomo del blanco

Sección eficaz:

- ***De scattering***
- ***De captura***
- ***De ionización***
- ***De fisión***

$$\sigma_{cap} = N_{cap}/n_p.$$

$$\sigma_{ion} = N_{ion}/n_p.$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_{cap} + \sigma_{sc}.$$

$$\sigma_{tot} = N_{tot}/n_p.$$

n_p: número de proyectiles por unidad de área transversal a la dirección incidente