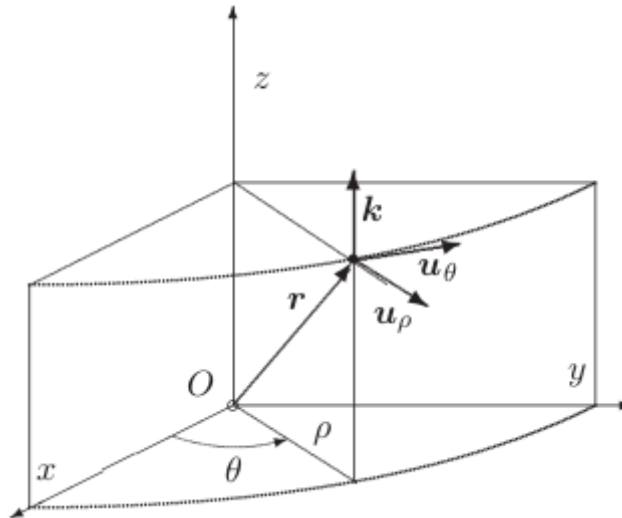




Trabajo Práctico N° 2

1. Coordenadas Cilíndricas

En ciertos problemas de movimiento, es conveniente definir la posición de la partícula P mediante sus coordenadas cilíndricas.



En este caso, las coordenadas que definen la posición son (ρ, θ, z) , siendo ρ la distancia desde un punto fijo O , θ el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y z la altura del punto sobre dicho plano. El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$. El versor \mathbf{u}_ρ queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de \mathbf{r} sobre el plano; \mathbf{k} es el versor perpendicular al mismo, y \mathbf{u}_θ es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto \mathbf{u}_ρ como \mathbf{u}_θ varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas curvilíneas.

La posición de un punto queda definida mediante

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{k}$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano cuando $z = 0$

Las coordenadas cilíndricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\mathbf{u}_\rho = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

a) Halle las siguientes expresiones, en función de los versores ($\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$) y las variables (ρ, θ, z):

$$\dot{\mathbf{r}} =$$

$$\ddot{\mathbf{r}} =$$

Ayuda desarrolle primero $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$

b) Exprese las componentes radiales y tangenciales de la velocidad y la aceleración para $\rho = cte$ y $z = 0$

$$\dot{\mathbf{r}}_r =$$

$$\dot{\mathbf{r}}_\theta =$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_r =$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_\theta =$$

¿A qué expresiones conocidas llegó?

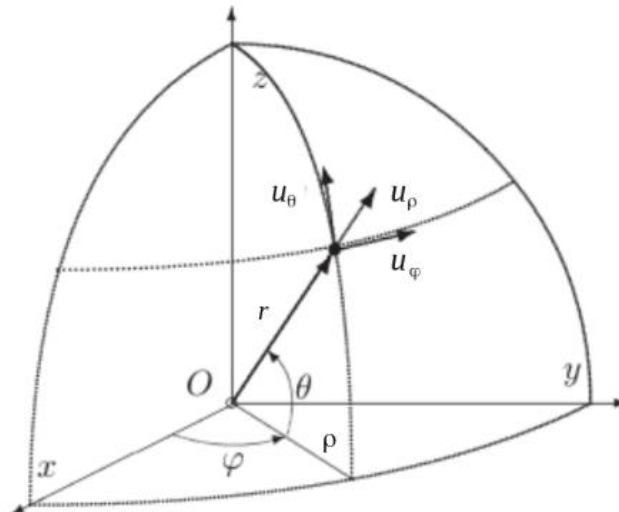
¿Puede obtenerse la aceleración radial a partir de derivar la velocidad radial con respecto al tiempo?

2. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio ρ : la longitud φ y la latitud θ

Las coordenadas esféricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad z = \rho \cos \theta$$



El triedro físico es ahora ($\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\rho$). La línea coordenada de longitud φ constante define el meridiano, al cual es tangente el versor \mathbf{u}_θ . Asimismo la línea de latitud θ constante define un paralelo, al cual es tangente el versor \mathbf{u}_φ . Por último, el versor \mathbf{u}_ρ lleva la dirección y sentido del radio vector \mathbf{r} . El vector posición es $\mathbf{r} = \rho \cdot \mathbf{u}_\rho$. Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\rho &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\varphi &= \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_\rho = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{aligned}$$

a) Demuestre que:

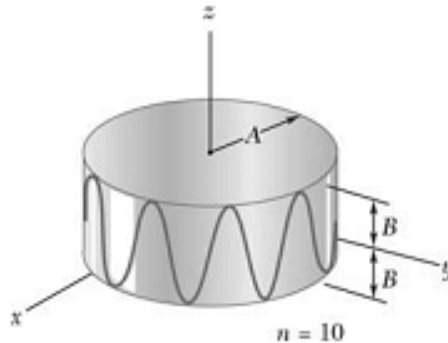
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \rho \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{cases} (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_\rho + \\ (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta + \\ (2\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \theta - 2\rho \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta + \rho \ddot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{u}_\varphi \end{cases}$$

Ayuda, desarrolle $\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ como en este ejemplo:

$$\mathbf{u}_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi$$

3. El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular se define por medio de las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$, $z = B \cdot \sin(2\pi n t)$, donde A y B son constantes, n es un entero. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo t .



4. El movimiento tridimensional de una partícula se define por medio de las coordenadas cilíndricas $R = A/(t+1)$, $\theta = B \cdot t$ y $z = C \cdot t/(t+1)$. Demuestre que las magnitudes de la velocidad y de la aceleración son:

$$\begin{aligned} \text{A) Para } t = 0 & \rightarrow v = \sqrt{A^2 + B^2} & a = \sqrt{(1 + 16\pi^2) \cdot A^2 + B^2} \\ \text{B) Para } t = \infty & \rightarrow v = 2\pi A & a = 4\pi^2 A \end{aligned}$$

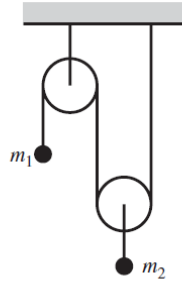
5. Considere una partícula de masa m que se mueve pegada a la superficie de una esfera de radio R , calcule la energía cinética de la partícula en función de m, R, θ, φ , usando coordenadas esféricas.

6. Una partícula de masa m cae desde una altura h comenzando desde el reposo. Encuentre $y(t)$:

- a través de la expresión de $a = \frac{dv}{dt}$
- mediante la expresión $a = v \frac{dv}{dy}$

7. Considere las poleas del sistema de la figura. Por debajo de cada polea cuelgan m_1 y m_2 respectivamente. Considere que las cuerdas y las poleas tienen masa despreciable.

- ¿Cuáles son las aceleraciones de las masas?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda más larga?



8. Una pelota se deja caer desde el reposo a una altura h . Asuma que la fuerza de arrastre generada por el aire es: $F_a = \alpha v$.

Encuentre la velocidad y la altura como funciones del tiempo.

9. Muestre que $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\sqrt{g/l} \cdot t)$ describe la posición del péndulo de la figura en función del tiempo, si θ es suficientemente pequeño (cuando el ángulo es pequeño puede considerar $\sin(\theta) \approx \theta$).

Ayuda: debe plantear una EDO de 2° orden.

¿Podría encontrar una solución para grandes valores de θ ? En caso afirmativo mencione sin resolver qué método usaría.

