# Oscilaciones

*MECÁNICA RACIONAL – 2018*

# Introducción

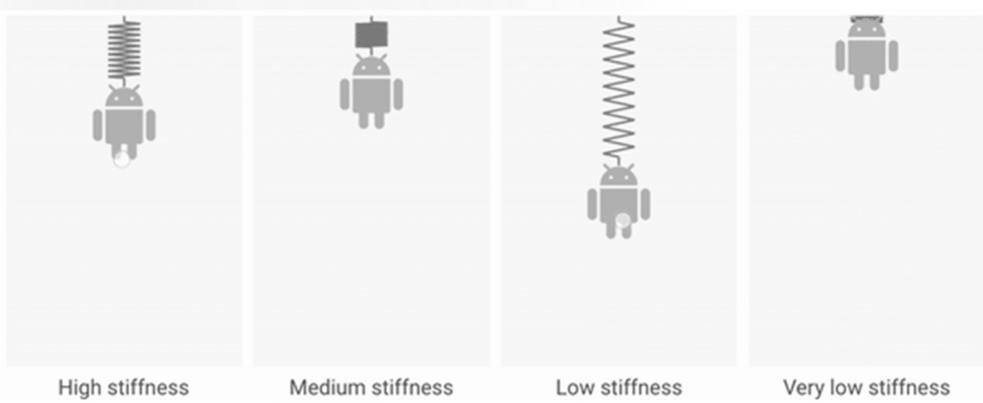
*SISTEMAS* → *Equilibrio Estable*

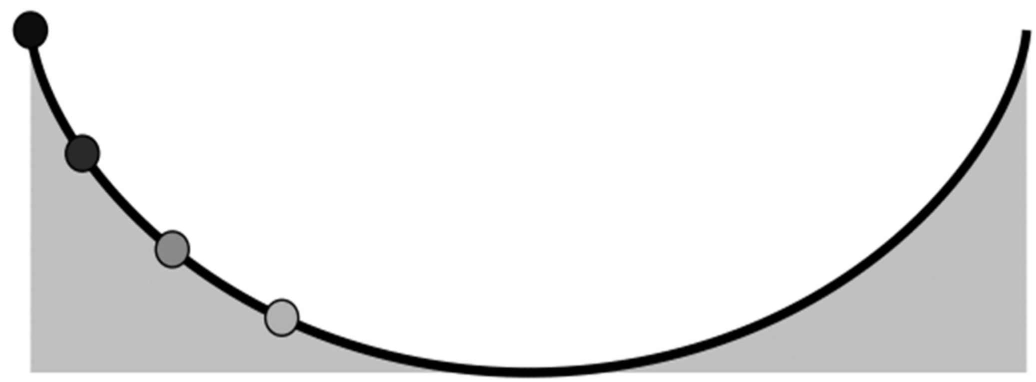
*SISTEMAS* → *Respuesta: pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio*

*Perturbación por el medio o por un mecanismo*

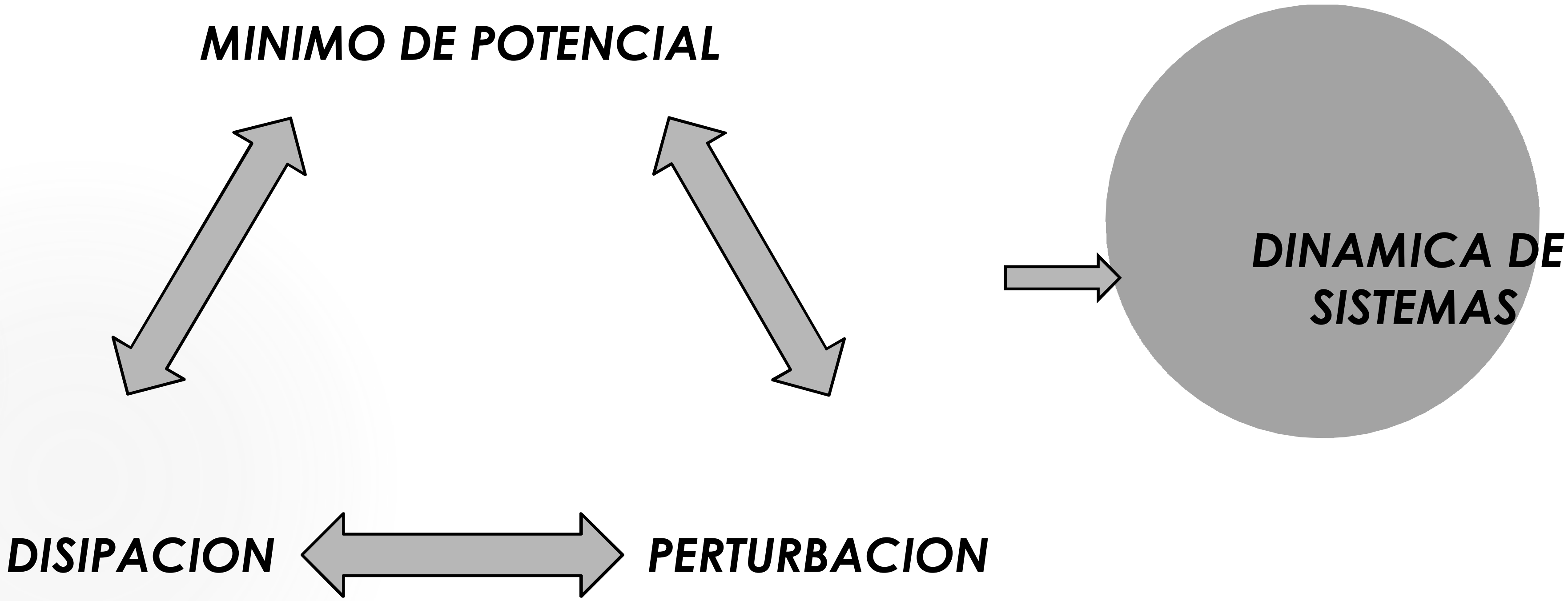
*Si existen fuerzas disipativas o si desaparece la perturbación: se podría alcanzar la posición de equilibrio*

*Sin fuerzas disipativas o con permanentes perturbaciones: Podría mantenerse la oscilación*



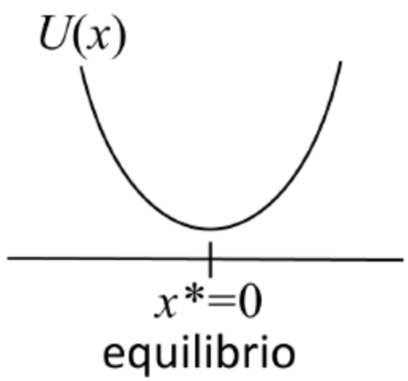



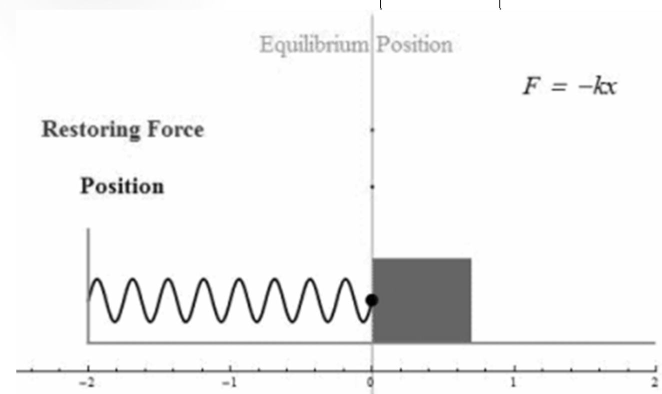
# Introducción



# El oscilador armónico

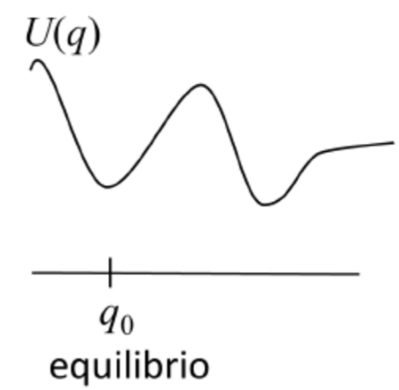
Una masa sujeta al extremo de un resorte experimenta una ***fuerza*** $F(x) = -kx$




La ***energía potencial*** de la cual se deriva esta fuerza es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Suponga un sistema ***arbitrario, conservativo y unidimensional***, caracterizado por un potencial $U(q)$ que tiene un equilibrio en $q_0$.




En la proximidad de $q_0$, se puede desarrollar el potencial $U(q)$ en serie de Taylor:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)x + \frac{1}{2}U''(q_0)x^2 + \cdots \qquad \text{donde } x = q - q_0$$

→ es cero porque $U'(q_0) = 0$

→ es una constante

$$\boxed{U(q) \approx \frac{1}{2}U''(q_0)x^2}$$

Potencial con la forma del potencial elástico de la Ley de Hooke.
Éste y la dinámica asociada son el modelo más general de la dinámica en la ***proximidad de un equilibrio estable*** de cualquier sistema.

# El oscilador armónico

$\boxed{U(q) \approx \frac{1}{2} U''(q_0) x^2}$ **OSCILACIONES**

El lagrangiano será: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$ donde $k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0=0} > 0$ por ser un mínimo.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ $\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$ (1)

Ec diferencial de ***2do orden, lineal, homogéneo y con coeficientes constantes***

Tenemos 2 soluciones. Se propone una solución exponencial: $\boxed{x(t) = Ce^{\lambda t}}$ (2)

(2) en (1): $m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$

donde ***Frecuencia natural del oscilador***: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Dos soluciones: $x_1(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t}$ y $x_2(t) = C_2 e^{-i\omega_0 t}$ ambas con la misma frecuencia $\omega_0$

La ecuación general de $\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$ es una combinación lineal de las dos: $\boxed{x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}}$

es $IR$ => $C_1$ y $C_2$ deben elegirse con cuidado

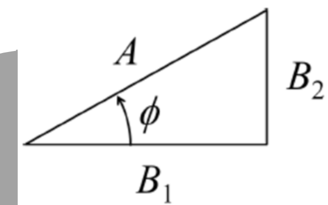
# El oscilador armónico



$$\boxed{x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}}$$

Considerando la fórmula de Euler: $e^{\pm i\omega_0 t} = cos\omega_0 t \pm i\ sen\omega_0 t$

$$x(t) = (C_1 + C_2)cos\omega_0 t + i(C_1 - C_2)sen\omega_0 t \Rightarrow x(t) = B_1 cos\omega_0 + B_2 sen\omega_0 t$$

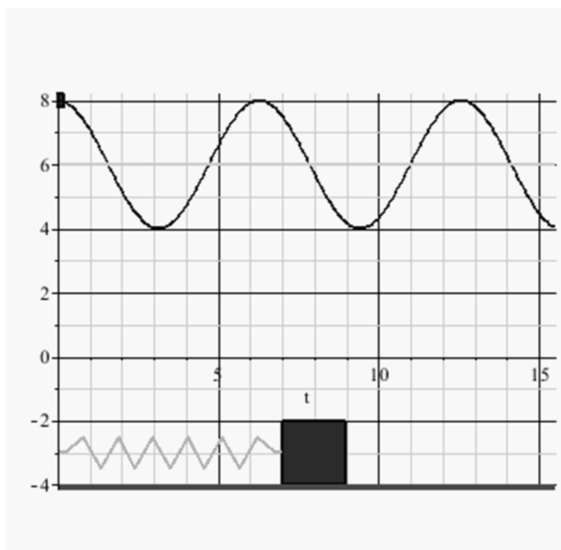


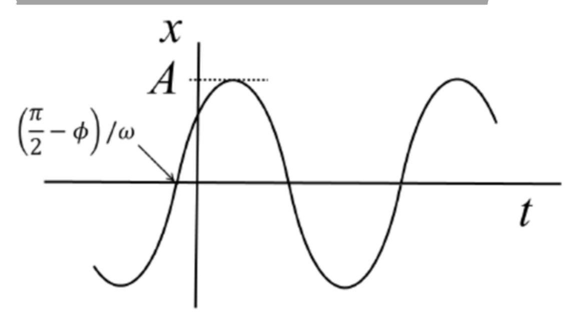

Si se considera una fase inicial $\phi$ y definiendo $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$

$$x(t) = A\left(\frac{B_1}{A}cos\omega_0 t + \frac{B_2}{A}sen\omega_0 t\right) = A(cos\phi\ cos\omega_0 t + sen\phi\ sen\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{x(t) = A\ cos(\omega_0 t - \phi)}$$

Formas alternativas de la solución general del oscilador armónico:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) = B_1 cos\omega_0 + B_2 sen\omega_0 t \\ x(t) = A\ cos(\omega_0 t - \phi) \end{array}\right.$$



# El oscilador armónico amortiguado



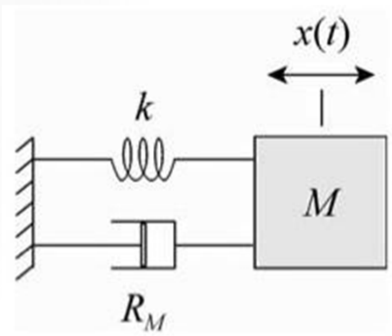
Además de fuerza conservativa dada por U(x), suponga que existe una fuerza disipativa proporcional a la velocidad: $-\gamma\dot{x}$ (con $\gamma$ : cte de amortiguamiento). La ecuación de movimiento será: $\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0}$

Es lineal y de segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes. De la misma forma que antes, se propone una solución exponencial: $x(t) = Ce^{\lambda t}$

$$x'(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad x'' = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + \gamma\lambda Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0 \;\Rightarrow m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Factor de amortiguamiento: $b = \frac{\gamma}{2m} \Rightarrow \frac{\gamma}{m} = 2b$ $\qquad \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad => \quad \lambda_{1/2} = -b \pm \frac{2\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{2} \quad => \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}$$




3 casos

# El oscilador armónico amortiguado

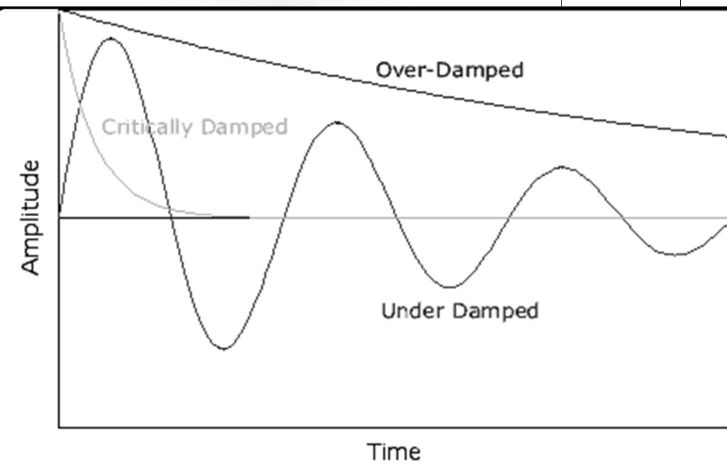


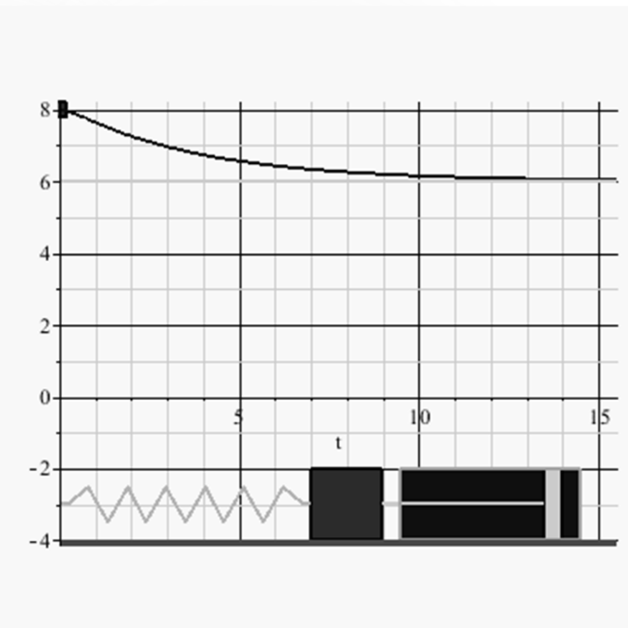
$$\boxed{\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}$$

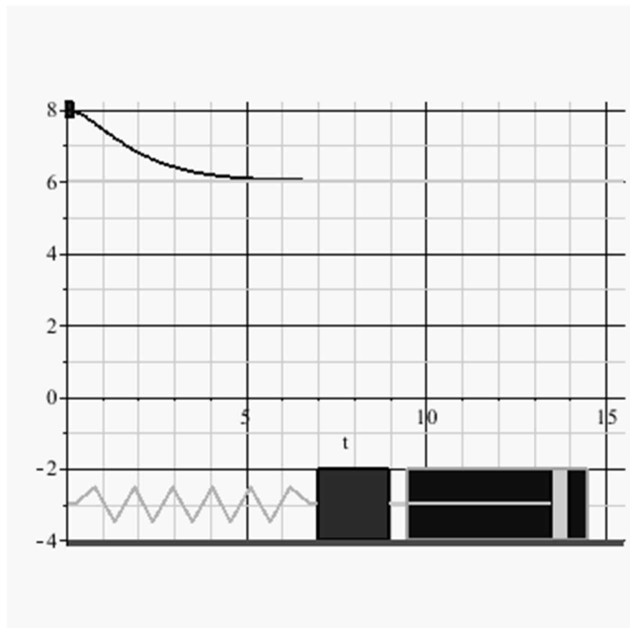
1) Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > \omega_0^2$

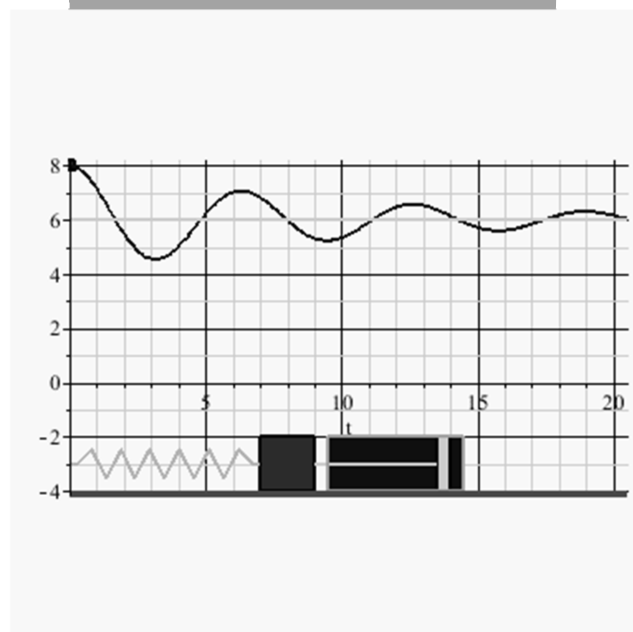
2) Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = \omega_0^2$

3) Movimiento subamortiguado: $b^2 < \omega_0^2$



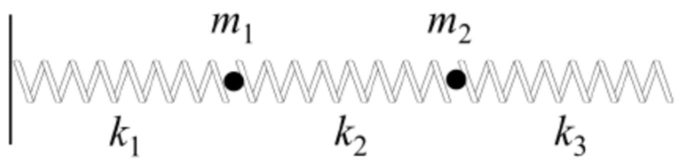
# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas

***Oscilaciones simultáneas de varios cuerpos en interacción.***

*Si existe una* **configuración de equilibrio***, si el movimiento se mantiene acotado en la* **proximidad del equilibrio**, la situación puede aproximarse por un sistema de cuerpos conectados por resortes.

Las ***soluciones*** que se encontrarán serán ***oscilaciones superpuestas y simultáneas***, cada una caracterizada por su propia frecuencia.

Suponga dos masas conectadas por resortes, entre sí (***cadena lineal***).
Los desplazamientos son sólo longitudinales.




***Coordenadas generalizadas***: los desplazamientos a partir de la posición de equilibrio.

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2.$$

$$U = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_3x_2^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2.$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 - \tfrac{1}{2}k_3x_2^2 - \tfrac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2.$$

Trabajando la expresión de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 - \tfrac{1}{2}k_3x_2^2 - \tfrac{1}{2}k_2(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)\\ &= \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 + \tfrac{1}{2}2k_2x_1x_2 - \tfrac{1}{2}(k_2+k_3)x_2^2.\end{aligned}$$

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas



$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 + \tfrac{1}{2}2k_2x_1x_2 - \tfrac{1}{2}(k_2+k_3)x_2^2.$$

Las ecuaciones de movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \xrightarrow{d/dt} m_1\ddot{x}_1 \\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2 \\ &\cdots \text{ídem } x_2 \cdots \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1+k_2)\,x_1 + k_2\,x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2\,x_1 - (k_2+k_3)\,x_2 \end{aligned}\right\}$$

$\mathbf{M\ddot{x}} = -\mathbf{Kx}$

(Forma matricial de la ec del oscilador armónico)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix},$$

Como solución se propone las dos masas oscilan armónicamente con alguna frecuencia $\omega$ (desconocida). Usando la forma compleja de la solución, con $x_i = \mathbb{R}z_i$: $\quad z_1(t) = a_1e^{i\omega t}, \quad z_2(t) = a_2e^{i\omega t}.$

$z_1$ y $z_2$ pueden expresarse como vector: $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{a}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t),$ → es la solución de $\mathbf{M\ddot{x}} = -\mathbf{Kx}$

Sustituyendo la solución en la ecuación $\mathbf{M\ddot{x}} = -\mathbf{Kx}$ : $-\omega^2\mathrm{M}\,\mathbf{a}\cancel{e^{i\omega t}} = -\mathrm{K}\,\mathbf{a}\cancel{e^{i\omega t}},$ => $-\omega^2\mathrm{M}\,\mathbf{a} = -\mathrm{K}\,\mathbf{a}$

$$\Rightarrow \boxed{(\mathrm{K} - \omega^2\mathrm{M})\mathbf{a} = 0},$$

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas

$$\boxed{(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})\mathrm{a}=0},$$

$$\boxed{(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})\mathrm{a}=0},$$ Es un sistema algebraico para las amplitudes **a**.

Es una generalización de un problema de autovalores de una matriz, donde $\omega^2$ es el autovalor y a es el autovector, y donde la matriz **M** aparece en lugar de ***I*** (matriz identidad).

---

(Paréntesis matemático)
Para una matriz ***A***:
Si $\boldsymbol{\lambda}$ es un autovalor de ***A***, entonces existe un autovector ***v*** ($\boldsymbol{v} \neq 0$) tal que: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{v} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

Si $\boldsymbol{v} \neq 0$ => la matriz $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I}$ es singular => $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I}) = 0$. Este determinante da los autovalores de ***A,***

---

$$\boxed{(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})\mathrm{a}=0},$$ la matriz ***M*** aparece en lugar de ***I***; $\omega^2$ en lugar de $\lambda$. Se resuelve como el problema habitual de autovalores: para tener amplitudes **a** no nulas, la matriz ***K –*** $\boldsymbol{\omega^2}$***M*** debe ser singular, es decir:

$$\boxed{\det(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})=0}$$ → se llama *ecuación característica* y es un polinomio cuadrático en $\omega^2$

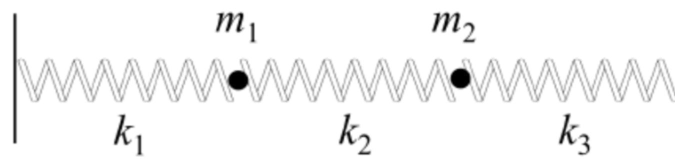
Su solución da las ***frecuencias*** que se buscan para la solución *x(t)*, y puede haber más de una.

Estas frecuencias se llaman ***frecuencias normales*** o ***autofrecuencias***. Los autovectores **a** se llaman ***modos normales***. Una vez encontrados, resta escribir la solución de alguna manera conveniente.

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas



***Caso de las masas ($m_1 = m_2 = m$) y resortes iguales ($k_1 = k_2 = k$)***:




$$\boxed{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2x_1 - (k_2+k_3)x_2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0},$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases} \qquad \boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} - \omega^2\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

El determinante será: $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathrm{M}) = (2k - m\omega^2)^2 - k^2.$

Si $\lambda = \omega^2$: $4k^2 + m^2\lambda^2 - 4km\,\lambda - k^2 = 0 \Rightarrow m^2\lambda^2 - 4km\,\lambda + 3k^2 = 0$

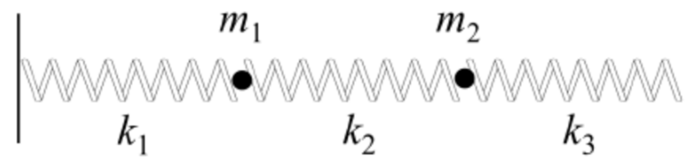
$$\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{4k\cancel{m} \pm \sqrt{16k^2\cancel{m^2} - 4\cancel{m^2}3k^2}}{2m^{\cancel{2}}} = \frac{\cancelto{2}{4}k}{\cancel{2}m} \pm \frac{\sqrt{\cancel{4}k^2}}{\cancel{2}m} = \frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m} = \begin{cases} \frac{3k}{m}, \\ \frac{k}{m}. \end{cases}$$

Por tanto, hay dos frecuencias normales: $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}.$

Éstas son dos ***frecuencias*** a las cuales las dos masas pueden oscilar de ***manera puramente armónica***. $\omega_1$ es la frecuencia de oscilación de una masa *m* sujeta a un resorte de constante elástica *k*. Se buscarán ahora los ***modos normales*** de estas oscilaciones.

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas






$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

***Modo de*** $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ :

$$\mathrm{K} - \omega_1^2\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2k - \cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}} & -k \\ -k & 2k - \cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

que tiene determinante 0. El sistema algebraico es $\boxed{(\mathrm{K} - \omega^2\mathrm{M})\mathbf{a} = 0}$ :

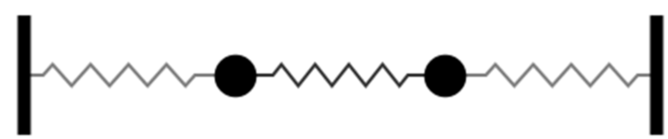
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 := a,$$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t}.$$

Para tomar la parte real se puede considerar: $a = Ae^{-i\phi}$

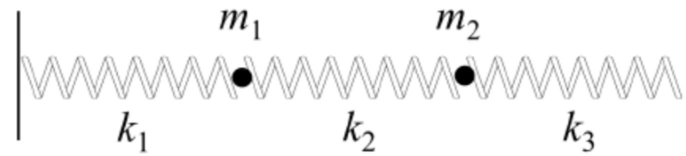
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi).$$

Las dos masas ***oscilan con la misma frecuencia*** $\boldsymbol{\omega_1}$, la misma amplitud ***A*** y la ***misma fase***.
El resorte del medio no se comprime ni se expande (como si no existiera).
Esto explica por qué $\omega_1 = \sqrt{k/m}$



# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas






$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

***Modo de*** $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ :

$$\mathrm{K} - \omega_2^2 \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2k - \cancel{m}\frac{3k}{\cancel{m}} & -k \\ -k & 2k - \cancel{m}\frac{3k}{\cancel{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 := a.$$

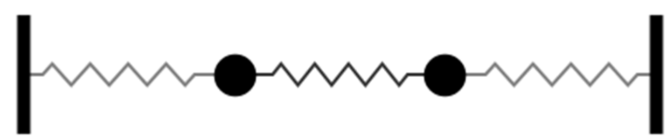
Es decir: $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t}.$

Nuevamente si $a = Ae^{-i\phi}$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi).$$

Las dos masas ***oscilan con la misma frecuencia*** $\boldsymbol{\omega_2}$, la misma amplitud ***A*** y la ***misma fase*** pero en ***sentidos opuestos***.

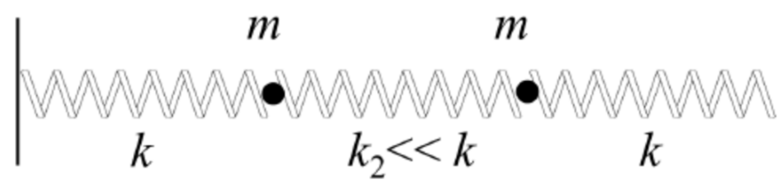
El resorte del medio sí se comprime y se expande. Esto explica por qué $\omega_2 \neq \omega_1 = \sqrt{k/m}$. El sistema se comporta como si hubiera un resorte de constante elástica 3k para cada masa por ***separado***.



La solución general es una combinación lineal de las dos soluciones encontradas:

$$\mathbf{z}(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t}, \quad \mathbf{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2),$$

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas




***Acoplamiento débil***:

El resorte del medio es mucho más blando que los otros dos: $k_2 \ll k$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -(k+k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m\ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2+k)x_2 \end{cases} \qquad \boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k+k_2-m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2-m\omega^2 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = (k+k_2-m\omega^2)^2 - k_2^2 \quad = (k_2 + (k-m\omega^2))^2 - k_2^2 = \cancel{k_2^2} + (k-m\omega^2)^2 + 2k_2(k-m\omega^2) - \cancel{k_2^2}$$

$$= (k-m\omega^2)(2k_2+k-m\omega^2) = 0 \qquad \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_2}{m}}.$$

La $\omega_1$ es exactamente la misma que en el caso de resortes iguales (el movimiento del modo correspondiente no afecta el resorte del medio).

La segunda frecuencia en este caso es muy parecida a $\omega_1$, porque $k_2 \ll k$.

Si el acoplamiento es nulo, las dos frecuencias son iguales: una situación llamada ***degeneración***. La presencia del acoplamiento rompe la degeneración, separando las dos frecuencias.

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas



***Acoplamiento débil***:

Como $\omega_1$ y $\omega_2$ son similares, se calcula un promedio: $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1$

El desvío de $\omega_0$ se llama ε: $\omega_1 = \omega_0 - \epsilon, \quad \omega_2 = \omega_0 + \epsilon.$

Los modos normales en forma compleja serán:

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0-\epsilon)t}, \quad \mathbf{z}_2(t) = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0+\epsilon)t}.$$

La solución general será $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}_2(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0-\epsilon)t} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0+\epsilon)t},$

$$\Rightarrow \mathbf{z}(t) = \left( a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\epsilon t} \right) e^{i\omega_0 t}.$$

El primer factor varía mucho más lento dado que $\varepsilon \ll \omega_0$

En un corto tiempo, el primer factor es casi cte. La oscilación es casi como la del modo desacoplado: $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{a}e^{i\omega_0 t}$.
Con el tiempo, el primer término comienza a crecer.

# Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas



Supongamos que $a_1 = a_2 := \frac{a}{2} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathbf{z}(t) = \left( a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\epsilon t} \right) e^{i\omega_0 t}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}(t) = \frac{a}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + e^{i\epsilon t} \\ e^{-i\epsilon t} - e^{i\epsilon t} \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t} = a \begin{bmatrix} \cos \epsilon t \\ -i \sin \epsilon t \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t}.$$

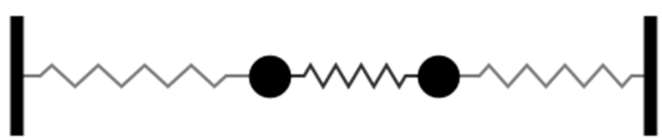
Para las posiciones de las masas, se toma la parte real: $x_1(t) = a \cos \epsilon t \cos \omega_0 t,$ $\quad x_2(t) = a \sin \epsilon t \sin \omega_0 t.$

A tiempo *t = 0*: $x_1(0) = a, \quad x_2(0) = 0, \qquad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$

Se aparta la masa 1 de su equilibrio y se suelta (la masa 2 quieta). Como $\varepsilon \ll \omega_0$ , hay un tiempo ($0 \leq t \ll {}^1/_\varepsilon$ ) durante el cual las funciones de *ϵt* no cambian: *cos ϵt ≈ 1* y *sin ϵt ≈ 0*. Así que durante ese tiempo:

$$x_1(t) \approx a \cos \omega_0 t, \quad x_2(t) \approx 0.$$

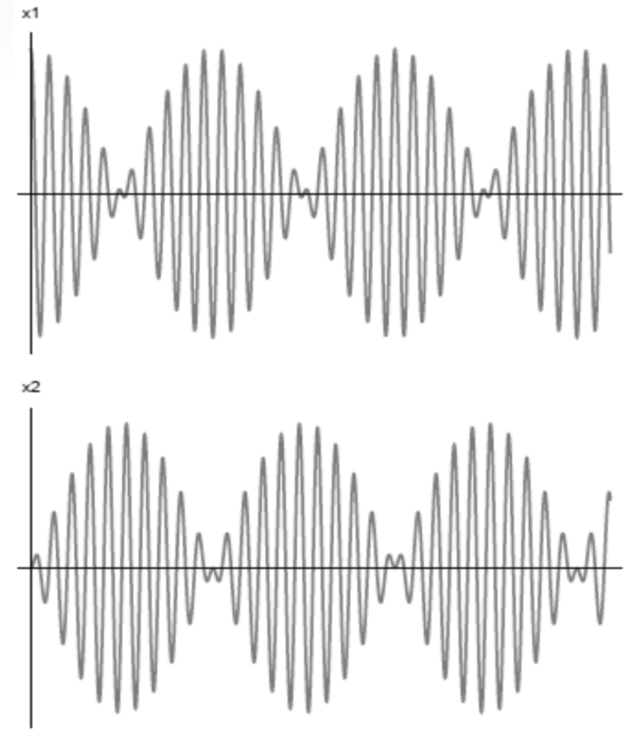
Se observa que la masa 1 oscila como si estuviera libre, y la masa 2 no se mueve. Pero en realidad la masa 1 está deformando el resorte blando del medio, así que esta situación no puede durar. Con suficiente tiempo, va a hacer oscilar a la masa 2.



Con el tiempo, el factor *sin ϵt* ≈ 1, el *cos ϵt* ≈ 0, y en medio período (de la frecuencia ϵ, t ≈ π/(2ε). La situación se habrá invertido: $x_1(t) \approx 0, \;\; x_2(t) \approx a \sin \omega_0 t.$

## Osciladores acoplados: Cadena lineal de dos masas






Por tanto, la oscilación rápido $\omega_0$ pasa lentamente de la masa 1 a la 2 y regresa.

El movimiento resultante se denomina “*batido*”.

El fenómeno de batido aparece en la superposición de dos ondas con frecuencias similares. Para conocer esas ondas, se hace un cambio de coordenadas:

$$\xi_1(t) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad \xi_2(t) = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

Con $x_1(t) = a \cos \epsilon t \cos \omega_0 t, \qquad x_2(t) = a \sin \epsilon t \sin \omega_0 t.$

Se obtiene:

$$\xi_1(t) = \tfrac{1}{2} a \cos \omega_1 t,$$
$$\xi_2(t) = \tfrac{1}{2} a \sin \omega_2 t.$$

Éstas son las dos ondas que oscilan con la misma amplitud y con frecuencias similares, y de cuya interferencia resulta el batido tanto en $x_1(t)$ como en $x_2(t)$.

Estas coordenadas se llaman “***normales***”.