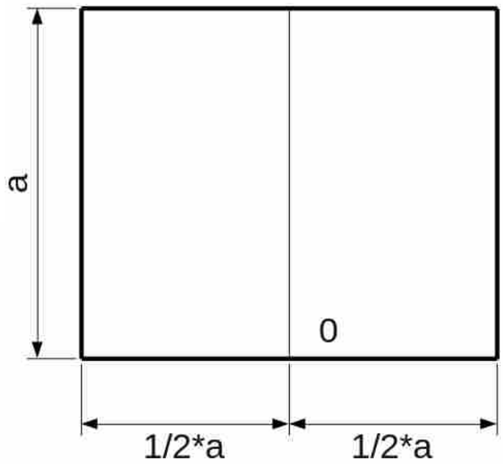
Segundo Parcial - Recuperatorio

Nombre: **Fecha:**

En todas las preguntas de opción múltiple deberá indicar su elección final <u>en esta hoja</u>.
En todos los casos debe presentar una <u>justificación</u> de su elección.
Las opciones marcadas correctamente <u>suman puntos solo si están debidamente justificadas</u>.
No se consideran puntos por desarrollo de opciones marcadas incorrectamente.
Si elige “Ninguna de las anteriores” debe indicar de forma clara el valor correcto que calculó

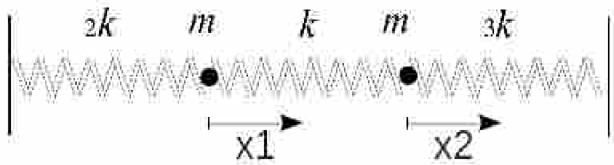
1. Se dispone de una lámina cuadrada de lado **a** y masa **m,** para usar como componente de un agitador, por lo que se desea conocer su tensor de inercia evaluado en el punto que está en uno de los bordes y a una distancia a/2 de la esquina. Este está dado por : (15 puntos)



a) $\begin{bmatrix} \frac{a^2m}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2m}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2m}{6} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{a^2m}{3} & -\frac{a^2m}{4} & 0 \\ -\frac{a^2m}{4} & \frac{a^2m}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{3}a^2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{a^2m}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2m}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5m}{12}a^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{a^2m}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13m}{36}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4m}{9}a^2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{a^2m}{9} & -\frac{a^2m}{36} & 0 \\ -\frac{a^2m}{36} & \frac{a^2m}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{9}a^2 \end{bmatrix}$ f) *ninguna de las anteriores*

2. Considere el sistema de resortes acoplados de la figura



A) Cuál o cuáles de las siguientes opciones es ω^2 normal del sistema (10 puntos)

a) $\frac{k}{2m}\left(-\sqrt{5}+3\right)$ b) $\frac{3k}{m}$ c) $\frac{k}{m}\left(-\sqrt{2}+2\right)$ d) $\frac{k\left(\sqrt{17}+5\right)}{2m}$

e) $\frac{k}{m}\left(-\sqrt{10}+4\right)$ f) $\frac{7k}{m}$ g) $\frac{k}{2m}\left(-\sqrt{5}+7\right)$ h) Ninguna de los anteriores

B) Indique cuál o cuáles de las siguientes posiciones iniciales produce oscilaciones armónicas. Considere velocidades iniciales nulas (15 puntos)

(a) x1= -0,333335 x2= 0,333335
(b) x1= 1.85 x2= 3
(c) x1= 3,23 x2= 2
(d) x1= 7 x2= -5.4654
(e) x1= 3,5 x2= 2,7327
(f) Ninguna de las anteriores

3. Considere un satélite artificial con una órbita circular a una altura tan baja que es despreciable en comparación con el radio de la tierra $r_t = 6.4 \,.\, 10^6 m$. Considere que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8\, m/s^2$

   A) Calcule la velocidad del satélite (20 puntos)

4. Considere un máquina clasificadora vibratoria compuesta de un juego de platos con rejillas de distintos tamaño, su masa total es de 10kg, estos están montados sobre cuatro resortes de constante k=2N/m. Para generar la vibración se utiliza un motor que hace rotar un eje desbalanceado que genera una fuerza sobre el sistema que se puede modelar como $F = F_0 \,.\, e^{i\omega t}$. Si el equipo se usará para separar una carga de 20 kg. Suponga que una mayor amplitud de oscilación mejora la separación. ¿a qué frecuencia ω recomienda que funcione el motor para facilitar la separación?

   Justifique e incluya un diagrama del modelado del problema (10 puntos)

   A) $\omega \neq 0{,}5164\, s^{-1}$ B) $\omega = 0{,}5164\, s^{-1}$ C) $\omega \neq 0{,}3651\, s^{-1}$ D) $\omega = 0{,}3651\, s^{-1}$

   E) $\omega \neq 1{,}5811^{-1}$ F) $\omega = 1{,}5811^{-1}$ G) $\omega \neq 1{,}9365\, s^{-1}$ H) $\omega = 1{,}9365\, s^{-1}$

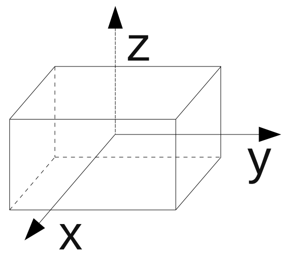
   I) $\omega \neq 0{,}8944\, s^{-1}$ J) $\omega \neq 0{,}6324\, s^{-1}$ K) Ninguna de las anteriores

5. Un a un oscilador armónico simple de masa **m** =10 kg y resorte de masa despreciable con constante **k**=2 N/m se le agrega un amortiguador de contante **c** . El sistema es desplazado del equilibrio ¿Cuál de los siguientes valores de c hace que el sistema se detenga más rápidamente ? (10 puntos)

   a) $c = 4\sqrt{5}$ b) $c = 20\sqrt{5}$ c) $c = 0\sqrt{5}$ d) $c = 2\sqrt{5}$ e)Ninguno de los anteriores

6. El tensor de inercia de un ladrillo de densidad uniforme, de lados a b c, evaluado en su centro de masa está dado por.

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2 m}{12} + \frac{c^2 m}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 m}{12} + \frac{c^2 m}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 m}{12} + \frac{b^2 m}{12} \end{bmatrix}$$



   Si a=1, b=2, c=3 ¿Cuál es la energía cinética de rotación del cuerpo si está rotando con una velocidad angular ω en un eje de rotación con dirección $\vec{v}(1,2,3)$ pasando por el centro de masa? (20 puntos)

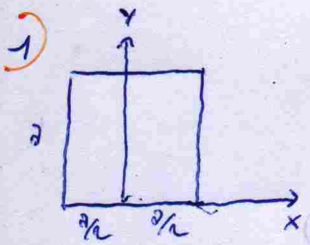
   A) $T = m\frac{49}{6}\omega^2$ B) $T = m\frac{49}{12}\omega^2$ C) $T = m\frac{7}{24}\omega^2$ D) $T = m\frac{7}{12}\omega^2$

   E) $T = m0.627\,\omega^2$ F) $T = \frac{m}{2}0.627\,\omega^2$ G) Ninguna de las anteriores

7. <u>Problema Opcional, puntuación extra</u>. Calcule la energía cinética de rotación del punto anterior considerando que el eje de rotación pasa por $P(0,0,-0.75)$. Considere que los lados a, b ,c son paralelos a los ejes, x, y, z respectivamente (20 puntos)

Mecánica Racional   2do Examen Parcial   Recuperatorio   13-11-19

1)



$$m = \rho \cdot \text{área} = \rho \int_0^a \int_{-a/2}^{a/2} dx \cdot dy = \rho \int_0^a a \, dy = \rho a^2 = m$$

$$x\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a}{2} - -\frac{a}{2} = a$$

$$I_{xx} = \rho \int_0^a \int_{-a/2}^{a/2} y^2 + z^2 \cdot dx \cdot dy = \rho \int_0^a y^2 a \, dy = \frac{\rho a^4}{3} = \frac{\rho a^2}{3} a^2 = \boxed{\frac{m a^2}{3} = I_{xx}}$$

$$\frac{y^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$I_{yy} = \rho \int_0^a \int_{-a/2}^{a/2} x^2 + z^2 \cdot dx \cdot dy = \rho \int_0^a \frac{a^3}{12} dx = \frac{\rho a^4}{12} = \frac{\rho a^2}{12} a^2 = \boxed{\frac{m a^2}{12} = I_{yy}}$$

$$z = 0 \Rightarrow I_{xx} + I_{yy} = \boxed{I_{zz} = \frac{5 m a^2}{12}}$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a^3}{3 \cdot 8} - -\frac{a^3}{3 \cdot 8} = \frac{a^3}{12}$$

$$\boxed{I_{xz} = 0} \qquad \boxed{I_{yz} = 0}$$

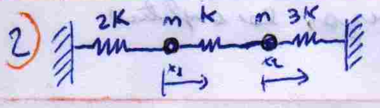
$$I_{xy} = -\rho \int_0^a \int_{-a/2}^{a/2} x \cdot y \, dy \cdot dx = \rho \int_0^a 0 \cdot y \, dy = \boxed{0 = I_{xy}}$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a^2}{2 \cdot 4} - \frac{a^2}{2 \cdot 4} = 0$$

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} \frac{m a^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5 m a^2}{12} \end{bmatrix}}$$

C

2)



$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -2K x_1 - K x_1 + K x_2 \\ m \ddot{x}_2 = +K x_1 - K x_2 - 3K x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m \ddot{x}_1 + (3K) x_1 + (-K) x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + (-K) x_1 + (4K) x_2 = 0 \end{cases}$$

Propongo solución

$$\begin{cases} x = A \cdot e^{i\omega t} \\ \dot{x} = \omega \cdot i A \cdot e^{i\omega t} \\ \ddot{x} = -\omega^2 A \cdot e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & 4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] \ddot{\vec{x}} + [K] \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$[M] \cdot -\omega^2 \vec{x} + [K] \vec{x} = 0$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\Rightarrow \det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -K \\ -K & 4K - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(3K - \omega^2 m)(4K - \omega^2 m) - K^2 = 0$$

$$12K^2 - 3K\omega^2 m - 4K\omega^2 m + (\omega^2)^2 m^2 - K^2 = 0$$

$$m^2 (\omega^2)^2 - 7Km(\omega^2) + 11K^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7Km \pm \sqrt{49K^2 m^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 11K^2}}{2 \cdot m^2} = \boxed{\frac{K}{m} \cdot \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2} = \omega_{1,2}^2}$$

8

Para ω_1^2

$$\begin{bmatrix} 3K - \frac{7+\sqrt{5}}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cancel{m} & -K \\ -K & 4K - \frac{7+\sqrt{5}}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cancel{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si $x_1 = 1$

$$3K - \frac{7+\sqrt{5}}{2} K - x_2 K = 0$$

$$x_2 = 3 - \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx -1{,}618$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}618 \end{bmatrix}} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0{,}618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1^0 1 → x_2^0 ← -1,618

Para ω_2^2

$$\begin{bmatrix} 3K - \frac{7-\sqrt{5}}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cancel{m} & -K \\ -K & 4K - \frac{7-\sqrt{5}}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cancel{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si $x_1 = 1$

$$3K - \frac{7-\sqrt{5}}{2} K - x_2 K = 0$$

$$x_2 = 3 - \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}618 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}618 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2 \; \boxed{\begin{bmatrix} 3{,}23 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

C

x_1^0 → 1 x_2^0 → 0,618   → 1,618   → 1

3) $r = \frac{L^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}$ órbita circular $\epsilon = 0$ $r = \frac{L^2}{\mu k}$ (1)

$\dot\phi = \frac{L}{\mu r^2}$ $L^2 = (\underbrace{\dot\phi\, r_t}_{Vel} \cdot r_t\, \mu)^2 = Vel^2 r_t^2 \mu^2$ (2)

$k = G M_1 M_2 = G \cdot M_t \cdot m_s = G \cdot \frac{M_t \cdot m_s}{M_t + m_s} (M_t + m_s) = G \mu (M_t + m_s) \approx G \cdot \mu \cdot M_t \approx k$ (3)

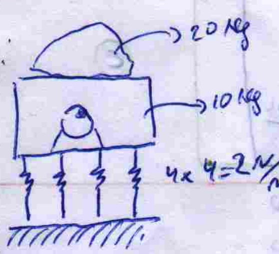
(3) y (2) en (1) $r = \frac{Vel^2 r_t^2 \mu^2}{\mu \cdot G \mu \cdot M_t} \Rightarrow Vel^2 = \frac{G\, M_t}{r_t}$ (4)

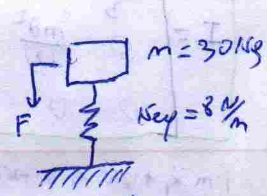
$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $\cancel{m_s} \cdot g = \frac{G \cdot M_t \cdot \cancel{m_s}}{r_t^2}$ $g\, r_t^2 = G\, M_t$ (5)

(5) en (4) $Vel = \sqrt{\frac{g\, r_t^2}{r_t}} = \sqrt{g\, r_t} = \sqrt{9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 m} = 7919 \frac{m}{s} = Vel$

---

4)





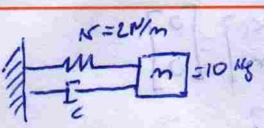
$F = F_0 e^{i\omega t}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8 \frac{kg\, m}{s^2\, m}}{30 kg}} = 0{,}5163\ s^{-1}$ B

Busco una frecuencia igual a la natural del sistema para maximizar la amplitud de vibración por resonancia

---

5)



$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{2/10}\ s^{-1}$ factor de amortiguación $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ a

El sistema se detiene más rápidamente si $\xi = 1$ $1 = \frac{c}{2m\omega}$ $c = 2m\omega = 2 \cdot 10 kg \cdot \sqrt{\frac{2}{10}}\ s^{-1} = 4\sqrt{5}\ \frac{kg}{s}$

---

6) $I = m \begin{bmatrix} 13/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$ $\vec V = \langle 1, 2, 3 \rangle$ $\|\vec V\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ $\vec n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}\ \frac{2}{\sqrt{14}}\ \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle$

Momento de inercia en la dirección de $\vec V$ pasando por cm

$I_v = n^T I_{cm} n$

$I_v = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}\ \frac{2}{\sqrt{14}}\ \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle m \begin{bmatrix} 13/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} = \frac{7}{12} \cdot m$

$T = \frac{1}{2} I_v \cdot \omega^2 = \frac{7}{24} m \omega^2 = T$ c

---

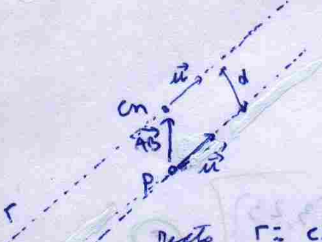
7)

La distancia d entre los dos ejes paralelos es

$d = \frac{|\langle 1;2;3 \rangle \times \langle 0;0;0{,}75 \rangle|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{45}{224}}$ $d^2 = \frac{45}{224}$

$I_v^P = I_v^{cm} + m \cdot d^2 = \overbrace{\frac{7}{12} m}^{\text{del punto (6)}} + \frac{45}{224} m = \frac{527}{672} m$

$d = \frac{|\vec u \times \vec{AB}|}{|\vec u|}$



recta r: $cm + t \cdot \vec u$

recta s: $P + t \cdot \vec u$

$\vec{AB} = cm - P$

$T = \frac{I_v^P}{2} \cdot \omega^2 = \boxed{\frac{527}{1344} m \cdot \omega^2 = T}$