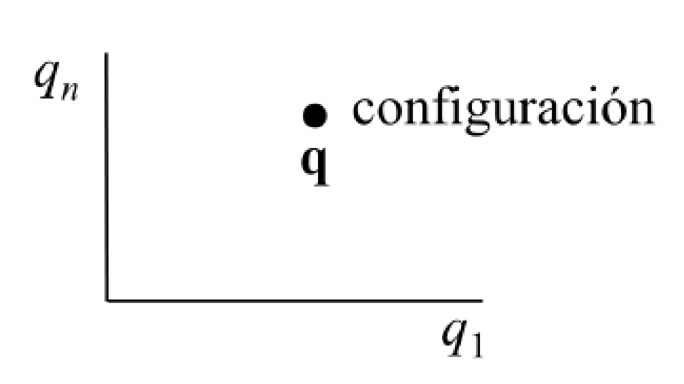
Mecánica Hamiltoniana

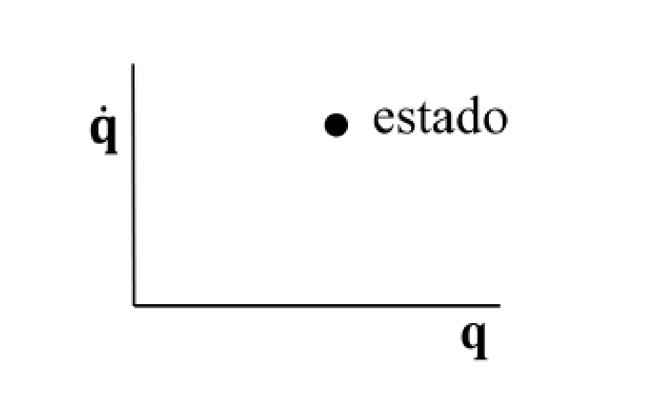
Mecánica Racional – 2019

En la formulación lagrangiana un sistema está caracterizado por *n* coordenadas generalizadas, que constituyen un punto ($q_1 \dots q_n$) en un ***espacio de configuraciones***.



Esto no alcanza para describir el estado del sistema. Se necesita ***POSICION Y VELOCIDAD***

El ***espacio de estados*** es la herramienta que permite determinar el estado del sistema. Usa el ***doble de dimensiones*** que el espacio de configuraciones. Un punto en este espacio está formado por todas las coordenadas generalizadas y sus derivadas temporales: $(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$



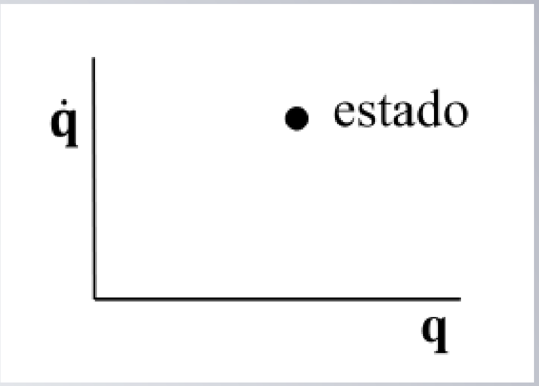
En este espacio, el sistema está definido por el objeto central de la teoría, $\mathcal{L}$, como función del estado y, eventualmente, del tiempo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) = T - U$$

Dado un estado inicial (condiciones iniciales $q_0, \dot{q}_0$) las ***ecuaciones de movimiento que determinan la evolución del sistema*** son las *n* ecuaciones de Lagrange:

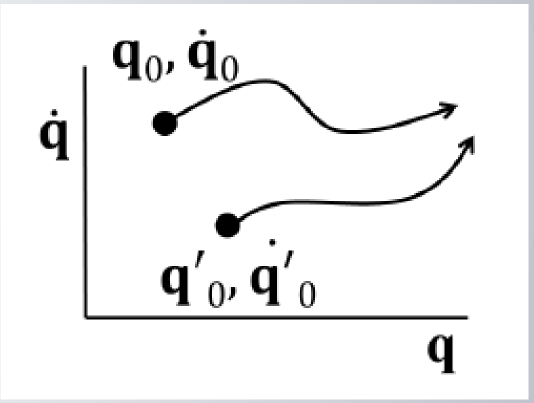
$$\frac{d\mathcal{L}}{dq_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \dots n$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \dots n$$



La solución de este sistema de ***n ecuaciones diferenciales de segundo orden*** es una trayectoria (una órbita) en el espacio de estados, única para cada estado inicial.

También se definió el ***momento generalizado***: $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$



Si las q_i son las coordenadas cartesianas, los p_i son los momentos lineales usuales. En general no lo son, pero juegan el mismo rol, y también se llaman ***momentos canónicos o momentos conjugados.***

En la mecánica hamiltoniana el rol central de $\mathcal{L}$ es reemplazado por el $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Las ecuaciones de movimiento involucran derivadas de $\mathcal{H}$ con respecto a sus propias variables (q_i; p_i), en lugar de (q_i; $\dot{q}_i$) como en el caso de $\mathcal{L}$.

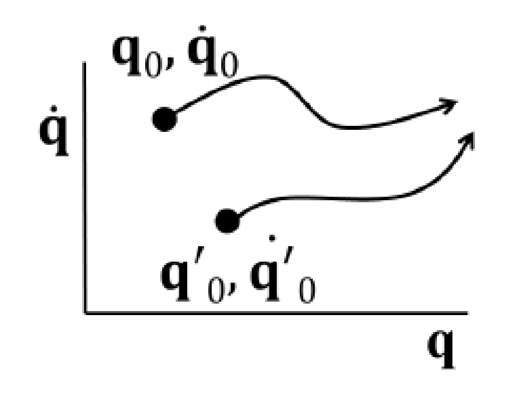
Si los vínculos $\neq f(t)$ (vínculos esclerónomos) y si $U \neq U(\dot{q})$ => $\mathcal{H} = E$.

Introducción

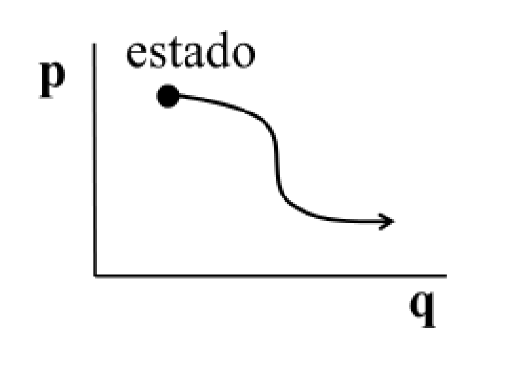
Las variables de $\mathcal{H}$ no son los estados (q_i; $\dot{q}_i$), sino

$$(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$$

que también forman un espacio ***2n dimensional*** como el espacio de estados, pero no es exactamente el mismo. Lo llamamos ***espacio de fases***, y el estado del sistema también está definido por un punto en este espacio.



Las ecuaciones de Hamilton dicen ***cómo se mueve ese punto***, describiendo una órbita o trayectoria en el espacio de fases.

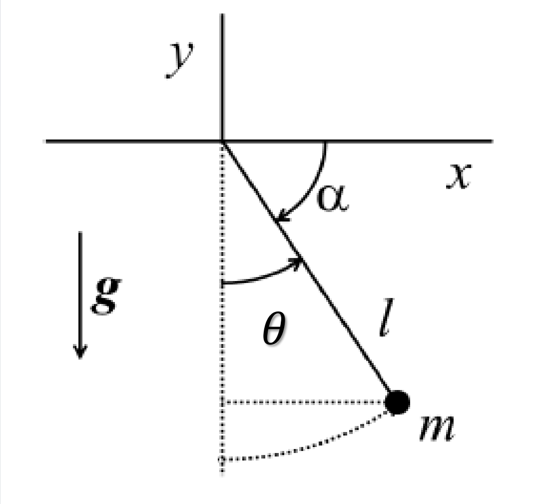


El conjunto de todas las trayectorias posibles (o unas cuantas que sean suficientemente características de todas las posibles) suele llamarse ***cuadro de fases.***

Ecuaciones de Hamilton: Caso 1D

Sistema conservativo unidimensional: por ejemplo un péndulo => $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underbrace{A_{(q)}}_{?}\dot{q}^2 - U(q) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$$



Se busca la ***velocidad en términos del momento***: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{A}$

En el Hamiltoniano: $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{A} - \frac{1}{2}A\left(\frac{p}{A}\right)^2 + U(q) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{A} + U(q)$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q,p) \quad y \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q,\dot{q}) \Rightarrow \boxed{\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q}(q,p) - \mathcal{L}\big(q,\dot{q}(q,p)\big)}$$

Ecuaciones de Hamilton: Caso 1D

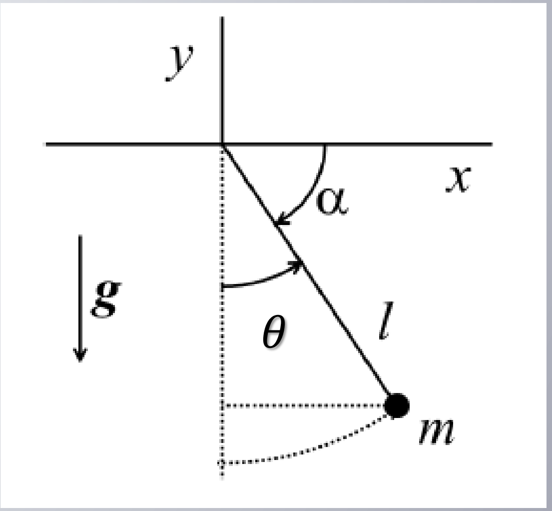
$$\mathcal{H}=\mathcal{H}(q,p) \quad y \quad \mathcal{L}=\mathcal{L}(q,\dot{q}) \Rightarrow \boxed{\mathcal{H}(q,p)=p\dot{q}(q,p)-\mathcal{L}\big(q,\dot{q}(q,p)\big)}$$

Las ***ecuaciones canónicas de movimiento*** serán (se deriva $\mathcal{H}$ respecto a sus variables):

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}=p\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}}_{p}\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}\right)=p\cancel{\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}-p\cancel{\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}=-\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}}_{p}=-\frac{d}{dt}p\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}=-\dot{p}}$$

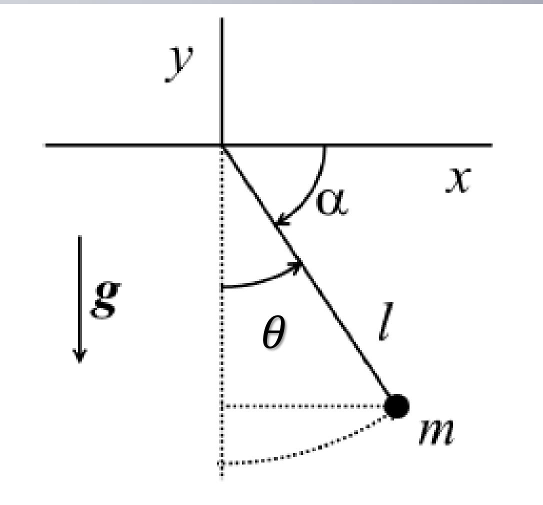
$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\left(\dot{q}+p\cancel{\frac{\partial\dot{q}}{\partial p}}\right)-\cancel{\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}}_{p}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial p}=\dot{q}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\dot{q}}$$

En lugar de obtener ***n = 1 ecuación de orden 2*** (a partir de la mecánica lagrangiana $\frac{d\mathcal{L}}{d\theta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial\dot{\theta}}$), por la formulación hamiltoniana se obtienen ***2n = 2 ecuaciones de orden 1***.



Ecuaciones de Hamilton: Caso 1D

Ejemplo del péndulo plano: $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos\theta,$ $\quad q_1 = \theta$



El momento canónico conjugado: $p_\theta = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta. \quad \Rightarrow \dot\theta = \dfrac{p_\theta}{ml^2}.$

El Hamiltoniano es: $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot q_i - \mathcal{L}.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= p_\theta\,\dot\theta - \mathcal{L} \\
&= p_\theta\,\dot\theta - \tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta \\
&= p_\theta\frac{p_\theta}{ml^2} - \tfrac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2 - mgl\cos\theta \\
&= \boxed{\frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = \mathcal{H}(\theta,p_\theta)}.
\end{aligned}$$

Por mecánica Hamiltoniana, las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \dot\theta = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} \\[2mm] \dot p_\theta = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot\theta = \dfrac{p_\theta}{ml^2} \\[2mm] \dot p_\theta = -mgl\sin\theta \end{array}}.$$

2n ecuaciones de orden 1 (n: gr de lib)

Por el Lagrangiano: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}.$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial\phi}(mgl\cos\phi) = mgl\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi) = -mgl\sin\phi,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \frac{\partial}{\partial\dot\phi}(\tfrac{1}{2}ml^2\dot\phi^2) = ml^2\dot\phi \xrightarrow{d/dt} ml^2\ddot\phi.$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\cancel{m}g\cancel{l}\sin\phi}_{\text{torque resp. O}} = \underbrace{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}_{\text{mom. inercia}}\ \ddot\phi$$

Por la mecánica Lagrangiana, la ecuación de movimiento:

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\phi = -\frac{g}{l}\sin\phi}$$

n ecuaciones de orden 2

Ecuaciones de Hamilton: El caso general

Se considera el caso general (no necesariamente conservativo): $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$

Se puede demostrar que, para n grados de libertad, se obtienen n+1 ecuaciones diferenciales: $\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}.$

La derivada temporal: Si $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t) \Rightarrow \mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$

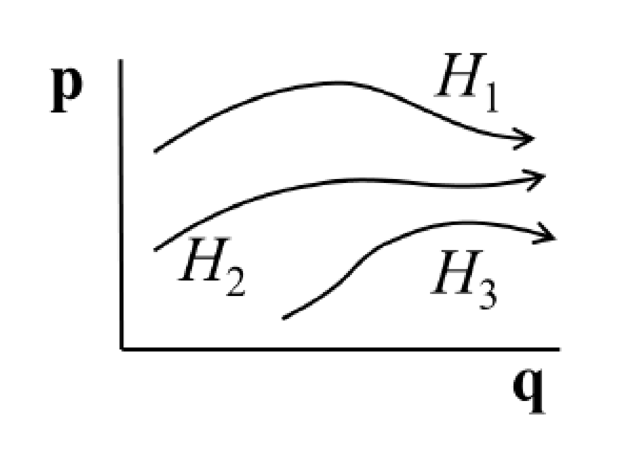
Pero si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t) \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$, entonces se puede calcular:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

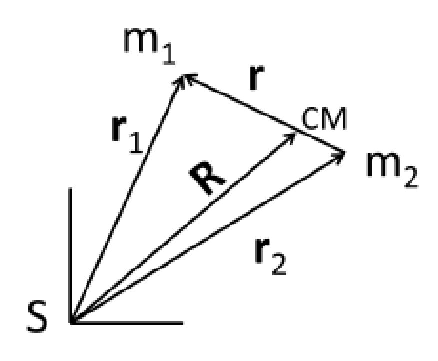
$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\dot{p}_i \right)}_{\substack{\text{todas } = 0 \ \forall i \\ \times \text{ ec. Hamilton}}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}.$$

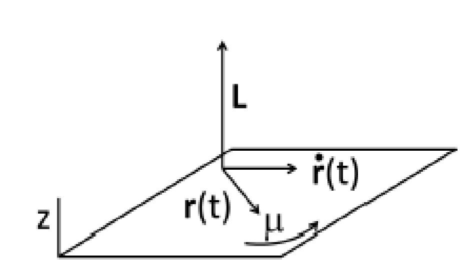
$\mathcal{H}$ es una cte de movimiento ***si no depende explícitamente del tiempo.***
En tal caso, la órbita en el espacio de fases será por curvas de $\mathcal{H}$ = cte (o E = cte si $\mathcal{H}$ = E).

$\mathcal{H}$ da el movimiento, pero no cambia. ***Esto no pasa con $\mathcal{L}$ en el espacio de estados***



Ejemplo de la partícula en un potencial central $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$ $U = U(r) \leftarrow$ central





Como la relación entre (r,ϕ) y (x,y) no depende del tiempo y *U(r)* no depende de las velocidades,
$\Rightarrow \mathcal{H}$ = E = T + U

Las coordenadas canónicas son (por definición de momentos):

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}.$$

Despejando las velocidades generalizadas: $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2},$

El Hamiltoniano será:

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\phi^2}{m^2r^4}\right) + U(r) = \boxed{\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + U(r)}.$$

Ecuaciones de Hamilton

$$\mathcal{H} = \boxed{\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + U(r)}.$$

Las 4 ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0.$$

$$p_\phi = \text{cte} = p_\phi(0)$$

Como $p_r = m\dot{r}$ $\Rightarrow$ $$m\ddot{r} = -U'(r) + \frac{p_\phi^2}{mr^3}.$$

Relación entre la aceleración radial y la fuerza externa más la centrífuga (misma ecuación obtenida en la unidad de fueras centrales)

Transformaciones canónicas

Usada como método de cálculo, la teoría de Hamilton ofrece algunas ventajas con respecto a la de Lagrange porque se trabaja con las mismas ecuaciones de movimiento para resolver.

La ventaja reside principalmente en ***la estructura matemática, con coordenadas y momentos como variables independientes, que le dan gran flexibilidad***.

Tanto la ***Mecánica Estadística*** como la ***Mecánica Cuántica*** aprovechan esta gran ventaja

Esta flexibilidad sirve para transformar un problema complicado en uno más sencillo, uno donde la solución de las ecuaciones de Hamilton sea sencilla.

Se puede trabajar en una transformación donde ***se preserven las ecuaciones de Hamilton***. Estas se llaman ***Transformaciones canónicas,*** donde se denominan en minúsculas las variables del sistema original y en mayúsculas las variables del nuevo sistema. Entonces se pasa de $p_i \rightarrow P_i$, $q_i \rightarrow Q_i$ y $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$

Las ecuaciones de la transformación serán:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \Rightarrow P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i} \qquad q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \Rightarrow Q_i = -\frac{\partial F}{\partial P_i} \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

donde F se llama ***Función Generatriz*** y permite la transformación. $F = F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$

Corchete de Poisson

Es un operador propio de la mecánica Hamiltoniana. Sean dos funciones en el espacio de fases, *f(q; p)* y *g(q; p)*. Definimos su corchete de Poisson como:

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}.$$

Algunas propiedades:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (es anticonmutativa)
- $\{f, c\} = 0 \ \forall c$ constante
- $\{\mathcal{H}, q_i\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = -\dot{q}_i \Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\}},$
- $\{\mathcal{H}, p_i\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \Rightarrow \boxed{\dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\}}.$
- Los corchetes de Poisson son invariantes ante las transformaciones canónicas. Se puede calcular {f,g} en cualquiera de las variables: $\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}.$