FUERZAS CENTRALES

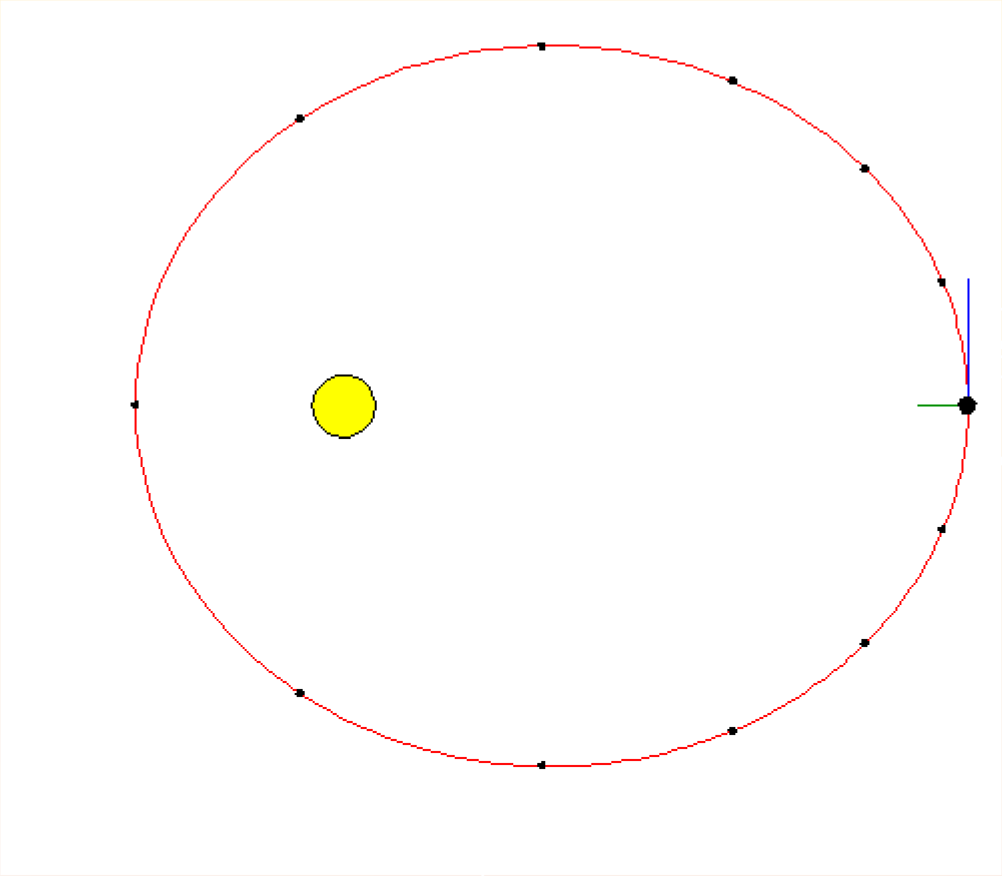
MECÁNICA RACIONAL – 2019

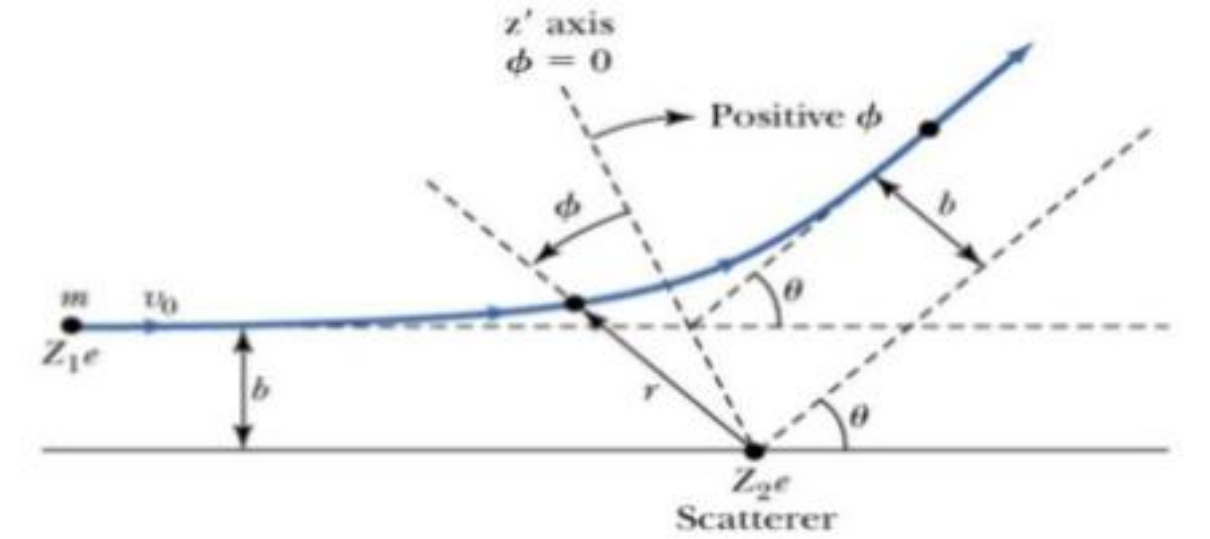
Fuerzas centrales

Movimiento de dos cuerpos que se ejercen entre sí una fuerza central conservativa, sin la acción de ninguna otra fuerza externa.

Ejemplos:

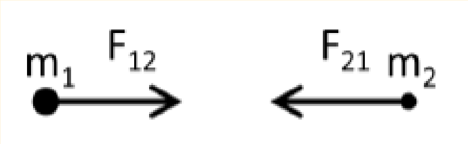
- Dos estrellas en un sistema binario
- Sistemas Tierra-Sol o Tierra-Luna
- Sistema electrón-protón del átomo de H (inicialmente)
- 2 átomos en una molécula diatómica (ej. CO)
- Fenómeno scattering

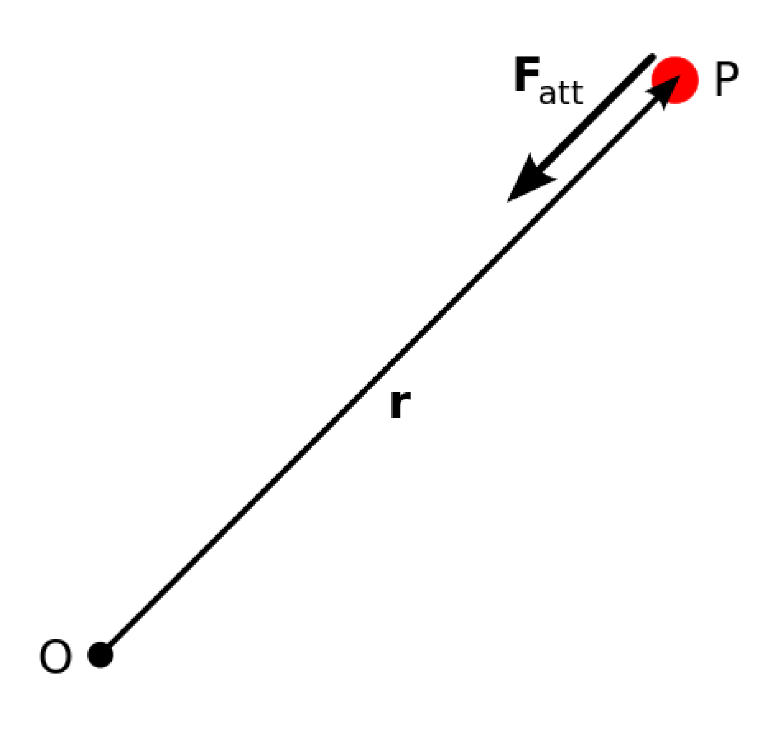




Fuerzas centrales

Una fuerza central sobre un objeto es una fuerza que está dirigida a través de la línea que une el objeto con el origen. Su magnitud sólo depende de la distancia al $\vec{r}$ origen.





$\vec{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{r}}$

Versor $\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\vec{r}}{|\boldsymbol{r}|}$

r vector posición

F función escalar del valor de la fuerza

F función vectorial del valor de la fuerza (campo vectorial)

$\vec{F}$ es la fuerza

Son ejemplos de fuerzas centrales:

- Fuerza gravitatoria
- Fuerza coulombiana

que son proporcionales a $\dfrac{1}{r^2}$.

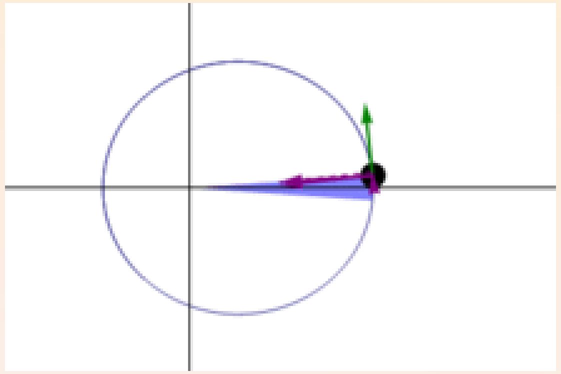
Un objeto en tal campo de fuerzas, con ***F*(r)** de atracción, cumple con las ***leyes de Kepler del movimiento planetario***.

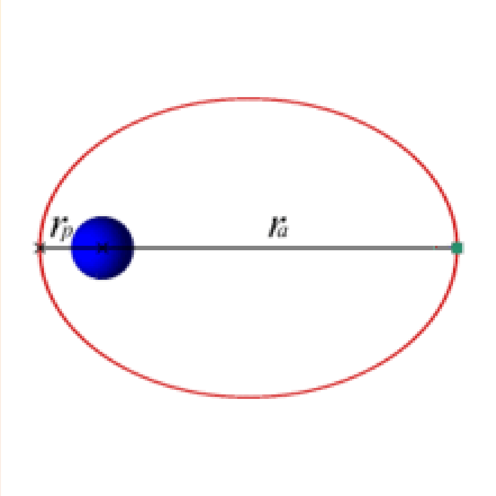
Leyes de Kepler del Movimiento Planetario (Repaso)

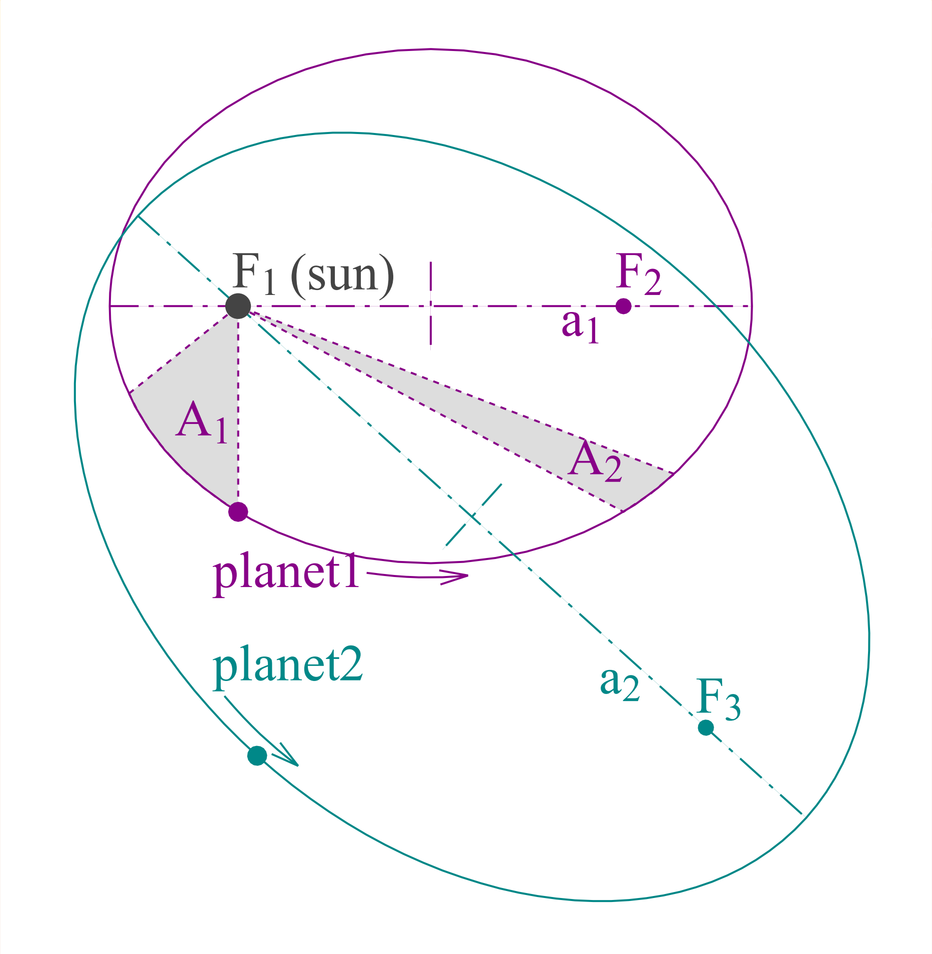
Describe el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

1. La órbita es una elipse y el Sol se ubica en uno de los focos

2. El segmento que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales







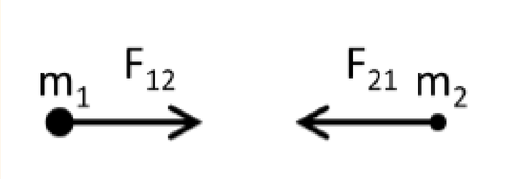
3. El cuadrado del período orbital del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita (la mitad del diámetro mayor de la elipse)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

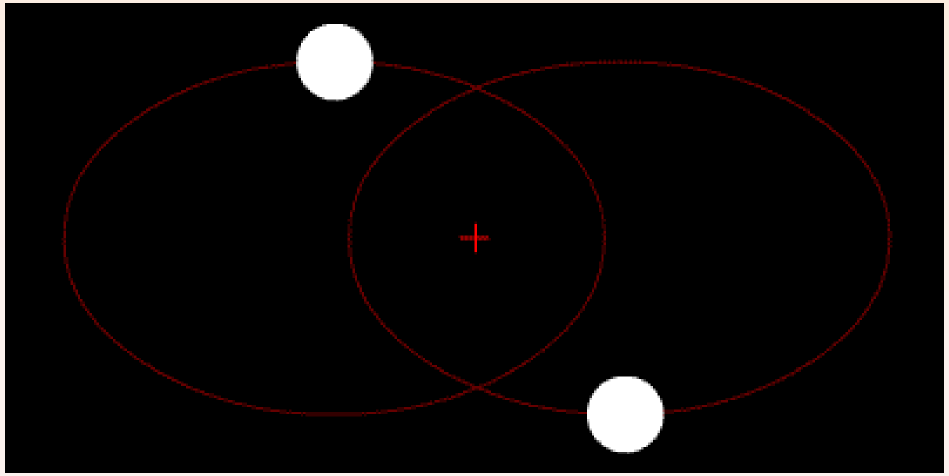
El problema de dos cuerpos y una fuerza central

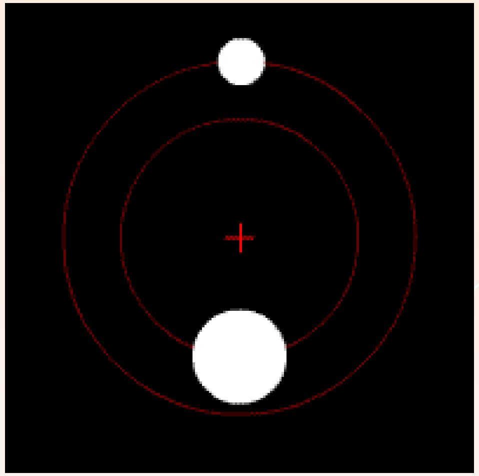
Se analiza el movimiento de dos cuerpos, cada uno de los cuales ejerce en el otro ***una fuerza central y conservativa***, y en ausencia de toda otra fuerza externa.

Es un modelo simplificado de muchas situaciones de interés real (constituye una primera aproximación válida)



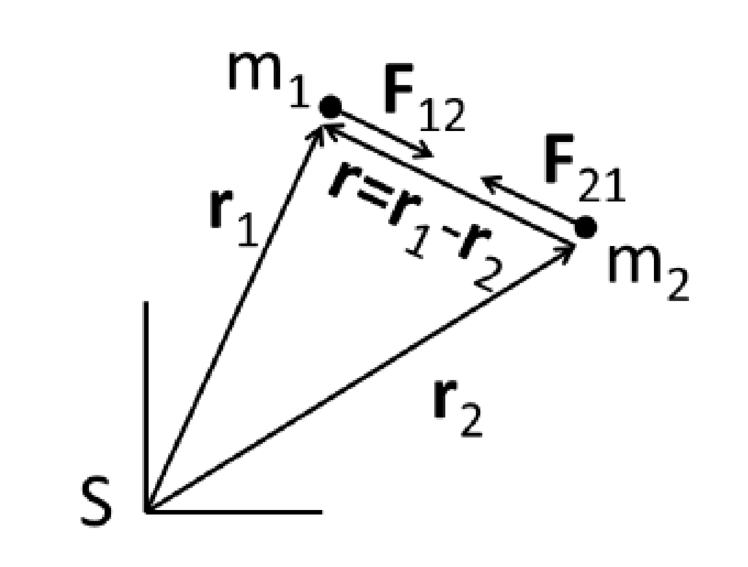
Este modelo podría aplicarse a un planeta o un cometa alrededor del Sol (problema de Kepler), la Luna o un satélite alrededor de la Tierra, una nave espacial en viaje interplanetario (con sus motores apagados), un electrón alrededor de un protón en un átomo de hidrógeno, dos átomos en una molécula diatómica (como el CO, por ejemplo), etc.





Este problema va a ser reducido ***drásticamente***.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: El planteo



Dos objetos puntuales de masas m_1 y m_2. Las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son las fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ que ejercen entre sí. Por la Tercera Ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

La fuerza gravitatoria será:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} = Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\hat{r} = \mathbf{r}/r$. Por tanto:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \mathbf{F}_{12}(\underbrace{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}_{\textit{Posición relativa}}) = -\mathbf{F}_{21}.$$

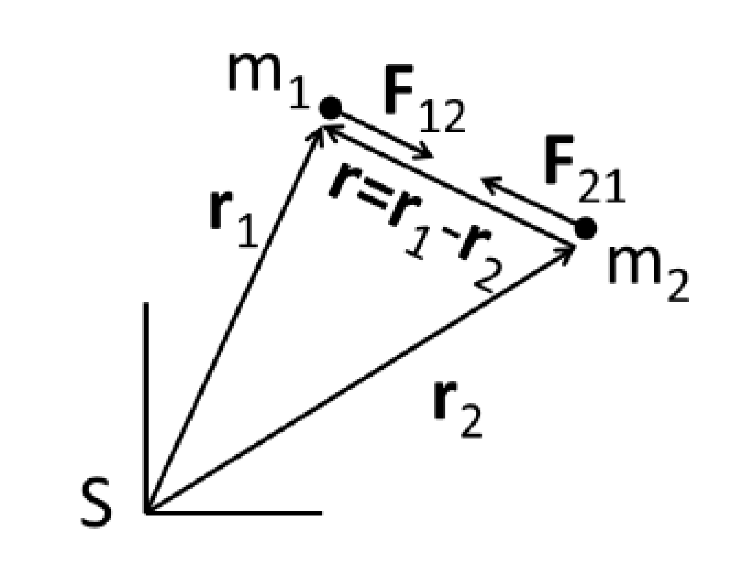
Notar que F_{12} = f (posición relativa) solamente porque es un sistema aislado => Se puede elegir cualq sistema referencia

F_{12} y F_{21} son conservativas => se derivan de un potencial de interacción.

Además, cuando una fuerza central es conservativa, entonces el potencial, además de depender solamente de $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$, es independiente de la dirección de $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$, y depende sólo del módulo | $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ | = r => $U_{(|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|)} = U_r$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: El planteo

El potencial gravitatorio será:



$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

del cual se derivan F_{12} y F_{21}.

En el caso del electrón y el protón se tendrá el potencial eléctrico (Coulombiano), etc.

El plateo del problema mecánico se hará a través del $\mathcal{L}$:

$$\boxed{\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Coordenadas relativas y masa reducida

$$\boxed{\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).}$$

El problema tiene 6 grados de libertad => 6 coordenadas generalizadas. ¿Cuáles se van a elegir?

Como la *U = U(r)* (posición relativa, **r**) se elige a ***r como primer coordenada generalizada.***

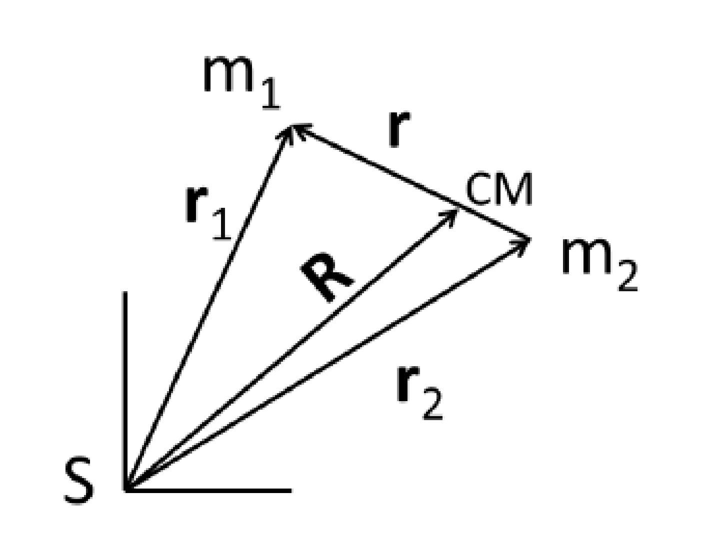
Otro vector será la ***posición del centro de masas*** porque representa la posición de las 2 partículas.

$$\mathrm{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} := \frac{m_1}{M}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}_2.$$

El centro de masa (CM) está en la línea que une las posiciones de las dos masas. Si una de ellas es mucho mayor que la otra (el Sol y la Tierra, por ejemplo), el CM casi coincide con la posición de la mayor.

Las coordenadas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se convierte a las nuevas:

$$\mathbf{r}_1 = \mathrm{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathrm{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$



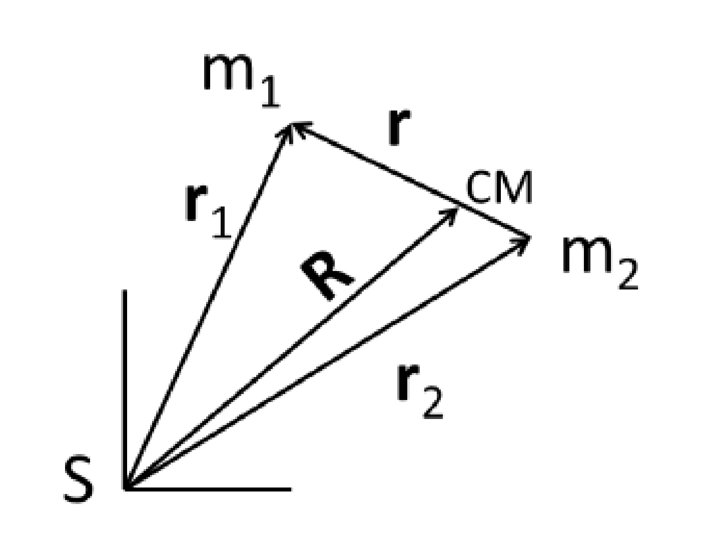
El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Coordenadas relativas y masa reducida

$$\boxed{\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).}$$

La energía cinética será:

$$T = \tfrac{1}{2}\left[m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_1\dot{\mathbf{r}}_2^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + m_2\left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}^2\right]$$



Definiendo una masa reducida, μ: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{M}$ y $\boxed{T = \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2}$

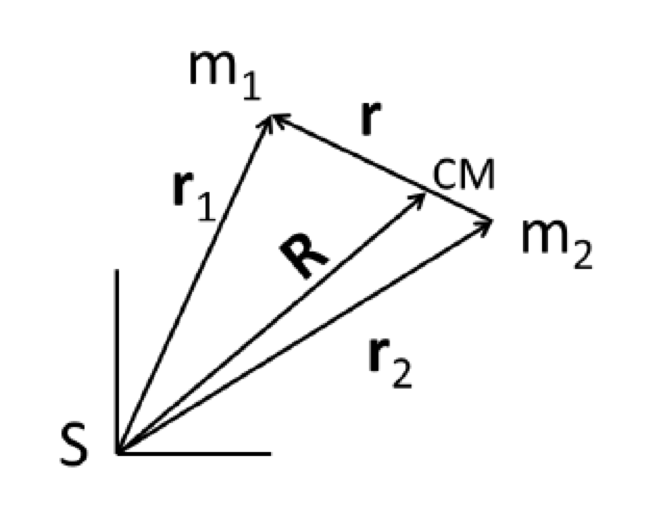
Este resultado indica que T del sistema es la misma T de otro sistema, uno con dos partículas "ficticias":

- una partícula de masa M moviéndose con la velocidad del CM, $\dot{\vec{R}}$
- otra partícula de masa reducida μ moviéndose con la velocidad relativa $\dot{\vec{r}}$

El nombre "masa reducida" se debe a que es siempre menor que m_1 y que m_2. Si $m_1 << m_2$ => $\mu \approx m_1$ (la Tierra en el sistema Tierra-Sol, por ejemplo). Además, $M \approx m_2$.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Coordenadas relativas y masa reducida

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$



Entonces, $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left[\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right]$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}_{rel},$

El problema queda separado en dos partes, c/u con sus propias coordenadas.

En particular, ¿cómo se moverá el CM?

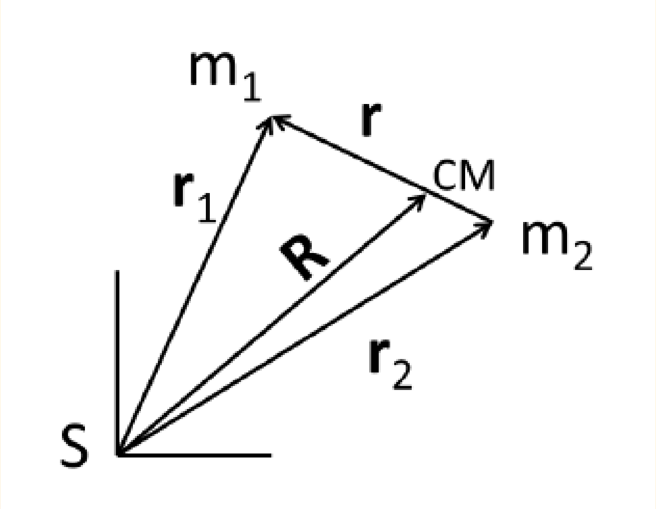
El ***momento total es constante*** (ya que no hay fuerzas exteriores), y es igual a $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$, así que $\dot{\boldsymbol{R}}$ es constante, y se puede elegir un sistema de referencia donde el CM esté en reposo.

Como $\mathcal{L}$ no depende de **R** => $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{R}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}_{CM}}{\partial\boldsymbol{R}} = 0$, la ecuación de R (3 ecuaciones) es trivial:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}_{CM}}{\dot{\mathbf{R}}} = M\ddot{\mathbf{R}} = 0 \;\Rightarrow \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$$

El CM se mueve a **velocidad** constante. Es una consecuencia de la conservación de **P.**

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Reducción del problema a 1 cuerpo (3 variables)



$\mathcal{L}_{CM}$ es el lagrangiano de una partícula libre, y por la Primera Ley de Newton, **R** se mueve a **v** cte.

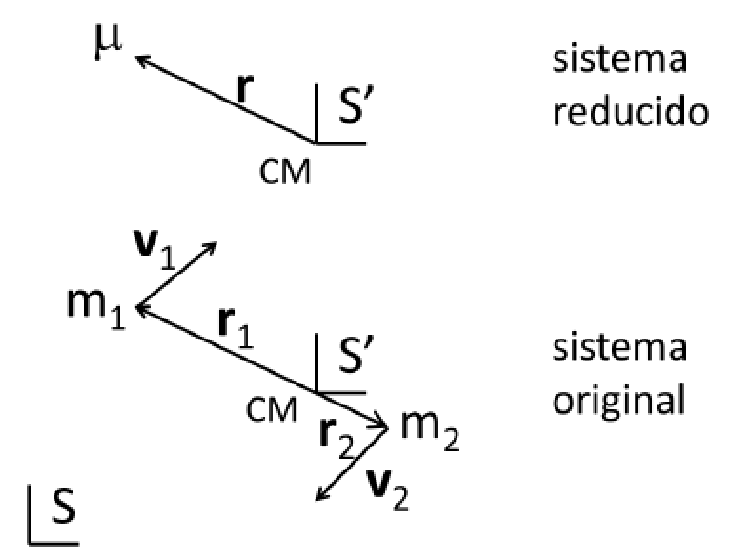
Ya que el CM se mueve a **v** cte, se puede elegir como sistema de referencia (inercial) uno en el cual el CM esté en reposo. Así que $\mathcal{L}_{CM}$ = 0 y el problema se reduce a:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)}$$

<u>que es un problema de un solo cuerpo</u>.

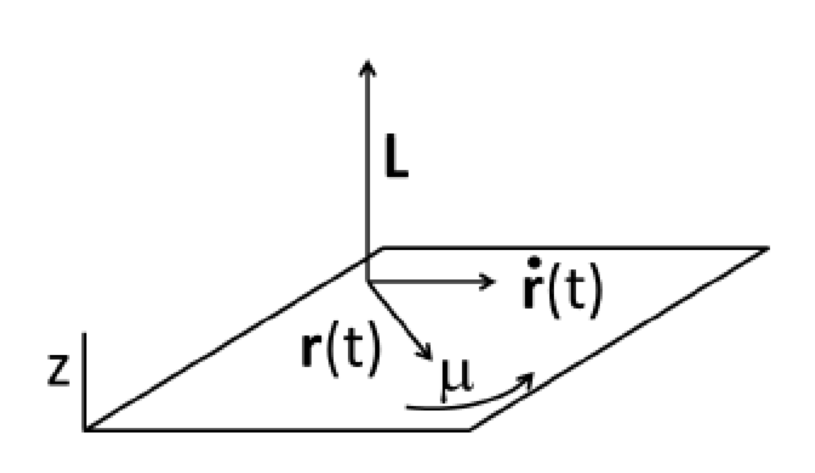
El *sistema reducido*, consistente en un cuerpo de masa μ ubicado en **r**, se vuelve indistinguible del de dos cuerpos cuando una de las masas es mucho mayor que la otra. Por ejemplo, si $m_1 << m_2$ (Tierra-Sol), el CM coincide con la posición de m_2, **r** es $\mathbf{r_1}$ y μ es m_1.

Resolviendo la ecuación de Lagrange: $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r).$



El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Conservación de L: reducción a un plano (2 variables)

Al no haber torques (las fuerzas son centrales), L se conserva. Es decir: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ es cte



En particular, la *dirección* de **L** es cte. Tanto ***r*** como $\dot{\boldsymbol{r}}$ permanecen restringidos a un plano (el plano ⊥ **L**).

En el sistema del CM todo el movimiento ocurre en un plano, que se puede tomar como plano xy.

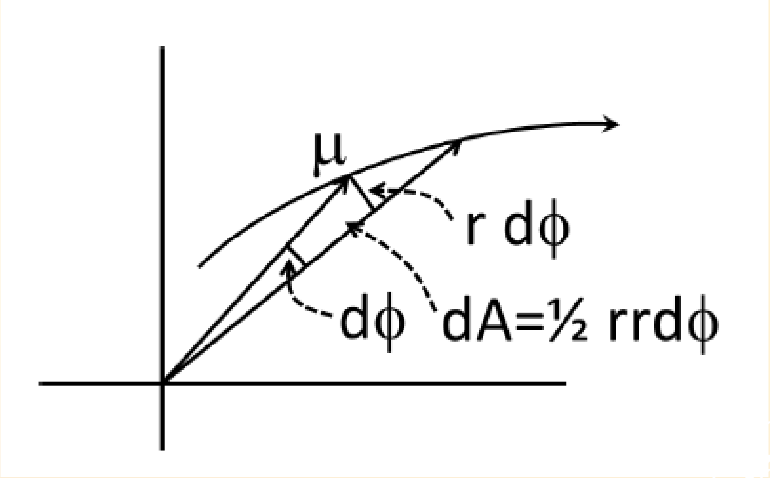
Al ser plano el problema se reduce a sólo dos variables, y se usan coordenadas polares para **r**. El $\mathcal{L}$ resulta: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r).$

$\mathcal{L}$ es independiente de ϕ, de manera que ϕ es cíclica y su ecuación: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{cte} = |\mathbf{L}| \equiv L_z.$

Esta es la conservación de **L**.

Ahora se calculará la segunda ecuación de Lagrange con **r** como coordenada generalizada.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Reducción a un plano (2 variables)

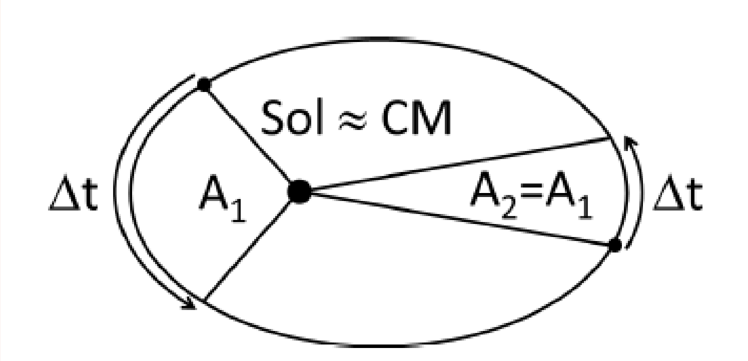


Antes calcular la ecuación de **r**:
El radio vector de la partícula, al moverse en su trayectoria, barre un área *dA* que es:

$$dA = \frac{1}{2} r r d\phi = \frac{1}{2} r^2 d\phi.$$

Así que el momento angular **L** es: $\boxed{L = \mu r^2 \dot{\phi} = 2\mu \dot{A} = \text{cte}}$

Como **L** es cte => $\dot{A}$ es cte => el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta es la ***Segunda Ley de Kepler***. Es una consecuencia de la conservación de **L**.



El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación radial: Potencial efectivo (1 variable)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r).$$

La segunda ecuación de movimiento, la ***ecuación radial***, es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Rightarrow \boxed{\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}.}$$

Las dos ecuaciones obtenidas son:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L}{\mu r^2}, \\ \mu\ddot{r} &= \mu r\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}}$$

El término de $\dot{\phi}^2$ no es complicado. Se reemplaza $\dot{\phi}$ de una en otra de las ecuaciones anteriores:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \mu r\frac{L^2}{\mu^2 r^4} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

=> $\boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}}$ que es la reducción final del problema

Comenzamos con dos masas en interacción (6 variables) y terminamos con una sola variable: ***la distancia entre las masas***.

La última ecuación tiene forma de la ***Segunda Ley de Newton*** (en la dirección radial), con la fuerza de interacción gravitatoria y una fuerza centrífuga (por el signo):

$$F_{cf} := \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación radial: Potencial efectivo (1 variable)

$$\boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}}$$

$$F_{cf} := \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Esta F_{cf} también se deriva de un potencial (U_{cf} , el potencial centrífugo, llamado "barrera centrífuga"), lo cual nos permite escribir un potencial efectivo U_{ef}:

$$F_{\rm cf} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{dU_{\rm cf}}{dr},$$

$$\boxed{U_{ef} := U + U_{cf} = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}}$$

<u>En términos energéticos</u>, el sistema se ha definido y se ha mantenido con fuerzas conservativas. Por tanto, ***E = cte***

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \text{cte},$$

La conservación de la Energía Mecánica Total E:

$$E = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + U(r).$$

en coordenadas polares

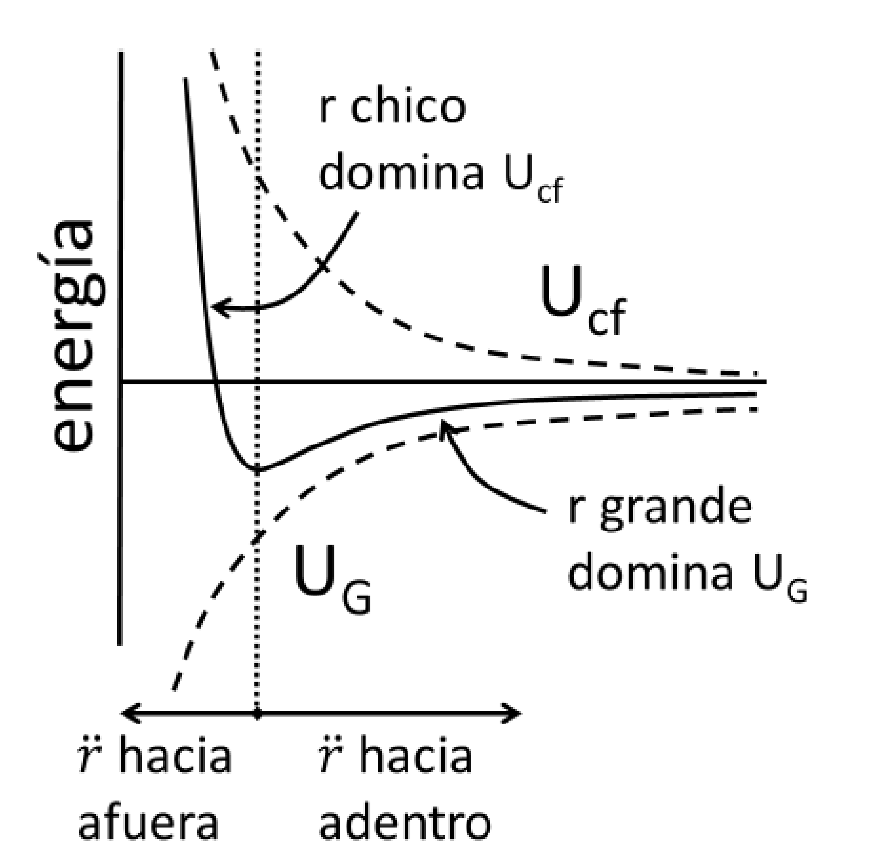
Ejemplo: el potencial gravitatorio (El problema de Kepler)

$$U_{ef} := U + U_{cf} = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Descripción del movimiento de un planeta o un cometa alrededor del Sol

Se plantea el potencial efectivo:

$$U_{ef} = -\frac{Gm_1 m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

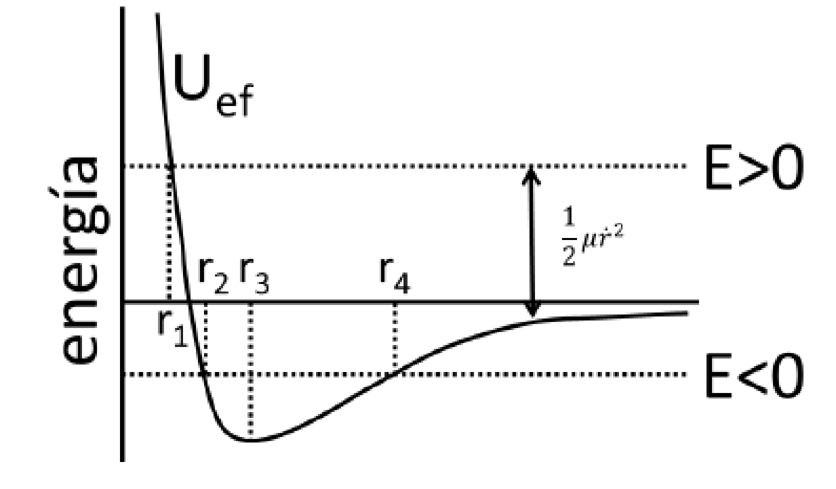


Lejos del Sol, $\ddot{r}$ apunta hacia adentro, y cerca del Sol hacia afuera. En medio existe una situación de equilibrio.

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

La única excepción: cuando L = 0. En ese caso, el cometa se zambulle de cabeza hacia el Sol.

$$E = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$



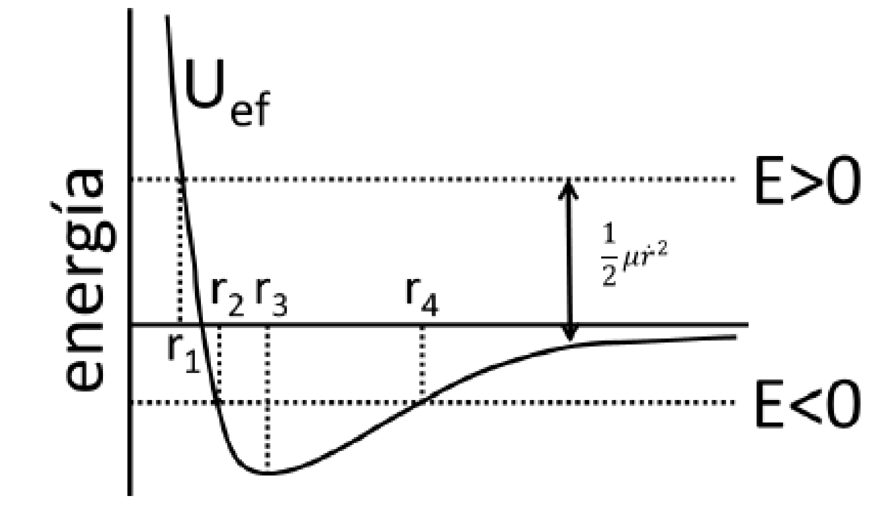
En la ecuación, el término de energía cinética es $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0.$

La órbita del planeta está restringida a la región donde $E \geq U_{ef}$, es decir, arriba de la curva de la figura. Vamos a analizar los diversos casos posibles.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio

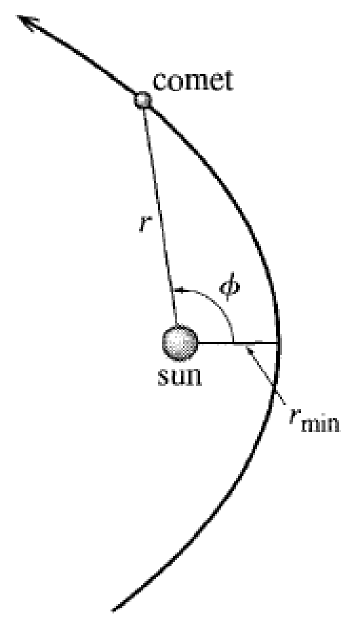
$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),}$$

Si la energía es $E \geq 0$ el movimiento es no acotado (ej, un cometa no periódico).



La partícula se mueve hacia el centro de fuerzas hasta que "choca" con la *barrera centrífuga* en el punto de retorno r_1.

En ese punto el exceso de energía sobre el potencial se anula, es decir



$\dot{r} = 0$ => el movimiento radial se detiene y la partícula "rebota"

ya que $\ddot{r} > 0$.

$$\boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

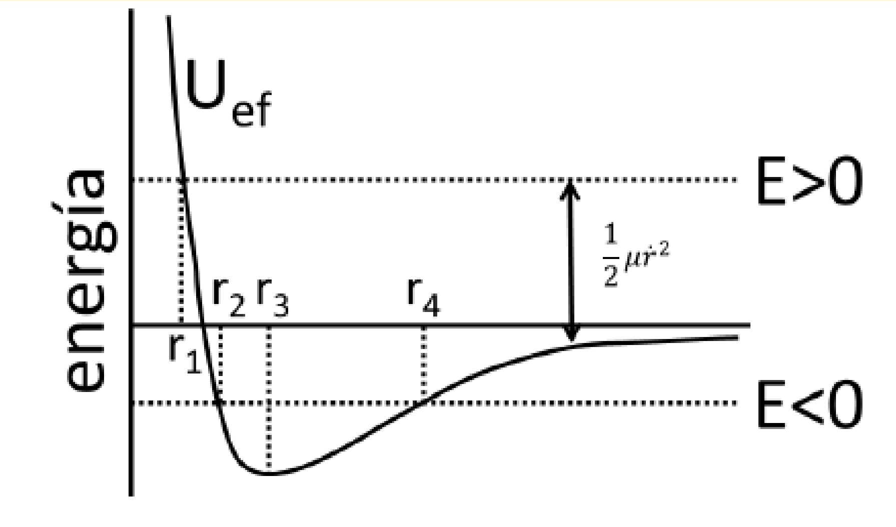
Si la energía total es $E < 0$ (notar que esto depende de haber tomado $U(\infty) = 0$ nada más):

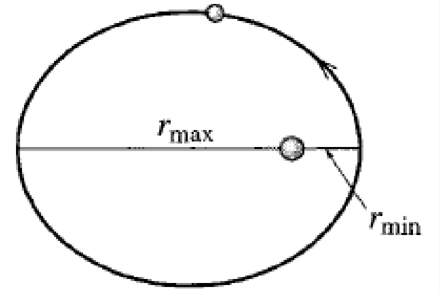
- Hay dos puntos de retorno, r_2 y r_4, donde se detiene el movimiento radial.

- El movimiento de la partícula está confinado a la región $r_2 \leq r \leq r_4$.

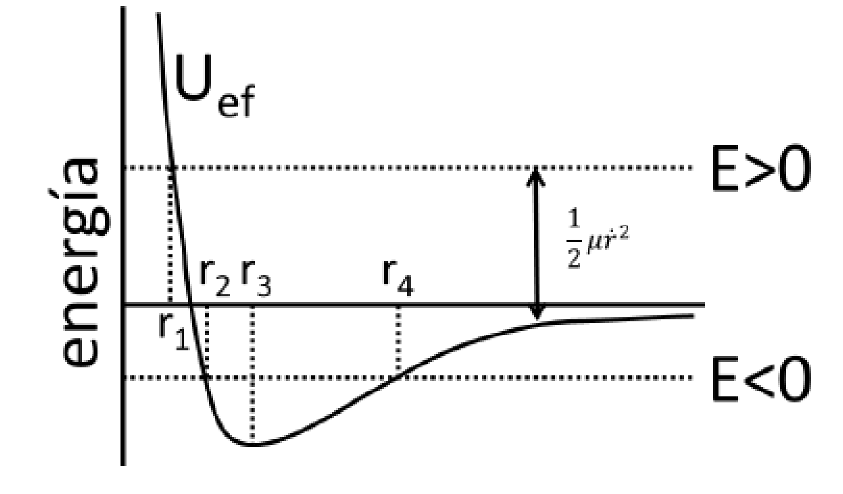
- En el caso del movimiento planetario, el punto más cercano se llama ***perihelio*** y el más lejano se llama ***afelio***.

- En órbita de la Tierra se los llama ***perigeo*** y ***apogeo***, y en general ***periapis*** y ***apoapsis***.



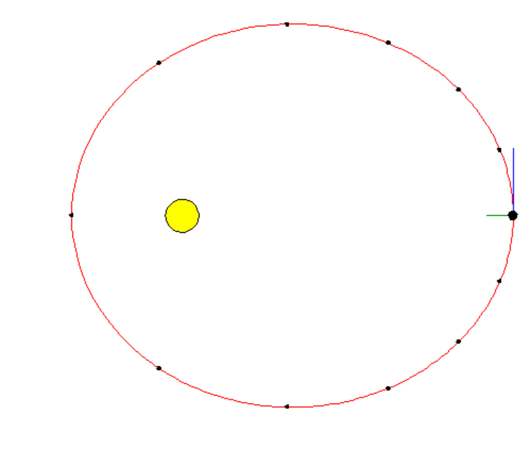


El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio



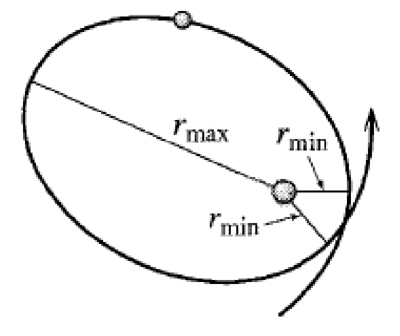
Si E = min $U_{ef}(r)$, el movimiento está más limitado aún: r = r_3, es decir que la órbita es **circular**.

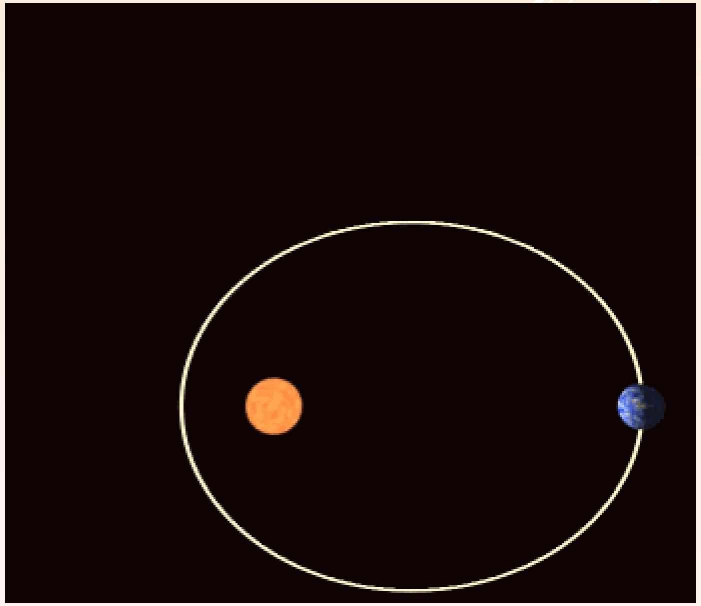
Aún no se conoce *cómo es la órbita*.



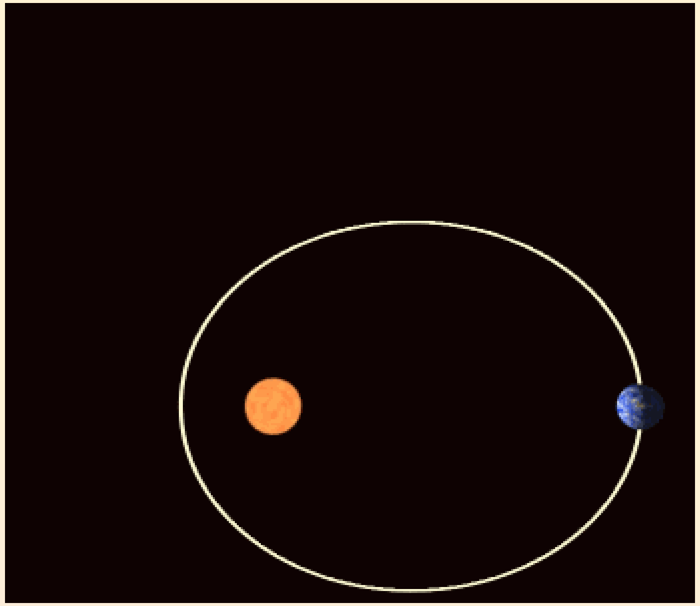
El movimiento podría ser periódico, si la ***órbita se cierra*** después de un número finito de excursiones entre r_2 y r_4.

Pero también podría ***no cerrarse***, y el planeta volvería a r_4 con el ángulo corrido en $\Delta\phi$. Se puede calcular el $\Delta\phi$ correspondiente a sucesivos tránsitos $r_4 \to r_2 \to r_4$.



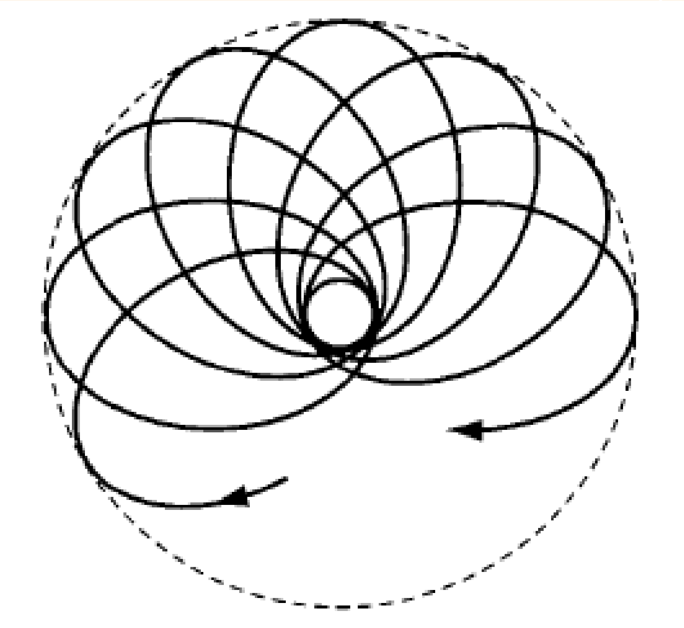


El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio



El avance del ángulo ϕ entre dos perihelios sucesivos se llama ***precesión del perihelio*** y se observa en los cuerpos celestes y en otros cuerpos en órbita. (No confundirla con la precesión del equinoccio, que es un fenómeno distinto)

Si la interacción entre los cuerpos celestes es gravitatoria, ¿por qué razón las órbitas preceden? La respuesta completa es muy complicada. Para empezar, se trata de un problema con más de dos cuerpos. ***Hay presentes más planetas***.



La órbita de Mercurio y la de la Luna siempre mostraron una precesión residual, anómala, inexplicable como una perturbación de otros cuerpos. La solución de este problema llevó siglos.

Llegó recién en el siglo XX gracias a la ***Teoría de la Relatividad***, en particular a la Relatividad General, que modifica la interacción gravitatoria. La verificación del cálculo de la precesión de la órbita de Mercurio fue uno de los primeros éxitos de la teoría.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación de la órbita

La ecuación $\boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}}$ permite encontrar ***r(t)***, que a su vez en $\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2},$ permite hallar ***ϕ(t)***, lo cual resuelve el problema. De hecho, la conservación de la energía permite reducir la ecuación radial a una de orden 1:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{ef}(r))},$$

de donde podría encontrarse ***t(r)***, invertir y obtener ***r(t)***. Es bastante engorroso . Por ahora se va a obtener ***r(ϕ)***, que describe la ***forma de la órbita.***

A partir de: $L = \mu r^2\dot{\phi},$ **(1)** y $E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{2}r^2\dot{\phi}^2 + U(r).$ **(2)**

De (1) $\Rightarrow r\dot{\phi} = \frac{L}{r\mu},\ \text{al cuadrado}\ \Rightarrow r^2\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{r^2\mu^2},$ **(3)**. En (2) y despejando r^2: $\dot{r}^2 = \frac{2E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} - \frac{2U(r)}{\mu}.$ **(4)**

Haciendo (4)/(3): $$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2E}{\mu}\frac{r^2\mu^2}{L^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{r^2\mu^2}{L^2} - \frac{2U(r)}{\mu}\frac{r^2\mu^2}{L^2} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu U(r)}{L^2}.}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu U(r)}{L^2}.$$

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación de la órbita

Usando el potencial gravitatorio: $\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2 r},$ **(5)** donde $k = Gm_1m_2 > 0$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2 r},$$

Trabajando la expresión e integrando se llega a:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2}\left(1 + \epsilon\cos\phi\right),}$$

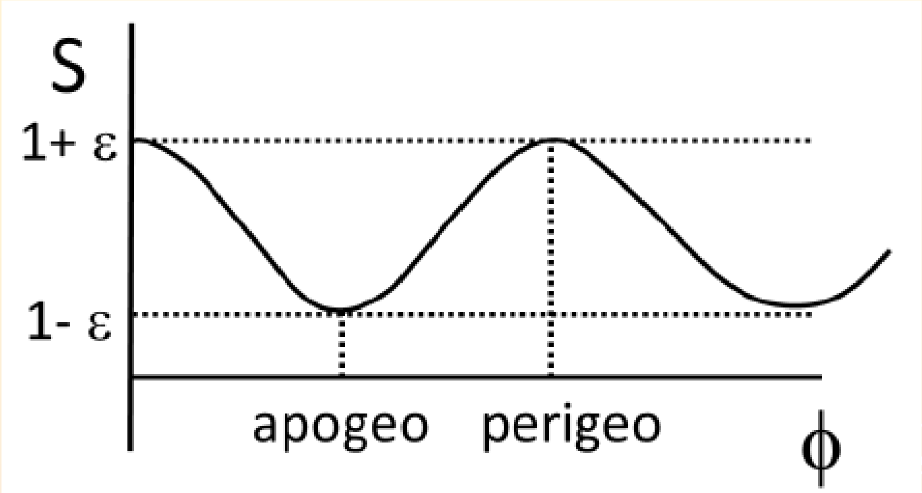
donde $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}.$ => $\boxed{r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1 + \epsilon\cos\phi}.}$

<u>Es el movimiento básico de los objetos bajo la acción de la gravedad, es decir de prácticamente todo en el universo.</u>

Estas órbitas son, en general, ***<u>secciones cónicas</u>***.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas

$$\boxed{s = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2}\left(1 + \epsilon\cos\phi\right),}$$

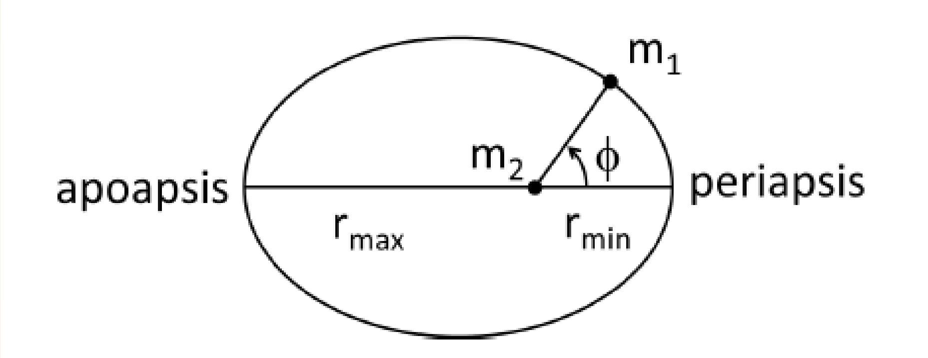


Es una oscilación armónica con respecto a la fase ϕ.

A lo largo de una órbita *s* se comporta como indica el gráfico:

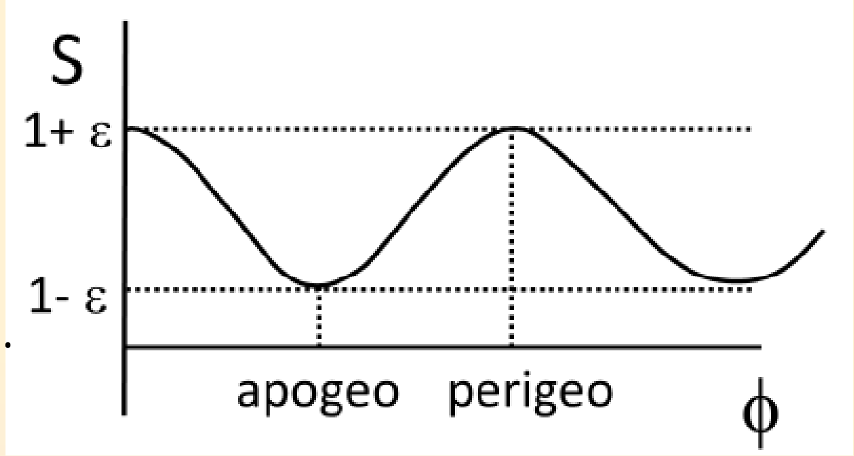
$$r_{min} = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon}$$

Los valores máximos de *s* corresponden a los mínimos de $r = \frac{1}{s}$ cuando $cos\phi = 1$



Este punto se llama *periapsis* (*perihelio* mov. alrededor del Sol, o *perigeo* para órbita alrededor de la Tierra).
Hay también un mínimo de *s*. Pero la existencia del r_{max} correspondiente depende de si $\varepsilon < 1$ o $\varepsilon \geq 1$, ya que si $\varepsilon \geq 1$ se anula el denominador.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas



Si $\varepsilon < 1$ el r_{max}: $$r_{max} = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1-\epsilon}$$ se llama *apoapsis* (o *afelio*, o *apogeo*).

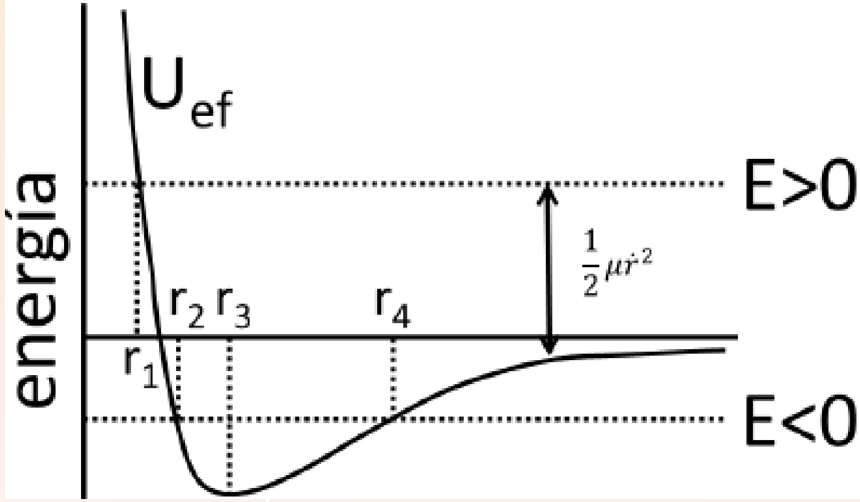
El *periapsis* y el *apoapsis* son los ***puntos de retorno*** en el potencial efectivo U_{ef} *(r)*.

Si $\varepsilon \geq 1$, entonces $r_{max} \to \infty$ y el movimiento es no acotado.

De la definición de ϵ:

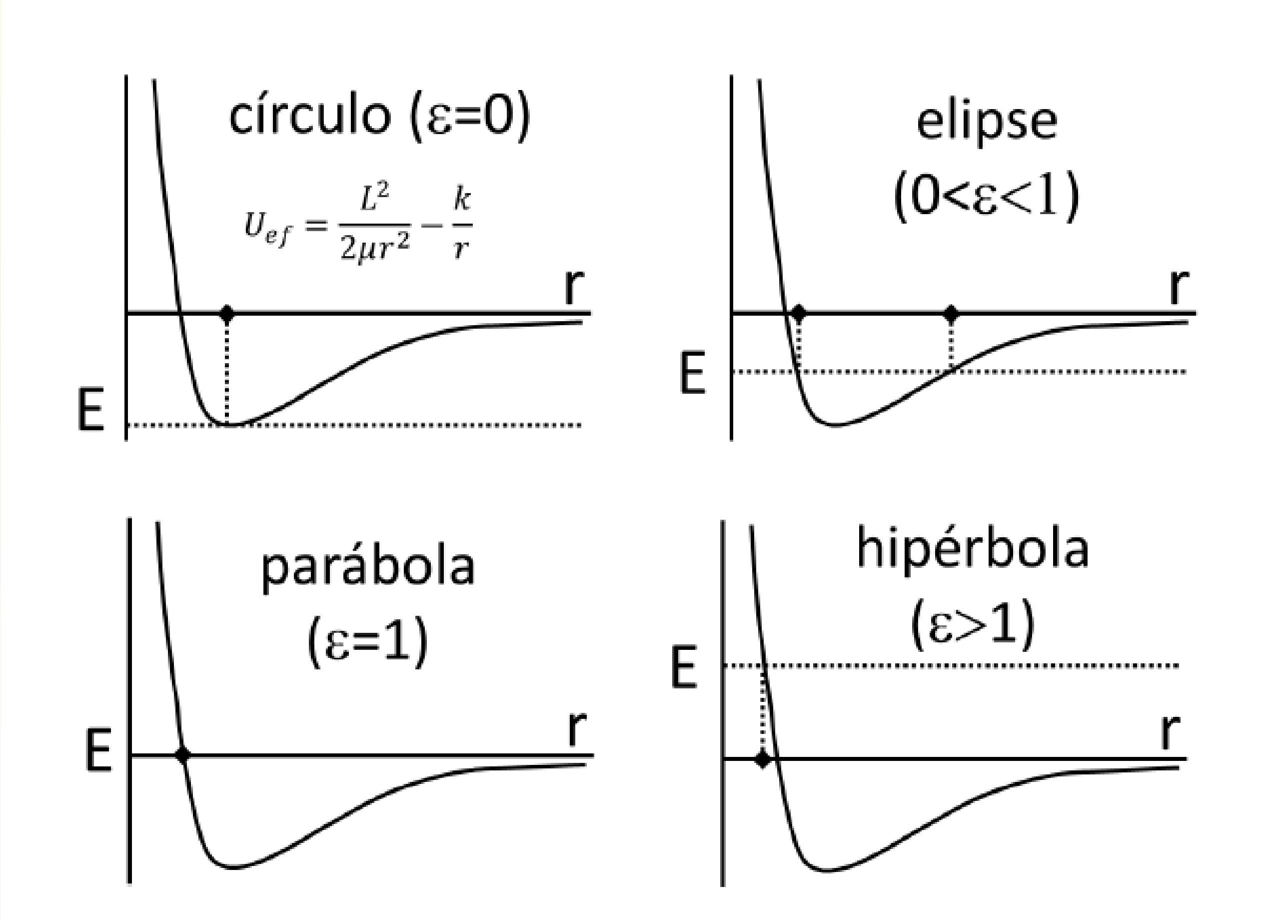
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \Rightarrow \epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{\mu k^2} \Rightarrow \boxed{E = (\epsilon^2 - 1)\frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$



Analizando E y los ápsides de cada valor de ϵ se evidencian distintas órbitas posibles.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Casos de ε



$$\boxed{E = (\epsilon^2 - 1)\frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$

$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

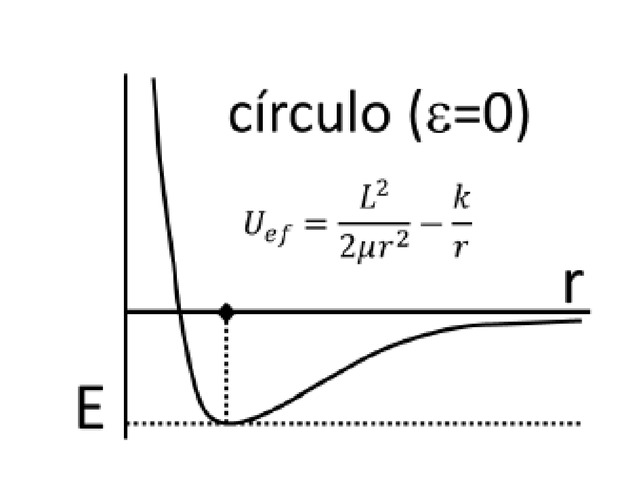
Los cuatro tipos de órbita del potencial gravitatorio, según el valor de ϵ.

$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

$$\boxed{r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}.}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Casos de ε

1. $\epsilon = 0$ $\quad r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} = \text{cte},$ La órbita es ***circular***.

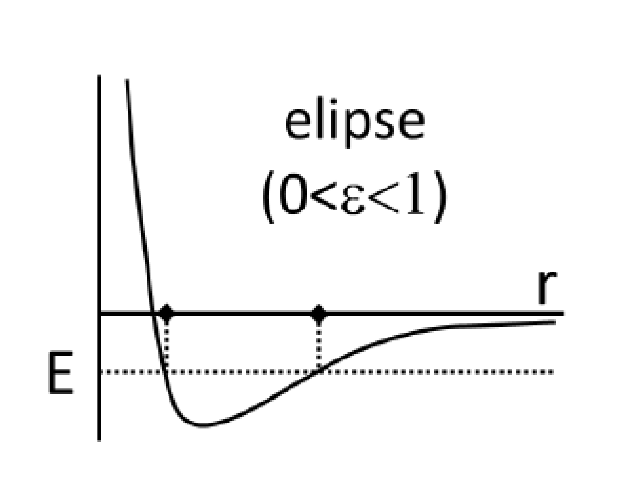


En la definición de ϵ:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} = 0 \Rightarrow E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}.$$

Esta energía es el mínimo de U_{ef}

2. $0 < \epsilon < 1 \Rightarrow -\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0$ $\quad \boxed{E = (\epsilon^2 - 1)\frac{\mu k^2}{2L^2}}.$



Habrá entonces r_{min} y r_{max}. La partícula tiene energía total negativa y está "atrapada" en el pozo del potencial U_{ef} . Se trata efectivamente de una ***elipse***.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Casos de ε

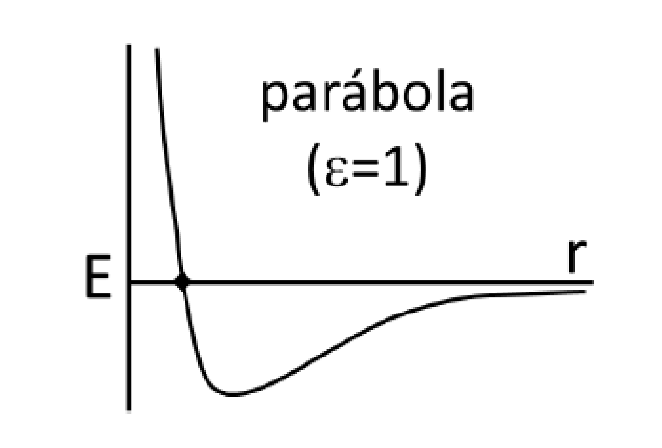
$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

$$\boxed{r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}.}$$

3. *ϵ = 1 => E = 0.*

$$\boxed{E = (\epsilon^2 - 1)\frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$

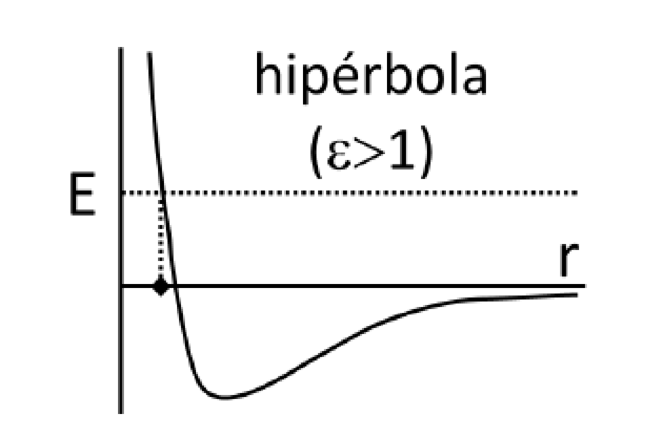
La partícula tiene la energía *justa* para escapar al infinito.



4. *ϵ > 1 => E > 0*

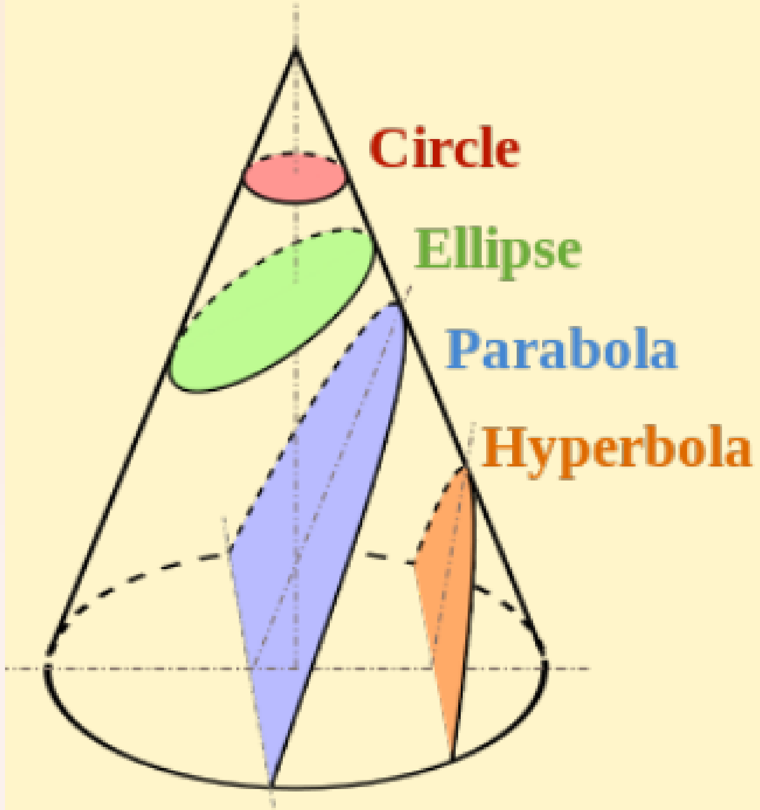
$$\boxed{E = (\epsilon^2 - 1)\frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$

La partícula también *escapa al infinito* (pero le sobra energía cinética).

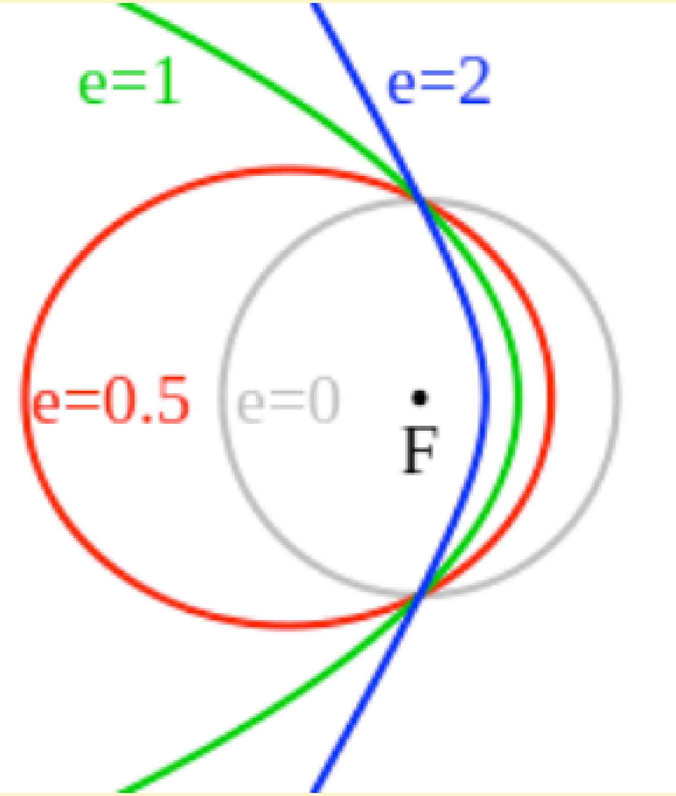


El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

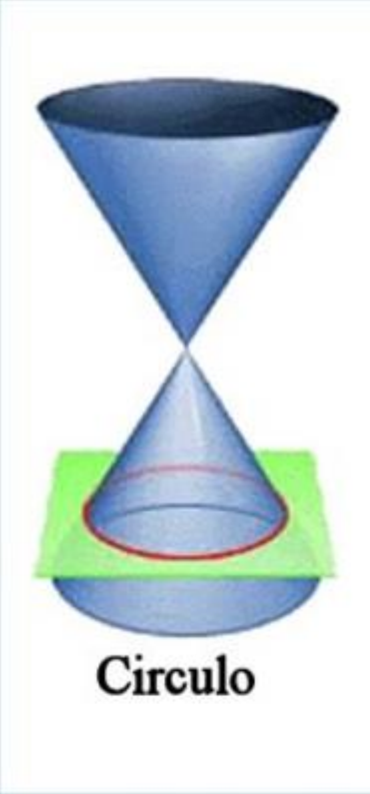
Las órbitas definidas por $\boxed{r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}.}$ son secciones cónicas, de las cuales el círculo es un caso particular.



conic section	equation	eccentricity (*e*)
circle	$x^2 + y^2 = a^2$	0
ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
parabola	$y^2 = 4ax$	1
hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$



El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas



Para analizar las cónicas conviene utilizar la inversa de *r(ϕ)*:

$$\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{k\mu}{L^2}}_{:=1/c}(1 + \epsilon \underbrace{\cos\phi}_{=x/r}),$$

donde se define el parámetro c (una longitud) y $cos\phi = \frac{x}{r}$

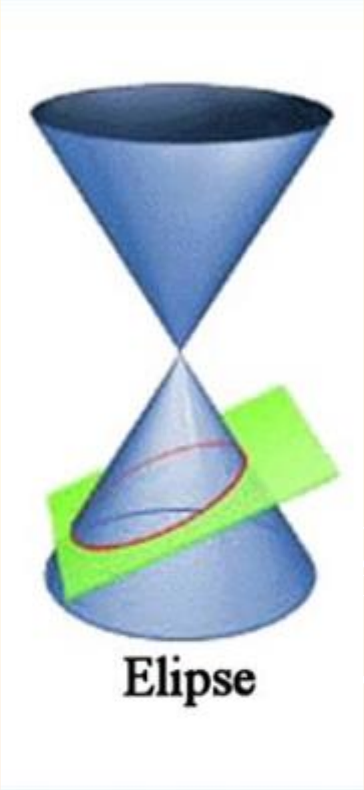
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c}(1 + \epsilon\frac{x}{r}),$$
$$c = r(1 + \epsilon\frac{x}{r})$$
$$c = r + \epsilon x$$

$$c = r + \epsilon x$$
$$r = c - \epsilon x$$
$$r^2 = (c - \epsilon x)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2. \quad \textbf{(1)}$$

Retomando nuevamente los 4 casos:

1. ε = 0 => en (1): $x^2 + y^2 = c^2$ que es la ecuación de un círculo de radio *c*.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas



2. $0 < \varepsilon < 1$ => en $x^2 + y^2 = c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2$ => completando cuadrado y trabajando:

$$x^2 - \epsilon^2 x^2 + 2c\epsilon x + y^2 = c^2 \Rightarrow (1-\epsilon^2)x^2 + 2c\epsilon x + y^2 = c^2$$

$$(1-\epsilon^2)\left[x^2 + 2\frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}x\right] + y^2 = c^2 \Rightarrow (1-\epsilon^2)\left[\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{c^2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2}\right] + y^2 = c^2$$

$$(1-\epsilon^2)\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{c^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2} + y^2 = c^2 \Rightarrow (1-\epsilon^2)\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 + y^2 = c^2 + \frac{c^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2}$$

$$(1-\epsilon^2)\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2(1-\epsilon^2) + c^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2} = \frac{c^2}{1-\epsilon^2}$$

Ecuación de una elipse:

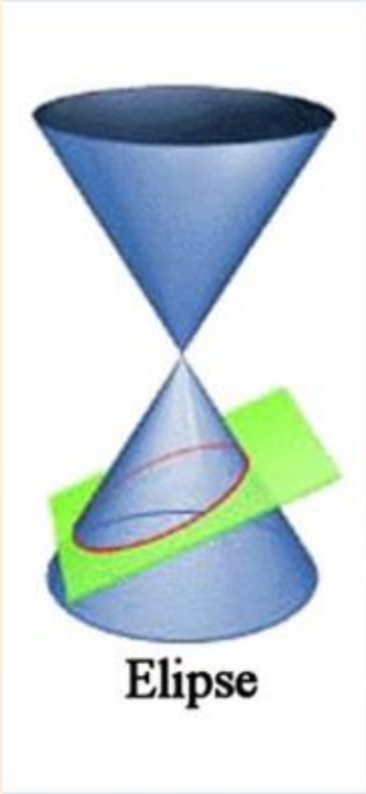
$$\boxed{\frac{\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\frac{c^2}{(1-\epsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{1-\epsilon^2}} = 1}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

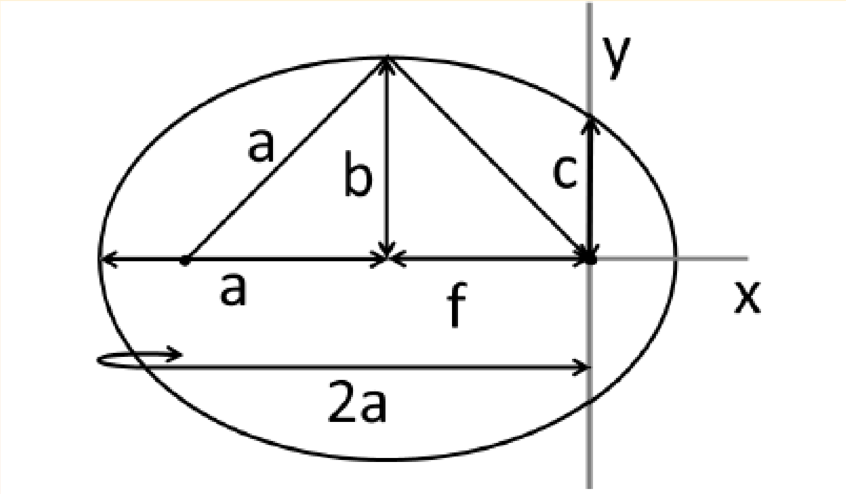
El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

Ecuación de una elipse: $$\frac{\left(x+\frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\frac{c^2}{(1-\epsilon^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{1-\epsilon^2}}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



Centro de la elipse: $\left(-\frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2};0\right)$



Semiejes: $a=\frac{c}{1-\epsilon^2}$; $b=\frac{c}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

Distancia focal: $a^2=b^2+f^2 \Rightarrow f=\sqrt{a^2-b^2}$

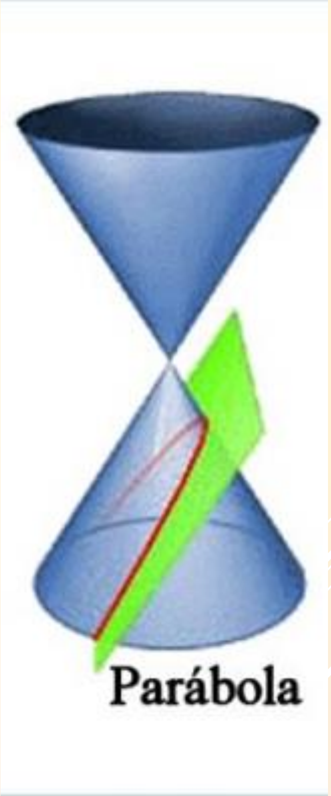
$$a^2-b^2=\frac{c^2}{(1-\epsilon^2)^2}-\frac{c^2}{1-\epsilon^2}=\frac{c^2-c^2(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}=\frac{c^2(1-1+\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}=\frac{c^2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2}=f^2$$

$$\Rightarrow f=\frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}$$

centro de la elipse

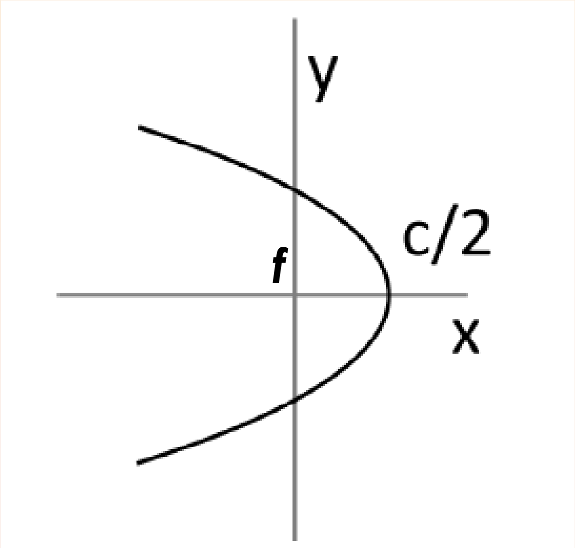
Uno de los focos de la elipse está en el origen, que es el centro de la fuerza. Ésta es la **Primera Ley de Kepler**: las órbitas de los planetas son elipses, y el Sol está en uno de los focos (estrictamente, el CM está en el foco, pero casi coincide con m_2 si $m_2 >> m_1$)

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas



3. $\epsilon = 1$ en $x^2 + y^2 = c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2$. => $y^2 = c^2 - 2cx = -2c\left(x - \frac{c}{2}\right)$

que es una parábola hacia la izquierda, con el vértice en *c/2* y el ***foco en el origen*** ($y^2 = 4fx$, con *f* la distancia focal).

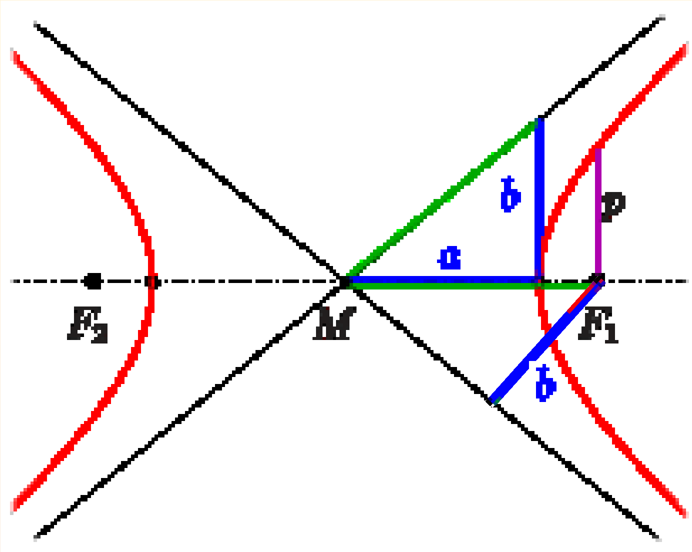


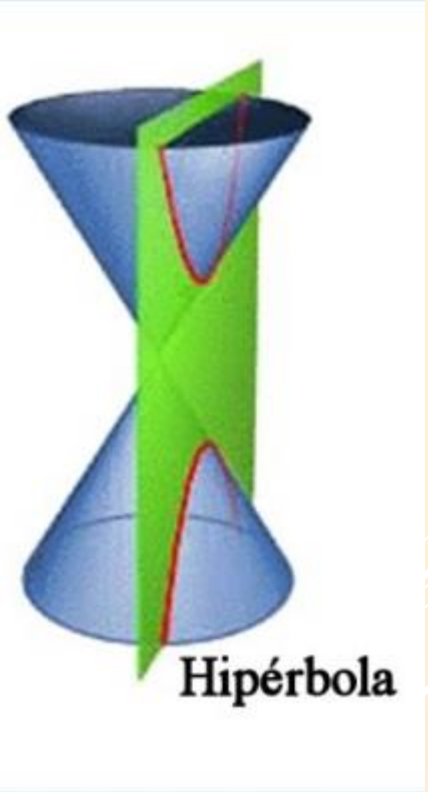
El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

4. $\epsilon > 1$. Completando el cuadrado de x, ahora queda:

$$\frac{\left(x-\frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$





Con $a=\frac{c}{\epsilon^2-1},\quad b=\frac{c}{\sqrt{\epsilon^2-1}},$ es una Hipérbola

b es el parámetro de impacto, es decir la distancia más cercana al centro de la fuerza si la partícula se moviera por la línea negra (una de la asíntotas de la hipérbola)

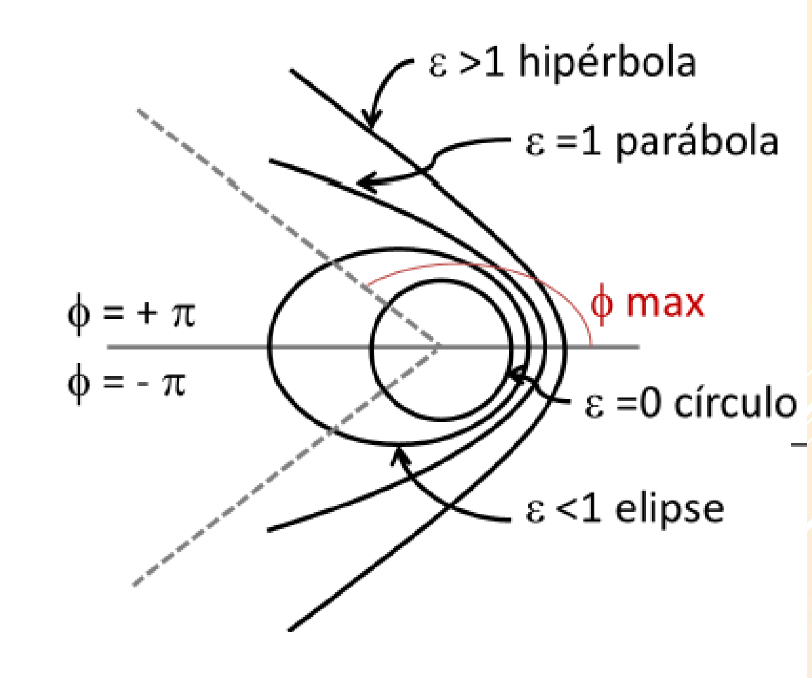
Existe una rama de la hipérbola hacia la derecha (que apareció al elevar al cuadrado r). Es la rama relevante si el potencial es 1/r repulsivo en lugar de atractivo. Las dos asíntotas forman con el eje x los ángulos donde ***se anula el denominador de la fórmula de la órbita:***

$$\boxed{r(\phi)=\frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}.}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Órbitas no acotadas

$$r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k}\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}.$$

En la ecuación de la órbita kepleriana: $r(\phi) = \dfrac{c}{1+\epsilon\cos\phi}$

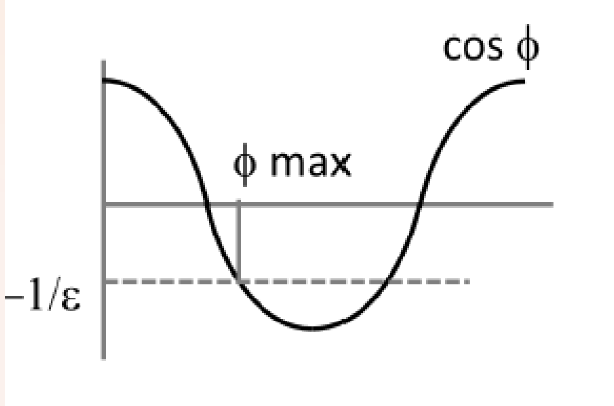


Para órbitas elípticas: ϵ < 1. Si ϵ $\geq$ 1 corresponde a las órbitas abiertas.

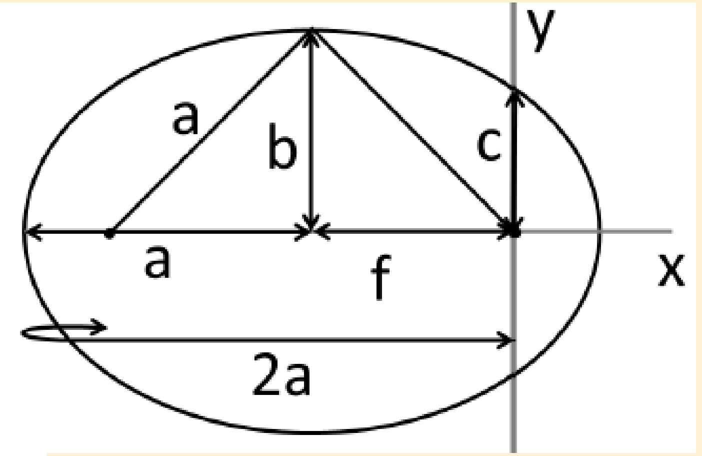
Si ϵ = 1 => se anula el denominador en $\phi = \pm\pi$. Luego, $r \xrightarrow[\phi\to\pm\pi]{} \infty.$

Si ϵ > 1, el denominador se anula en un valor ϕ_{max}, así que las soluciones están confinadas a un rango $-\phi_{max} < \phi < \phi_{max}$.

Si $1 + \varepsilon\, cos\phi = 0 \Rightarrow \; \phi = arc\cos -\frac{1}{\varepsilon}$



El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Período de las órbitas elípticas



De la ecuación $\boxed{L = \mu r^2 \dot{\phi} = 2\mu \dot{A} = \text{cte}}$ $\Rightarrow \dot{A} = \dfrac{L}{2\mu}.$

El área de la elipse es $A = \pi a b,$ y su período: $\tau = \dfrac{A}{\dot{A}} = \dfrac{2\pi a b \mu}{L} \Rightarrow \tau^2 = 4\pi^2 \dfrac{a^2 b^2 \mu^2}{L^2}.$

Como $b^2 = a^2(1-\epsilon^2)$ y $a = c/(1-\epsilon^2)$:

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 a^2 (1-\epsilon^2)\mu^2}{L^2} = 4\pi^2 a^3 \frac{\overbrace{a(1-\epsilon^2)}^{c}\,\mu^2}{L^2} = 4\pi^2 a^3 \frac{c\mu^2}{L^2},$$

además $c = L^2/k\mu$ de la ec de ***s***

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{\mu}{k} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{G m_1 m_2} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{G \mu M} = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM} \approx 4\pi^2 \frac{a^3}{G M_\odot}$$

donde

$k = G m_1 m_2 = G\mu M \approx G\mu M_\odot$

$$\boxed{\tau^2 \approx \frac{4\pi^2}{G M_\odot} a^3,}$$

que es la Tercera Ley de Kepler