Trabajo Práctico N° 7 Oscilaciones

Conceptos básicos de vibración

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo es llamado vibración u oscilación. Ejemplos :péndulo, una cuerda de un instrumento musical.

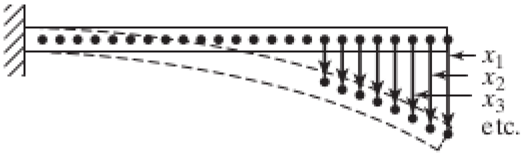
Partes elementales de un sistema vibratorio

Algún medio de almacenar energía potencial, algún medio de almacenar energía cinética, algún medio mediante el cual la energía es gradualmente perdida, amortiguada

Grados de Libertad

El número mínimo de coordenadas independientes requeridas para determinar completamente la posición de todas las partes de un sistema en cualquier instante de tiempo.

Un gran número de sistemas puede ser definido de forma práctica usando un número finito de grados de libertad, estos son llamados **sistemas discretos**.
Pero algunos sistemas, especialmente aquellos que involucran elementos elásticos continuos, tienen un infinito número de coordenadas para especificar su configuración al ser flexionadas, es decir su curva de flexión, estos son llamados **sistemas continuos.**



Clasificación de la los tipos de vibración

Vibración libre: después de una perturbación inicial, se deja al sistema vibrar por si mismo. No se aplican fuerzas externas al sistema. Ejemplo un péndulo simple

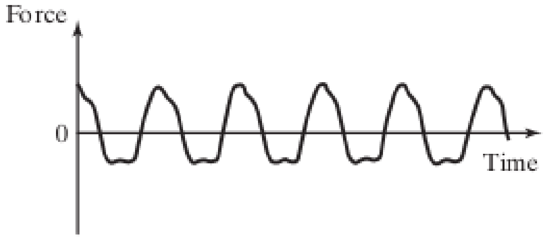
Vibración forzada: el sistema es sometido a una fuerza externa, en general una que se repite en el tiempo. Ejemplo la oscilación en motores de combustión.

Si la frecuencia externa coincide con la frecuencia natural del sistema, ocurre el fenómeno de **resonancia**. Esto produce grandes y peligrosas oscilaciones. Fallas de estructuras como edificios, puentes, turbinas y alas de avión han sido asociadas con la ocurrencia de este fenómeno.

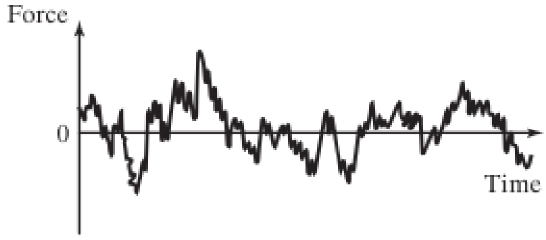
Si no se disipa energía del sistema se habla de **vibraciones no amortiguadas**. Si parte de la energía se disipa de cualquier forma posible se habla de **vibraciones amortiguadas**. En muchos sistemas la perdida de energía puede ser tan pequeña que puede despreciarse. Sin embargo considerar la amortiguación se vuelve muy importante al analizar sistemas cerca de la resonancia.

Cuando todos los componentes del sistema se comportan se forma lineal, el resultado es una **vibración lineal** y el sistema de ecuaciones diferenciales resultante puede ser resuelta por métodos analíticos. En cualquier otro caso tenemos **vibraciones no lineales**, y es justamente a ese estado al que tienden la mayoría de los sistemas reales

Una vibración se denomina **determinística** si es posible conocer la función, f(t), que describe la función. Cuando la descripción del movimiento no puede ajustarse de esa forma se la conoce como **aleatoria**



(a) A deterministic (periodic) excitation



(b) A random excitation

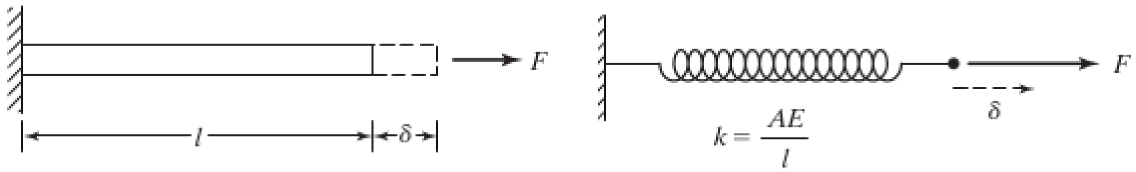
Elementos elásticos

Aunque la constante elástica normalmente se determina mediante ensayos, el valor de la constante de un resorte en espiral puede aproximarse su valor con la siguiente fórmula

$$k=\frac{d^4 G}{8 D^3 n}$$

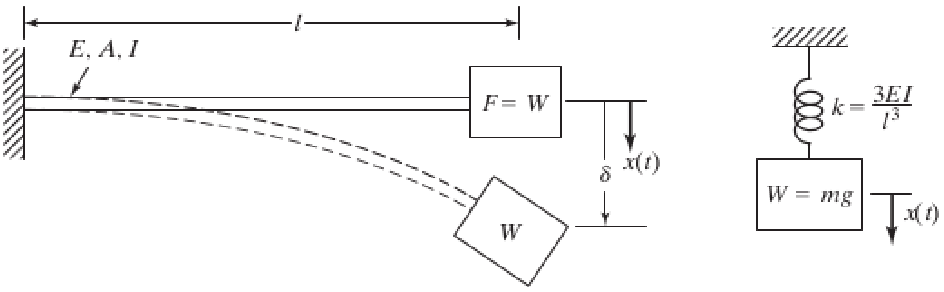
d= diámetro del alambre del resorte [m]
G= módulo de elasticidad tranversal o módulo de corte [N/m²]
D= diámetrod el resorte [m]
n= número de espirales

En el caso de un barra sólida uniforme de longitud (l) , la constante elástica equivalente depende del área transversal (A), y el módulo de Young (E)



Considere el caso de una viga voladiza de longitud (l), área transversal (A), módulo de Young (E), y momento de inercia (I), sometida a flexión provocada por una masa (m) colocada un extremo de la barra, estando el otro extremo fijo. Para la constante elástica equivalente tenemos:

$$\delta=\frac{W l^3}{3 E I} \qquad k=\frac{W}{\delta}=\frac{3 E I}{l^3}$$



Elementos amortiguadores

Existen tres tipos de amortiguadores

- Amortiguadores viscosos
- Amortiguadores de Coulomb o por fricción
- Amortiguadores materiales, sólidos o por histéresis.

En esta guía solo estudiaremos los del tipo viscoso
De acuerdo con la ley de Newton para el flujo de fluidos viscosos tenemos que el esfuerzo de corte producido por un fluido en una distancia y está dato por

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

Donde du/dy = v/h es el gradiente de velocidad y μ es la viscosidad del fluido.
La fuerza de resistencia producida por un cuerpo de superficie A que se mueve sobre una capa de fluido viscoso será: $F=\tau A=\frac{\mu A v}{h}$

Que también puede ser expresado como $F=c v$ donde definimos una constante de amortiguación $c=\mu\frac{A}{h}$

Combinación de elementos:

Para dos resortes de constante **k1** y **k2** combinados puedo hallar una constante equivalente **keq**.

Resortes en paralelo: $k_{eq}=k_1+k_2$ Resortes en serie : $\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

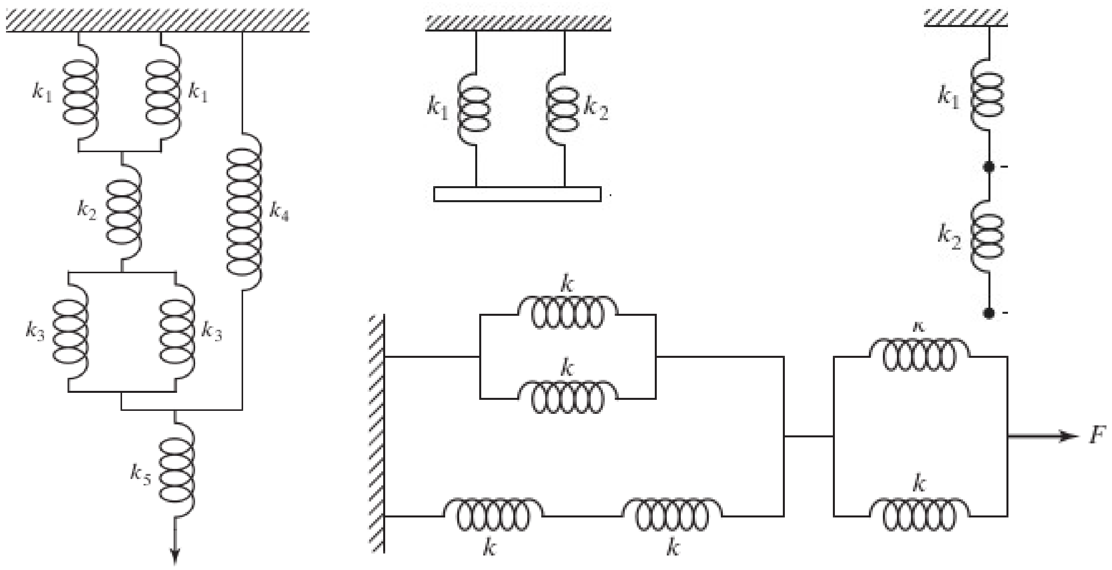
Para dos amortiguadores de constante **c1** y **c2** combinados puedo hallar una constante equivalente **ceq**.

Amortiguadores en paralelo: $c_{eq}=c_1+c_2$ Resortes en serie : $\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}$

Procedimiento de análisis de vibraciones

1- Modelado matemático
2- Obtener las ecuaciones que describen el sistema
3- solucionar las ecuaciones del sistema
4- Interpretar los resultados

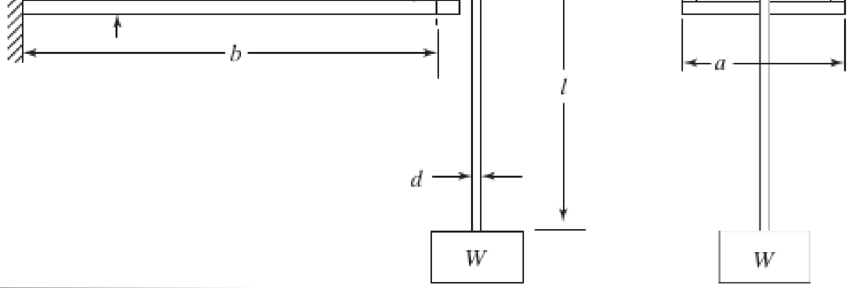
1 Calcule la constante elástica equivalente para los siguientes casos



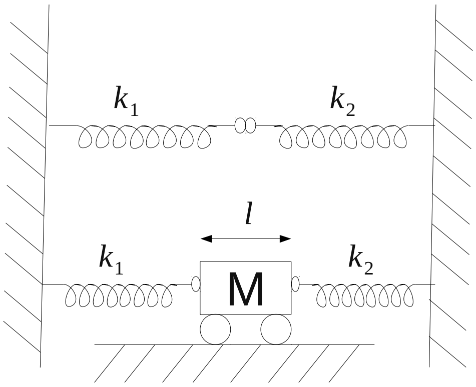
2 Para primer el diagrama considere G= $80x10^9$ N/m² d=2cm D=0,2 m y **n** es igual al subíndice de **k** para cada uno de los resortes. Calcule el valor de la constante de elasticidad equivalente.

3 Realice un modelo simplificado del siguiente sistema:
Una moto con ruedas de masa **mr**, y constante elástica **kr**. El resto de la moto tiene una masa **mM**.
El par de <u>amortiguadores</u> delantero tiene una constante elástica **kd** y un coeficiente de amortiguación **cd**.
El par de amortiguadores trasero tiene una constante elástica **kt** y un coeficiente de amortiguación **ct**.
Considere que todos los amortiguadores actúan <u>verticalmente</u>. El conductor tiene una masa **mc**, y para considerar el peor caso posible vamos a suponer que tiene una capacidad elástica y de amortiguamiento nula.

4 Un motor que enrolla un cable está montado en la punta de una viga voladiza, como se muestra en la figura. Asuma que tanto el cable como la viga tienen un módulo de elasticidad E. Encuentre el coeficiente elástico equivalente. El momento de inercia de la viga es $I=1/12*a*t^3$. Puede considerar que el peso del motor es despreciable



5 Considere dos resortes de constante **k1** y **k2** que están fijados a dos superficies verticales enfrentadas de modo tal que, en reposo sin estirarse ni comprimirse, llegan exactamente a tocarse en medio de la distancia entre las paredes. Ahora considere que en medio de ellos se agrega un cuerpo de masa **M** y longitud **l**, que desliza sin rozamiento. Por lo que ahora cada resorte tiene una compresión **l/2**.



Indique en un diagrama de cuerpo libre las fuerzas que actúan sobre **M**.

Obtenga la ecuación de movimiento del sistema. ¿Es una ecuación homogénea o no homogénea?

Demuestre que la frecuencia natural del sistema no depende de la longitud **l** y que por eso sería la misma si **M** fuera una partícula en lugar de un cuerpo. Es decir que la pre-compresión de los resortes no varía la frecuencia natural del sistema.

Transforme la ecuación de movimiento en una ecuación homogénea. Ayuda obtenga primero la posición de equilibrio estático del sistema, es decir cuando no hay aceleración

Encuentre al menos una solución posible para el sistema homogéneo planteado. Reemplácela en la ecuación de movimiento del sistema.

Amortiguación

El movimiento de una masa unida a un resorte con amortiguación puede modelarse mediante la siguiente ecuación $m\ddot{x}+c\,\dot{x}+k\,x=0$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden y tiene una solución de la forma $x=A.e^{st}$

La ecuación característica será : $m\,s^2+b\,s+k=0$,

también puede expresarse como $s^2+\frac{b}{m}s+\frac{f}{m}=0$

Sus raíces serán $s_{1,2}=\frac{-b}{2m}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}$

Considerando que la frecuencia es $\omega^2=\frac{k}{m}$,

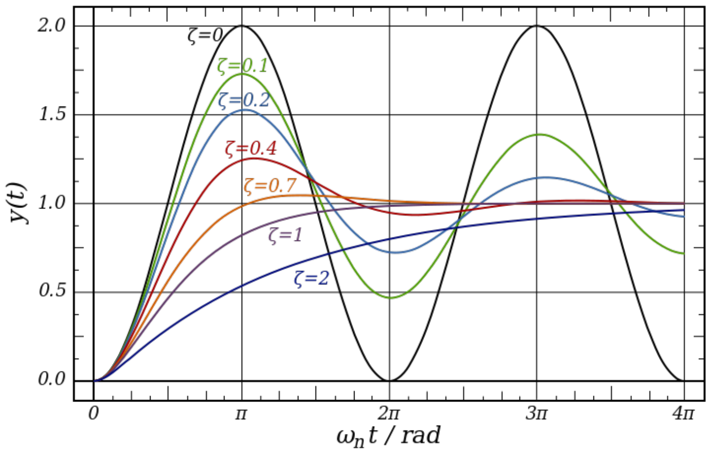
Podemos transformar la ecuación de las raíces en $s_{1,2}=\frac{-b}{2m\omega}\omega\pm\omega\sqrt{\left(\frac{b}{2\omega m}\right)^2-1}$

Definamos el **factor de amortiguación** $\zeta=\frac{b}{2m\omega}$

Ahora podemos expresar las raíces como $s_{1,2}=-\zeta\,\omega\pm\omega\sqrt{\zeta^2-1}$

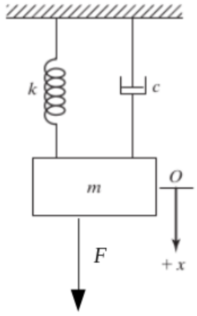
En base a este factor podemos definir distintos casos.

$\zeta=0$ No amortiguado | $\zeta=1$ Críticamente amortiguado
$\zeta>1$ Sobre amortiguado | $\zeta<1$ Sub amortiguado



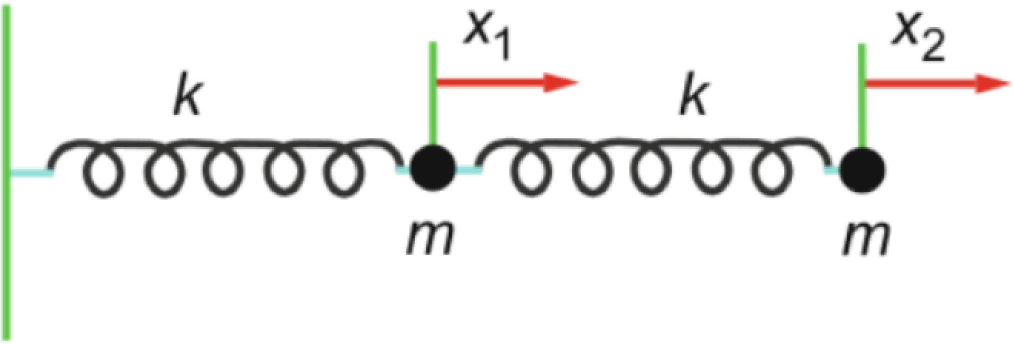
Discuta el tipo de raíces obtenidas para cada caso de ζ y qué puede predecir acerca del comportamiento del sistema.

6 Del siguiente sistema mecánico donde
k=1250N/m , c=2000N s/m , m =10kg, F=1N
Exprese la ecuación de movimiento del sistema
Calcule la frecuencia del sistema
Calcule el coeficiente de amortiguación e indique de que tipo es.



Osciladores acoplados

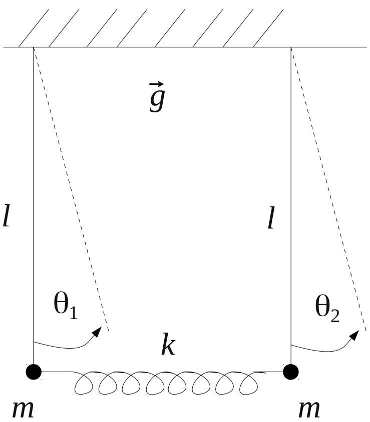
7 Considere un sistema como el de la imagen, con dos partículas de masa m y dos resortes de constante k, las partículas solo pueden moverse horizontalmente.



Obtenga las ecuaciones de movimiento del sistema
Obtenga las frecuencias normales
Obtenga los modos normales del sistema

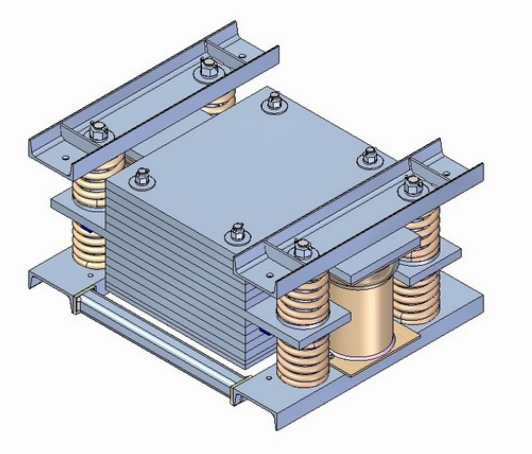
8 Considere un sistema como el de la imagen formado por dos péndulos de longitud **l** y partículas de masa **m**, y están unidos por un resorte de constante **k.** Considere pequeñas oscilaciones pro los que el estiramiento del resorte es el resultado del dezplazamiento de las partículas <u>solo</u> en el eje horizontal. Es decir se trata de ángulos θ_1 θ_2 pequeños,
Ayuda: una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento del sistema realice la simplificación de considerar $\sin(\theta)\approx\theta$ y $\cos(\theta)\approx 1$

Obtenga las ecuaciones de movimientos del sistema
Exprésela en forma matricial $\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}+[K]*\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ donde K es la matriz de rigidez del sistema.
Obtenga las frecuencias naturales del sistema ω_1^2 y ω_2^2
Obtenga los modos normales del sistema , es decir la relación que hay entre las amplitudes A_1 A_2 para cada una de las frecuencias naturales
Desarrolle un ejemplo de movimiento donde las condiciones iniciales hagan que se produzca el fenómeno de batido

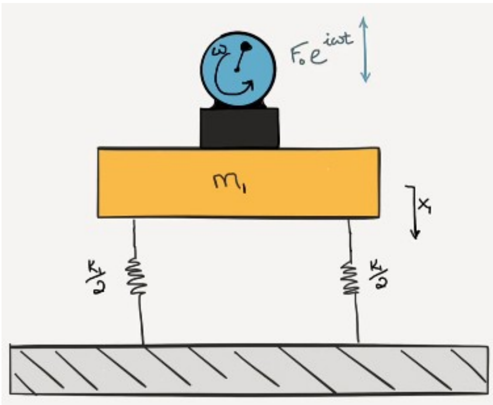


Amortiguador de masa sintonizado.

9 Un amortiguador de masa sintonizado es un sistema de absorción de vibraciones mediante el balanceo de un contrapeso. Por ejemplo mediante la instalación de un péndulo en un rascacielo o masas acopladas a un resorte en para estructuras o máquinas.



El resultado es que se reduce la amplitud de la vibración absorbiendo la energía cinética del sistema. Cuando la frecuencia de la fuerza se aproxima a la de la frecuencia natural del sistema se producen oscilaciones con una amplitud muy grande que pueden ser indeseables e incluso peligrosas.
Una solución consiste en agregar un péndulo, o una masa unida a un resorte, se buscará sintonizar su frecuencia de modo tal que ayude a disminuir el desplazamiento de la estructura principal llevándose la energía cinética y moviéndose en su lugar.
Al agregar otro grado de libertad se obtiene un nuevo sistema con 2 frecuencias naturales distintas a la original.



Considere el caso de la figura, donde un motor hace girar un disco des balanceado con una frecuencia ω igual a la frecuencia natural del sistema, sobre un cuerpo de masa M_1 que está sobre dos resortes de constante $k_1/2$, ejerciendo una fuerza F_0 .
Obtenga la expresión de un amortiguador de masa sincronizado que minimize el desplazamiento sobre M_1
¿De qué variables del sistema depende el diseño del amortiguador?