MECÁNICA NEWTONIANA

MECÁNICA RACIONAL – 2019

La Mecánica como teoría científica

Definición: La mecánica es una teoría científica que estudia ***el movimiento*** de los cuerpos y ***sus causas***, o bien el equilibrio (la falta de movimiento)

→ partículas y sistemas de partículas masivas, cuerpos sólidos (como continuos de partículas infinitesimales) y fluidos (que se estudian por separado por los modelos matemáticos que los describen)

- Interpreta fenómenos físicos que se observan experimentalmente
- Parte de unos postulados o principios fundamentales
- Basa una teoría a través de modelos matemáticos
- Busca interpretaciones coherentes a las observaciones experimentales
- Muchas teorías han quedado obsoletas en el tiempo o no adecuarse a observaciones posteriores
- No existe el criterio de "Veracidad Absoluta"

Teorías principales de la Mecánica

***Mecánica Clásica*:**

Se considera que comenzó con Newton (1686: «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica»). Colaboradores importantes: Juan, Daniel y Jacobo Bernouilli, L. Euler, J. D'Alembert, J.L. Lagrange, W. Hamilton, etc.

Los modelos newtonianos fueron los primeros que lograron explicar satisfactoriamente al mismo tiempo el movimiento de los cuerpos celestes (observaciones de Kepler) y el de los cuerpos a escala humana (observaciones de Galileo)

Teorías principales de la Mecánica

***Mecánica Cuántica*:**

Surge de las observaciones de las partículas elementales, en las que intervienen acciones —productos de energía por tiempo— tan pequeñas que son comparables a la constante de Planck ($E.t \sim h = 6{,}63 \text{ x } 10^{-34}\ kg\ m^2/s$). En estos casos se aplica el principio de indeterminación de Heisenberg, que establece la imposibilidad de medir de manera precisa la posición y velocidad de la partícula al mismo tiempo, valores que se conocen sólo de manera probabilista. Propuesta en el siglo XX por un grupo de científicos (L. de Broglie, Schrödinger y P. Dirac)

Teorías principales de la Mecánica

Mecánica Relativista:

Surge como consecuencia de la inexactitud de la mecánica clásica para casos donde ***velocidades próximas a la de la luz*** (teoría de la relatividad restringida) o para ***campos gravitatorios muy intensos*** (teoría de la relatividad generalizada). Propuesta por Albert Einstein en el siglo XX. Gran complejidad matemática.

A pesar de las nuevas teorías de la mecánica surgidas recientemente, se puede afirmar que la mecánica clásica constituye una teoría coherente, capaz de proporcionar interpretaciones suficientemente precisas para la mayoría de los fenómenos que se observan.

Teorías principales de la Mecánica

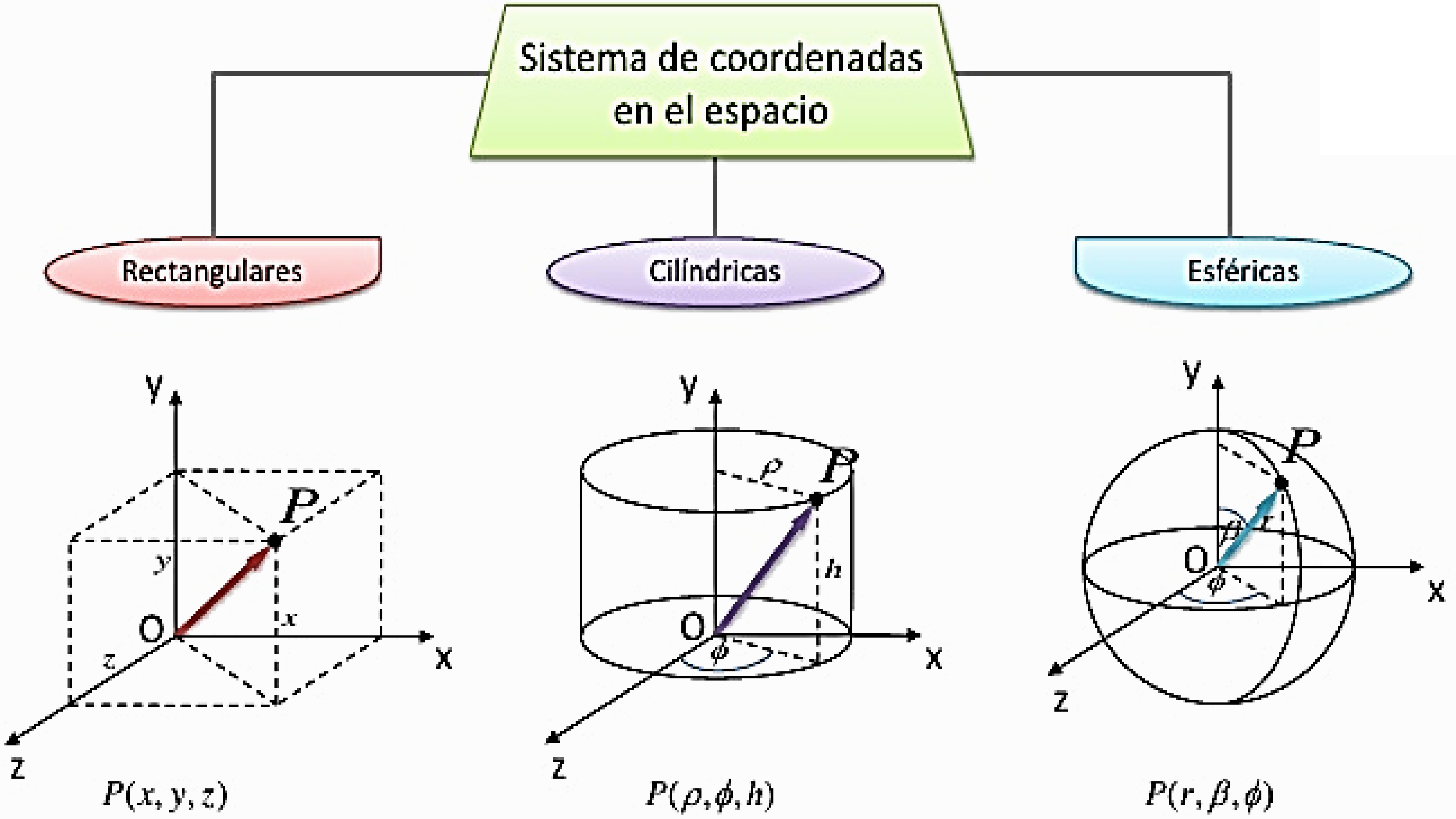
Móvil		
	$v \sim c$ *campos gravitatorios extremadamente intensos*	Mecánica relativista (Gran complejidad matemática)
	v *campos gravitatorios*	Mecánica clásica
	Uno de los postulados de la mecánica es la causalidad determinista. Pero, en ciertas situaciones, es cuestionable, y se acude a métodos probabilistas	Mecánica cuántica

Sistemas de Referencia

+ Coordenadas cartesianas con respecto a un origen y a ejes ortogonales, que constituyen un sistema de referencia

+ Coordenadas Cilíndricas

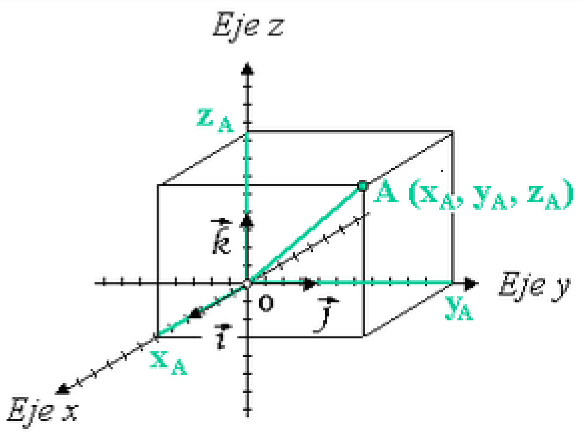
+ Coordenadas Esféricas



Rectangulares

Sistemas de Referencia

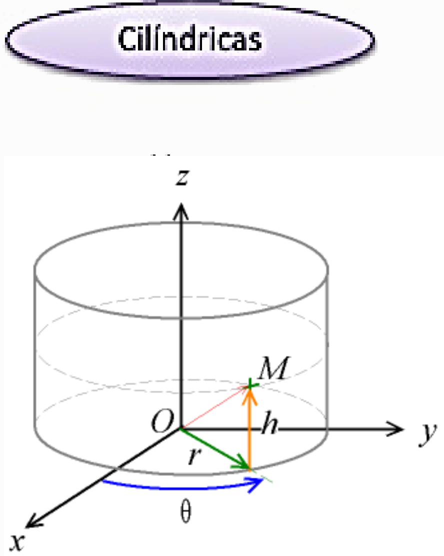
\+ Coordenadas cartesianas:



Una pelota de golf es golpeada con una $v_0 = 10$ m/s en dirección este y con un ángulo de 55° sobre la horizontal. Desprecie el rozamiento. Escriba la expresión de la posición como función del tiempo usando la coordenada *x* en la dirección al este, *y* al norte y *z* verticalmente. Calcule el tiempo que tarda la pelota en tocar el piso nuevamente y la distancia a la que llega en ese tiempo.

Sistemas de Referencia

+ Coordenadas Cilíndricas:

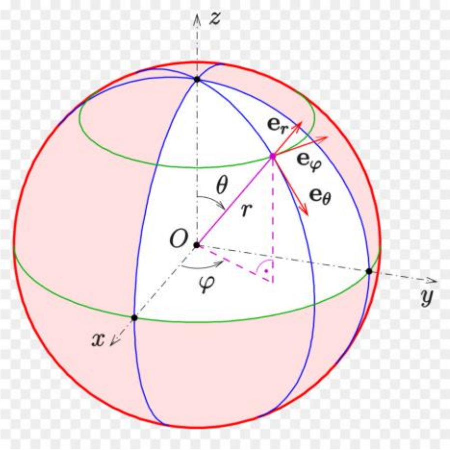


Convierta desde el sistema de coord. cartesianas a cilíndricas: (-2,2,3)

Transforme desde el sistema de coord. cilíndricas a cartesianas: (3,π/3,-4)

Esféricas

Sistemas de Referencia



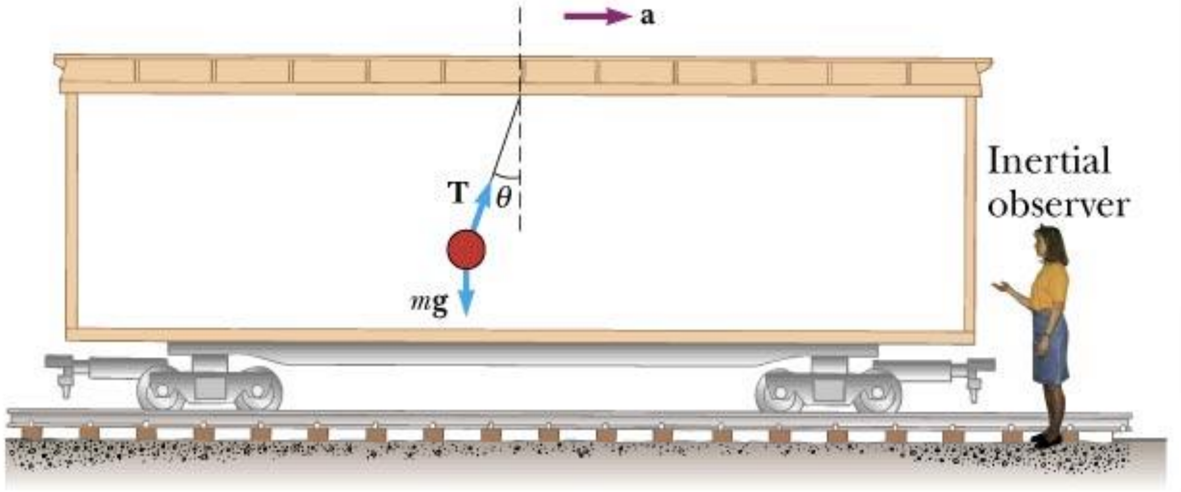
+ Coordenadas Esféricas:

Convierta del sistema de coord. esféricas a cartesianas: $(8, \pi/4, \pi/6)$

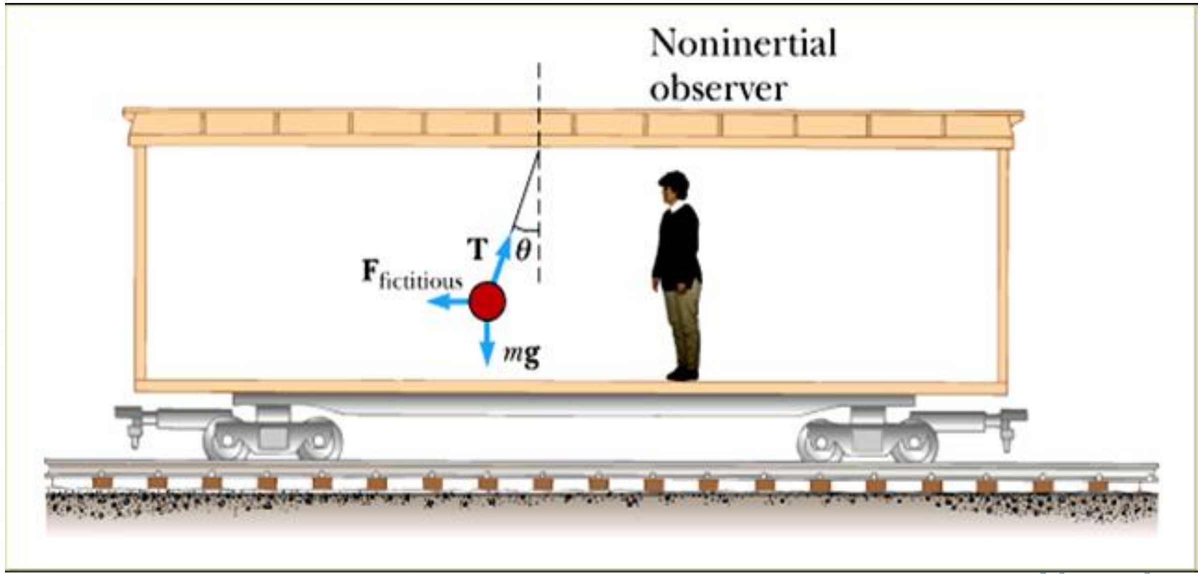
Convierta del sistema de coord. cartesiana a esférica: $(2\sqrt{3}, 6, -4)$

Sistemas de Referencia

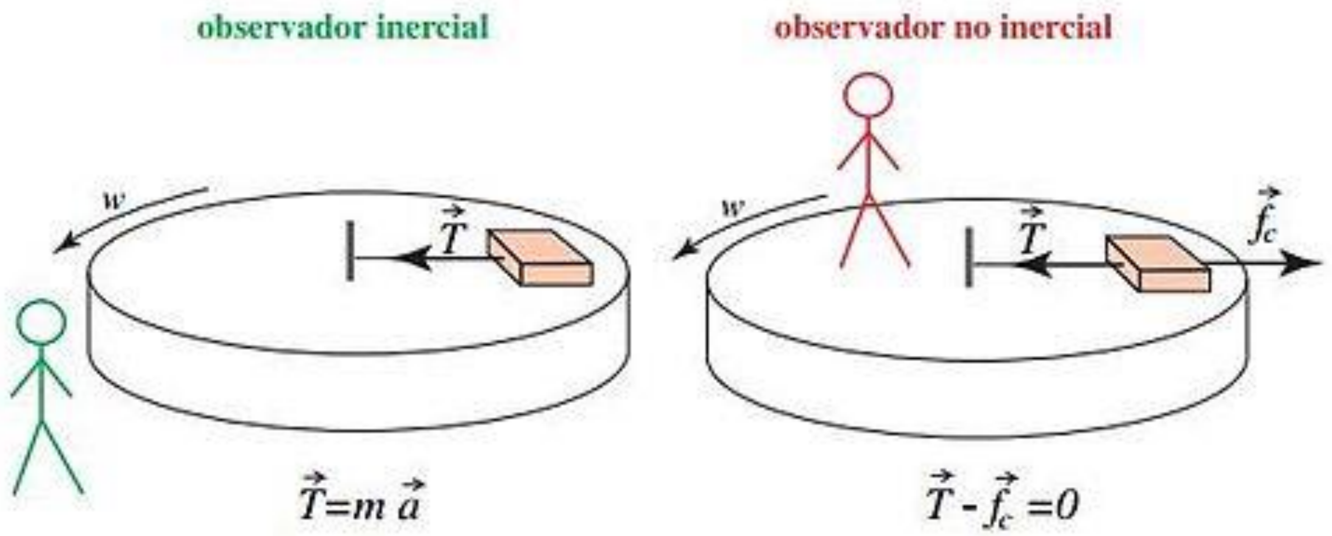
<u>Sistemas Inerciales</u>: Son aquellas donde se cumplen las leyes de Newton. En la práctica, son los sistemas no acelerados.



<u>Sistemas No Inerciales</u>: Son sistemas donde no se cumplen las leyes de Newton.
Son sistemas acelerados. En ellos, las causas del movimiento observado puede explicarse mediante Fuerzas Ficticias.



Sistemas de Referencia



Conceptos de Espacio y Tiempo

Postulados que asume la Mecánica Clásica:

Propiedades del Espacio

1. Independencia de los objetos con el sistema de referencia. La métrica del espacio no se ve afectada por los mismos.
2. Constancia a lo largo del tiempo.
3. Homogeneidad: es igual en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados.
4. Isotropía: es igual en todas las direcciones, no existiendo direcciones privilegiadas.

Propiedades del Tiempo

1. Homogeneidad, al no existir instantes privilegiados.
2. Fluye constantemente en un sentido, por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado. Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes. No se cumple por tanto la isotropía, existiendo un único sentido en el que puede discurrir el tiempo.
3. Simultaneidad absoluta: Los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia, lo son asimismo para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.

Principio de la relatividad de Galileo

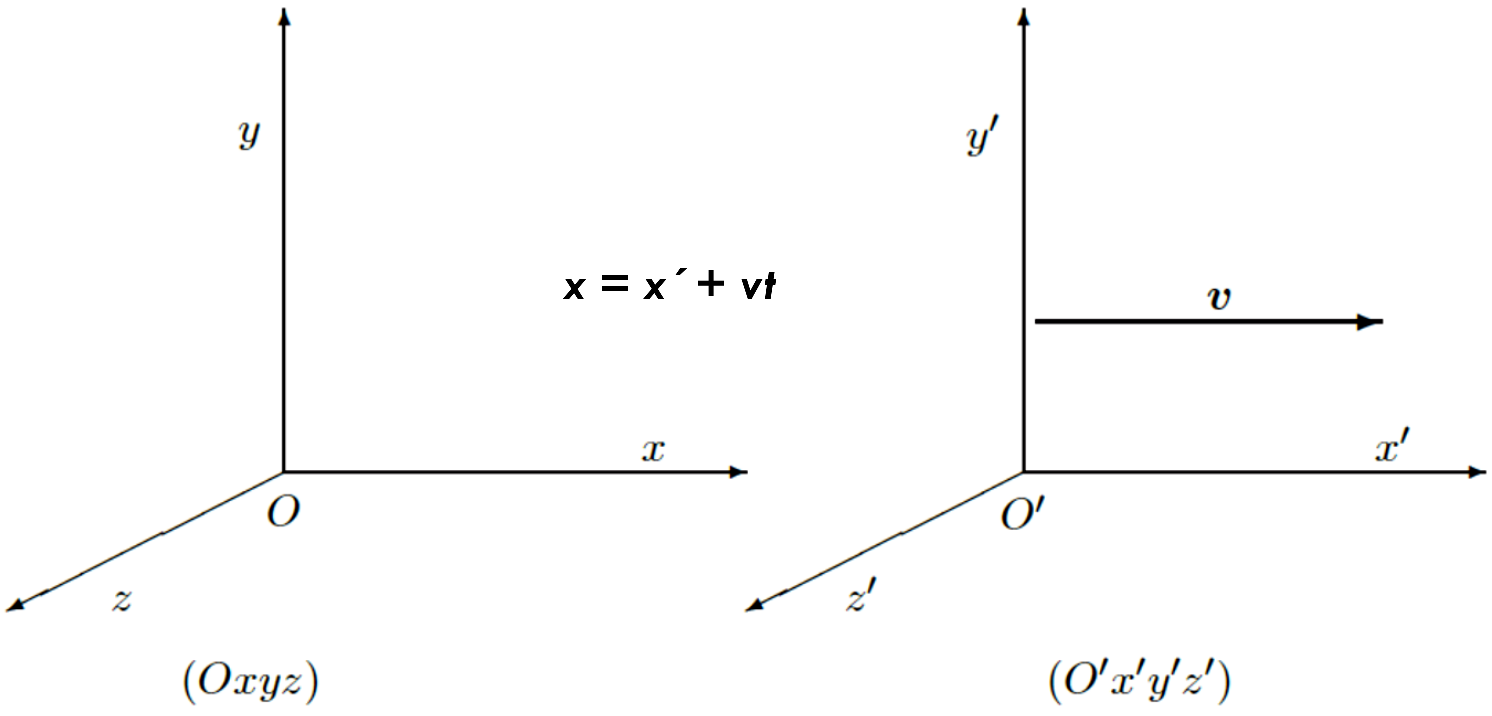
Galileo Galilei, Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas relacionadas con la mecánica, 1602

El principio de la relatividad galileana establece que:

'Dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos, y las leyes de la mecánica son las mismas.'

Uno de los ejemplos puestos por Galileo es el de un observador viajando en un barco que navega sobre un río, en contraste con un observador fijo en la orilla. Ambos interpretan de la misma manera la caída de un cuerpo hacia el suelo en su propio sistema, que sigue un movimiento vertical uniformemente acelerado.

Transformación de Galileo

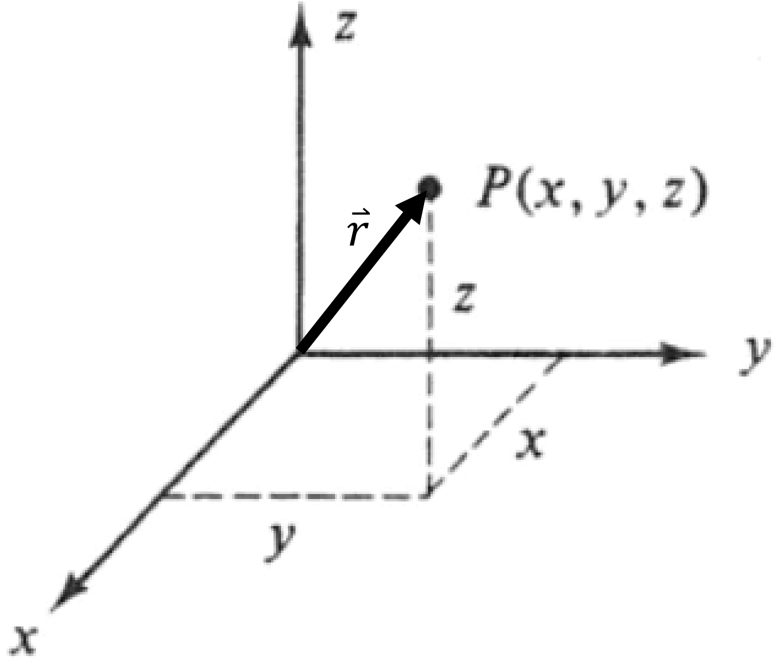


$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{cases}$$

Ecuaciones de transformación para las coordenadas, velocidades y aceleraciones

Variables que caracterizan el movimiento

El ***tiempo*** y el ***espacio*** son conceptos fundamentales de la Mecánica: a cada tiempo, la posición de una partícula está determinada por una terna de números reales que son su vector posición:



$$\vec{r}(\mathrm{t}) = (x, y, z)$$

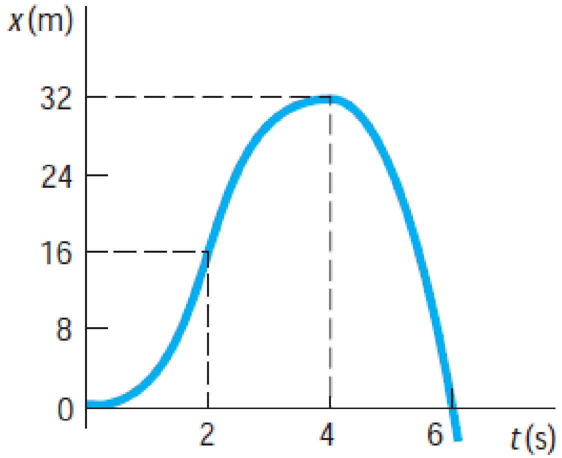
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

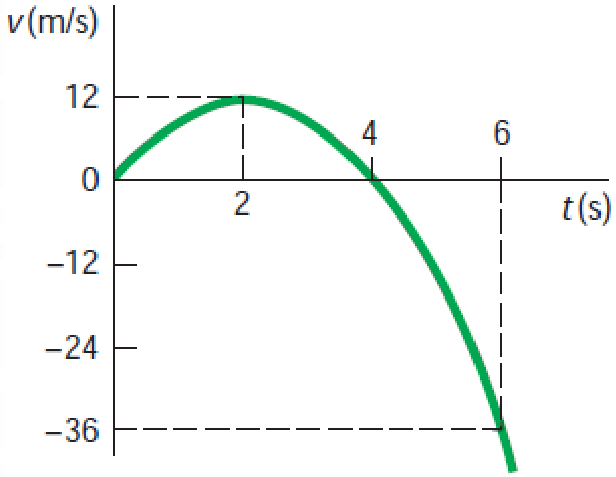
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

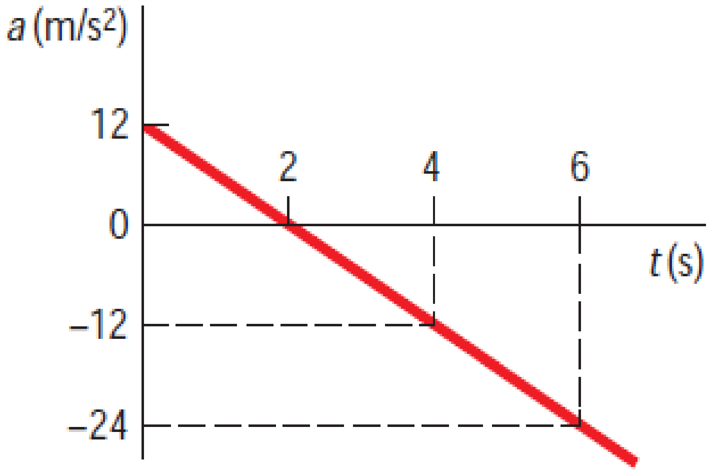
Ejemplo: Considere una partícula que se mueve en línea recta. Asuma que su posición está dada por: $x = 6t^2 - t^3$ (con t expresado en segundos y x en metros). Obtenga la expresión de la velocidad y de la aceleración

Ejemplo: Considere una partícula que se mueve en línea recta. Asuma que su posición está dada por: $x = 6t^2 - t^3$ (con t expresado en segundos y x en metros). Obtenga la expresión de la velocidad y de la aceleración.

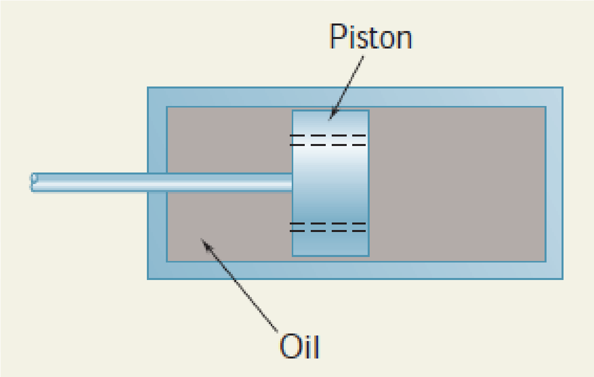
$$x = 6t^2 - t^3 \qquad \mathrm{v} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2 \qquad \mathrm{a} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$



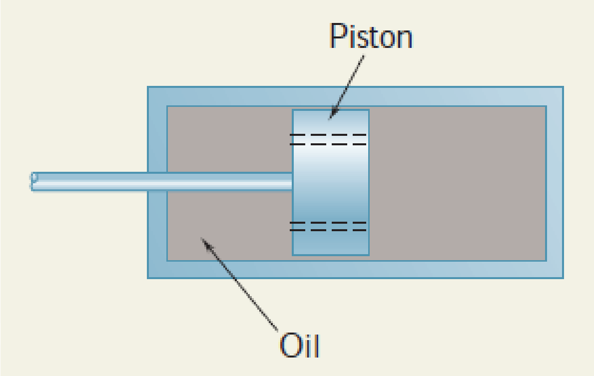




Ejemplo: **El mecanismo de freno que se usa para reducir el retroceso en ciertos tipos de cañones consiste esencialmente en un émbolo unido a un cañón que se mueve en un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el cañón retrocede con una velocidad inicial v_0, el émbolo se mueve y el aceite es forzado a través de los orificios en el émbolo, provocando que este último y el cañón se desaceleren a una razón proporcional a su velocidad; esto es $a = -kv$. Exprese *a*) *v* en términos de *t*, *b*) *x* en términos de *t*, *c*) *v* en términos de *x*. Dibuje las curvas del movimiento correspondiente.**



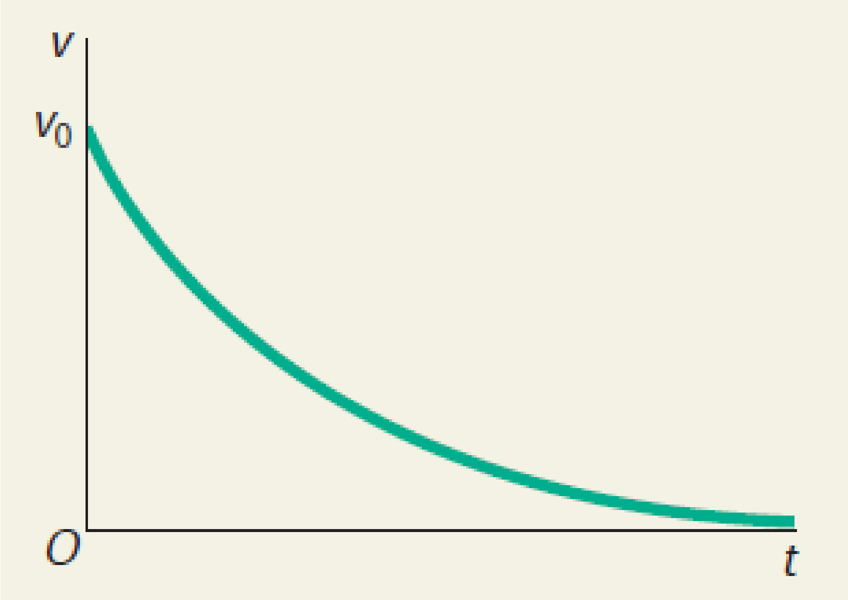
Ejemplo: $a = -kv$.



Exprese *a*) *v* en términos de *t*,

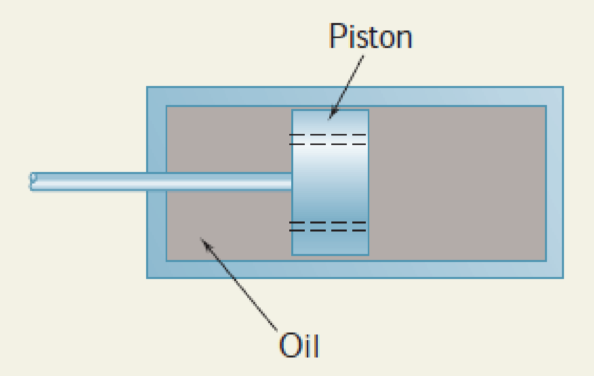
$$-kv = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \qquad\qquad v = v_0 e^{-kt}$$



Ejemplo: $a = -kv$.

Exprese *b*) *x* en términos de *t*,

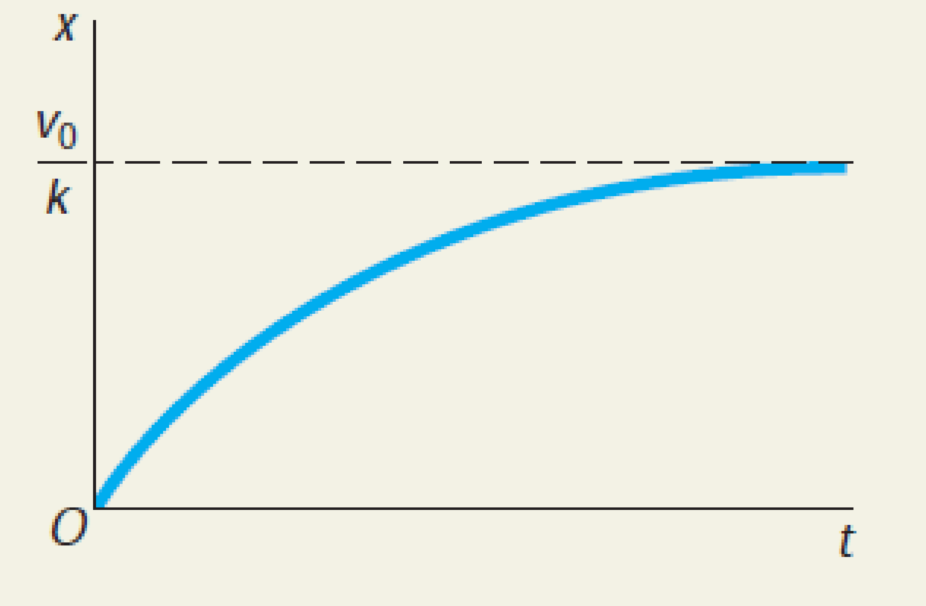


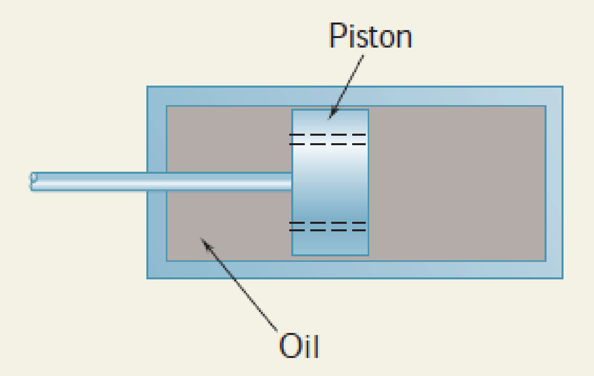
$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt}\, dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k}[e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$





Ejemplo: $a = -kv$.

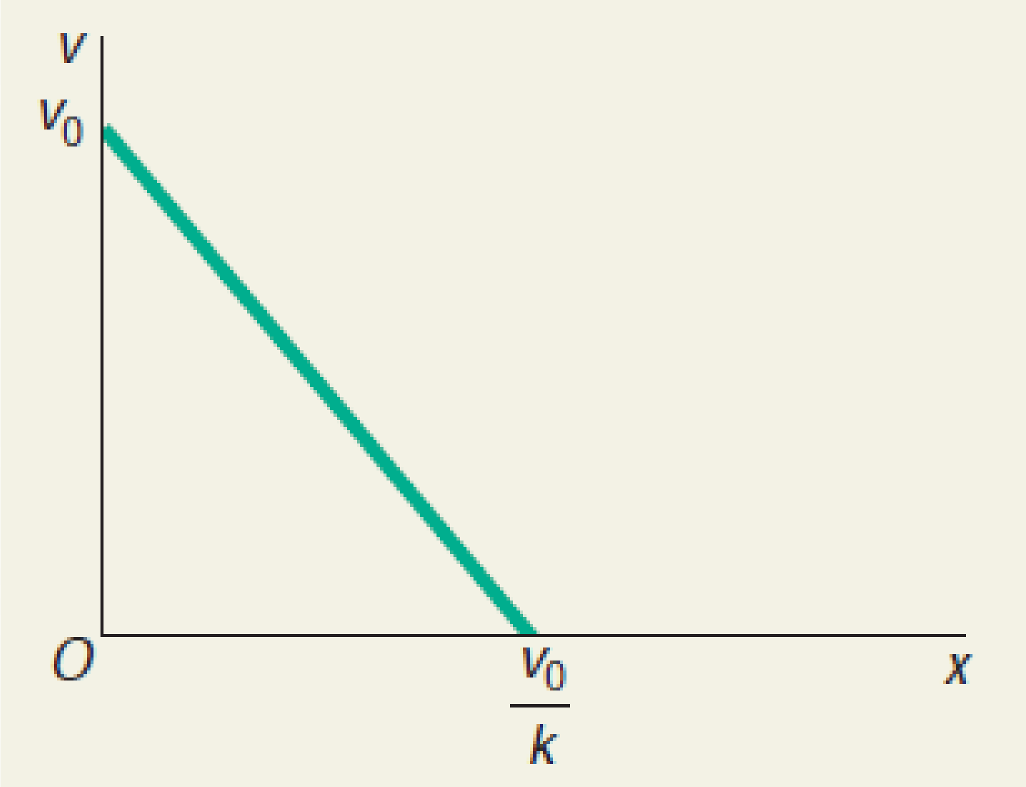
Exprese c) v en términos de x.

$$-kv = v\frac{dv}{dx}$$

$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx \qquad v = v_0 - kx$$



Las leyes de Newton

Formuladas por Isaac Newton en su obra «Philosophiae Naturalis Principia Matematica» (1686)

1ra definición: La cantidad de materia (masa) es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente

2da definición: La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente

3ra definición: La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo

4ta definición: La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo

Las leyes de Newton

1ra Ley: **Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado**

Si sobre una partícula no actúan fuerzas, conserva su estado de movimiento: no se acelera; se queda quieta o con movimiento uniforme. Es una definición "cualitativa" de *fuerza*.

Principio de Inercia: Según el principio de Galileo, se definen los sistemas inerciales como aquellos en los que se cumple dicho principio

Las leyes de Newton

2da Ley: **El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime**

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{F}.\Delta t \quad => \mathrm{d}(m\vec{v}) = \vec{F}.dt$$

Momento lineal: $\vec{p} = m\vec{v} => \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \mathrm{m}\vec{a} = \vec{F}$

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \mathrm{m}\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r},t) \begin{cases} F_x(x,t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y(y,t) = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z(z,t) = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Si se considera a la masa como un tercer concepto fundamental (como el espacio y el tiempo), es lo que se resiste al cambio del movimiento. La Segunda Ley es una definición cuantitativa de fuerza.

Las leyes de Newton

3ra Ley: **Con toda Fuerza (acción) ocurre siempre una reacción igual y contraria. Las fuerzas mutuas de los cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentidos opuestas. Es imposible ejercer una fuerza desde el vacío, sin apoyo.**

Características del par acción/reacción:

- **Igual dirección**
- **Diferente sentido**
- **Igual módulo**
- **Diferente punto de aplicación**

Ejemplos:

- **Fuerza peso (ejemplo en caída libre)**
- **Movimiento de un cohete en el vacío**

Dinámica de la partícula: Algunas consideraciones

Móvil = Partícula = Punto material ⟶ **Idealización simple de la mecánica**

- **Las dimensiones de un cuerpo son lo suficientemente pequeñas como para suponer toda su masa concentrada en un punto.**

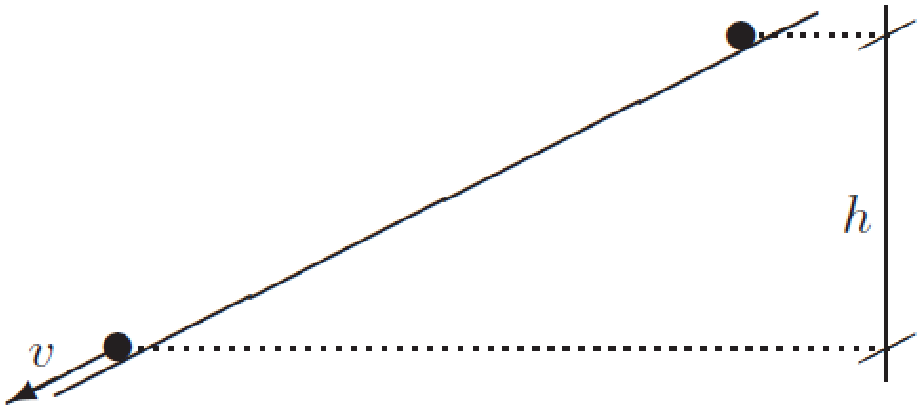
- **Sin embargo, el criterio del tamaño pequeño no es siempre suficiente para establecer la validez de esta idealización.**

- **El modelo del punto material puede ser inadecuado en algunas situaciones, aunque las dimensiones del cuerpo sean pequeñas.**

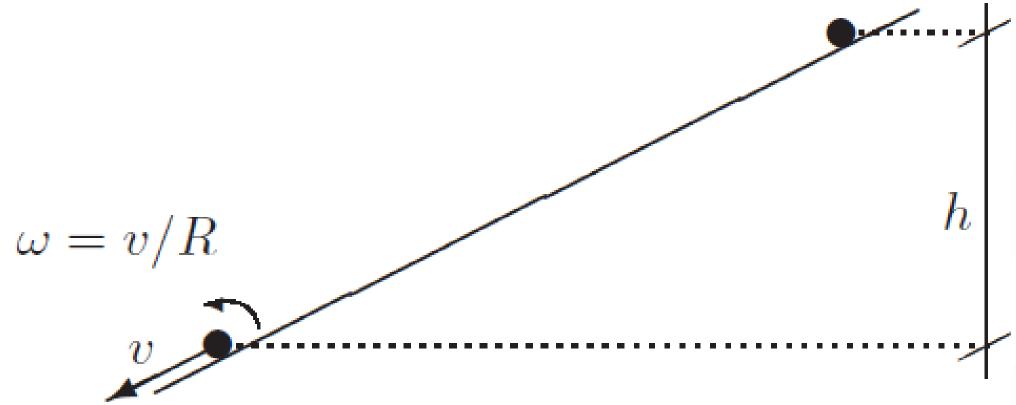
Dinámica de la partícula: Algunas consideraciones

Ejemplo: esferita deslizando por un plano inclinado

Deslizando



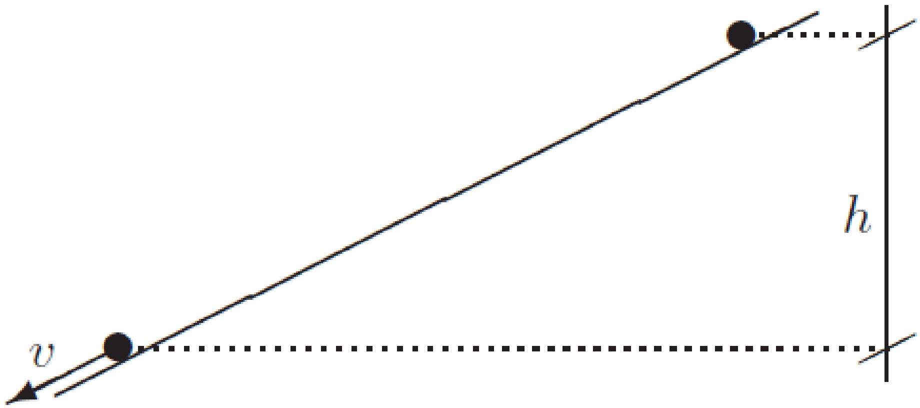
Rodando sin deslizar



Dinámica de la partícula: Algunas consideraciones

Ejemplo: esferita deslizando por un plano inclinado

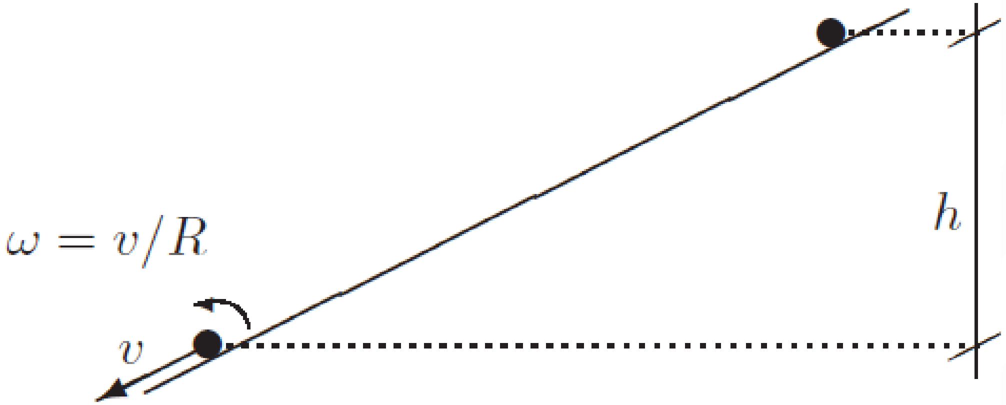
Deslizando



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh} = 1{,}414\sqrt{gh}}$$

Rodando sin deslizar

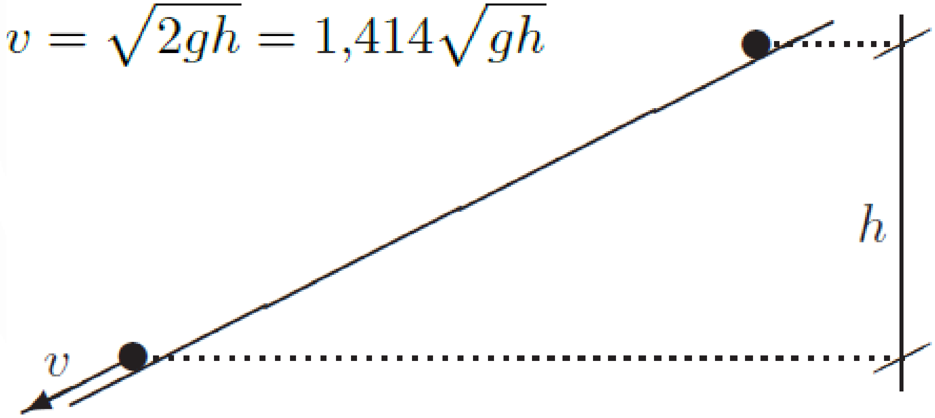


$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

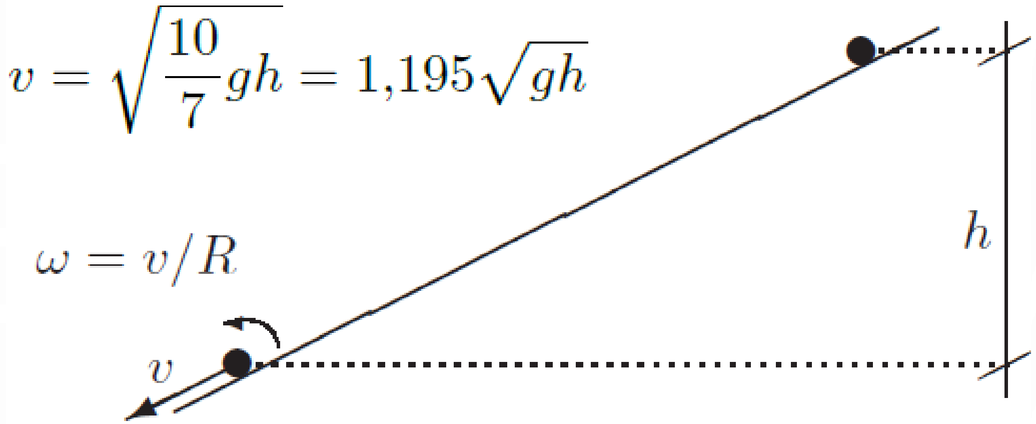
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 1{,}195\sqrt{gh}}$$

Dinámica de la partícula: Algunas consideraciones

Deslizando



Rodando sin deslizar



En el primer (idealización como partícula), la velocidad final es un 18% mayor. Esta diferencia es independiente del tamaño y masa.

El concepto de partícula es una idealización, no necesariamente válida en todos los casos aunque el cuerpo sea pequeño.

Sin embargo, el modelo del punto material es una idealización muy útil, ya que en muchos casos se pueden estudiar independientemente el movimiento de traslación de un cuerpo y el movimiento de rotación del mismo.

Principios y teoremas generales

Conservación del momento lineal:

Momento lineal: $\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}.$

Por la segunda ley de Newton: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}}.$

Si m = cte $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$

└→ **Resultante**

Si la fuerza resultante es cero: $\vec{F} = 0, \quad \vec{p} = \text{cte}$

Por lo tanto, el movimiento de una partícula aislada es tal que se conserva su cantidad de movimiento

Principios y teoremas generales

Conservación del Momento Lineal: Para un sistema de N partículas: $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{\mathbf{v}_i}.$

También se conserva si sobre el sistema no actúan fuerzas externas, aunque haya interacciones *entre* las partículas.

Por ejemplo, para dos partículas en interacción se tendría que, por la Tercera Ley: $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{12} = -\overrightarrow{\mathbf{F}}_{21}$

Por la Segunda Ley, cada una de estas fuerzas es la variación del momento lineal de cada partícula:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{12} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{p}_2}}{dt}, \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_{21} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{p}_1}}{dt}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{p}_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\mathbf{p}_2}}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{p}_1} + \overrightarrow{\mathbf{p}_2} = \overrightarrow{\mathrm{P}} = \text{constante}.$$

Principios y teoremas generales

Conservación del Momento Angular:

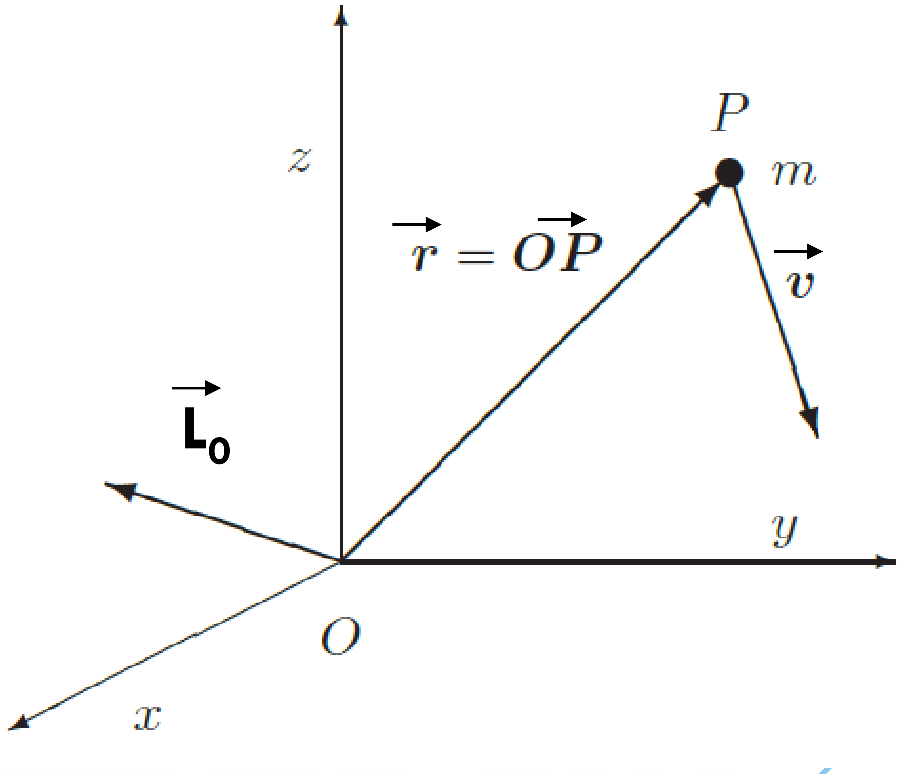
Se define momento angular:

Sea una partícula m, dotada de una velocidad $\vec{v}$ y situada en un punto P. El momento angular respecto a un punto fijo O, $\vec{L_0}$, se define:

$$\vec{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \wedge m\vec{v};$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$
$$= 0 + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}_O}$$

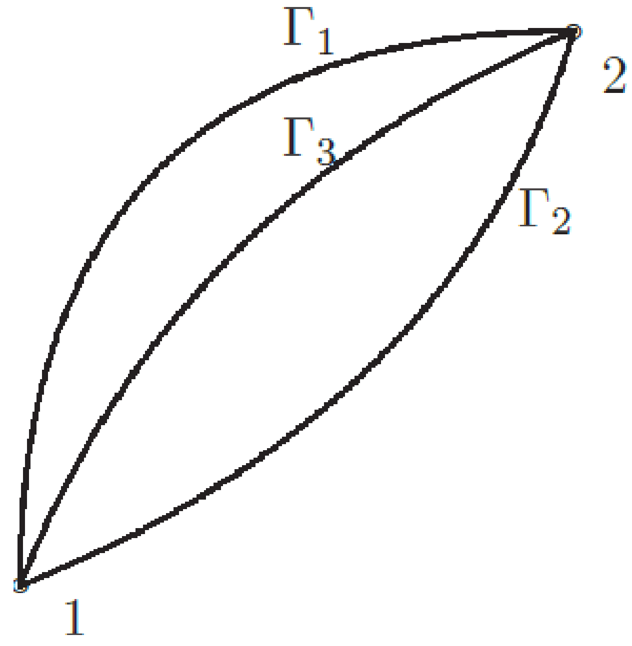


$\vec{M}_0$ es el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto del punto O.

El teorema de conservación del momento angular dice:

$$\boxed{\text{si } \vec{M}_O = 0, \quad \vec{L}_0 = \text{cte.}}$$

Principios y teoremas generales



Conservación de la Energía:

Sea una partícula de masa m, que se mueve según una trayectoria Γ_1, bajo la acción de fuerzas con resultante $\vec{F}$.

El trabajo realizado por $\vec{F}$ en un desplazamiento infinitesimal d$\vec{r}$ se define por

$$\mathrm{d}W \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}};$$

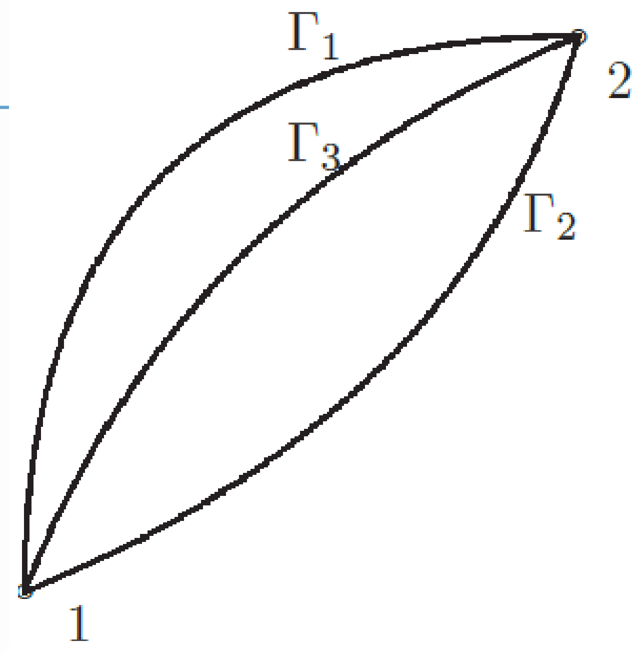
Como $\vec{\boldsymbol{F}} = m\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}/\mathrm{d}t$ **y** $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t$ **=>** $\mathrm{d}W = m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

El trabajo realizado al recorrer Γ_1 entre los dos puntos extremos 1 y 2 resulta de la integral curvilínea

$$W_{12} = \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

Se define $T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$ **=>** $\boxed{W_{12} = T_2 - T_1}$ **=> Teorema del trabajo y la energía cinética:** ‘El trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética.’

Principios y teoremas generales



Conservación de la Energía: Caso de las fuerzas conservativas:

Un campo de fuerzas conservativas es aquél en el que el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, no depende de la trayectoria seguida

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Sea una curva cerrada cualquiera Γ , a la que pertenecen los puntos 1 y 2. Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot \mathrm{d}r = \int_{\Gamma_1^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2^-} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Por el teorema de Stokes, esta última ecuación se cumple si, y sólo, si la fuerza puede expresarse como el gradiente de una función escalar de $\vec{r}$ llamada *potencial* o *energía potencial.*

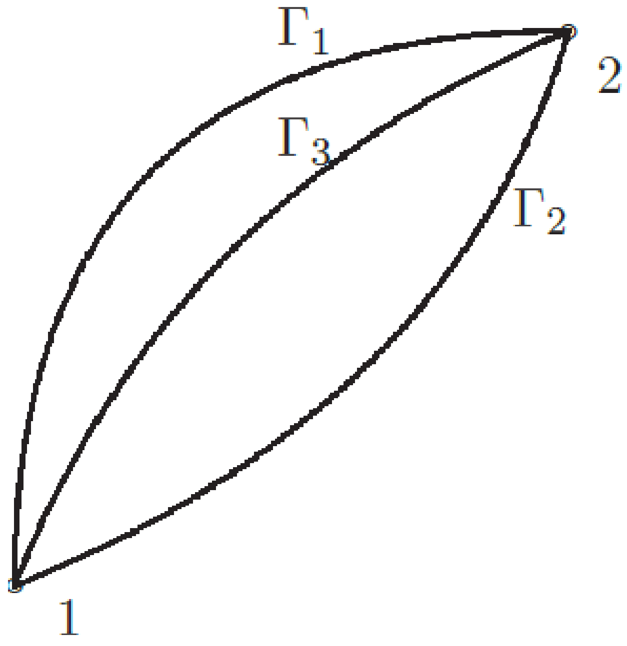
$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U(\vec{\mathbf{r}})}$$

Por convención, se define el potencial usando el signo negativo delante del gradiente

Principios y teoremas generales

Conservación de la Energía: Caso de las fuerzas conservativas:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U(\vec{\mathbf{r}})}$$



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_1^2 (-\vec{\nabla} U) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -(U_2 - U_1),$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U_1 - U_2$$
$$= T_2 - T_1,$$

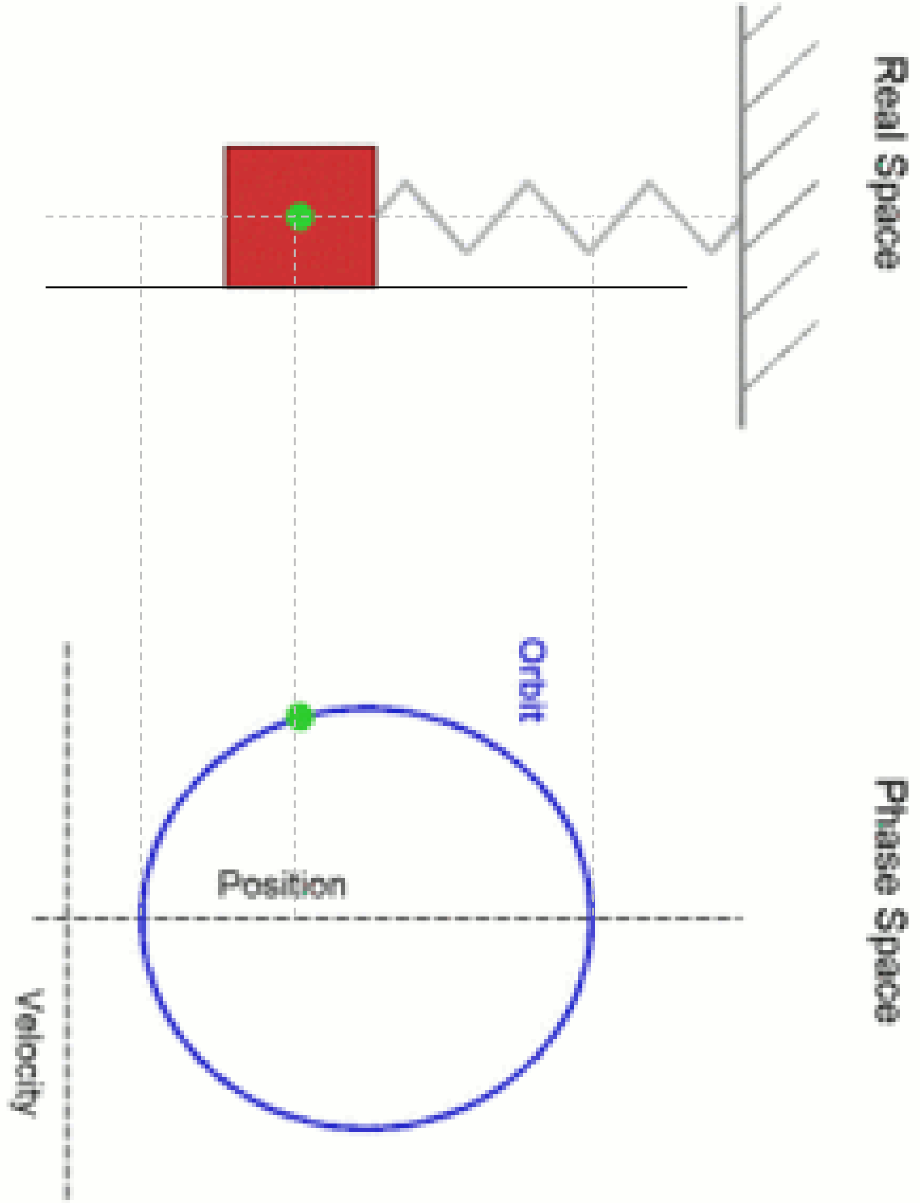
$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$Si\ \vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})\ (conservativa),\ E = T + U = cte$$

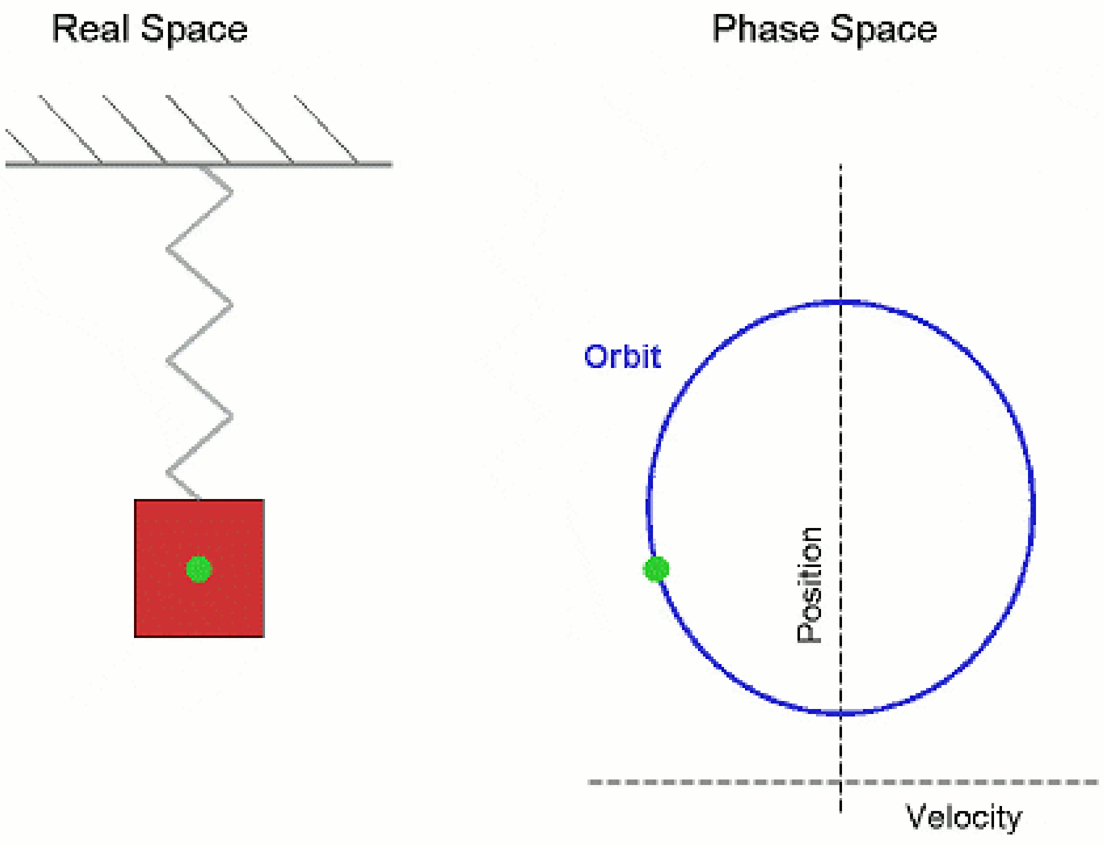
Espacio fásico

Cada punto representa un estado del sistema físico:

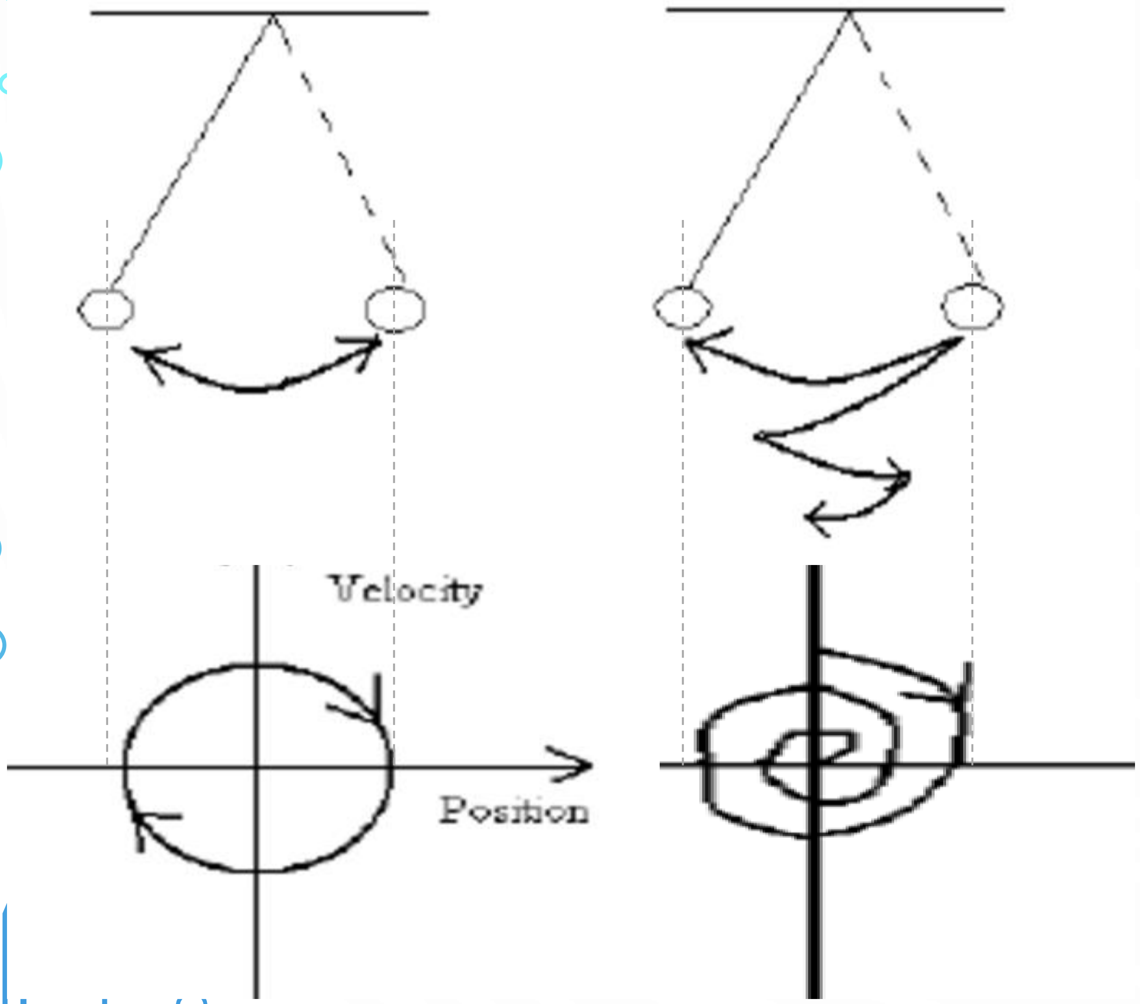
- ***Velocidad – posición***
- ***Momento lineal – posición***
- ***Energía – posición***

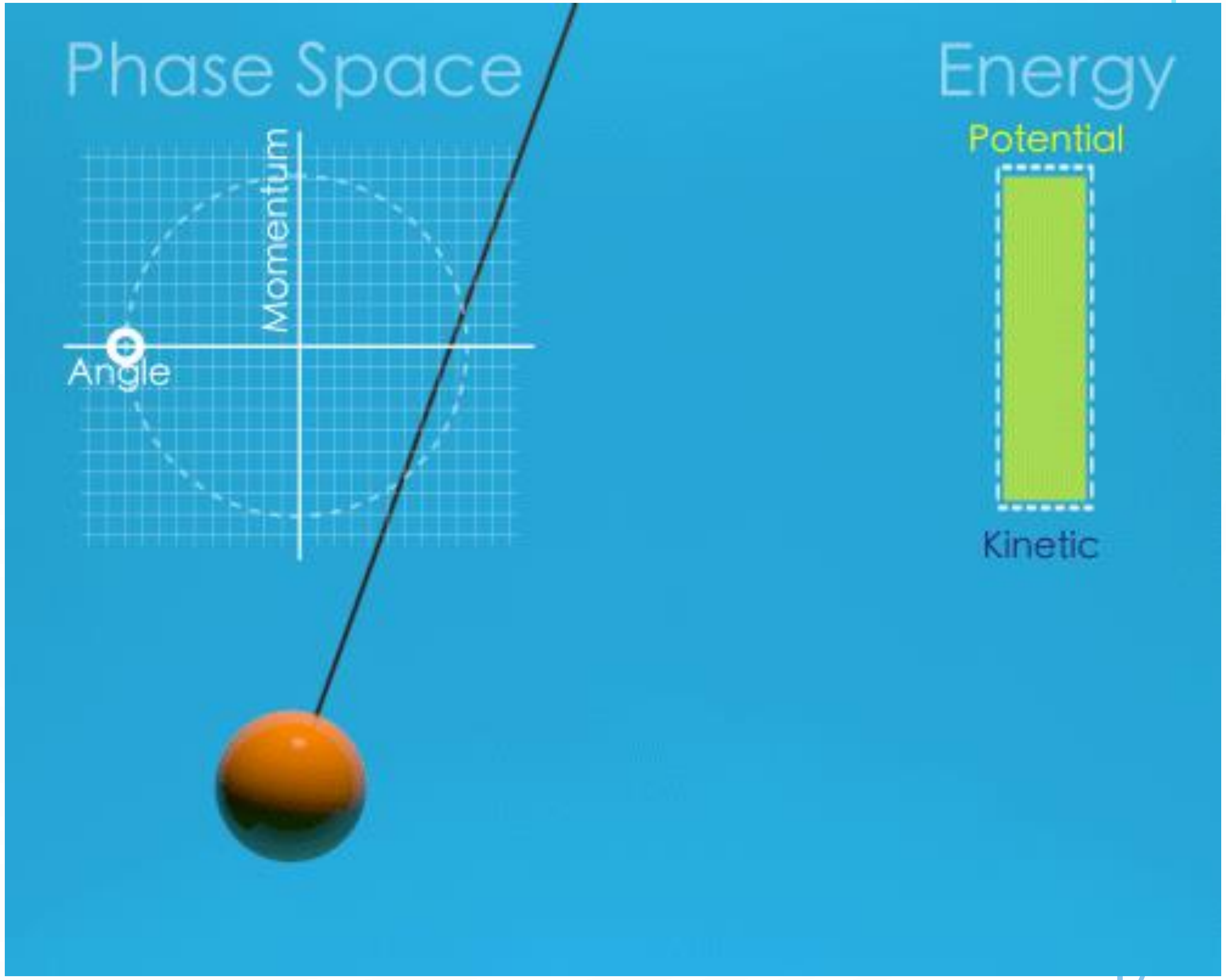


Espacio fásico

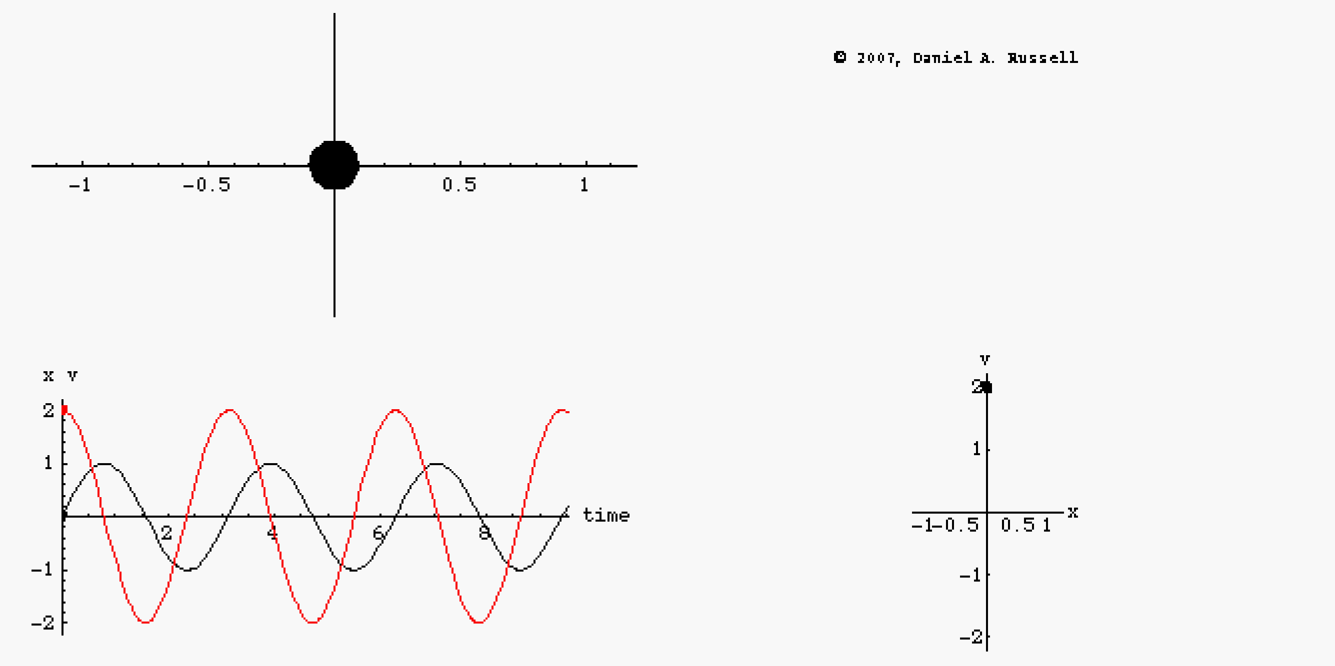


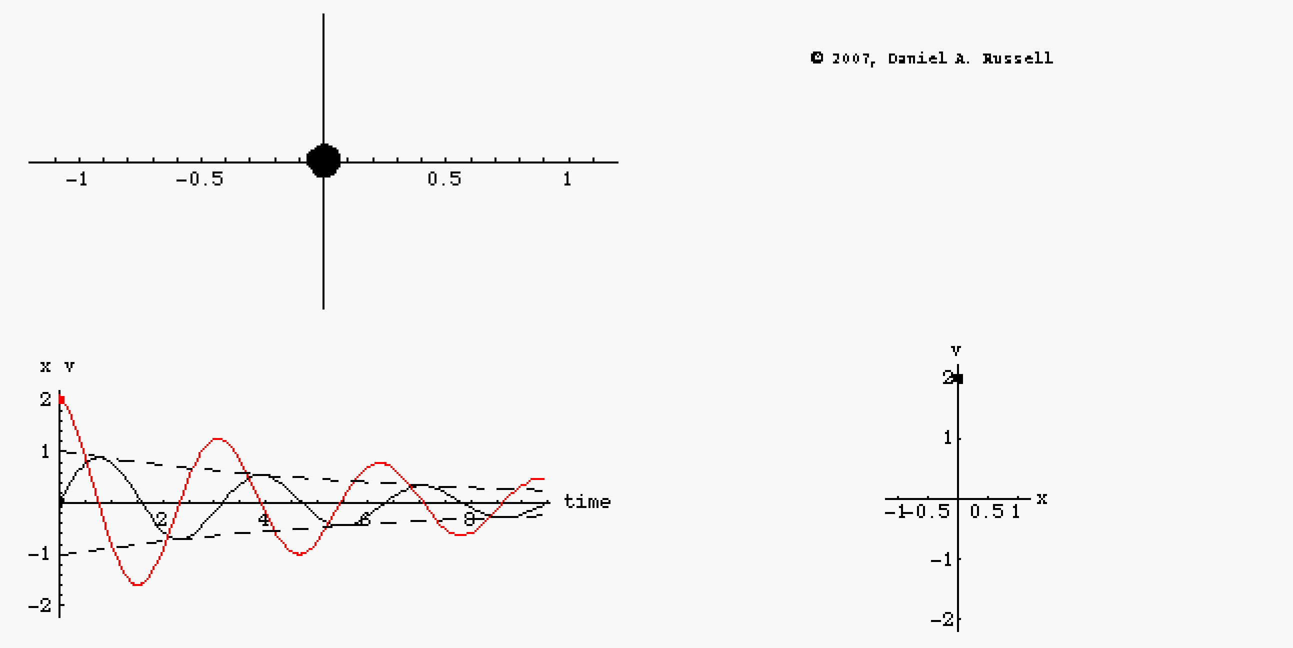
Espacio fásico



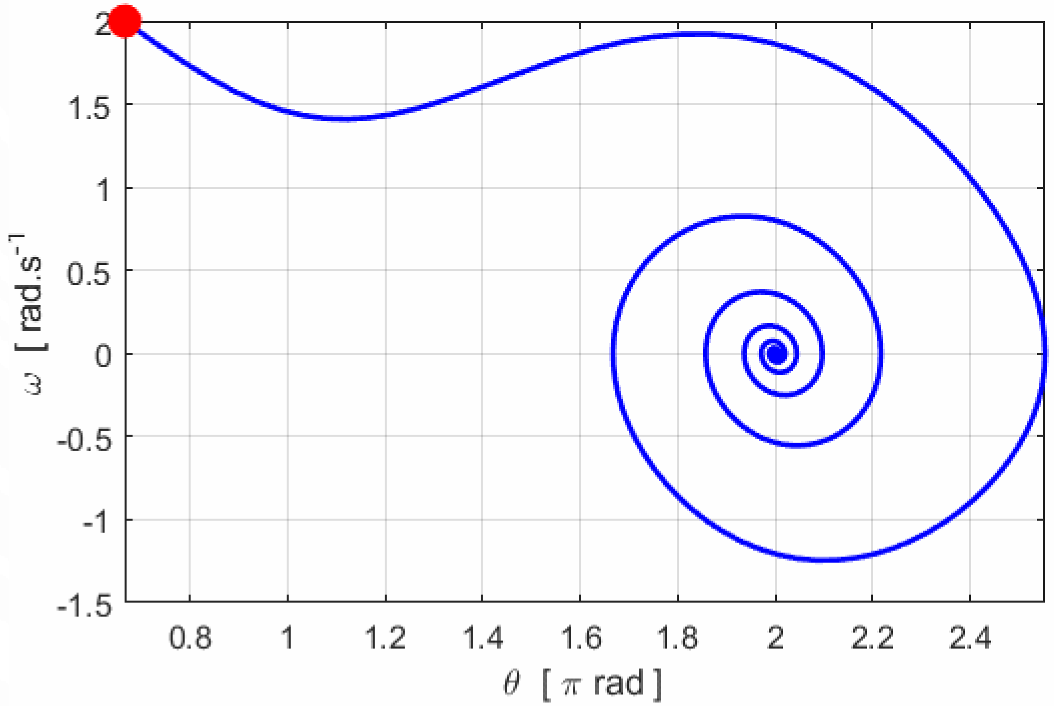


Espacio fásico





Espacio fásico



Trayectoria de un sistema conservativo

Supongamos un sistema conservativo en una sola dimensión:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + U(x) = \ \mathrm{cte} = E_0,$$

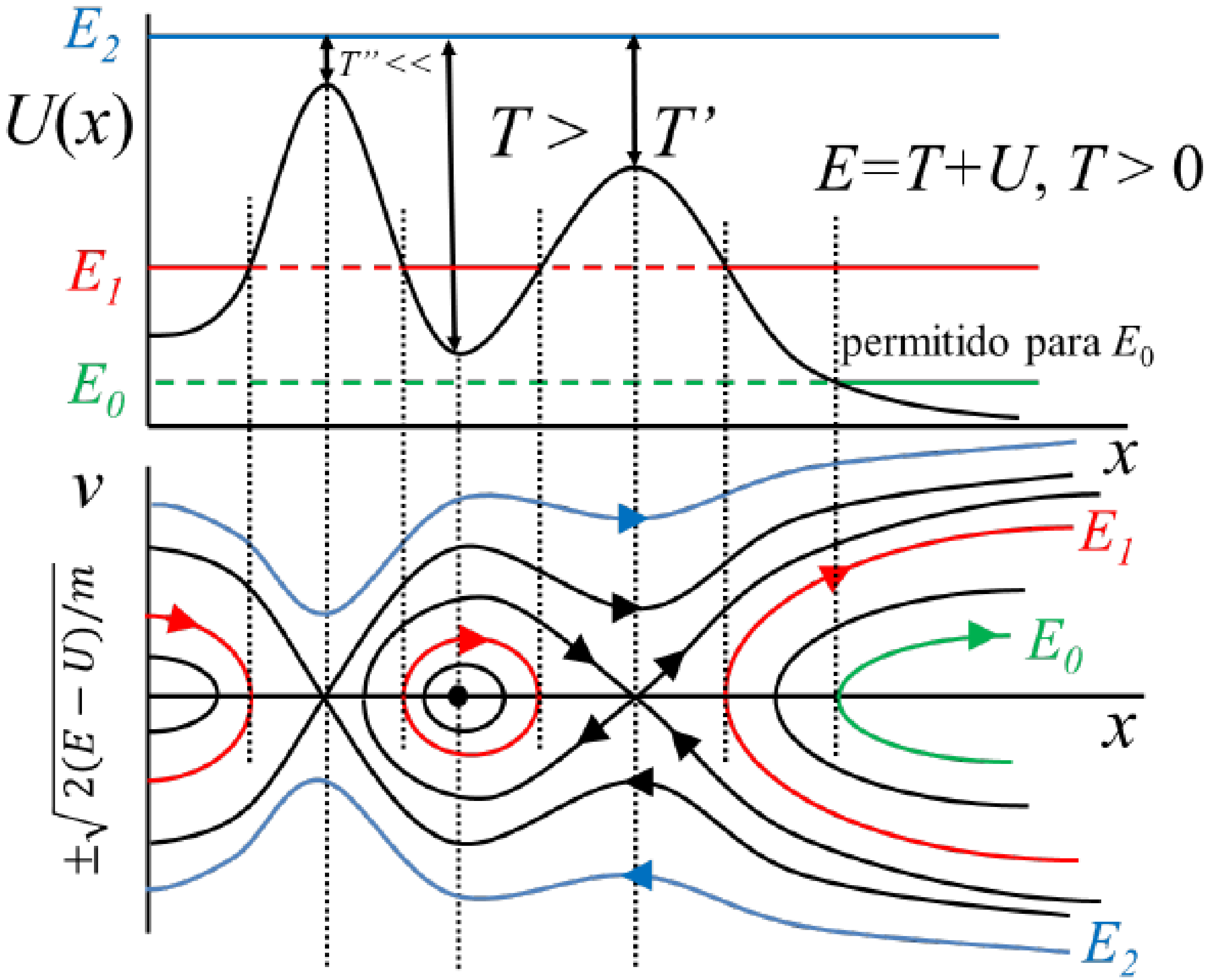
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))},$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}}$$

Se obtiene t = f(x). Si se conociera U(x) podría despejarse x = f(t)

Conociendo U(x) se podría tener información de la trayectoria aún sin poder resolver la integral, a través de un Espacio de fases.

Trayectoria de un sistema conservativo



Potencial y Espacio fásico de un sistema conservativo unidimensional