MECÁNICA RACIONAL

INGENIERÍA MECÁNICA

Trabajo Práctico N° 8 — Cuerpos rígidos

1. Hallar los momentos de inercia para los siguientes sistemas de partículas.
   a) molécula de dos átomos de masas **m1 m2** separados por una distancia **l12**
   b) molécula de tres átomos alineados, masas **m1 m2 m3,** distancias **l12 l23**
   c) molécula de tres átomos formando un triángulo isósceles, masas **m1, m1, m2**

2. Hallar los momentos de inercia para los siguientes sistemas continuos
   a) Barra delgada uniforme de masa **M** y longitud **L**, en el centro de masa
   b) Barra delgada uniforme de masa **M** y longitud **L**, en el borde de la barra
   c) Una esfera de densidad uniforme, masa **M** y radio **R**
   d) Un cilindro circular de radio **R** altura **h** y masa **M**

3. Considere un péndulo formado por una barra delgada uniforme, con su eje de rotación a una distancia **d** del centro de masa. Encuentre la expresión general de la frecuencia para el caso de pequeñas oscilaciones.

4. Hallar el momento de inercia en el eje de rotación para una rueda de tren formada por 8 rayos de 0,5 m y 0,75 kg y un aro de 2,8 kg

5. Encuentre el momento de inercia de una lámina cuadrada de lado **a** y masa **m** en su diagonal

6. Para el caso anterior, encuentre el momento angular desde el origen de la placa cuando está rotando con una velocidad angular ω y calcule su magnitud
   a) en el eje x
   b) en la diagonal desde el origen

7. Encuentre la energía cinética de rotación para el punto anterior

8. Encuentre los momentos de inercia **principales** para un lámina cuadrada desde su esquina.

9. Para el caso anterior, encuentre las direcciones de los ejes principales

Profesor titular: Ing. Castro, María Eugenia
Jefe de Trabajos Prácticos: Ing. Ferrari, Iván
2018

Conceptos útiles sobre cuerpos rígidos (en revisión)

Para un sistema de partículas podemos definir el centro de masa como:

$$x_{cm}=\frac{\sum_i^n x_i . m_i}{\sum_i^n m_i} \qquad y_{cm}=\frac{\sum_i^n y_i . m_i}{\sum_i^n m_i} \qquad z_{cm}=\frac{\sum_i^n z_i . m_i}{\sum_i^n m_i}$$

Si se trata de un cuerpo con determinado volumen y una función de densidad tenemos

$$x_{cm}=\frac{\int_v \rho\, x\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad y_{cm}=\frac{\int_v \rho\, y\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad z_{cm}=\frac{\int_v \rho\, z\, dv}{\int_v \rho\, dv}$$

Si en lugar de un volumen tenemos un cascarón, entonces cambiamos $dv \rightarrow ds$.
Para el caso de un alambre delgado cambiamos $dv \rightarrow dl$

El momento de inercia con respecto a un eje se puede definir según:

$$I=\int_\Omega r^2 dm$$

Según el caso el diferencial de masa se puede expresar en función de la densidad ρ :

$$dm=\rho_{lineal} . dl \qquad dm=\rho_{superficial} . ds \qquad dm=\rho_{volumétrica} . dv$$

Si tenemos un eje que pasa por **A** y es paralelo al centro de masa **cm**, el momento de inercia será:

$$I_{ZZ/A}=I_{ZZ/cm}+M . r_{Acm}^2$$

Dónde r_{Acm} es la distancia entre **A** y **cm**.

El tensor de inercia es una propiedad del cuerpo y representa la distribución de masas alrededor del centro de masas y se define como:

$$I=\begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum m\,x\,y & -\sum m\,x\,z \\ -\sum m\,y\,x & \sum m(x^2+z^2) & -\sum m\,y\,z \\ -\sum m\,z\,x & -\sum m\,z\,y & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Si al rotar el cuerpo sobre un eje no se producen torques fuera del eje, se dice que es un eje principal
Para todo cuerpo rígido existe un sistema de referencia que puedo poner sobre él de modo tal que la matriz de inercia sea diagonal, es decir esté formada solo por los componentes de los ejes principales. Un eje paralelo a un eje principal, también es un eje principal

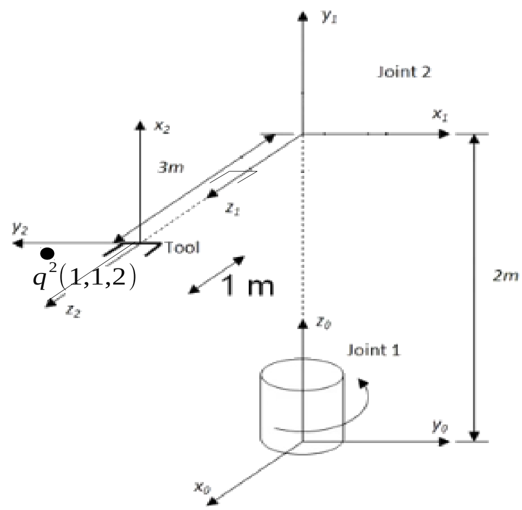
Para una velocidad angular ω y un tensor de inercia I , tenemos
Momento angular: $L=I . \omega$
La energía cinética de rotación : $T_{rot}=\frac{\omega}{2} . L=\frac{1}{2} . \omega_{transpuesta} . I . \omega$

Energía cinética $T=T_{rot}+T_{translación}=\frac{\omega}{2} . L+\frac{v_{cm}}{2} . P$

Transformaciones de sistemas de referencia
Aplicación en Mecatrónica

1. Un brazo robótico tiene dos articulaciones y dos uniones como se ve en el diagrama. Cada una de las uniones y la punta de la herramienta tienen un sistema de referencia asociados a ellos, cuyos orígenes y ejes se ven en la figura.

   - En la unión 1 tenemos una articulación giratoria
   - En la unión 2 tenemos una articulación prismática



   a) Encuentre las transformaciones que realizan los marcos de referencia 1 y 2 desde la base del marco 0
   b) Relacione el punto $q^2(1,1,2)$ en el sistema de referencia 0

2. Considere un brazo formado por un servomotor unido a una plancha de 300 mm que en la punta tiene otro servo unido a una planchuela de 200 mm que soporta la punta de la herramienta. El conjunto está limitado a rotar en el eje z por lo que el desplazamiento de la herramienta se realiza en el plano x,y
   a) Encuentre las ecuaciones de cinemática inversa para conocer los ángulos de las articulaciones $(\theta_{1,}\theta_2)$ para una determinada posición de la punta de la herramienta definida por (x,y)
   b) Encuentre el total de grados recorridos por cada articulación para llegar desde (300,200) hasta (0,500)

3. Para el brazo de la figura donde tenemos una articulación giratoria y una telescópica.
   a) Determine las ecuaciones de posición
   b) calcule el Jacobiano de velocidad, el de velocidad angular y el Jacobiano completo
   c) Suponga que la el brazo apunta el la dirección x con la articulación 2 extendida a 0,5 m. La articulación 1 rota a 2 rad/s y la articulación 2 se extiende a 1 m/s. Encuentre la velocidad en la punta de la herramienta
   d) Sabiendo que la punta de la herramienta tiene una velocidad en x de 1 m/s e igual velocidad en y, use la inversa del Jacobiano para encontrar las velocidades de las articulaciones.

Fórmulas y conceptos útiles (en revisión)

Matrices de Rotación

$$rot_x(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\quad rot_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\quad rot_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

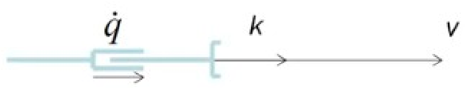
Si para pasa de un sistema de referencia **0** a **1**, se realiza primero una rotación θ_1 en el eje **x** y luego una rotación θ_2 en el eje **z**. Entonces la matriz que define la transformación de rotación es:
$R=rot_x(\theta_1).rot_z(\theta_2)$

Si además se produce un desplazamiento del sistema referencia definido por el vector $d=\begin{pmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\end{pmatrix}$,

tenemos que la transformación homogénea que relaciones el marco **0** y **1** es:
$H_1^0=\begin{bmatrix}R & d\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ Matriz de transformación

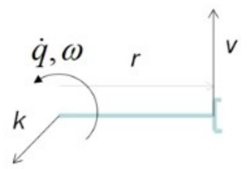
Tipos de unión

Prismática o translacional



$v=\dot{q}.\hat{k}$ $\quad\omega=0$

Giratoria o de revolución



$v=\dot{q}.\hat{k}\,x\,r$ $\quad\omega=\dot{q}.\hat{k}$

Para relacionar la velocidad de la punta de la herramienta con la velocidad de las articulaciones podemos utilizar el Jacobiano de velocidad (lineal):

$$v=J_v.q\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j_{11} & j_{12}\\ j_{21} & j_{22}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2}\\ \frac{\partial y}{\partial q_q} & \frac{\partial y}{\partial q_2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

Para el Jacobiano de velocidad angular en principio definimos

$$\omega=j_\omega.\dot{q}\Leftrightarrow\omega=\begin{bmatrix}j_1 & j_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

Si la articulación **i** es giratoria $\Rightarrow j_i=1$

Si la articulación **i** es tranlacional $\Rightarrow j_i=0$

Básicamente este jacobiano nos indica para cada articulación, si afecta o no a la velocidad angular.

Para obtener la descripción completa de la velocidad lineal y angular tenemos, el Jacobiano completo:

$$\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j_v\\ j_\omega\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=J_{(q)}.\dot{q}\qquad\Rightarrow\qquad\dot{q}=J_{(q)}^{-1}.\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$$