Trabajo Práctico N° 5 **Cálculo de Variaciones**

Métodos Variacionales

Propiedades del operador variacional

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$$
$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2$$
$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{(\delta F_1 F_2 - F_1 \delta F_2)}{F_2^2}$$
$$\delta(F_1)^n = n(F_1)^{n-1} \delta F_1$$

Para $G = G(u, v, w)$ tenemos $\delta G = \delta_u G + \delta_v G + \delta_w G$ variaciones parciales

Conmutatividad: $\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta u)$ $\delta\left(\int_\Omega u\, d\Omega\right) = \int_\Omega \delta u\, d\Omega$

Un Funcional es un escalar obtenido por operaciones de una función, es decir un escalar $I(u)$ obtenido por un operador $I(\cdot)$

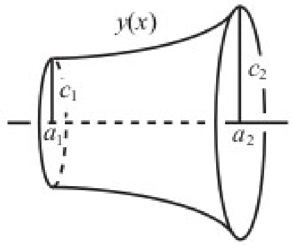
1) Para un funcional $I(u) = \int_a^b F(x, u, u')\,dx$ dónde $u = u(x)$ su primer variación está dada por $\delta I(u) = \delta \int_a^b F(x, u, u')\,dx = \int_a^b \delta F\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\right)dx$ Utilice las propiedades del operador variacional para deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange.
Explique en qué casos son válidas estas ecuaciones.

2) Demuestre que para un funcional del tipo $I(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ la función $y(x)$ que encuentra su extremo (o ensilladura) satisface la ecuación $1 + y'^2 = B.f(x)^2$

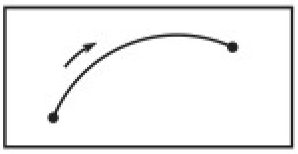
3) Encuentre la expresión de la trayectoria del tipo $y=f(x)$ que minimiza la distancia entre dos puntos de un plano definidos por $(x_{1,}y_1)$ $(x_{2,}y_2)$. Tip: longitud de un arco $l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$

4) Encuentre la expresión de $y(x)$ que minimiza el área de revolución uniendo dos aros de radio c_1 y c_2 como se observa en la figura.

Ayuda : $\int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}dy=\cosh^{-1}y+d$



5) Suponga que la velocidad de la luz en un material es proporcional a la altura desde la base del material. Muestre que en ese calo la luz se mueve en trayectorias circulares. Recuerde que la luz sigue la trayectoria que minimiza el tiempo de recorrido entre dos puntos (principio de Fermat)



6) Braquistócrona. Una partícula se desliza por acción de la gravedad sobre una pista. Demuestre que la forma de la pista que minimiza el tiempo de descenso está dada por un ciloide con ecuaciones $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1-\cos\theta)$

Ayuda $\sin^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$