

Trabajo Práctico N° 2

Grados de libertad

Se define como el número de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento en un sistema.

Para el caso de una partícula en el espacio tenemos:

- Grados de libertad=3
- Coordenadas: translación con x, y, z .

Para el caso de un cuerpo en el espacio tenemos:

- Grados de libertad= 6
- Coordenadas:
 - Translación, definida con: x, y, z
 - Rotación, definida con: $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

De forma simplificada, el número de grados de libertad se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$GL = 6 * n_{\text{cuerpos rígidos}} + 3 * n_{\text{partículas}} - C_{\text{restricciones}}$$

Analicemos el caso de un cuerpo que se mueve en el plano. Por ejemplo, considere un disco de *hokey* que se mueve pegado a una pista de hielo, tenemos movimiento de translación en el plano y rotación.

- restricciones: $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ $\theta_x = \dot{\theta}_x = \ddot{\theta}_x = 0$, $\theta_y = \dot{\theta}_y = \ddot{\theta}_y = 0$
- grados de libertad: $GL = 6 * 1 - 3 * 0 - 3 = 3$
- coordenadas: $q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = \theta$

1. Determine restricciones, grados de libertad y el sistema de coordenadas que considere más conveniente para cada uno de los siguientes casos

- Ladrillo que se desliza sobre un plano inclinado.
- Disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado.
- Disco que rueda, pudiendo deslizar, sobre un plano inclinado.
- Péndulo simple plano, cuerda inextensible.
- Péndulo doble plano, cuerda inextensible
- Péndulo simple plano, cuerda elástica
- Péndulo doble plano, cuerda elástica
- Máquina de Atwood
- Máquina de Atwood compuesta (ejercicio 6)
- Un bloque B está suspendido de una cuerda (se mueve como un péndulo) unida a un carrito A, el cual puede rodar libremente sobre una pista horizontal y sin fricción.
- El diagrama del ejercicio 10

Repaso del método de Lagrange

Se define la función del Lagrangiano:

$$L = T - U \quad (1)$$

donde T es la energía cinética del sistema y U es su energía potencial

Además, se ha demostrado que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (2)$$

j = grados de libertad

Q_j = fuerzas generalizadas, no conservativas

q_j = coordenadas generalizadas

Algunas propiedades de las coordenadas generalizadas:

- No son necesariamente cartesianas.
- No necesariamente pertenecen a un sistema inercial.
- Deben ser independientes: si fijo todas las coordenadas excepto una, aún tengo rango de movimiento en el sistema.
- Deben estar completas: capaz de localizar cada partícula del sistema a cada momento
- Deben pertenecer a un sistema holonómico: el número de grados de libertad es igual al número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento.

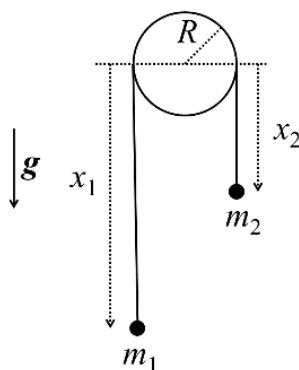
Procedimiento propuesto:

- Determinar grados de libertad y elegir coordenadas generalizadas q_j .
- Verificar que las coordenadas sean completas independientes y holonómicas.
- Calcular T y V para cada cuerpo del sistema
- Calcular la expresión (2) para cada q_j

2. Considere un péndulo de longitud l y masa m , utilice las ecuaciones de Lagrange para demostrar que $\theta(t) = A \cdot \cos(t\sqrt{g/l})$, cuando θ es pequeño.

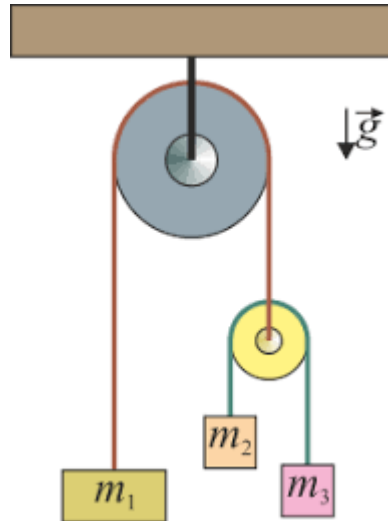
3. Considere un bloque unido a un resorte de constante k que se desliza sin fricción sobre el eje x . Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener las expresiones del movimiento armónico simple.

4. Considere una máquina de Atwood, donde $m_1 > m_2$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener la aceleración del sistema. Desprecie la masa de la polea.

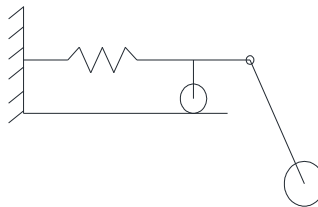


5. Considere una máquina de Atwood, donde $m_1 > m_2$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener la aceleración del sistema. La polea tiene una masa M y un radio R . Momento de inercia $I = \frac{1}{2} * M.R^2$

6. Considere una máquina de Atwood compuesta donde las masas de las poleas son despreciables, $m_1 < m_2 + m_3$, y $m_3 > m_2$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener las expresiones de aceleración del sistema.



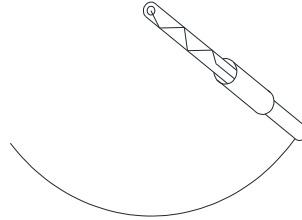
7. Péndulo con eje de rotación oscilante. La masa del péndulo es m , su centro de rotación está unido a un soporte que se desliza por acción de un resorte de constante k . Tanto el resorte como el soporte deslizante se consideran de masa despreciable. Obtenga las expresiones de Lagrange para el sistema



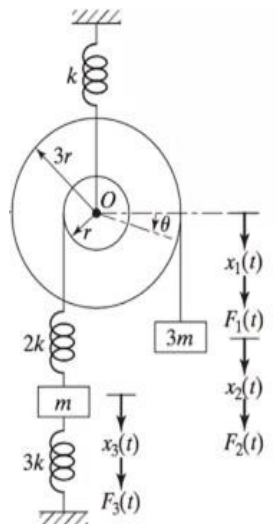
8. Un resorte de masa despreciable y constante k está unido a un disco de masa M y radio R que rueda sin deslizar como se ve en la figura. Obtenga las expresiones de Lagrange para el sistema



9. Considere un péndulo compuesto de una barra de masa M_1 , longitud L_1 y momento de inercia I_{z1} . Esta barra está cubierta parcialmente por un resorte de masa despreciable y con constante k cuya longitud en reposo es L_0 . Adherido al final del resorte hay un cilindro de masa M_2 , longitud L_2 y momento de inercia I_{z2} que se desliza sobre la barra. Desarrolle las ecuaciones de Lagrange del sistema



10. Utilice las ecuaciones de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento y las matrices de rigidez y masa del sistema. La masa de la polea es M y su momento de inercia es I . Ignore la gravedad.



11. En la figura todos los cuerpos tienen masa despreciable en comparación con la partícula m . Utilice las ecuaciones de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimientos de la misma.

