



# MECÁNICA LAGRANGIANA

## PARTE 2

MECÁNICA RACIONAL – 2019

# *Principio de Hamilton y Cálculo de variaciones*

**Principio de Hamilton (1830):** Deduce las ecuaciones de Lagrange

Punto  $q(t_1)$ : estado de un sistema a tiempo  $t_1$  del espacio de configuraciones

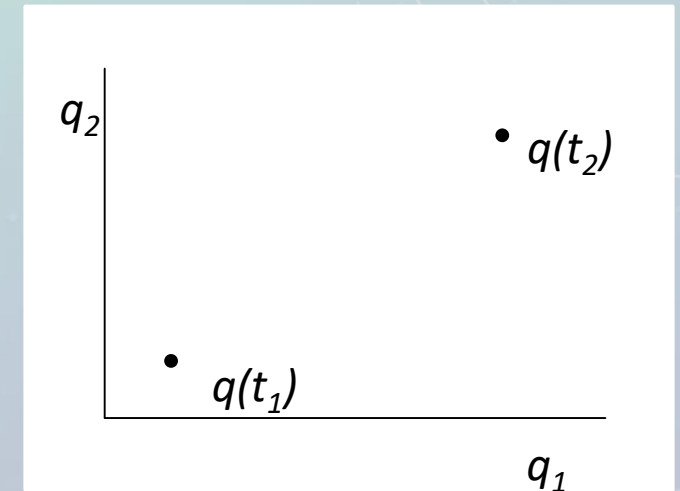
Punto  $q(t_2)$ : ídem a tiempo  $t_2$ .

Al avanzar el tiempo la configuración del sistema cambia: las partículas se mueven, los cuerpos rotan, etc. Cada punto representa *la configuración entera* del sistema.

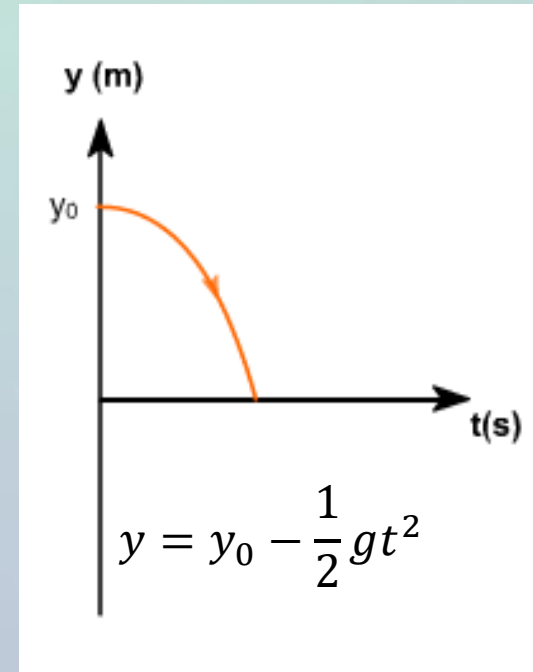
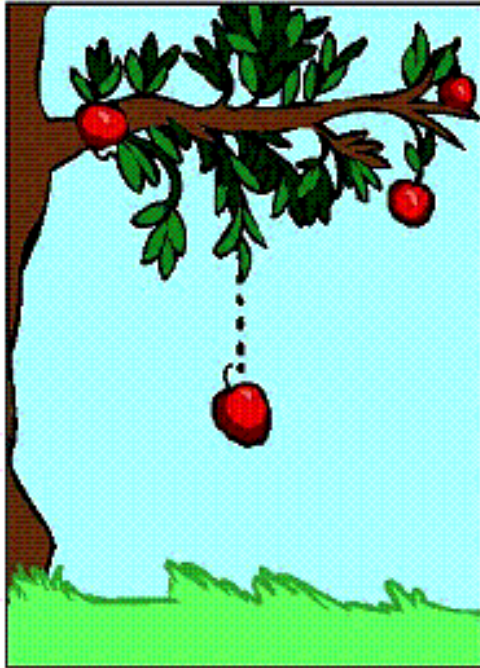
De manera que el **estado** del sistema sigue una trayectoria  $q(t)$  en ese espacio.

***Esta trayectoria no necesariamente tiene una conexión obvia con las trayectorias de las partículas en el espacio físico***

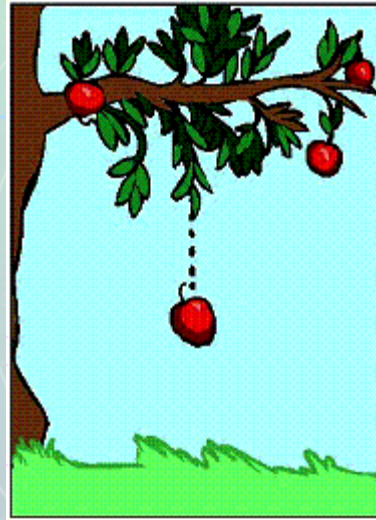
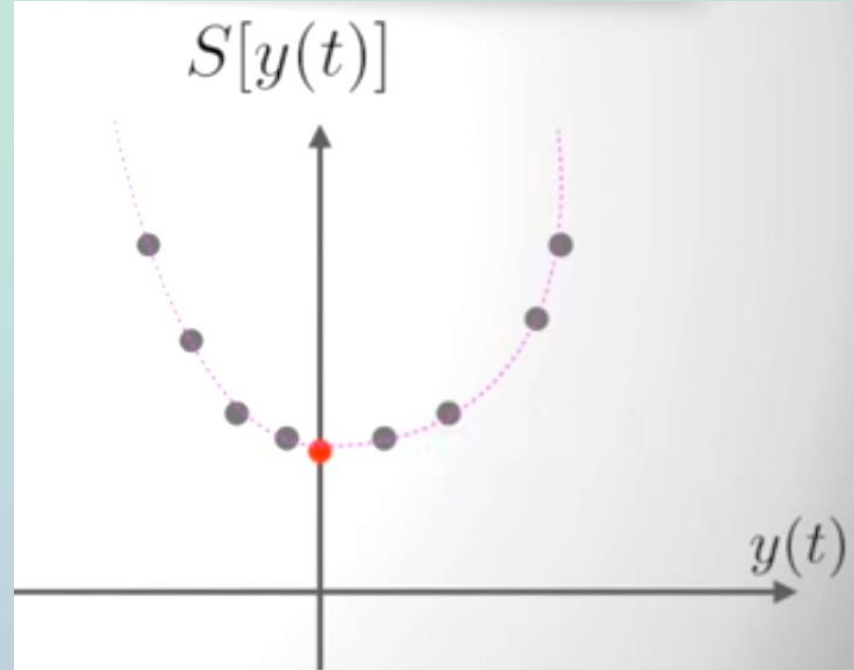
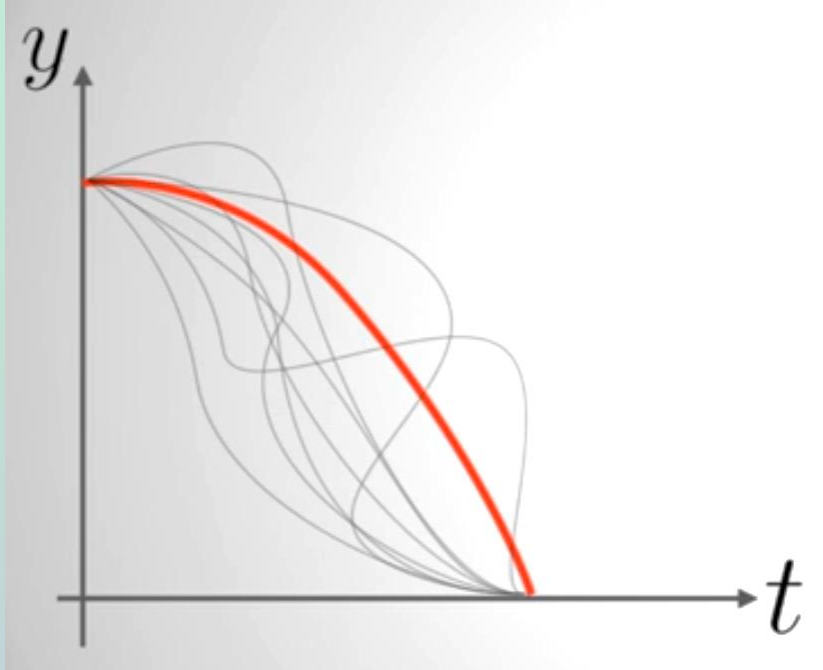
***Espacio de configuraciones***



## ***Principio Variacional de Hamilton o Principio de Mínima Acción:***



## *Principio Variacional de Hamilton o Principio de Mínima Acción:*

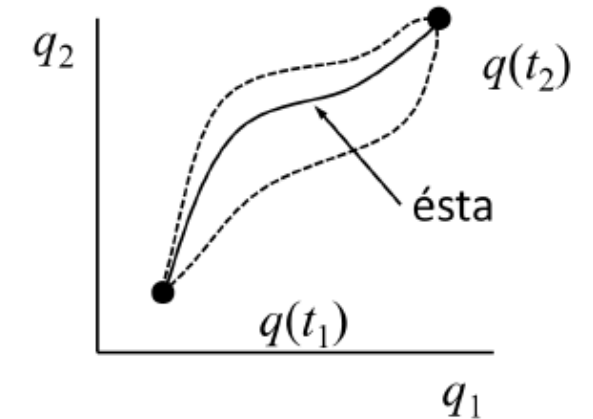


*“La trayectoria que satisface las ecuaciones de movimiento minimizan una cierta cantidad  $S$  llamada **ACCIÓN**”*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$



**MINIMO**



## **Principio Variacional de Hamilton o Principio de Mínima Acción:**

Hamilton demostró que, si todas las fuerzas (excepto las de vínculo) son **derivables de potenciales** (que dependan de la posición, de las velocidades y del tiempo), entonces:

La evolución del sistema entre  $t_1$  y  $t_2$  es tal que la integral

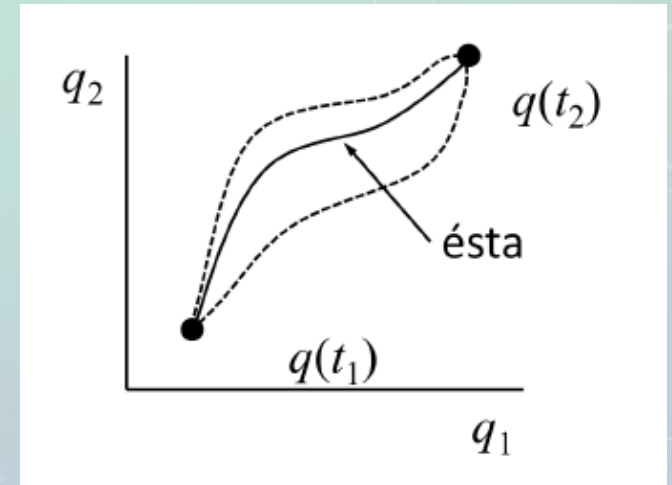
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

tiene

un valor mínimo sobre la trayectoria real del sistema, con respecto a variaciones de trayectoria.

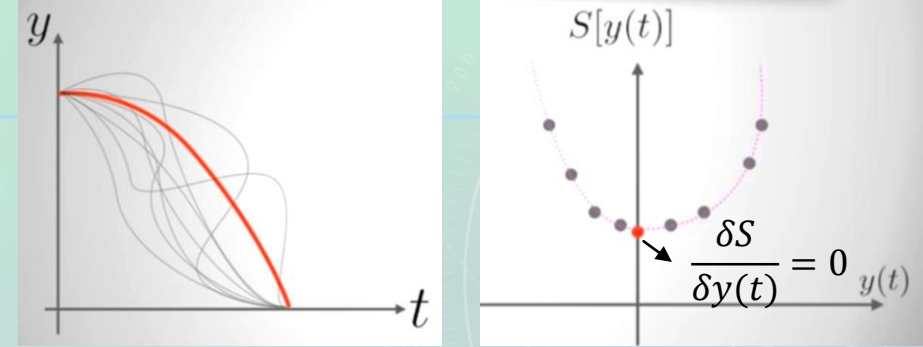
De todas las posibles trayectorias que conectan  $q(t_1)$  con  $q(t_2)$ , la integral  $S$  (llamada *acción*) evaluada sobre la trayectoria que realmente sigue el sistema tiene el **menor valor**.

Si los vínculos son **holónomos**, el Principio de Hamilton es necesario y suficiente para que valgan las ecuaciones de Lagrange.



$\mathcal{L}$  está construido con  $T$  y  $U$ , que son escalares. Así que  $\mathcal{L}$  también es escalar, y  $S$  también. Por esto, no dependen del sistema de coordenadas, a diferencia de los vectores que aparecen en la Segunda Ley de Newton. Así que las ecuaciones de movimiento tendrán la misma forma lagrangiana sin importar cómo se elijan las coordenadas generalizadas.

# Cálculo de variaciones

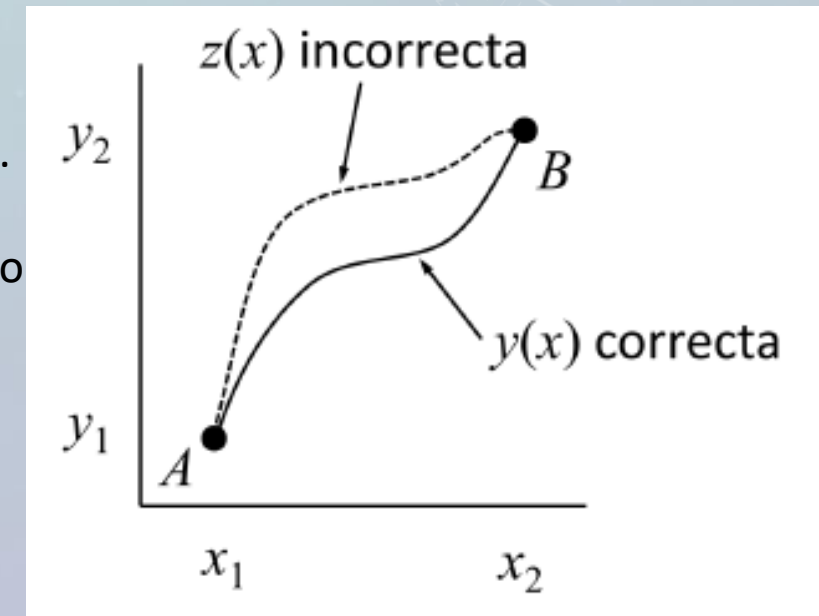


Se busca encontrar el mínimo, o el máximo, de una cantidad que podemos expresar como una integral (por ej, el camino más corto entre dos puntos). En general:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

donde  $y(x)$  es una curva desconocida, que conecta los puntos  $A = (x_1; y_1)$  y  $B = (x_2; y_2)$ . De entre todas las curvas  $A-B$  se debe encontrar la que hace que  $S$  sea mínima (o máxima, o al menos extrema). La idea es similar a encontrar el mínimo o el máximo de una función  $f(x)$ . ( $\frac{df}{dx} = 0$ , y hay tres casos, según sea  $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$ . Cuando se satisface  $\frac{df}{dx} = 0$  y no se conoce nada de la segunda derivada, se dice que  $f$  es extrema).

Este método deja a  $S$  extrema.



# Cálculo de variaciones

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

$y = y(x)$  es la solución correcta y  $z(x)$  es cualquier otra trayectoria que pasa por  $A$  y  $B$ , la “variación”:

$$z(x) = y(x) + \delta y.$$

Se sabe que  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  porque  $y(x)$  y  $z(x)$  coinciden en  $A$  y  $B$ .

¿Cómo cambia  $f$  ante la variación dada por  $\delta y$ ?

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'.$$

Regla de la cadena

Qué es  $\delta y'$ ?

$$\delta y' = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \delta y.$$

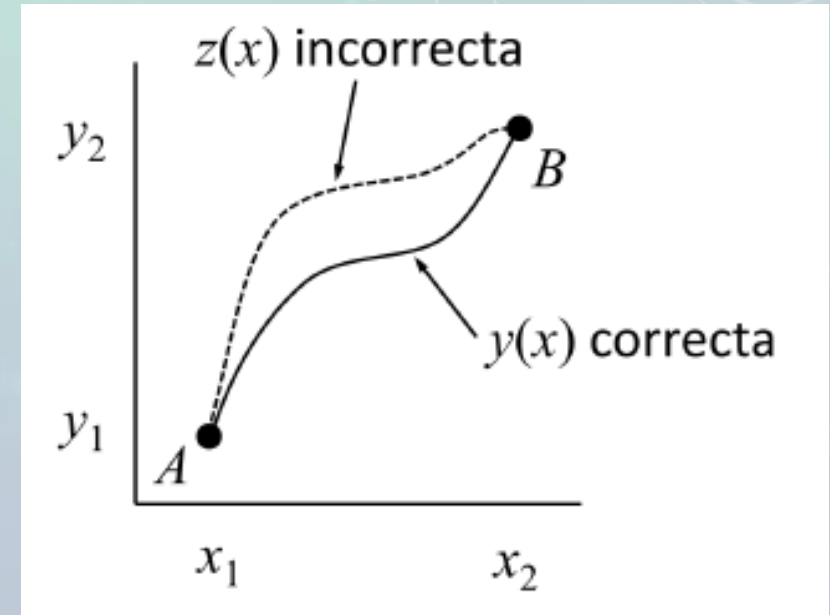
Entonces:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

Analizando el segundo término:



$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \delta y}_{v'} dx$$





## ***Paréntesis matemático***

Integración por partes:

La regla del producto establece que si  $u(x)$  y  $v(x)$  son funciones diferenciables entonces:

$$\frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x)] = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\Rightarrow \int [u' \cdot v + u \cdot v'] dx = \int u' \cdot v \cdot dx + \int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v$$

$$\Rightarrow \int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$$



# Cálculo de variaciones

$$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}; v = \delta y$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \delta y}_{v'} dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\delta y}_v \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\delta y}_v \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}}_{u'} dx.$$

El primer término de la expresión se anula porque  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx. \end{aligned}$$

Para que  $S$  tenga un extremo,  $S$  debe anularse para variaciones  $\delta y$  *arbitrarias*, lo cual es posible solamente si el paréntesis del integrando es nulo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$



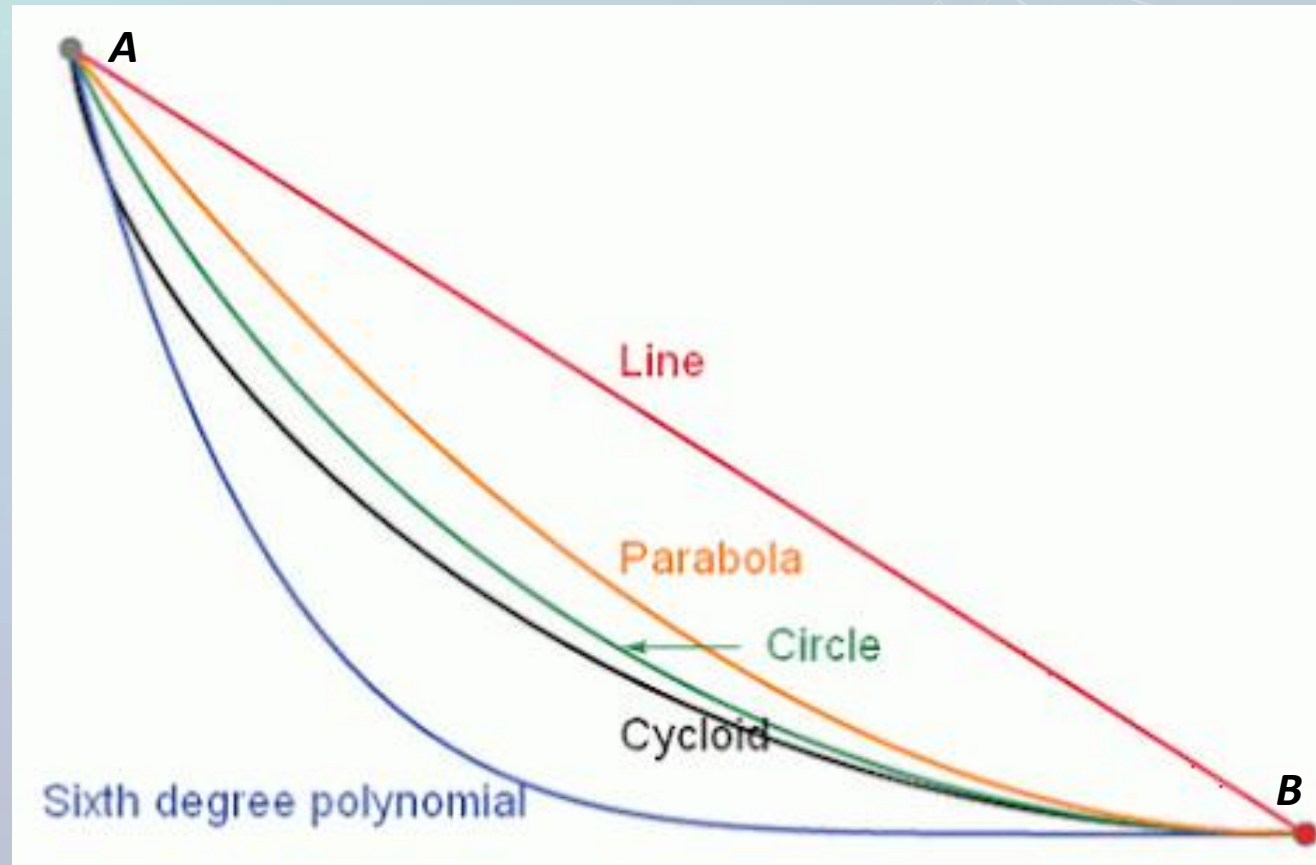
Ecuación de Euler - Lagrange

# ***El problema de la Braquistócrona***

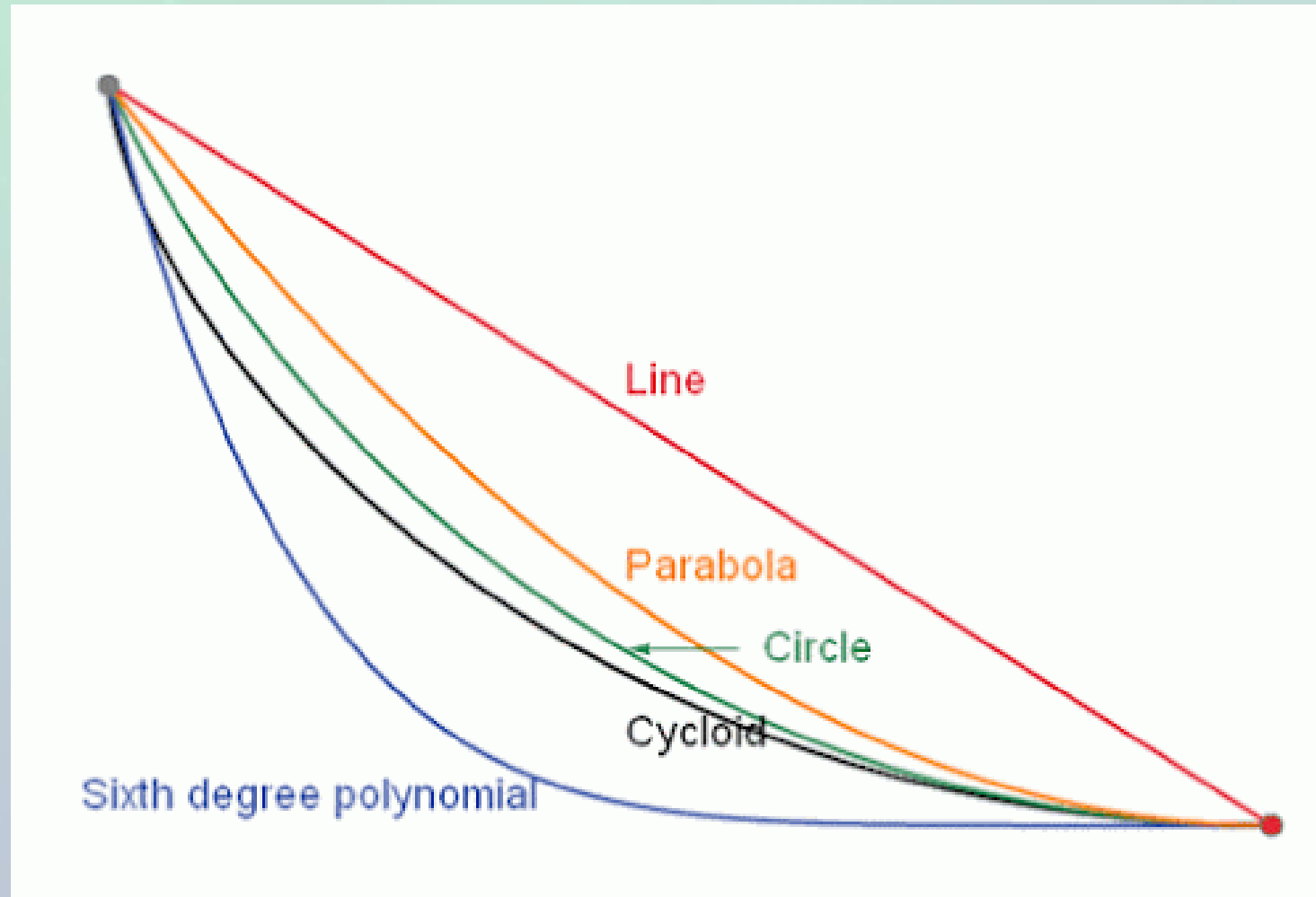
Es un problema muy conocido. A través de él, Bernoulli sentó los fundamentos del cálculo variacional

Dados dos puntos en un plano vertical,  $A$  y  $B$ , ¿cuál es la forma de la trayectoria que debe seguir una partícula para llegar de  $A$  a  $B$ , por acción de la gravedad, en el menor tiempo posible?

*Braquistócrona*, del griego, significa “mínimo tiempo”.



# ***El problema de la Braquistócrona***

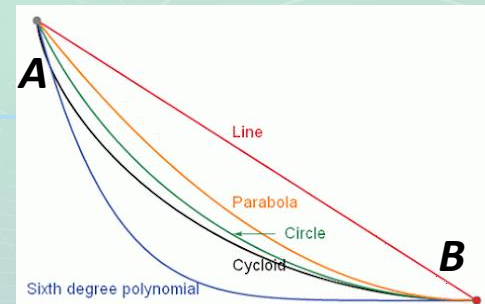


# El problema de la Braquistócrona

El tiempo de viaje de  $A$  a  $B$  es:

$$t(A \rightarrow B) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

con  $ds$  a lo largo de la trayectoria.



La energía es

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgx_A = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx,$$

por tanto:

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Además,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + y'(x)^2 dx^2} = \sqrt{y'(x)^2 + 1} dx,$$

dado que

$$y'(x) = dy/dx.$$

El tiempo será:

$$t(A \rightarrow B) = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}} dx.$$

Se tiene un problema variacional. El integrando está dado por:

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}}.$$

Para encontrar la trayectoria se debe aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a esta función  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

## ***El problema de la Braquistócrona***

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ porque } f \text{ es independiente de } y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}} = \text{constante}.$$

Es una ecuación diferencial ordinaria compleja que puede simplificarse elevándola al cuadrado:

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{2a}{x} = \frac{1+y'^2}{y'^2} = \frac{1}{y'^2} + 1 \Rightarrow \frac{2a}{x} - 1 = \frac{2a-x}{x} = \frac{1}{y'^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}},$$

Se puede escribir como integral:

$$\int dy = y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$$

Esta ecuación puede resolverse realizando el siguiente cambio de variable:

$$x = a(1 - \cos \theta) \Rightarrow dx = a \sin \theta d\theta,$$

## ***El problema de la Braquistócrona***

$$\int dy = y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$$

$$x = a(1 - \cos \theta) \Rightarrow dx = a \sin \theta d\theta,$$

$$y = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{2a - a + a \cos \theta}} a \sin \theta d\theta = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a + a \cos \theta}} a \sin \theta d\theta$$

$$= a \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta = a \int \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} d\theta$$

$$= a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta}} d\theta = a \int \sqrt{(1 - \cos \theta)^2} d\theta = a \int (1 - \cos \theta) d\theta$$

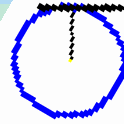
$$\Rightarrow y = a(\theta - \sin \theta) + c.$$

# El problema de la Braquistócrona

Son ecuaciones paramétricas de la curva buscada, dando  $x$  e  $y$  en función de  $\theta$ .

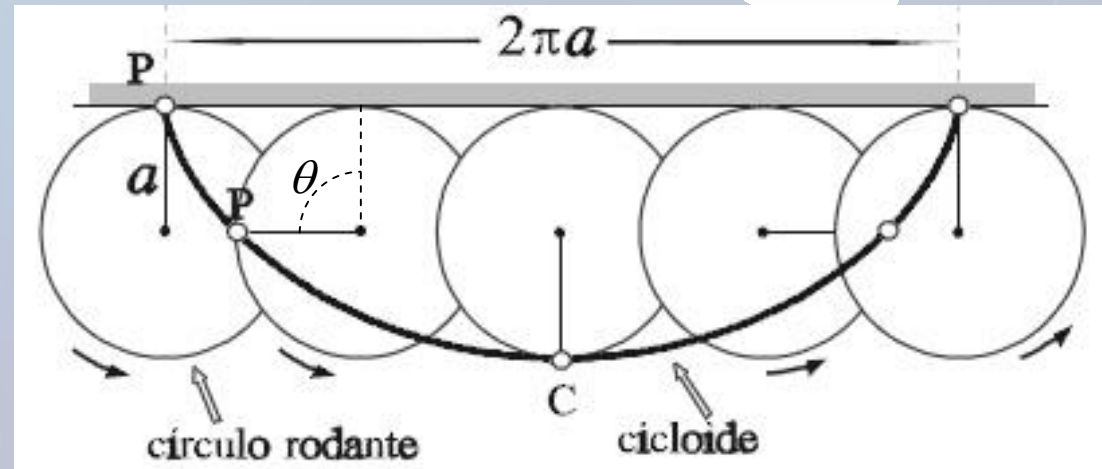
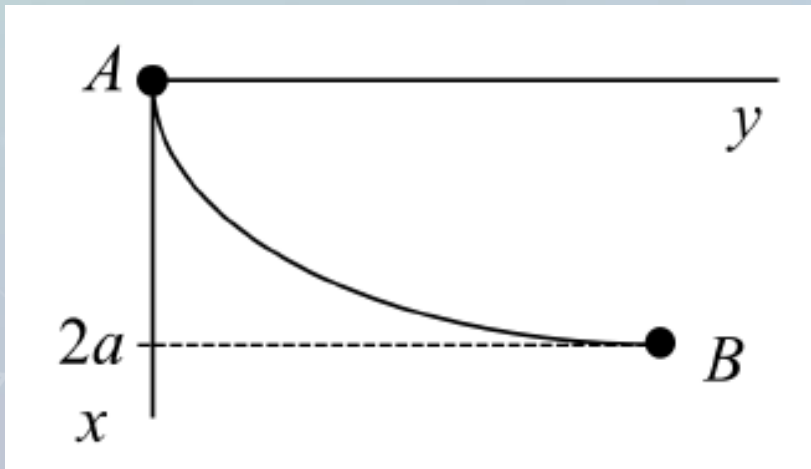
Esta curva es una cicloide (la curva que describe un punto fijo a un círculo de radio  $a$  cuando “rueda sin deslizar” por la parte de abajo del eje horizontal).

Hay que elegir las constantes de integración  $a$  y  $c$  adecuadamente para que la curva pase por los puntos  $A$  y  $B$ :  $c = 0$  y  $2a$  es la diferencia de altura



$$x = a(1 - \cos \theta),$$

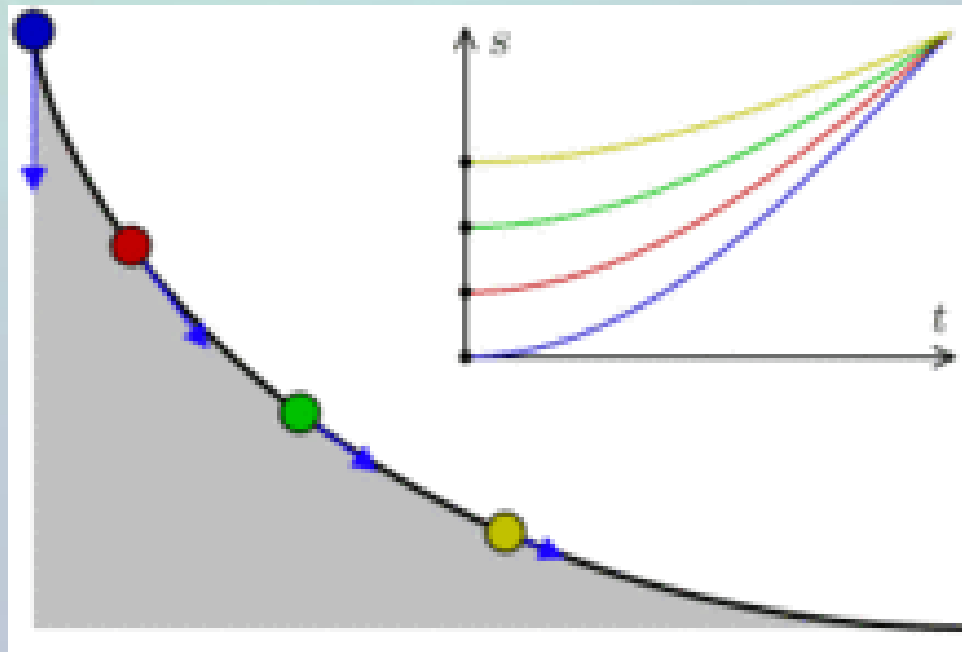
$$y = a(\theta - \sin \theta) + c.$$





# ***El problema de la Braquistócrona***

Esta curva tiene otra propiedad, tal vez aún más notable que la de ser la de mínimo tiempo de recorrido: es *isócrona*, vale decir que la partícula tarda *el mismo tiempo* en llegar al punto *B*, sin importar desde dónde la dejemos caer entre *A* y *B*.



## ***Caso de las fuerzas no conservativas***

Fuerzas conservativas: procedentes de un potencial  $Q_i^U = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ , siendo  $Q_i^U$  la fuerza generalizada según la coordenada generalizada  $q_i$ .

Fuerzas no conservativas: fuerzas que no procedan de un potencial  $Q_i^N$

Fuerza total aplicada:  $Q_i = Q_i^U + Q_i^N = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^N$ , considerando  $Q_i$  es una fuerza si  $q_i$  es una posición y es un torque si  $q_i$  es un ángulo.

La ecuación de Lagrange para estos casos:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^N; i = 1, \dots, n$

# Multiplicadores de Lagrange

Mecánica lagrangiana: se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento aún sin conocer las fuerzas de vínculo.

Pero a veces es necesario *conocer* las fuerzas de vínculo. Para estos casos: **Método de los Multiplicadores de Lagrange**

El método apunta a encontrar una forma modificada de las ecuaciones de Lagrange, mediante un método algo distinto al usado, en casos en que las coordenadas están vinculadas.

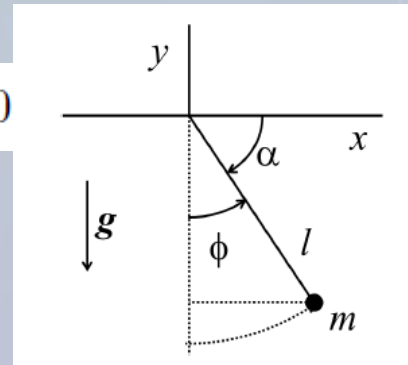
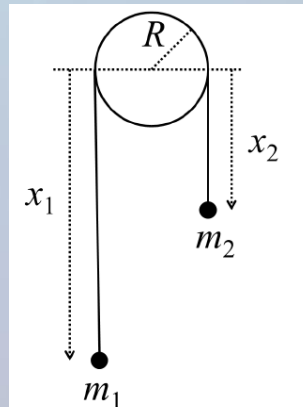
Suponga un sistema con dos coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$ , entre las cuales existe un *vínculo holónomo*:  $f(x, y) = 0$ .

Son ejemplos:

1. Un péndulo plano, con  $x$  e  $y$  sus coordenadas cartesianas. El vínculo es:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0$

2. Una máquina de Atwood donde el vínculo es:

$$f(x, y) = x + y - l = 0.$$



En ambos casos el método permitirá encontrar las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ , y las fuerzas de vínculo  $T$ .

# Multiplicadores de Lagrange

El lagrangiano será  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ .

El Principio de Hamilton plantea la integral de acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt$$

**S** tiene un extremo cuando se evalúa a lo largo de la trayectoria del sistema.

Si nos corremos de esa trayectoria “correcta”:

$$x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t),$$

$$y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t).$$

Este desplazamiento es *compatible con el vínculo*. De esta forma, la acción **S** no cambia:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}}_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}}_B \right) dt \quad (\text{por Regla de la Cadena})$$

donde *A* y *B* pueden integrarse por partes:

y de manera similar el término *B*. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_u \underbrace{\delta \dot{x} dt}_{dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x}_{\substack{0 \text{ pues } \delta x = \\ 0 \text{ en } t_1 \text{ y } t_2}} \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_{du/dt} \underbrace{\delta x}_v dt,$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta y \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dt = 0. \end{aligned}$$

$\forall \delta x, \delta y$  compatibles con el vínculo. **(1)**

# Multiplicadores de Lagrange

Los desplazamientos  $\delta x$  y  $\delta y$  deben satisfacer el vínculo:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (2)$$

La ecuación del vínculo indica que cuando se hace el desplazamiento  $(\delta x, \delta y)$ , el vínculo sigue valiendo, no cambia

La expresión (2) tiene un término en  $\delta x$  y uno en  $\delta y$ . Como vale cero, puede sumarse a la expresión (1) y además, puede

multiplicarse por un factor arbitrario  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right] = 0. \quad (3)$$

(1) + (3):

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dt = 0 \quad (4)$$

Para todo  $\delta x$  y  $\delta y$  compatible con el vínculo.

$\lambda(t)$  es arbitraria  $\Rightarrow$  se elige de modo que anule el primer paréntesis de (4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (5)$$

(5) Es la ec de Lagrange modificada con un término  $\lambda$  adicional. Con este  $\lambda$  para que valga (5), toda la primera integral de (4) se anula. Por lo tanto la *segunda* integral de (4) queda igual a cero, y debe valer  $\forall \delta y$ .

Luego, el coeficiente de  $\delta y$  debe ser nulo, y se obtiene una ecuación de Lagrange modificada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) son dos ecuaciones para *tres* incógnitas:  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $\lambda(t)$ . Se necesita una tercera ecuación para

encontrar las incógnitas. La tercera ecuación es la ecuación de vínculo  $f(x, y) = 0$ .

$\lambda(t)$  es el **multiplicador de Lagrange**. Un artificio matemático para resolver el problema con **coordenadas no independientes**.

# Multiplicadores de Lagrange

¿Cuál es la relación de  $\lambda(t)$  con la fuerza de vínculo?

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - U(x, y)$$

(Para el ejemplo del péndulo,  $m_1 = m_2 = m$ , para la máquina de Atwood son  $m_1$  y  $m_2$ , etc.). Reemplazando  $\mathcal{L}$  en (5):

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0} \quad (5) \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \Rightarrow m_1 \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}.$$

componente x  
de la fuerza total

componente  
x de la fuerza  
(del potencial)

componente x de  
la fuerza de vínculo

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = F_x^{vin}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = F_y^{vin}.$$



# Multiplicadores de Lagrange

**Ejemplo: Máquina de Atwood**

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2,$$

$$U = -m_1gx - m_2gy,$$

$$F_1^g = -\frac{\partial U}{\partial x} = -(-m_1g) = +m_1g$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1gx + m_2gy.$$

Vínculo:

$$f(x, y) = \boxed{x + y = cte} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad (7)$$

De la ec (5):  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \boxed{m_1g + \lambda = m_1\ddot{x}},$

(8)

De la ec (6):  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \Rightarrow \boxed{m_2g + \lambda = m_2\ddot{y}}.$

(9)

Hay que resolver (7), (8) y (9). De (7):  $\ddot{x} = -\ddot{y}.$  y restando (8) - (9):

$$m_1g + \cancel{\lambda} - m_2g - \cancel{\lambda} = m_1\ddot{x} - m_2\ddot{y} \Rightarrow (m_1 - m_2)g = m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} = (m_1 + m_2)\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

De aquí se obtiene  $x(t)$

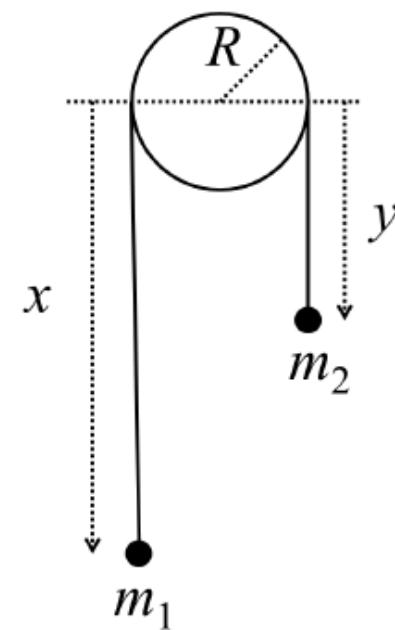
(10) en (8):  $\lambda = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$

(10)

Y la fuerza de vínculo es:

$$\vec{F}_1^{vin} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} = \lambda \hat{x} = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \hat{x}.$$

Coincide con la mecánica newtoniana

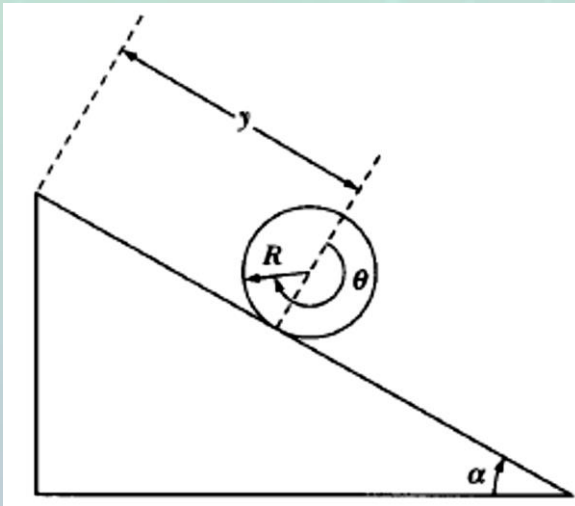




# ***Multiplicadores de Lagrange***

***Otro ejemplo:***

Considere el caso de un disco que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Encuentre las ecuaciones de movimiento, la fuerza de vínculo generalizadas y la aceleración angular.



# ***Multiplicadores de Lagrange***

## ***Expresión general con $m$ vínculos***

Para no perderse en notaciones se ha hecho todo el cálculo con un solo grado de libertad y un vínculo.

La expresión general con  $n$  grados de libertad y  $m$  vínculos holónomos es:

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad j = 1 \dots m,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots n.$$

Y las fuerzas de vínculo son:

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i},$$

(el signo es arbitrario, hay que estudiar cada situación en cada problema para interpretar la física y saber hacia dónde apuntan estas “fuerzas generalizadas”).

# ***Teoremas de Conservación: Teorema de Noether***

***SIMETRIA***



***CANTIDADES  
CONSERVADAS***

***“Para cada simetría del Lagrangiano, hay una cantidad conservada”***

Si las coordenadas  
cambian debido a un  
incremento pequeño,  
 $\mathcal{L}$  se mantiene constante  
en esas cantidades

La cantidad se  
mantiene constante  
en el tiempo

# Teoremas de Conservación

Un sistema de  $n$  grados de libertad  $\longrightarrow$  está descrito por  $n$  ecuaciones de Lagrange.

$\downarrow$   
Para las  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$

Muchas veces una de las ecuaciones puede reemplazarse por una ecuación de *primer orden*, lo cual facilita la integración del problema diferencial.

Estas *primeras integrales* o *integrales de movimiento* no sólo facilitan el trabajo matemático sino que encierran siempre un importante significado físico, al tratarse de **cantidades conservadas**.

$\swarrow$   
momento lineal

$\swarrow$   
momento angular

$\swarrow$   
energía

$\swarrow$   
y algo mas ¿¿??

## Teoremas de Conservación: Coordenadas cíclicas

El caso más sencillo de conservación es el que involucra *coordenadas cíclicas*: coordenadas que **no aparecen** en el lagrangiano de manera explícita:  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(q_k)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad q_k : \text{coordenada cíclica.}$$

En la ecuación de Lagrange correspondiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}^0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{cte}},$$

independiente del tiempo. Ésta es la ecuación de primer orden.

# Teoremas de Conservación: Coordenadas cíclicas

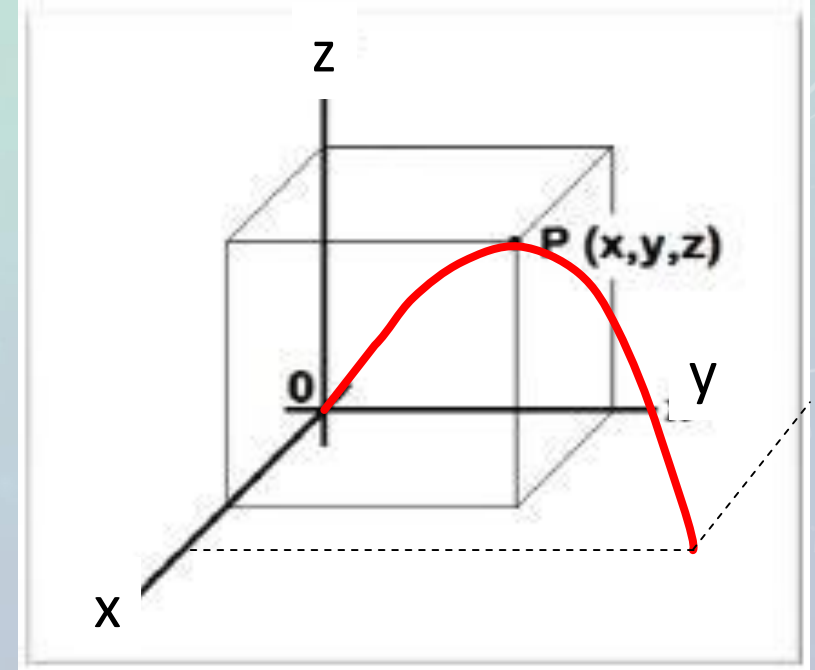
Ejemplo: Un proyectil con gravedad.

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \mathcal{L}(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$x$  e  $y$  son cíclicas. Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{cte} = p_x, \text{ el momento lineal en } x,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{cte} = p_y, \text{ el momento lineal en } y,$$



son las dos ecuaciones de primer orden que se mencionó anteriormente.

Por analogía con el caso cartesiano, la cantidad de movimiento conservado se llama *momento generalizado*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} := p_i,$$

(notar que no tiene necesariamente unidades de momento lineal).

Así que:

Si  $q_i$  es cíclica,  $p_i$  se conserva.

Cuando se eligen coordenadas generalizadas, se debe tratar de forma **que la mayor cantidad posible sean cíclicas**

# Teoremas de Conservación:

## Coordenadas cíclicas

**Otro ejemplo: Un potencial con simetría cilíndrica.** Sea un potencial que depende sólo de la distancia al eje  $z$ . ¿Qué coordenadas conviene usar? Cilíndricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(r), \text{ con } \phi \text{ y } z \text{ cíclicas.}$$

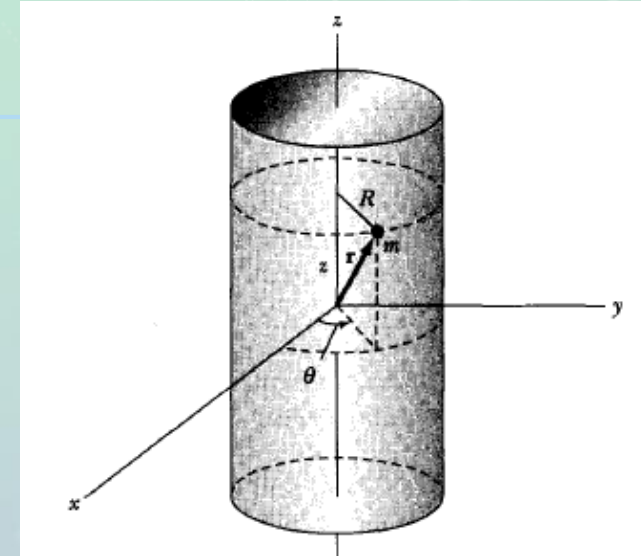
Entonces:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z = \text{cte},$  se conserva el momento lineal a lo largo del eje vertical,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = p_\phi = mr \underbrace{r\dot{\phi}}_{\text{vel. tangencial}} = L_z : \text{ se conserva el momento angular en dirección } z$$

**Simetría:**  $\mathcal{L}$  no cambia (es *invariante*) cuando cambia  $q_k$  manteniendo las demás  $q_i$  fijas

Hay una relación entre **cantidades conservadas** y operaciones de transformación de coordenadas que dejan invariante el Lagrangiano.

Matemáticamente las operaciones que dejan “algo” invariante son las **simetrías**.





# Teorema de Conservación: la Energía y el Hamiltoniano

**Simetría de traslación temporal:** Para un sistema con  $n$  grados de libertad y cuyo lagrangiano es independiente del tiempo (el sistema es invariante ante la traslación temporal), tiene *simetría de traslación temporal*:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}^0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right) \quad (\text{usando las Ec. de Euler-Lagrange})$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (\text{sacando } d/dt \text{ factor común})$$

La derivada total temporal del lagrangiano no da cero, pero da otra derivada temporal. Reordenando, se obtiene una derivada temporal igual a cero:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = 0$$

Se tiene una cantidad conservada asociada a la simetría de traslación temporal. La llamamos  $\mathcal{H}$ , en homenaje a William Rowan Hamilton.

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}}$$

Entonces: si  $\mathcal{L}$  no depende **explícitamente** del tiempo,  $\mathcal{H}$  es una cte de movimiento.

## Teorema de Conservación: $\mathcal{H}$ vs la energía

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Bajo ciertas condiciones, el hamiltoniano es igual a la energía mecánica.

Por un lado, se necesitan **vínculos esclerónomos** (que no dependan ni de las velocidades ni del tiempo. En tal caso la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las  $\dot{q}_i$

Si además el potencial no depende de las velocidades,  $U = U(\mathbf{r}_i) = U(q_i)$ , con  $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ .

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T - U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - U)$$

$$\mathcal{H} = 2T - T + U = \boxed{T + U = E},$$

donde la última línea explota el hecho de que  $T$  es cuadrática homogénea en las velocidades, lo cual permite usar un teorema de Euler sobre funciones homogéneas: Si  $f$  es homogénea de grado  $k$ , entonces  $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$

Sólo en el caso de los vínculos esclerónomos  $\mathcal{H} = E$ .

Nota: si ocurriera que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  y los vínculos son **holónomos** pero dependientes del tiempo,  $\mathcal{H} = cte$ , pero  $\mathcal{H} \neq T + U$ .

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

## Teorema de Conservación: $\mathcal{H}$ vs la energía

En resumen:

- Si las fuerzas (aplicadas y de vínculo) son conservativas (no hay disipación en calor u otra forma de energía), entonces la energía mecánica se conserva.
- Si el sistema es invariante ante traslaciones temporales, el hamiltoniano se conserva.
- Si los vínculos son esclerónomos y el potencial no depende de las velocidades, el hamiltoniano es igual a la energía mecánica.

Las preguntas:

¿es  $\mathcal{H} = E$ ?

¿se conserva  $E$ ?

*son aspectos diferentes del sistema*, que deben ser analizados **por separado**.

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones canónicas del movimiento de Hamilton →

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

# Teorema de Conservación del Momento Lineal

Suponga un **sistema aislado**. Si se trasladan todas las partículas una misma cantidad  $\epsilon$ , no habría manera de darse cuenta. Nada físicamente relevante debería cambiar.

El sistema es invariante ante traslaciones, o que *el espacio es homogéneo*: en todos lados ocurre lo mismo.

La transformación es:  $\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + \vec{\epsilon}$ ;  $\forall i = 1 \dots N$ , con  $\epsilon$  independiente de  $i$ . En particular, la energía potencial no cambia:

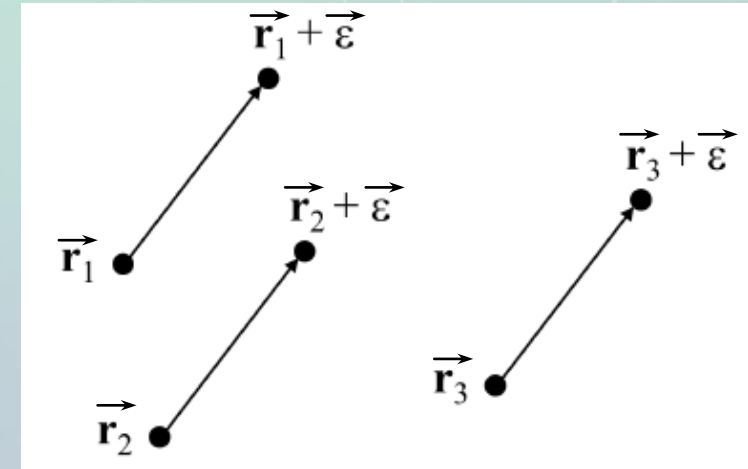
$$U(\vec{r}_1 + \vec{\epsilon}, \vec{r}_2 + \vec{\epsilon}, \dots, \vec{r}_N + \vec{\epsilon}) = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \Rightarrow \delta U = 0.$$

La traslación no afecta las velocidades (derivando la transformación se ve que  $\vec{v}_i \longrightarrow \vec{v}_i$ ), así que la energía cinética tampoco cambia:

$$\delta T = 0. \longrightarrow \delta T = 0, \delta U = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \epsilon.$$

Si  $\vec{\epsilon}$  es un *desplazamiento infinitesimal*  $\Rightarrow$  se puede calcular  $\mathcal{L}$  de manera diferencial. En la dirección  $x$  y desarrollando por Taylor:

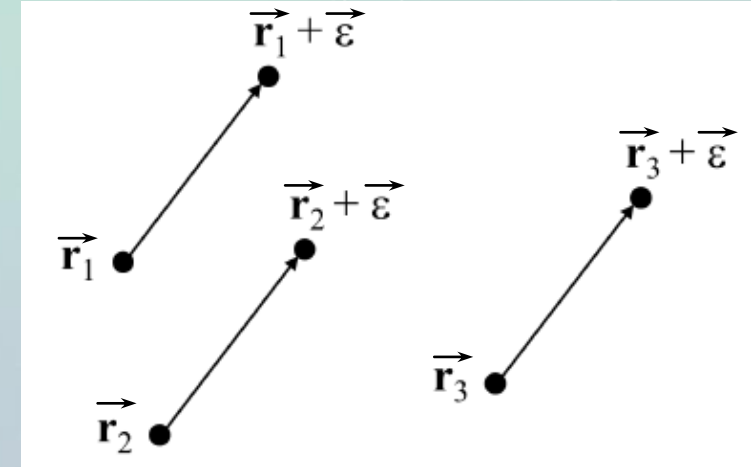
$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \dots + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0.$$



# Teorema de Conservación del Momento Lineal

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \quad \longrightarrow \quad \text{De Lagrange:} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} p_{ix},$$

$$0 = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} p_{ix} = \boxed{\frac{d}{dt} P_x = 0},$$



donde  $P_x$  es la componente en  $x$  de  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$  (el momento lineal total).

Repitiendo el argumento en  $y$  y  $z$ , se concluye que la invariancia del lagrangiano ante traslaciones (la *simetría de traslación del lagrangiano*) produce la conservación del momento lineal total del sistema.

Se planteó un sistema aislado. Pero *lo importante es la invariancia*.

***Si el lagrangiano tiene simetría de traslación, el momento lineal total se conserva.***

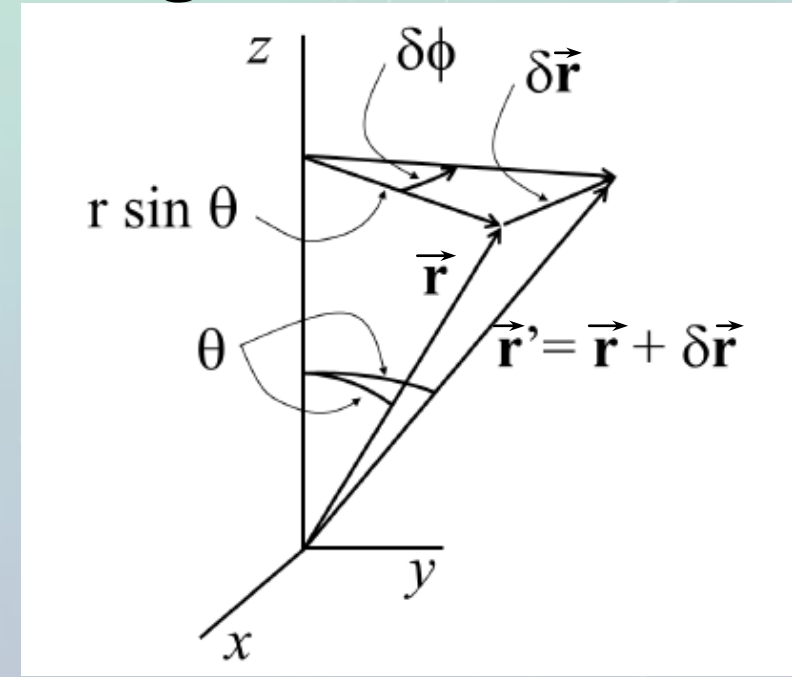
# Teorema de Conservación del Momento Angular

Suponga un sistema aislado.

El espacio es *isótropo*, además de homogéneo. ¿Qué consecuencias tendrá esto? Hay otra operación, otra transformación de coordenadas, que deja invariante el lagrangiano: **rotación**.

Se realiza una rotación de todas las coordenadas alrededor del eje  $z$ , en un ángulo infinitesimal  $\delta\phi$ . Tenemos  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$ .  
¿Cuánto vale  $\delta\vec{r}$ ?

$$\delta r = \delta\phi \underbrace{r \sin \theta}_{\text{dist. al } \hat{z}} \Rightarrow \delta\vec{r} = \underbrace{\delta\vec{\phi}}_{\delta\phi\hat{z}} \times \vec{r}.$$



$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{v}' \neq \vec{v}$ , a diferencia de la traslación  $\Rightarrow \delta\vec{r} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}$  es lo que tenemos que usar en el  $\delta\mathcal{L}$ .

Si el lagrangiano es invariante:

$$0 = \delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i$$

donde el  $\cdot$  indica sumar en las 3 coordenadas (producto escalar). En el primer término se usan las ecuaciones de Euler-Lagrange, y usar las transformaciones recién calculadas:

$$0 = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \dot{\mathbf{r}}_i).$$



# Teorema de Conservación del Momento Angular

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i).$$

Se usa la propiedad del producto mixto:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

para extraer la rotación  $\delta\vec{\phi}$  como factor común

$$0 = \sum_{i=1}^N \delta\vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) + \delta\vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), = \delta\vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \vec{p}_i), \quad (\text{es la derivada de un producto})$$

$$= \delta\vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \quad \forall \delta\vec{\phi} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \boxed{\vec{L} = \text{cte}} : \text{ el momento angular total es constante.}$$

Notar: si el sistema está aislado, esto pasa en cualquier eje. Pero lo importante no es el aislamiento, sino la **invariancia del lagrangiano**.

Si el sistema no está aislado, sino que está en un campo de fuerzas externo, *pero* este campo tiene un eje de simetría de rotación, entonces la componente del momento angular a lo largo de ese eje se conserva. Es precisamente el caso de  $z$  y  $\phi$  cíclicas que se vio anteriormente.



## ***Teorema de Conservación: Teorema de Noether***

Si  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo  $\Rightarrow$  se conserva  $E$  y coincide con  $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

└─ Traslación temporal

Si una coordenada generalizada  $q_k$  es cíclica (no aparece explícitamente en  $\mathcal{L}$ )  $\Rightarrow$  se conserva el momento generalizado

$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  conjugado a ella.

└─ Traslación espacial

El teorema de Noether generaliza esta idea que existe una correspondencia entre **simetrías** y **cantidades conservadas**.

Presenta una relación entre cada principio de conservación de una magnitud física (energía, Hamiltoniano, momento lineal, momento angular) y una invarianza formal de las leyes de la física.

Dicho de otro modo, para toda simetría continua (por ejemplo, una rotación espacial) del lagrangiano del sistema, hay una magnitud conservada a lo largo de la evolución del mismo.

Es un resultado central en física teórica que expresa la existencia de ciertas simetrías abstractas en un sistema físico que lleva a la existencia de leyes de conservación.

# ***Teorema de Conservación: Teorema de Noether***

En resumen:

- ***Si el lagrangiano tiene simetría de traslación, el Momento Lineal Total se conserva ( $\vec{P} = \text{cte}$ ).***
- ***Si el lagrangiano tiene simetría de rotación, el Momento Angular se conserva ( $\vec{L} = \text{cte}$ ).***
- ***Si el lagrangiano tiene simetría de temporal, el Hamiltoniano se conserva ( $\mathcal{H} = \text{cte}$ ).***
  - ***Si además los vínculos son esclerónomos y  $U$  no depende de la velocidad, el Hamiltoniano es igual a la Energía Mecánica ( $\mathcal{H} = E$ ).***