

# **FUERZAS CENTRALES**

**MECÁNICA RACIONAL – 2018**



## Fuerzas centrales

Una fuerza central sobre un objeto es una fuerza que está dirigida a través de la línea que une el objeto con el origen. Su magnitud sólo depende de la distancia al  $\vec{r}$  origen.

$$\vec{F} = \mathbf{F}(r) = F(r)\hat{r}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{r vector posición} \end{array} \quad \text{Versor } \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

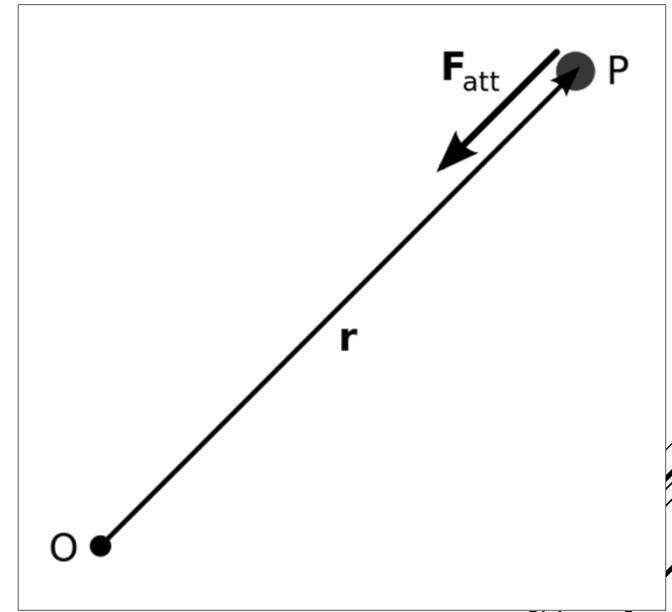
$F$  función escalar del valor de la fuerza

$\mathbf{F}$  función vectorial del valor de la fuerza (campo vectorial)

$\vec{F}$  es la fuerza

Son ejemplos de fuerzas centrales:

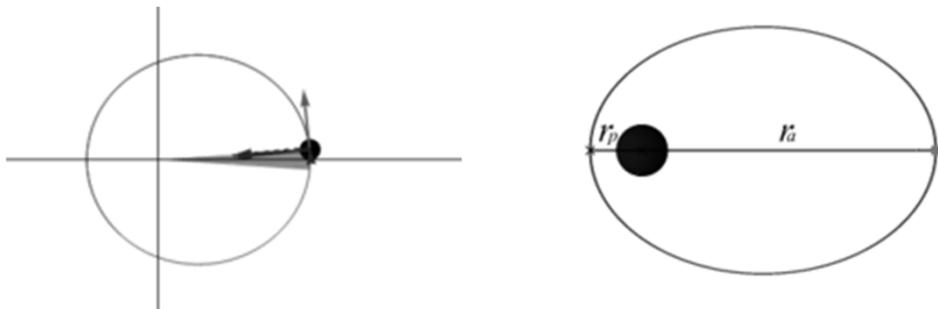
- Fuerza gravitatoria
  - Fuerza coulombiana
- } que son proporcionales a  $\frac{1}{r^2}$ . Un objeto en tales campos de fuerzas con  $\mathbf{F}(r)$  de atracción cumple con las leyes de Kepler del movimiento planetario.



## Leyes de Kepler del Movimiento Planetario

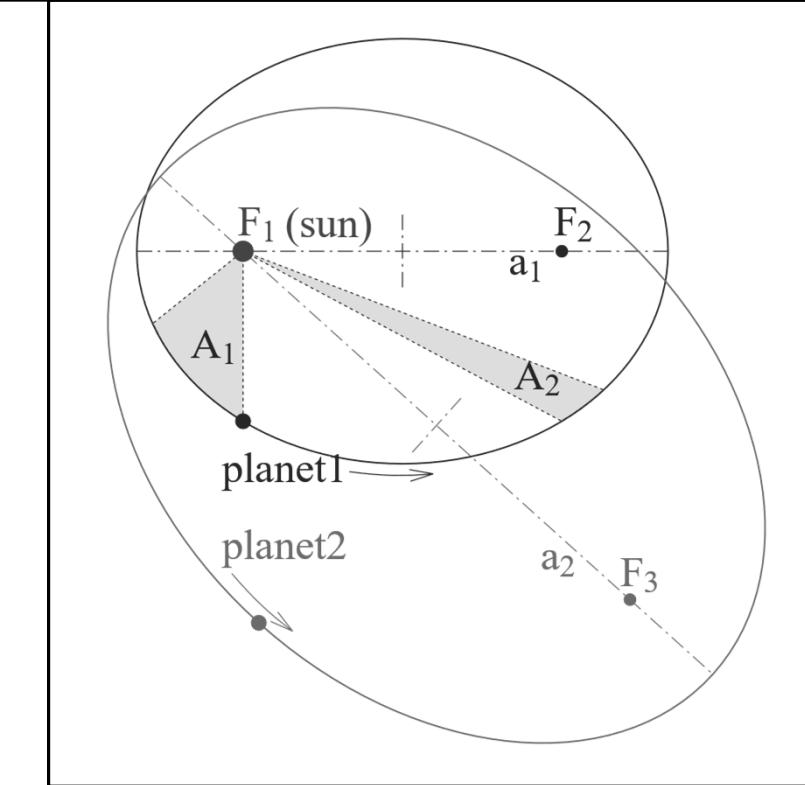
Describe el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

1. La órbita es una elipse y el Sol se ubica en uno de los focos
2. El segmento que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



3. El cuadrado del período orbital del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita (la mitad del diámetro mayor de la elipse)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$



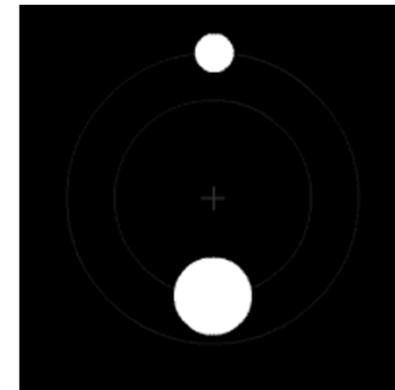
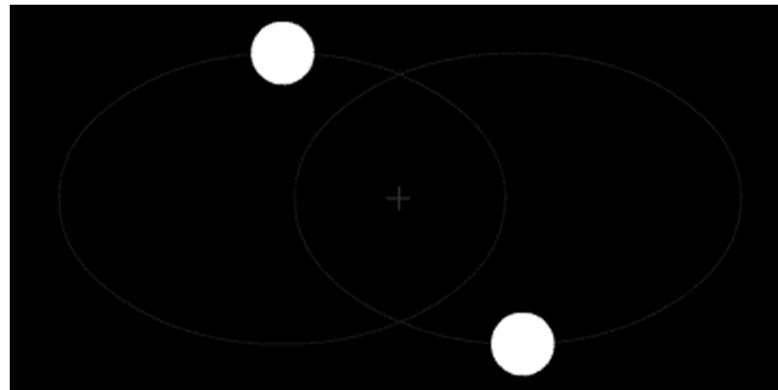
## El problema de dos cuerpos y una fuerza central

Se analiza el movimiento de dos cuerpos, cada uno de los cuales ejerce en el otro una fuerza central y conservativa, y en ausencia de toda otra fuerza externa.

Es un modelo simplificado de muchas situaciones de interés real (constituye una primera aproximación válida)



Este modelo podría aplicarse a un planeta o un cometa alrededor del Sol (problema de Kepler), la Luna o un satélite alrededor de la Tierra, una nave espacial en viaje interplanetario (con sus motores apagados), un electrón alrededor de un protón en un átomo de hidrógeno, dos átomos en una molécula diatómica (como el CO, por ejemplo), etc.



Este problema va a ser reducido drásticamente.

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: El planteo

Dos objetos puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$ . Las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son las fuerzas  $\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{21}$  que ejercen entre sí. Por la Tercera Ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

La fuerza gravitatoria será:

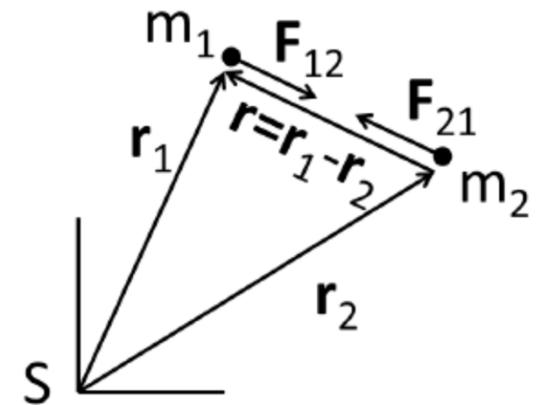
$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ . Por tanto:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \mathbf{F}_{12}(\underbrace{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}_{\text{Posición relativa}}) = -\mathbf{F}_{21}.$$

$\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{21}$  son conservativas  $\Rightarrow$  se derivan de un potencial de interacción.

Además, cuando una fuerza central es conservativa, entonces el potencial, además de depender solamente de  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , es independiente de la dirección de  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , y depende sólo del módulo  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r$



Notar que  $\mathbf{F}_{12} = f$  (posición relativa) solamente porque es un sistema aislado

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: El planteo

El potencial gravitatorio será:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

del cual se derivan  $\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{21}$ .

En el caso del electrón y el protón se tendrá el potencial eléctrico (Coulombiano), etc.

El planteo del problema mecánico se hará a través del  $\mathcal{L}$ :

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).}$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Coordenadas relativas y masa reducida

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

El problema tiene 6 grados de libertad => 6 coordenadas generalizadas. ¿Cuáles se van a elegir?

Como la  $U = U(r)$  (posición relativa,  $\mathbf{r}$ ) se elige a  $\mathbf{r}$  como primer coordenada generalizada.

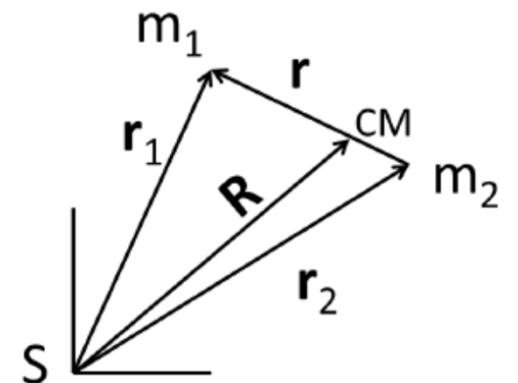
Otro vector será la posición del centro de masas porque representa la posición de las 2 partículas.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} := \frac{m_1}{M}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}_2.$$

El centro de masa (CM) está en la línea que une las posiciones de las dos masas. Si una de ellas es mucho mayor que la otra (el Sol y la Tierra, por ejemplo), el CM casi coincide con la posición de la mayor.

Las coordenadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  se convierte a las nuevas:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$



## FUERZAS CENTRALES

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Coordenadas relativas y masa reducida

La energía cinética será:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2] = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + m_2 \left( \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}^2 \right] \end{aligned}$$

Definiendo una masa reducida,  $\mu$ :  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  y  $T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2$

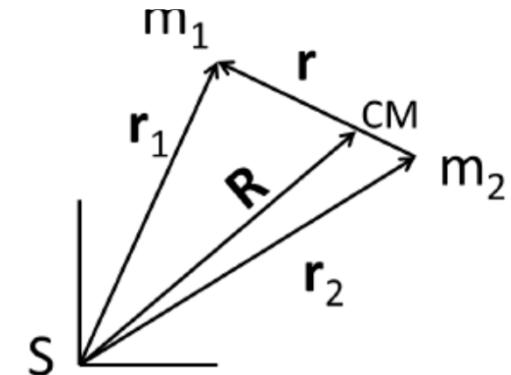
Este resultado indica que  $T$  del sistema es la misma  $T$  de otro sistema, uno con dos partículas “ficticias”, una de masa  $M$  moviéndose con la velocidad del CM, y otra de masa reducida  $\mu$ , moviéndose con la velocidad relativa.

El nombre “masa reducida” se debe a que  $\mu$  es siempre menor que  $m_1$  y que  $m_2$ . Si  $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mu \approx m_1$  (la Tierra en el sistema Tierra-Sol, por ejemplo). Además,  $M \approx m_2$ .

Entonces,  $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + [\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)]$  y  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}_{rel}$ ,

El problema queda separado en dos partes, c/u con sus propias coordenadas.

En particular, ¿cómo se moverá el CM? El **momento total es constante** (ya que no hay fuerzas exteriores), y es igual a  $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$ , así que  $\dot{\mathbf{R}}$  es constante, y se puede elegir un sistema de referencia donde el CM esté en reposo.



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Reducción del problema a 1 cuerpo (3 variables)

Como  $\mathcal{L}$  no depende de  $\mathbf{R}$   $\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{CM}}{\partial \mathbf{R}} = 0$ , la ecuación de  $\mathbf{R}$  (3 ecuaciones) es trivial:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{CM}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M \ddot{\mathbf{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$$

El CM se mueve a  $\mathbf{v}$  cte. Es una consecuencia de la conservación de  $\mathbf{P}$ .

$\mathcal{L}_{CM}$  es el lagrangiano de una partícula libre, y por la Primera Ley de Newton,  $\mathbf{R}$  se mueve a  $\mathbf{v}$  cte.

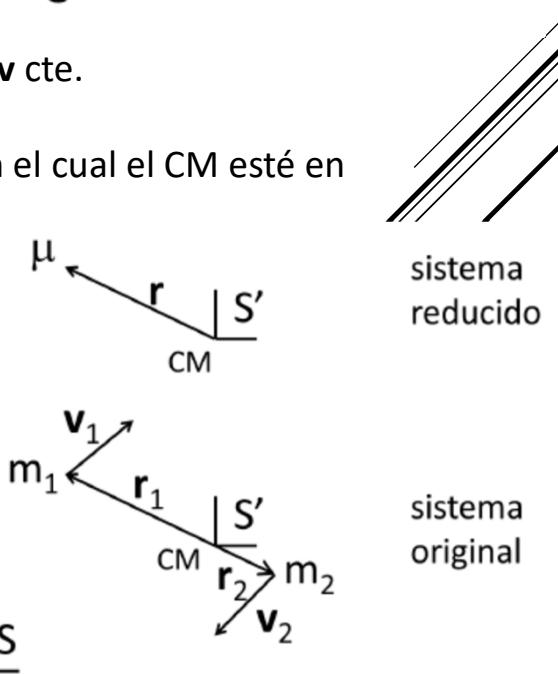
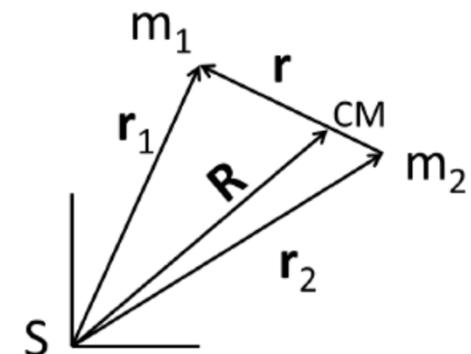
Ya que el CM se mueve a  $\mathbf{v}$  cte, se puede elegir como sistema de referencia (inercial) uno en el cual el CM esté en reposo. Así que  $\mathcal{L}_{CM} = 0$  y el problema se reduce a:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r)}$$

que es un problema de un solo cuerpo.

El *sistema reducido*, consistente en un cuerpo de masa  $\mu$  ubicado en  $\mathbf{r}$ , se vuelve indistinguible del de dos cuerpos cuando una de las masas es mucho mayor que la otra. Por ejemplo, si  $m_1 \ll m_2$  (Tierra-Sol), el CM coincide con la posición de  $m_2$ ,  $\mathbf{r}$  es  $\mathbf{r}_1$  y  $\mu$  es  $m_1$ .

Resolviendo la ecuación de Lagrange:  $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r)$ .



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Conservación de $\mathbf{L}$ : reducción a un plano (2 variables)

Al no haber torques (las fuerzas son centrales),  $\mathbf{L}$  se conserva. Es decir:  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  es cte

En particular, la *dirección* de  $\mathbf{L}$  es cte. Tanto  $\mathbf{r}$  como  $\dot{\mathbf{r}}$  permanecen restringidos a un plano (el plano  $\perp \mathbf{L}$ ).

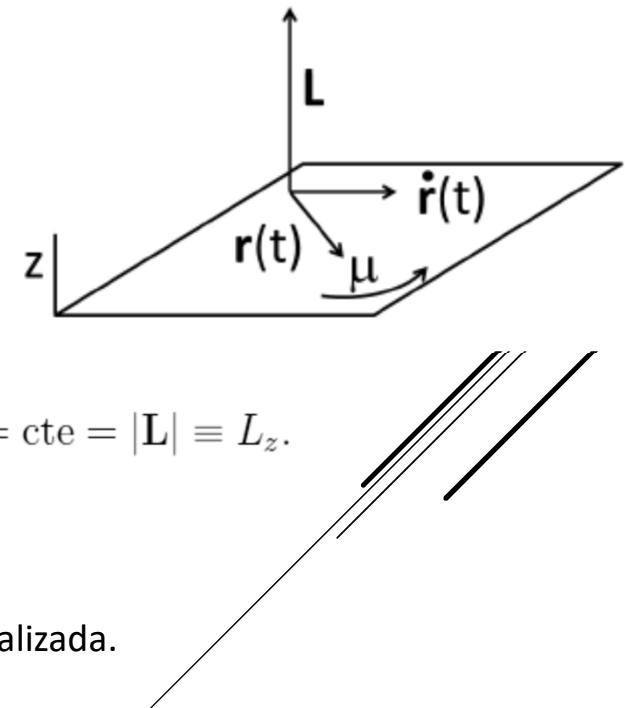
En el sistema del CM todo el movimiento ocurre en un plano, que se puede tomar como plano  $xy$ .

Al ser plano el problema se reduce a sólo dos variables, y se usan coordenadas polares para  $\mathbf{r}$ . El  $\mathcal{L}$  resulta:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$ .

$\mathcal{L}$  es independiente de  $\phi$ , de manera que  $\phi$  es cíclica y su ecuación:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{cte} = |\mathbf{L}| \equiv L_z$ .

Esta es la conservación de  $\mathbf{L}$ .

Ahora se calculará la segunda ecuación de Lagrange con  $r$  como coordenada generalizada.



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Reducción a un plano (2 variables)

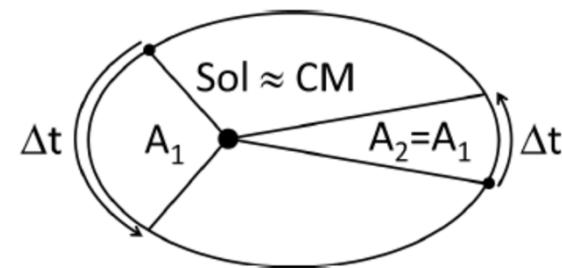
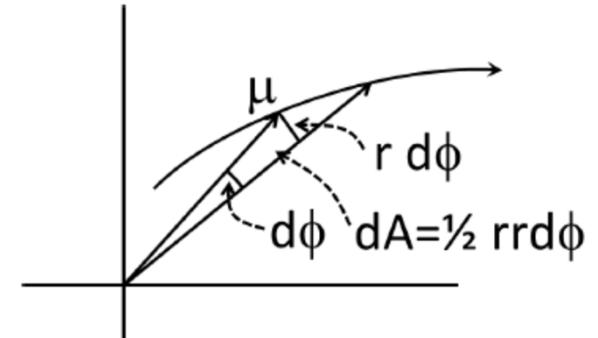
Antes calcular la ecuación de  $r$ :

El radio vector de la partícula, al moverse en su trayectoria, barre un área  $dA$  que es:

$$dA = \frac{1}{2}rrd\phi = \frac{1}{2}r^2d\phi.$$

Así que el momento angular  $\mathbf{L}$  es:  $L = \mu r^2 \dot{\phi} = 2\mu \dot{A} = \text{cte}$

Como  $\mathbf{L}$  es cte  $\Rightarrow \dot{A}$  es cte  $\Rightarrow$  el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta es la **Segunda Ley de Kepler**. Es una consecuencia de la conservación de  $\mathbf{L}$  y por lo tanto es válida aunque el potencial no sea el gravitatorio.



El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
La ecuación radial: Potencial efectivo (1 variable)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r).$$

La segunda ecuación de movimiento, la **ecuación radial**, es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Rightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Las dos ecuaciones obtenidas son:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L}{\mu r^2}, \\ \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}$$

El término con  $\dot{\phi}^2$  no es complicado. Porque como  $L$  queda determinado por las condiciones iniciales, se puede reemplazar  $\dot{\phi}$  de una en otra de las ecuaciones anteriores:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \mu r \frac{L^2}{\mu^2 r^4} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}. \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

que es la reducción final del problema. Se empezó con dos masas en interacción (6 variables) y se termina con una sola variable: la distancia entre las masas.

La última ecuación tiene forma de la **Segunda Ley de Newton** (en la dirección radial), con la fuerza de interacción gravitatoria y una fuerza centrífuga (por el signo):

$$F_{ef} := \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
 La ecuación radial: Potencial efectivo (1 variable)

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3} \quad F_{cf} := \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Esta  $F_{cf}$  también se deriva de un potencial ( $U_{cf}$ , el potencial centrífugo, llamado “barrera centrífuga”), lo cual nos permite escribir un potencial efectivo  $U_{ef}$ :

$$U_{ef} := U + U_{cf} = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

¿Cómo es el movimiento en este potencial efectivo? Tomando la ecuación de movimiento radial, y multiplicando por  $\dot{r}$ :

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U_{ef}}{\partial r} \quad \times \dot{r} : \quad \mu \dot{r} \ddot{r} = -\dot{r} \frac{\partial U_{ef}}{\partial r} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} U_{ef}(r(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef} = \text{cte},$$

Es la conservación de la Energía Mecánica Total E:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 + U(r). \quad \text{en coordenadas polares}$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio

Se puede plantear el potencial efectivo para describir el movimiento de un planeta o un cometa alrededor del Sol (el problema de Kepler):

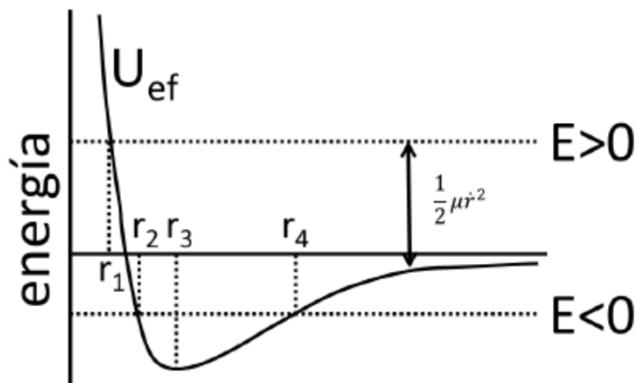
$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad \rightarrow$$

Lejos del Sol,  $\ddot{r}$  apunta hacia adentro, y cerca del Sol hacia afuera. En medio existe una situación de equilibrio.

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

La única excepción: cuando  $L = 0$ . En ese caso, el cometa se zambulle de cabeza hacia el Sol.

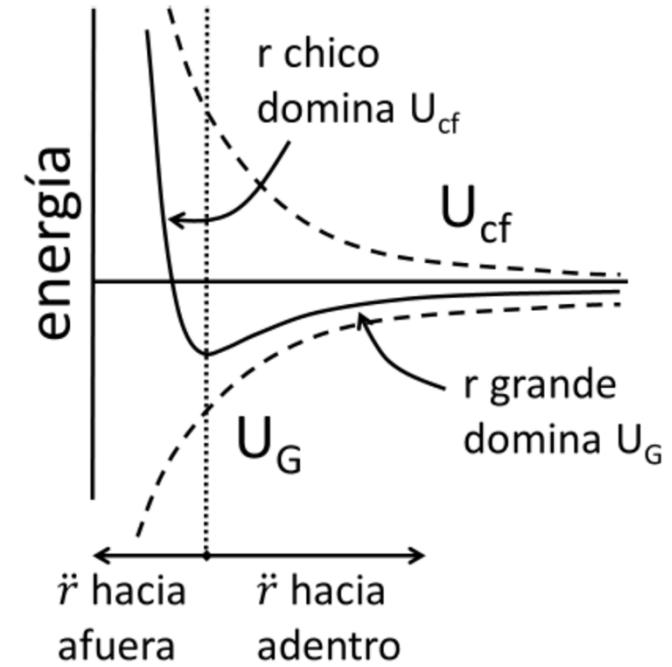
$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$



En la ecuación, el término de energía cinética es  $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0$ .

La órbita del planeta está restringida a la región donde  $E \geq U_{ef}$ , es decir, arriba de la curva de la figura. Vamos a analizar los diversos casos posibles.

$$U_{ef} := U + U_{cf} = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$



El problema de dos cuerpos y una fuerza central:

Ejemplo: el potencial gravitatorio

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

Si la energía es  $E \geq 0$  el movimiento es no acotado (ej, un cometa no periódico).

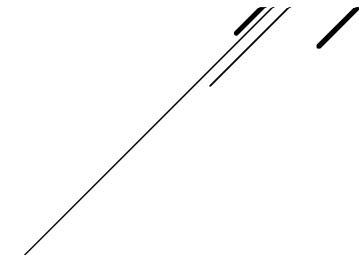
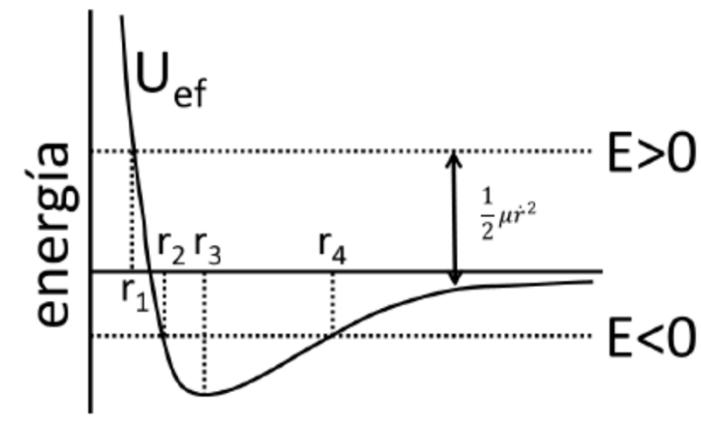
La partícula se mueve hacia el centro de fuerzas hasta que “choca” con la *barrera centrífuga* en el punto de retorno  $r_1$ .

En ese punto el exceso de energía sobre el potencial se anula, es decir

$\dot{r} = 0 \Rightarrow$  el movimiento radial se detiene y la partícula “rebota”

ya que  $\ddot{r} > 0$ .

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$



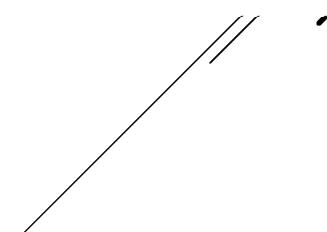
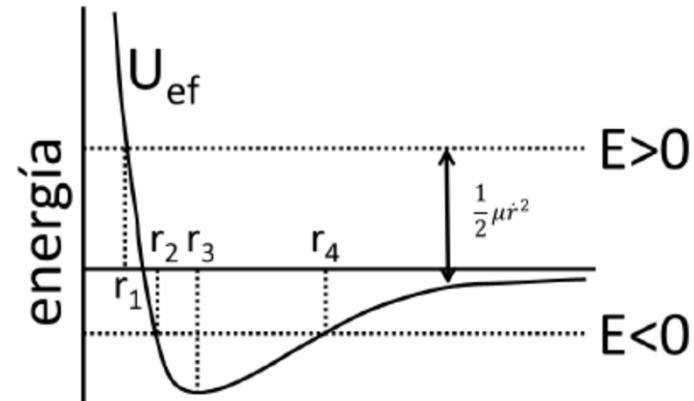
El problema de dos cuerpos y una fuerza central:

Ejemplo: el potencial gravitatorio

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

Si la energía total es  $E < 0$  (notar que esto depende de haber tomado  $U(\infty) = 0$  nada más):

- Hay dos puntos de retorno,  $r_2$  y  $r_4$ , donde se detiene el movimiento radial.
- El movimiento de la partícula está confinado a la región  $r_2 \leq r \leq r_4$ .
- En el caso del movimiento planetario, el punto más cercano se llama *perihelio* y el más lejano se llama *afelio*.
- En órbita de la Tierra se los llama *perigeo* y *apogeo*, y en general *periapis* y *apoapsis*.



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio

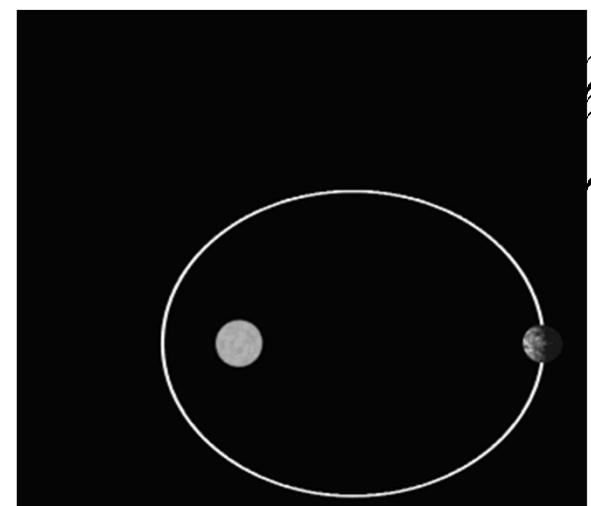
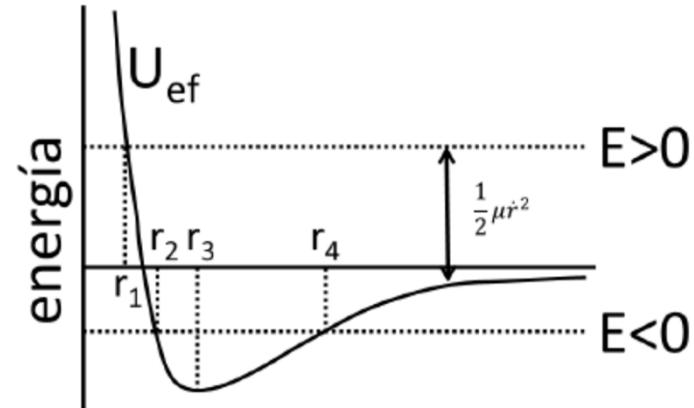
Si  $E = \min U_{ef}(r)$ , el movimiento está más limitado aún:  $r = r_3$ , es decir que la órbita es **circular**.

Aún no se conoce *cómo es la órbita*.

El movimiento podría ser periódico, si la órbita se cierra después de un número finito de excursiones entre  $r_2$  y  $r_4$ .

Pero también podría no cerrarse, y el planeta volvería a  $r_4$  con el ángulo corrido en  $\Delta\phi$ . Se puede calcular el  $\Delta\phi$  correspondiente a sucesivos tránsitos  $r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_4$ .

La órbita es cerrada solamente si  $\Delta\phi = 2\pi \frac{p}{q}$  con  $p$  y  $q$  enteros. Se puede mostrar que si  $U(r)$  es una potencia  $U \sim r^{n+1}$ , las órbitas cerradas existen sólo cuando  $n = -2$  (potencial gravitatorio) o  $n = 1$  (potencial elástico), y además en estos casos *todas* las órbitas acotadas son cerradas.



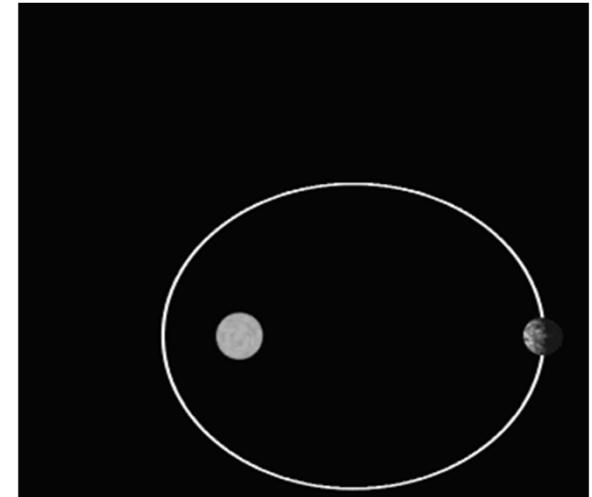
## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ejemplo: el potencial gravitatorio

El avance del ángulo  $\phi$  entre dos perihelios sucesivos se llama *precesión del perihelio* y se observa en los cuerpos celestes y en otros cuerpos en órbita.  
(No confundirla con la precesión del equinoccio, que es un fenómeno distinto)

Si la interacción entre los cuerpos celestes es gravitatoria, ¿por qué razón las órbitas preceden? La respuesta completa es muy complicada. Para empezar, se trata de un problema con más de dos cuerpos. Hay presentes más planetas.

La órbita de Mercurio y la de la Luna siempre mostraron una precesión residual, anómala, inexplicable como una perturbación de otros cuerpos. La solución de este problema llevó siglos, a lo largo de los cuales se desarrollaron poderosas herramientas de la física matemática.

La solución llegó recién en el siglo XX gracias a la Teoría de la Relatividad, en particular a la Relatividad General, que modifica la interacción gravitatoria. La verificación del cálculo de la precesión de la órbita de Mercurio fue uno de los primeros éxitos de la teoría.



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación de la órbita

La ecuación  $\mu\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$ : permite encontrar  $r(t)$ , que a su vez en  $\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}$ , permite hallar  $\phi(t)$ , lo cual resuelve el problema. De hecho, la conservación de la energía permite reducir la ecuación radial a una de orden 1:

$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{ef}(r))}$ , de donde podría encontrarse  $t(r)$ , invertir y obtener  $r(t)$ . Es bastante engorroso . Por ahora se va a obtener  $r(\phi)$ , que describe la *forma de la órbita*.

A partir de:  $L = \mu r^2 \dot{\phi}$ , (1) y  $E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{2}r^2\dot{\phi}^2 + U(r)$ . (2)

De (1)  $\Rightarrow r\dot{\phi} = \frac{L}{r\mu}$ , al cuadrado  $\Rightarrow r^2\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{r^2\mu^2}$ , (3). En (2) y despejando  $r^2$ :  $\dot{r}^2 = \frac{2E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} - \frac{2U(r)}{\mu}$ . (4)

Haciendo (3)/(4):  $\frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{2E}{\mu} \frac{r^2 \mu^2}{L^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{r^2 \mu^2}{L^2} - \frac{2U(r)}{\mu} \frac{r^2 \mu^2}{L^2} \Rightarrow \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu U(r)}{L^2}$ .

Usando el potencial gravitatorio:  $\left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2 r}$ , (5) donde  $k = Gm_1 m_2 > 0$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
La ecuación de la órbita

$$(5) \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2 r},$$

Se hace el siguiente cambio de variable:  $S = \frac{1}{r}$

Entonces,  $\frac{ds}{d\phi} = \frac{d(1/r)}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$ , (que es el lado izquierdo de (5))

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{L^2 r}, \Rightarrow \left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 = -s^2 + \frac{2\mu k}{L^2} s + \frac{2\mu E}{L^2}.$$

Completando cuadrados:  $\left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 = - \left( s^2 - 2\frac{\mu k}{L^2} s \right) + \frac{2\mu E}{L^2} = - \underbrace{\left( s - \frac{k\mu}{L^2} \right)^2}_{:=z} + \left( \frac{k\mu}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2},$

$$\Rightarrow \left( \frac{dz}{d\phi} \right)^2 = -z^2 + \left( \frac{k\mu}{L^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2\mu E}{L^2} \frac{L^4}{k^2 \mu^2} \right) \quad \text{con} \quad \underbrace{\left( \frac{k\mu}{L^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)}_{:=B^2 > 0} \quad (\text{todas constantes})$$

$$\left( \frac{dz}{d\phi} \right)^2 = -z^2 + B^2,$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: La ecuación de la órbita

$$\left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 = -z^2 + B^2, \quad \text{Todavía no se va a integrar....}$$

$$\Rightarrow z^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 = B^2 \Rightarrow \left(\frac{z}{B}\right)^2 + \left(\frac{d(z/B)}{d\phi}\right)^2 = 1.$$

Esto indica que es un término al cuadrado, más su derivada al cuadrado, igual a 1. Coseno al cuadrado más seno al cuadrado igual a 1. Se obtiene la solución sin necesidad de integrar:  $\frac{z(\phi)}{B} = \cos \phi$ .

Podría haber una fase inicial y tendríamos  $\phi - \phi_0$ , pero se pueden elegir los ejes de las coordenadas polares de manera que la fase inicial se anule, así:  $z(\phi) = B \cos \phi$ .

Volviendo a la variable  $r$ :

$$z = s - \frac{k\mu}{L^2} = B \cos \phi \quad \Rightarrow s = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2} + \frac{k\mu}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \cos \phi$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2} (1 + \epsilon \cos \phi),$$

donde  $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$ .

$$\Rightarrow r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

*Es el movimiento básico de los objetos bajo la acción de la gravedad, es decir de prácticamente todo en el universo.*

Estas órbitas son, en general, secciones cónicas.

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas

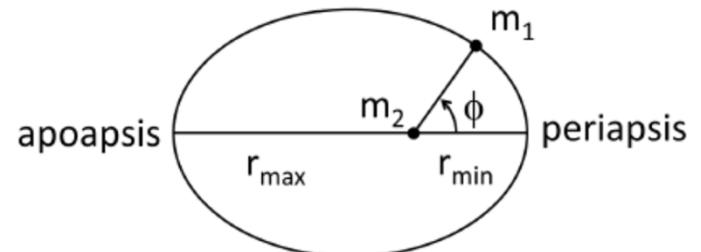
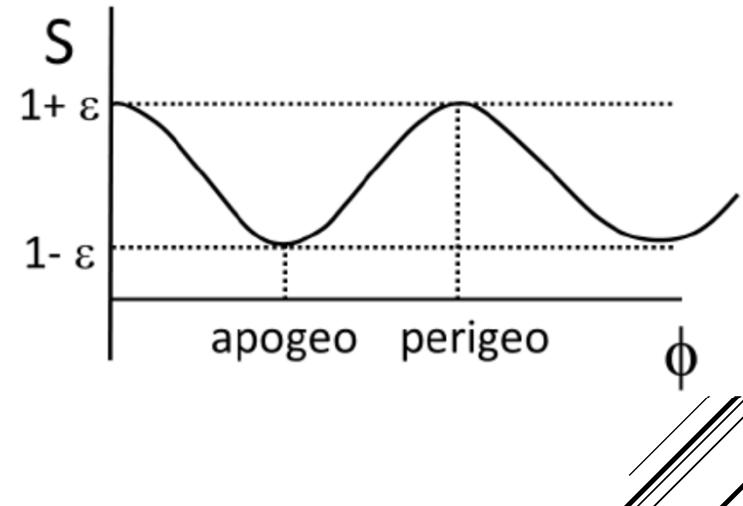
$$s = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2} (1 + \epsilon \cos \phi),$$

Es una oscilación armónica con respecto a la fase  $\phi$ .

A lo largo de una órbita  $s$  se comporta como indica el gráfico:

$$r_{min} = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon}$$

Los valores máximos de  $s$  corresponden a los mínimos de  $r = \frac{1}{s}$   
cuando  $\cos \phi = 1$



Este punto se llama *periapsis* (*perihelio* mov. alrededor del Sol, o *perigeo* para órbita alrededor de la Tierra).  
Hay también un mínimo de  $s$ . Pero la existencia del  $r_{max}$  correspondiente depende de si  $\epsilon < 1$  o  $\epsilon \geq 1$ , ya que si  $\epsilon \geq 1$ .

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas

Si  $\epsilon < 1$  el  $r_{max}$ :  $r_{max} = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 - \epsilon}$  se llama *apoapsis* (o *afelio*, o *apogeo*).

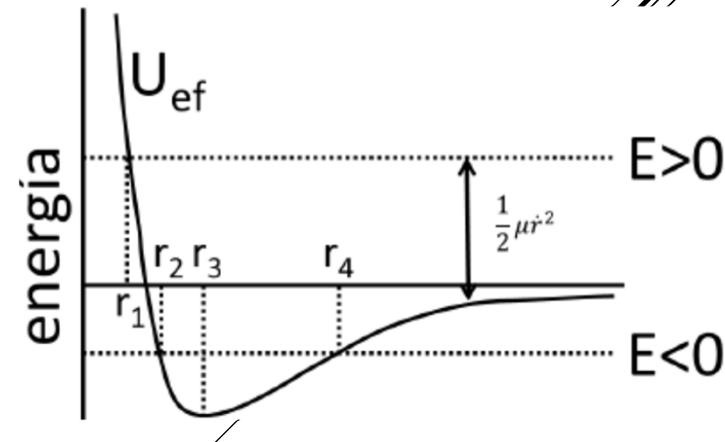
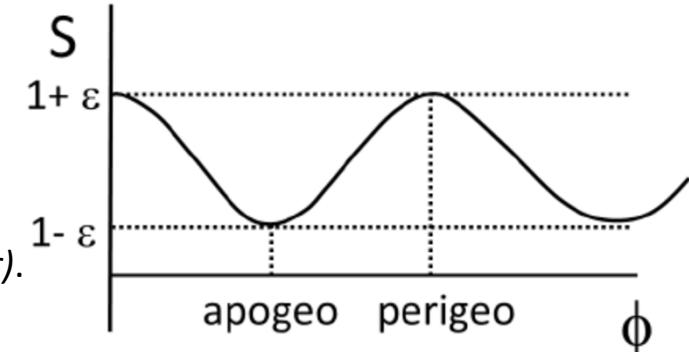
El *periapsis* y el *apoapsis* son los **puntos de retorno** en el potencial efectivo  $U_{ef}(r)$ .

Si  $\epsilon \geq 1$ , entonces  $r_{max} \rightarrow \infty$  y el movimiento es no acotado.

De la definición de  $\epsilon$ :

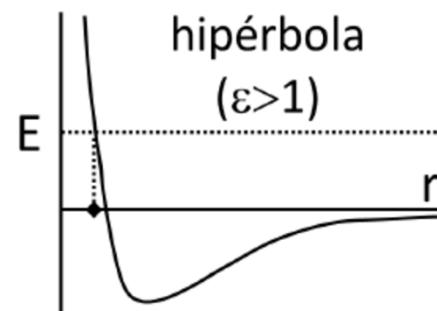
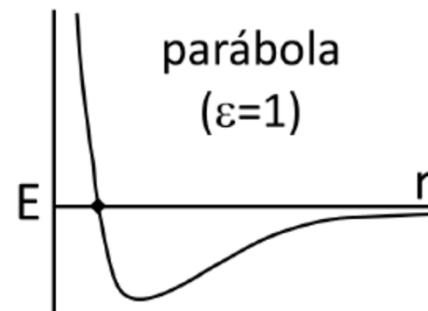
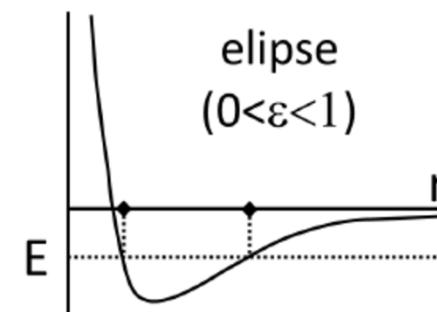
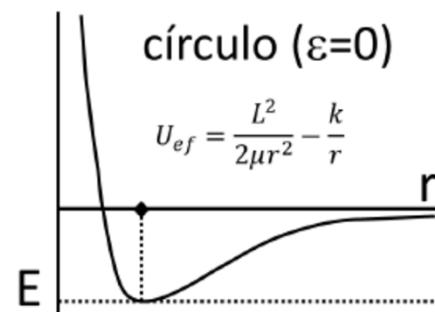
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \Rightarrow \epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{\mu k^2} \Rightarrow \boxed{E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$



Analizando  $E$  y los ápsides de cada valor de  $\epsilon$  se evidencian distintas órbitas posibles.

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Las órbitas: Casos de  $\epsilon$



$$\boxed{E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2L^2}}.$$

$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

*Los cuatro tipos de órbita del potencial gravitatorio, según el valor de  $\epsilon$ .*

$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$$r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Las órbitas: Casos de  $\epsilon$

1.  $\epsilon = 0$      $r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} = \text{cte}$ , La órbita es **circular**.

En la definición de  $\epsilon$ :

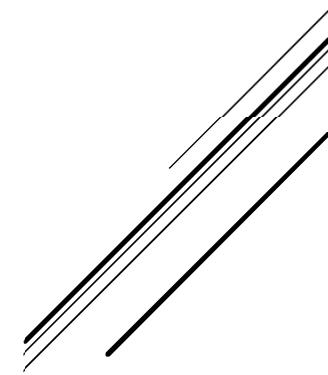
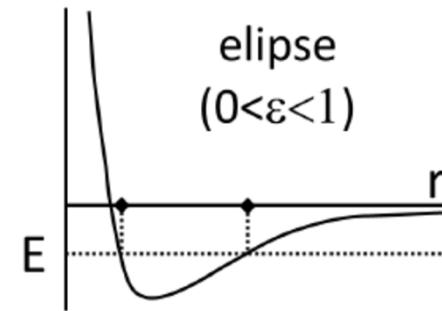
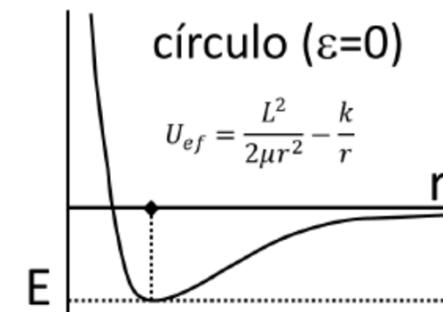
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} = 0 \Rightarrow E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}.$$

Esta energía es el mínimo de  $U_{ef}$

2.  $0 < \epsilon < 1 \Rightarrow -\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0$

$$E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2L^2}.$$

Habrá entonces  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$ . La partícula tiene energía total negativa y está “atrapada” en el pozo del potencial  $U_{ef}$ . Se trata efectivamente de una **elipse**.



$$U_{ef} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

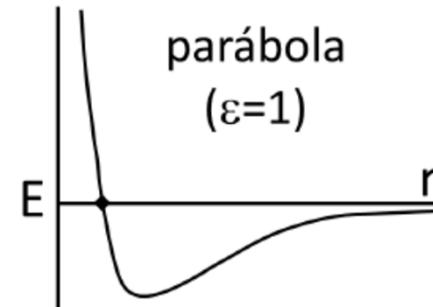
$$r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Casos de $\epsilon$

3.  $\epsilon = 1 \Rightarrow E = 0$ .

$$E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2L^2}.$$

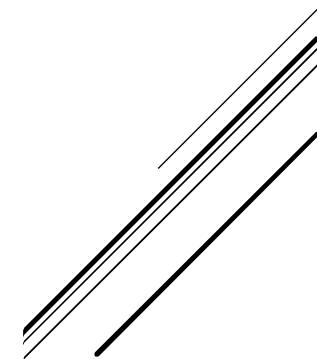
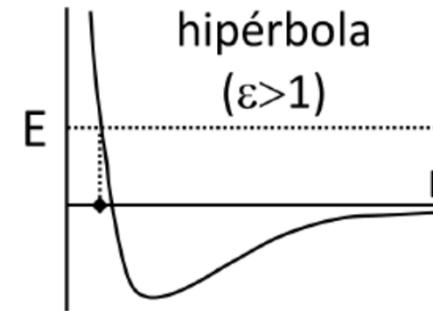
La partícula tiene la energía *justa* para escapar al infinito.  
La velocidad correspondiente se llama *velocidad de escape*.



4.  $\epsilon > 1 \Rightarrow E > 0$

$$E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2L^2}.$$

La partícula también *escapa al infinito* (pero le sobra energía cinética o  $v > V_{\text{escape}}$ ).

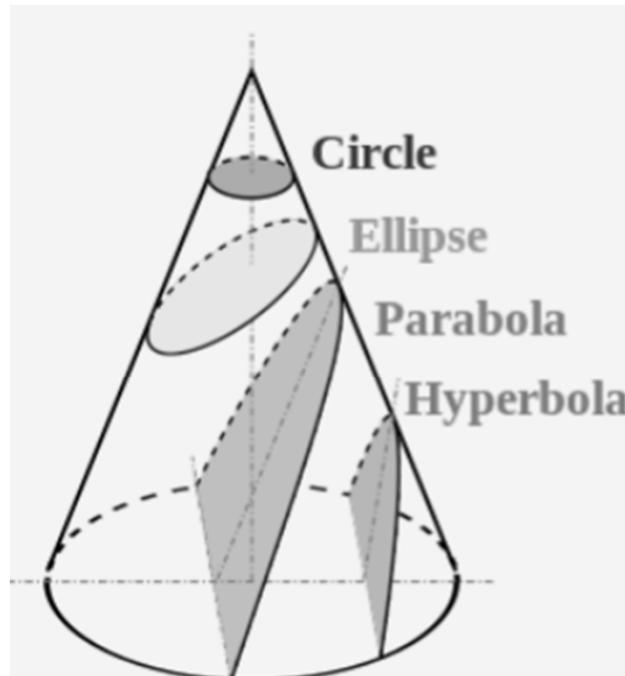


## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

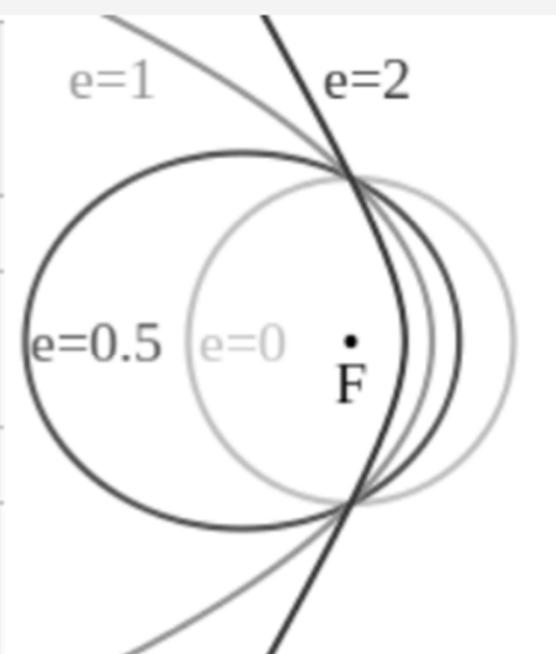
Las órbitas definidas por

$$r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

son secciones cónicas, de las cuales el círculo es un caso particular.



conic section	equation	eccentricity (e)
circle	$x^2 + y^2 = a^2$	0
ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
parabola	$y^2 = 4ax$	1
hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

Para analizar las cónicas conviene utilizar la inversa de  $r(\phi)$ :

$$\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{k\mu}{L^2}}_{:=1/c} (1 + \epsilon \underbrace{\cos \phi}_{=x/r}),$$

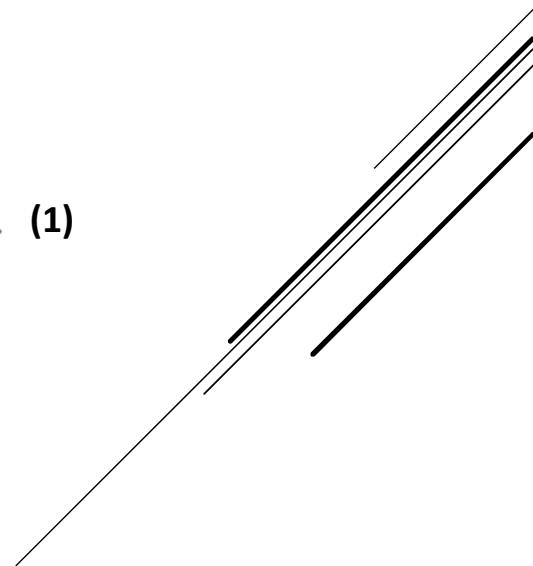
donde se define el parámetro  $c$  (una longitud) y  $\cos \phi = \frac{x}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{c} \left(1 + \epsilon \frac{x}{r}\right), \\ c &= r \left(1 + \epsilon \frac{x}{r}\right) \\ c &= r + \epsilon x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= r + \epsilon x \\ r &= c - \epsilon x \\ r^2 &= (c - \epsilon x)^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2. \quad (1)\end{aligned}$$

Retomando nuevamente los 4 casos:

1.  $\epsilon = 0 \Rightarrow$  en (1):  $x^2 + y^2 = c^2$  que es la ecuación de un círculo de radio  $c$ .



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

2.  $0 < \epsilon < 1 \Rightarrow$  en  $x^2 + y^2 = c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2 \Rightarrow$  completando cuadrado y trabajando:

$$x^2 - \epsilon^2 x^2 + 2c\epsilon x + y^2 = c^2 \Rightarrow (1 - \epsilon^2)x^2 + 2c\epsilon x + y^2 = c^2$$

$$(1 - \epsilon^2) \left[ x^2 + 2 \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} x \right] + y^2 = c^2 \Rightarrow (1 - \epsilon^2) \left[ \left( x + \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - \frac{c^2 \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \right] + y^2 = c^2$$

$$(1 - \epsilon^2) \left( x + \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - \frac{c^2 \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} + y^2 = c^2 \Rightarrow (1 - \epsilon^2) \left( x + \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 = c^2 + \frac{c^2 \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}$$

$$(1 - \epsilon^2) \left( x + \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{c^2(1 - \epsilon^2) + c^2 \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{c^2}{1 - \epsilon^2}$$

$$\boxed{\frac{\left( x + \frac{c\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2}{\frac{c^2}{(1 - \epsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{1 - \epsilon^2}} = 1}$$

Ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

Ecuación de una elipse:

$$\frac{\left(x + \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\frac{c^2}{(1-\epsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{1-\epsilon^2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Centro de la elipse:  $\left(-\frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}; 0\right)$

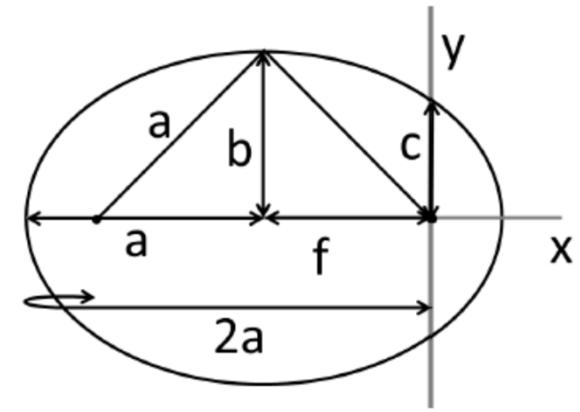
Semiejes:  $a = \frac{c}{1-\epsilon^2}$  ;  $b = \frac{c}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

Distancia focal:  $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow f = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$a^2 - b^2 = \frac{c^2}{(1-\epsilon^2)^2} - \frac{c^2}{1-\epsilon^2} = \frac{c^2 - c^2(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2} = \frac{c^2(1-1+\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2} = \frac{c^2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} = f^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{c\epsilon}{1-\epsilon^2}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$  centro de la elipse



Uno de los focos de la elipse está en el origen, que es el centro de la fuerza. Ésta es la **Primera Ley de Kepler**: las órbitas de los planetas son elipses, y el Sol está en uno de los focos (estrictamente, el CM está en el foco, pero casi coincide con  $m_2$  si  $m_2 \gg m_1$ )

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Las órbitas: Las cónicas

3.  $\epsilon = 1$  en  $x^2 + y^2 = c^2 - 2c\epsilon x + \epsilon^2 x^2$ .  $\Rightarrow y^2 = c^2 - 2cx = -2c\left(x - \frac{c}{2}\right)$

que es una parábola hacia la izquierda, con el vértice en  $c/2$  y el **foco en el origen** ( $y^2 = 4fx$ , con  $f$  la distancia focal).

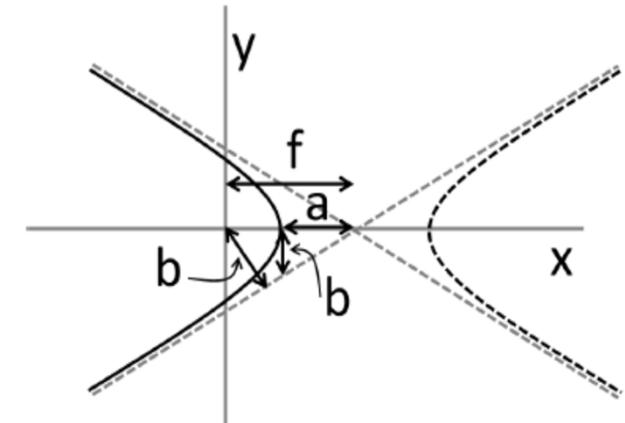
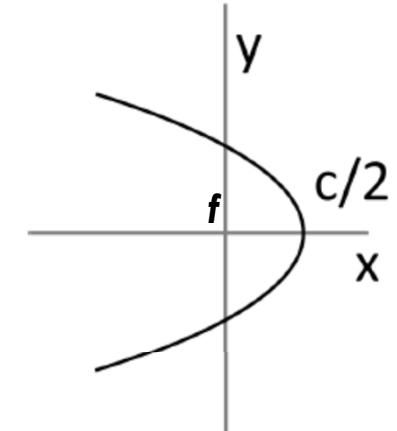
4.  $\epsilon > 1$ . Completando el cuadrado de  $x$ , ahora queda:  $\frac{(x - \frac{c\epsilon}{\epsilon^2 - 1})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

Con  $a = \frac{c}{\epsilon^2 - 1}$ ,  $b = \frac{c}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$ , Es una Hipérbola

$b$  es el parámetro de impacto, es decir la distancia más cercana al centro de la fuerza si la partícula se moviera por la línea punteada (una de las asíntotas de la hipérbola)

Existe una rama de la hipérbola hacia la derecha (que apareció al elevar al cuadrado  $r$ ). Es la rama relevante si el potencial es  $1/r$  repulsivo en lugar de atractivo. Las dos asíntotas forman con el eje  $x$  los ángulos donde se anula el denominador de la fórmula de la órbita

$$r(\phi) = \frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Período de las órbitas elípticas

De la ecuación  $L = \mu r^2 \dot{\phi} = 2\mu \dot{A} = \text{cte}$        $\Rightarrow \dot{A} = \frac{L}{2\mu}.$

El área de la elipse es  $A = \pi ab$ , y su período:  $\tau = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2\pi ab\mu}{L} \Rightarrow \tau^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2 \mu^2}{L^2}.$

Como  $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$  y  $a = c/(1 - \epsilon^2)$ :

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 a^2 (1 - \epsilon^2) \mu^2}{L^2} = 4\pi^2 a^3 \overbrace{\frac{a(1 - \epsilon^2)}{L^2} \mu^2}^c = 4\pi^2 a^3 \frac{c \mu^2}{L^2},$$

además  $c = L^2/k\mu$  de la ec de s

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{\mu}{k} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{G m_1 m_2} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{G \mu M} = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM} \approx 4\pi^2 \frac{a^3}{GM_\odot}$$

donde  
 $k = G m_1 m_2 = G \mu M \approx G \mu M_\odot$

$$\boxed{\tau^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3},$$

que es la Tercera Ley de Kepler

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Órbitas no acotadas

En la ecuación de la órbita kepleriana:  $r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}$

Para tener órbitas elípticas,  $\epsilon < 1$ . Si  $\epsilon > 1$  corresponde a las órbitas abiertas.

Si  $\epsilon = 1$ , es porque se anula el denominador en  $\phi = \pm\pi$ . Luego,

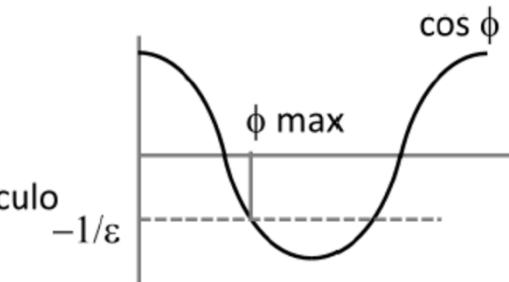
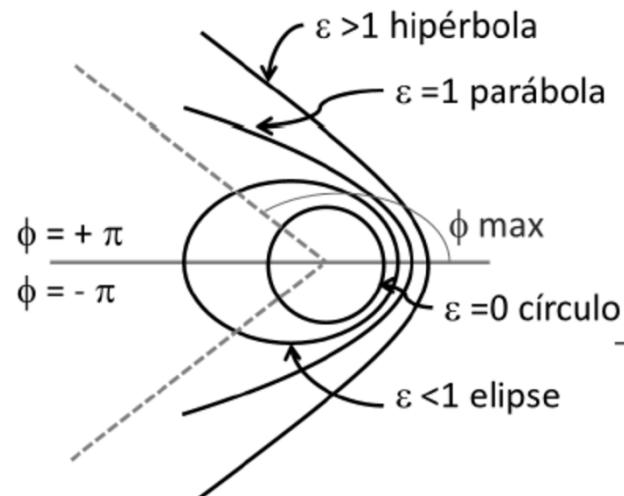
$$\begin{array}{c} r \\ \longrightarrow \infty \\ \phi \rightarrow \pm\pi \end{array}$$

En este caso, no es difícil mostrar que en coordenadas cartesianas:  $y^2 = c^2 - 2x$ ,

Que es una **parábola**

Si  $\epsilon > 1$ , el denominador se anula en un valor  $\phi_{max}$ , así que las soluciones están confinadas a un rango  $-\phi_{max} < \phi < \phi_{max}$ . En coordenadas cartesianas:

$$\frac{(x - \delta)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{que es una } \mathbf{Hipérbola}.$$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: El movimiento orbital

La forma de las órbitas  $\phi(r)$  no dice nada sobre la manera en que las partículas se mueven en ellas  $\phi(t)$ .

Se analizará este aspecto.  $\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}.$

De las ecuaciones anteriores, se pudo escribir la conservación de la energía:  $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}.$$

Reordenando:  $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad \Rightarrow t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}$

Se obtiene  $t(r) = t(r; E, L, r_0)$  dependiente de tres constantes de integración:  $E, L$  y  $r_0$ . Invirtiendo se obtiene  $r(t)$  y usarse

en  $\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\phi = \frac{L dt}{\mu r(t)^2} \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 + \int_0^t \frac{L dt}{\mu r(t)^2}$

Integrando desde  $t = 0$  con una fase inicial  $\phi = \phi_0$ .

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: ¿Cierre de órbitas?

Se tiene dos movimientos simultáneos: en  $r$  y en  $\phi$ . En un mínimo de  $U_{ef} = E_0$  la órbita es circular (radio  $r_0$ ), y es ***cerrada***.

Cuando  $E < 0$  la órbita es ***acotada en el espacio*** y  $r$  oscila entre los puntos de retorno  $r_2$  y  $r_4$ . Pero al mismo tiempo la partícula gira alrededor del centro de fuerzas (manteniendo  $L$  cte). ¿Se cerrará la órbita después de un giro o  $n$  giros?

Para  $E \gtrsim E_0$ , se puede analizar:

$$\text{El potencial efectivo cerca de un mínimo regular es aprox cuadrático: } U_{ef}(r) = E_0 + \frac{U''_{ef}(r_0)}{2}(r - r_0)^2 + o(r^3).$$

Por lo tanto:

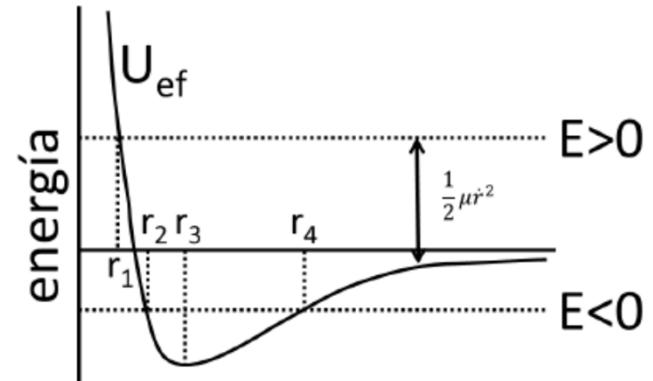
$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3} := -\frac{\partial U_{ef}}{\partial r} \approx -\frac{\partial}{\partial r} \left[ E_0 + \frac{U''_{ef}(r_0)}{2}(r - r_0)^2 \right] \approx -U''_{ef}(r_0) r = -\left[ U''(r_0) - \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \right] r := -K r.$$

El movimiento radial es aprox armónico y se puede calcular la frecuencia  $\omega_r$  de la oscilación radial entre  $r_2$  y  $r_4$ :

$$\mu \ddot{r} + Kr = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{K/\mu}.$$

La frecuencia del giro alrededor del origen es la ecuación radial  $\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}$ :

$$\omega_0 \approx \dot{\phi}(r_0) = \frac{L}{\mu r_0^2}.$$



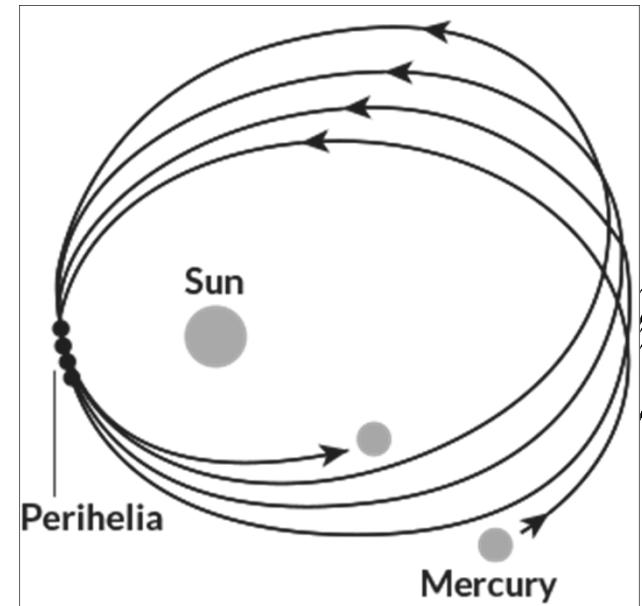
## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Precesión del perihelio de Mercurio

Las órbitas de 2 cuerpos son elipses cerradas.

Pero en el sistema solar las perturbaciones producidas por los otros cuerpos hacen que las órbitas sean abiertas y sus perihelios precedan lentamente.

Mercurio es el planeta que más precede (575"/siglo).

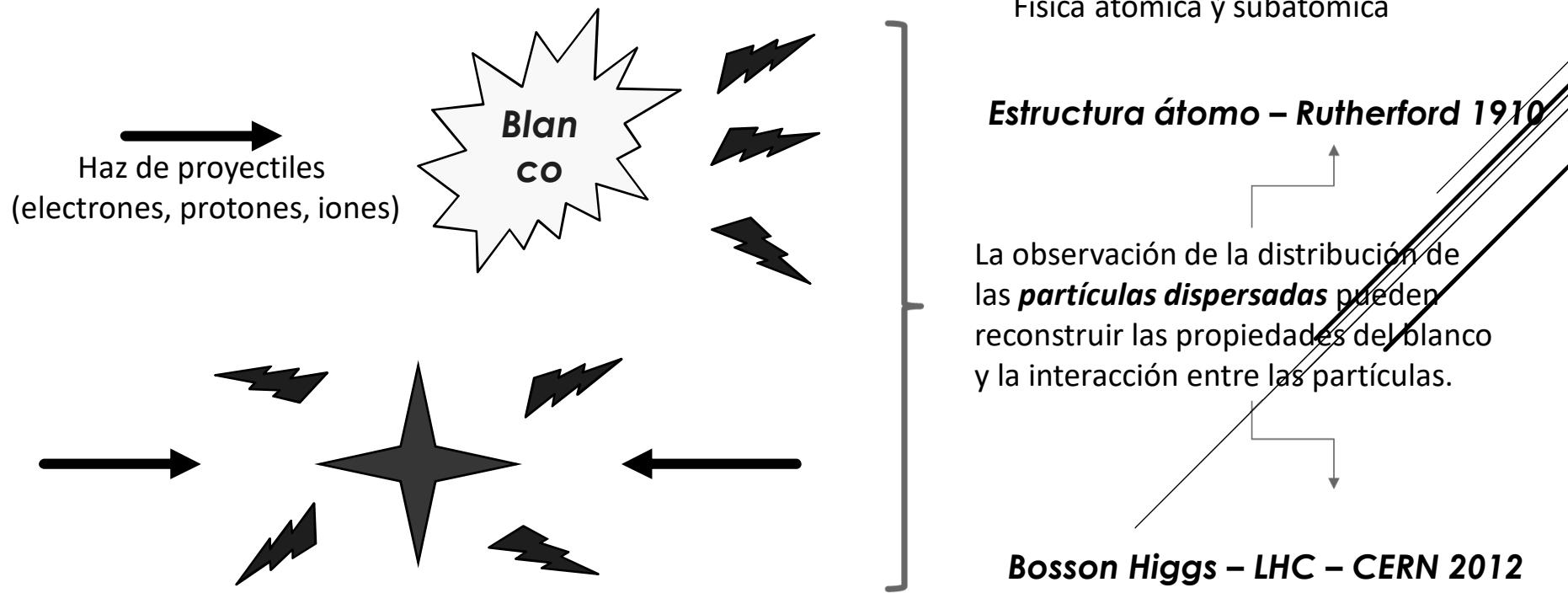
Parte de esta precesión se explica por *la presencia de otros planetas* que influyen y parte fue descubierta por *Einstein en el contexto de la Teoría General de la Relatividad*.



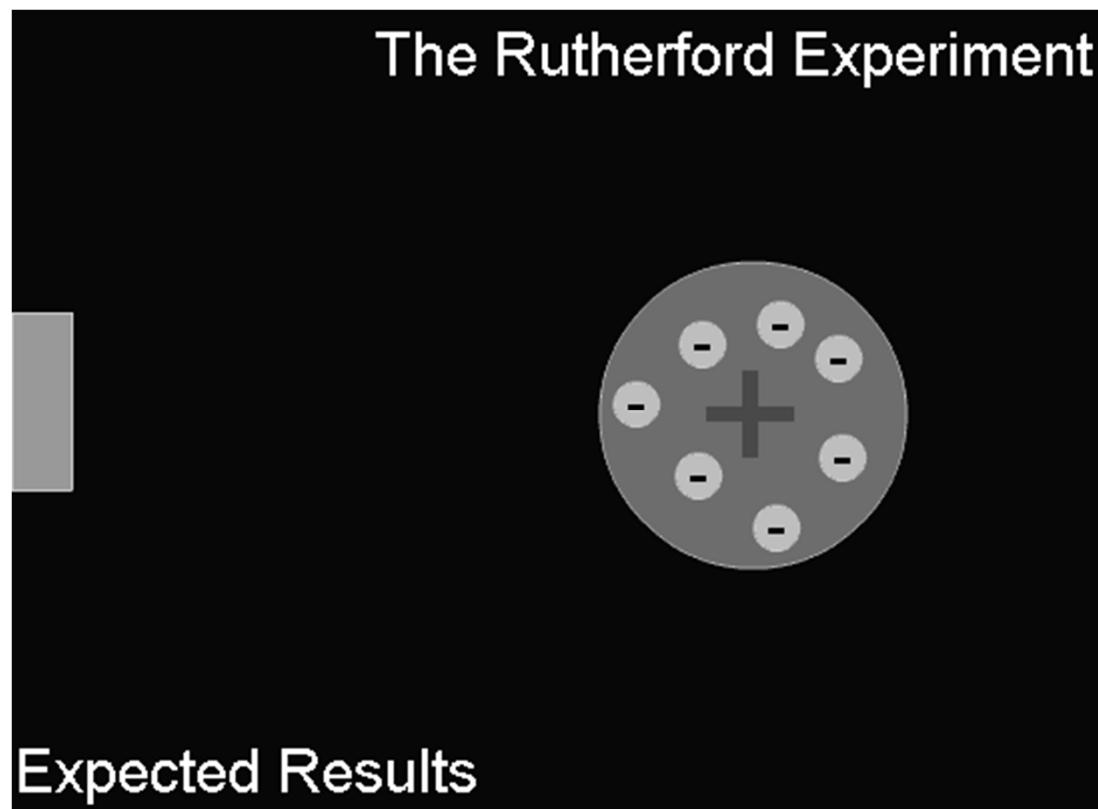
### El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Fenómeno de Dispersión o Scattering de las partículas

En el sistema solar → pocas órbitas hiperbólicas

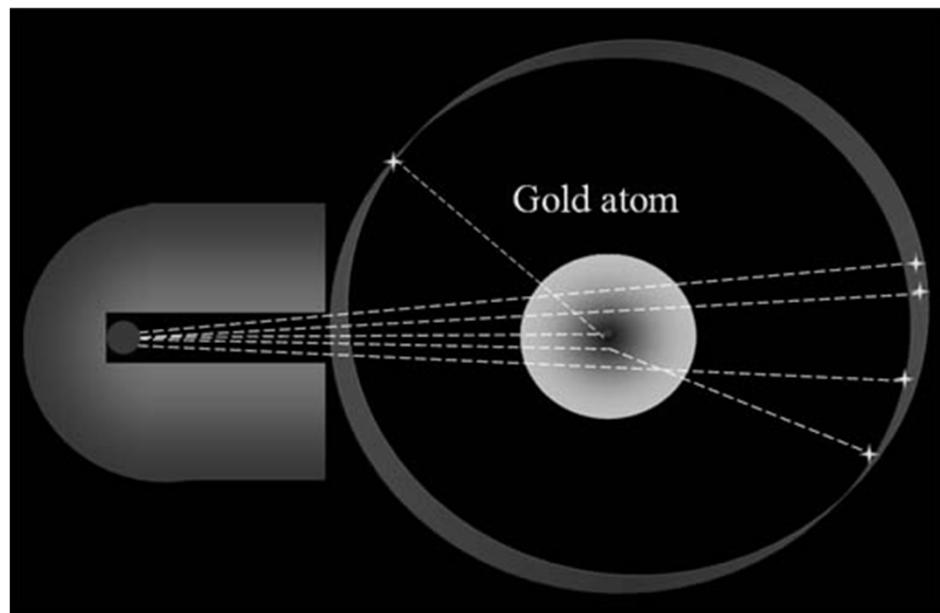
Las órbitas hiperbólicas describen la trayectoria de las partículas → experimentos de colisión de partículas



El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Scattering de las partículas: El experimento de Rutherford



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Scattering de las partículas: El experimento de Rutherford



Se bombardea con un haz de partículas  $\alpha$  una lámina delgada de oro.

Se observó:

- Muchas partículas siguen en la misma dirección.
- Algunas se desvían.
- Otras “rebotan”.

Se descubrió:

- Casi toda la masa del oro estaba concentrada en un pequeño Núcleo.
- El núcleo está cargado positivamente.

**Particular interés:** → **partículas desviadas** → **SCATTERING**

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:

Ángulo de Scattering: *Geometría del scattering de una partícula en un centro de fuerzas.*

Para describir el resultado del choque de dos partículas que interactúan mediante una fuerza central hay que resolver sus ecuaciones de movimiento según la teoría vista:  $r = r(t)$  y  $\phi = \phi(t)$

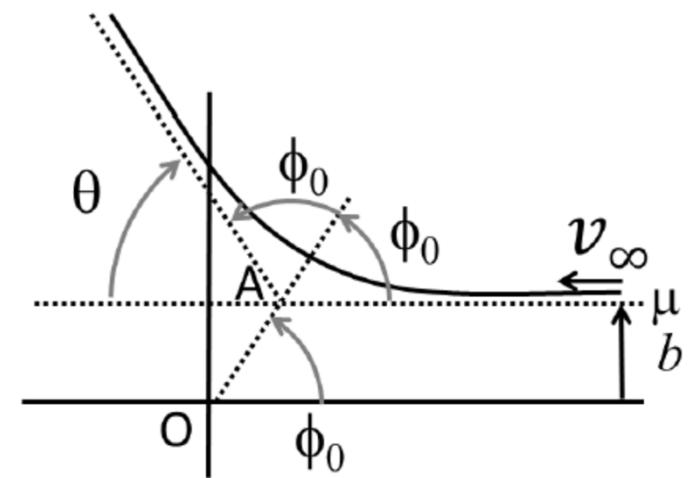
Se va a analizar la desviación de una partícula de masa  $\mu$  en un potencial central  $U(r)$ .

Se buscará el **ángulo de scattering** para una partícula que incide desde el infinito con cierta energía.

Para una partícula con suficiente energía la trayectoria es una hipérbola (una cónica tipo Kepler si el potencial es  $1/r$ ).

Como se vio anteriormente, la trayectoria es simétrica con respecto al punto de máximo acercamiento, el periapsis A, con dos asíntotas simétricas con respecto a la línea OA. El ángulo que se usa es  $\phi$

$\phi_0$  es el ángulo correspondiente al ápside. El ángulo de scattering, que se mide en los experimentos, es el ángulo  $\theta$ , relacionado con  $\phi$  de la siguiente manera:  $\theta = \pi - 2\phi_0$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering

La relación entre entre  $\phi$  y  $r$  (válida para cualquier potencial central) obtenida anteriormente:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 = \frac{2\mu}{L^2}(E - U) - \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{1}{L} \sqrt{2\mu(E - U) - \frac{L^2}{r^2}}$$

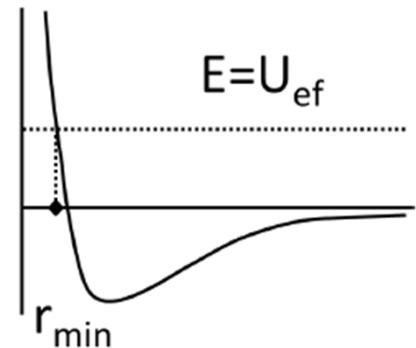
$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2\mu(E - U) - \frac{L^2}{r^2}} \Rightarrow \int d\phi = \int \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - L^2/r^2}}.$$

Para encontrar  $\phi_0$  podemos integrar entre  $r_{min}$  y  $r_{max}$ , es decir entre el áplice e  $\infty$ :

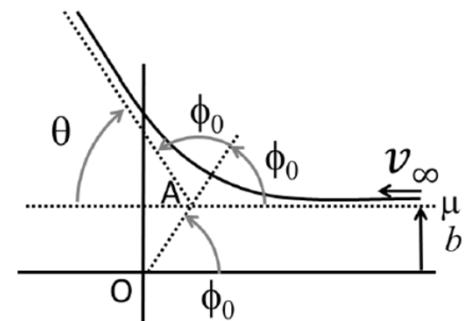
$$\int_{\phi_0}^{2\phi_0} d\phi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - L^2/r^2}} \Rightarrow \phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - L^2/r^2}}$$

donde  $r_{min}$  se indica en la figura superior.

Cuando se trata de una órbita abierta, en lugar de las constantes  $E$  y  $L$  conviene usar la *velocidad*  $v_\infty$  y el *parámetro de impacto*  $b$ . La relación entre ambos es:  $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$  y  $L = \mu b v_\infty$



**Una órbita abierta sólo tiene un punto de retorno,  $r_{min}$ .**



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Ángulo de Scattering

Sustituyendo:  $\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\mu bv_{\infty}}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \frac{\mu v_{\infty}^2}{2} - \frac{\mu^2 b^2 v_{\infty}^2}{r^2} - 2\mu U}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\mu bv_{\infty}/r^2 dr}{\mu v_{\infty} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_{\infty}^2}}} \Rightarrow \phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_{\infty}^2}}}.$

Si el potencial es  $U(r) = k/r$  ( $k$  positivo o negativo):  $\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2k}{\mu v_{\infty}^2 r}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r dr}{\sqrt{r^2 - b^2 - \frac{2k}{\mu v_{\infty}^2} r}},$

Integrando:  $\phi_0 = \text{acos} \frac{\frac{k}{\mu v_{\infty}^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{\mu v_{\infty}^2 b}\right)^2}}.$

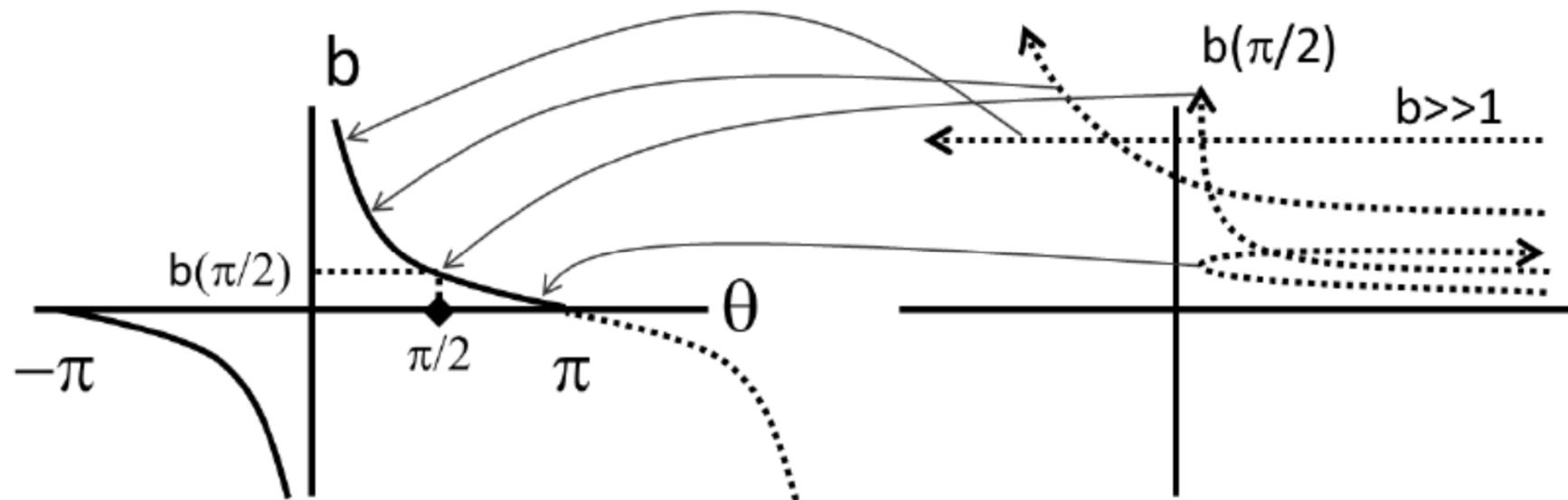
Reacomodando con  $\kappa = \frac{k}{\mu v_{\infty}^2} = \frac{k}{2T_{\infty}}$ ;  $T_{\infty}$  es la energía cinética en el infinito  $\cos \phi_0 = \frac{\kappa/b}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}},$

Considerar que:  $\cos \phi_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x = \frac{\kappa}{b}; y = 1 \quad \tan \phi_0 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\kappa/b} = \frac{b}{\kappa} \Rightarrow b = \kappa \tan \phi_0.$

Como  $\theta = \pi - 2\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow b = \kappa \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \kappa \cot \frac{\theta}{2} \Rightarrow b = \kappa \cot \frac{\theta}{2},$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:  
Ángulo de Scattering

$$b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}$$



Relación entre el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de scattering  $\theta$ , y representación de las trayectorias para distintos valores de  $b$  y una misma energía del proyectil. Notar que hay rebotes hacia atrás cuando el parámetro de impacto es pequeño.

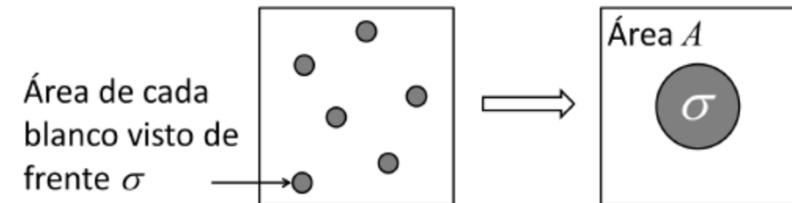
## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz

En experimentos de scattering no se tiene un único proyectil sino un haz compuesto por muchos proyectiles, cada uno con un parámetro de impacto diferente.

En una experiencia, el ángulo de scattering se mide fácilmente, el parámetro de impacto no se puede medir directamente.

La fórmula  $b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}$  no es útil. Se debe poder describir cómo deflecta el haz. Se usa el concepto de **Sección Eficaz**.

Se lanza un proyectil de tamaño despreciable hacia un blanco compuesto por esferas duras de radio  $R$ . El blanco visto de frente muestra una parte del blanco ocupada por los blancos individuales. Si la densidad de blancos es uniforme, se puede pensar que cada blanco ocupa un área  $\sigma = \pi R^2$  en medio de un área  $A$  por donde el proyectil puede pasar libremente.



*El blanco, compuesto por  $N_t$  esferas duras, visto de frente.*

La probabilidad de que ocurra un evento de scattering (por cada blanco):  $\text{prob scattering} = \frac{\text{área ocupada}}{\text{área total}} = \frac{\sigma}{A}$

Si el haz contiene  $N_p$  proyectiles puntuales contra el área  $A$ , el número de eventos de scattering será:

$$\#\text{eventos scattering} = N_{sc} = \frac{N_p \sigma}{A}$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz

Las partículas se cuentan considerándolas como un caudal (proyectiles por unidad de tiempo), o un flujo (por unidad de área).

La Sección Eficaz se define como:

$$\sigma = \frac{N_{sc}}{N_p/A} = \frac{N_{sc}/\Delta t}{N_p/(A\Delta t)} \equiv \frac{\# \text{ eventos por u.d.t.}}{\text{flujo de proyectiles}}.$$

En un experimento,  $N_{sc}$  se mide y  $\sigma$  se calcula.

$\sigma$  tiene unidades de área, o sea metros cuadrados. Pero las secciones eficaces atómicas y subatómicas son muy pequeñas para expresarlas en metros cuadrados. Por tanto, se mide en un submúltiplo que tiene aproximadamente la sección transversal de un núcleo atómico, llamado **barn**:

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2.$$

## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

El *camino libre medio* de una molécula en el aire.

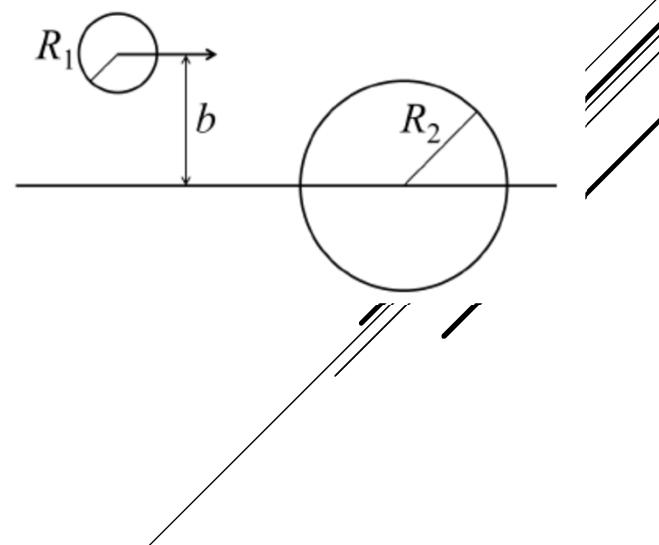
Las moléculas de  $N_2$  y de  $O_2$  son aproximadamente esferas de radio medio  $R \approx 0,15\text{nm}$ . Se quiere calcular la distancia promedio que una molécula **vuela** entre colisiones con otras moléculas. Es una cantidad representativa en muchas propiedades físicas del aire: conductividad, viscosidad, coeficiente de difusión, etc.

La colisión de dos esferas es un poco más complicada que la de una partícula contra una esfera.

Las esferas chocan sólo si el parámetro de impacto  $b \leq R_1 + R_2$ , es decir, si el centro del proyectil pasa dentro de una esfera de radio  $R_1 + R_2$  ubicada en el

centro del blanco. Por tanto,  $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$

En el caso del aire,  $R_1 \approx R_2 \Rightarrow \sigma = 4\pi R^2$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

Si se supone que todas las moléculas están quietas salvo una (proyectil) impactando sobre las demás.  
En una rodaja de espesor  $dx$  perpendicular a la trayectoria de esta molécula

hay una densidad de blancos:  $n_t = \frac{N_t}{V} dx$

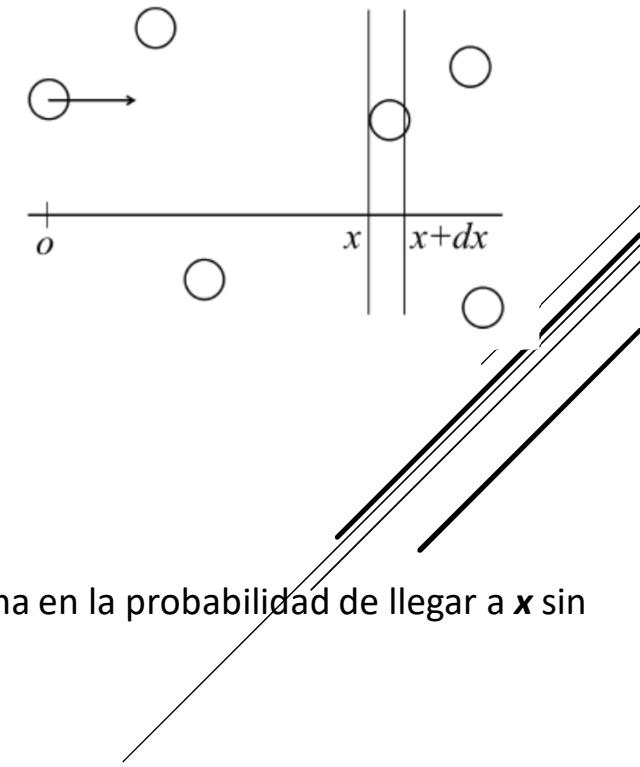
La probabilidad de colisión en esa rodaja es:  $p_c = n_t \sigma = \frac{N_t \sigma}{V} dx.$

La cantidad de moléculas que llegan a  $x + dx$  sin chocar es la cantidad que llegaron a  $x$  menos las que chocaron en la rodaja de espesor  $dx$ :

$$N(x + dx) = N(x) - N(x) \frac{N_t \sigma}{V} dx.$$

Dividiendo por la cantidad de moléculas proyectiles usados, la ecuación se transforma en la probabilidad de llegar a  $x$  sin chocar, y luego chocar entre  $x$  y  $x + dx$ :

$$p(x + dx) = p(x) - p(x) \frac{N_t \sigma}{V} dx.$$



## El problema de dos cuerpos y una fuerza central: Sección eficaz – Ejemplo: El camino libre medio

Si la rodaja es diferencial => la ecuación es diferencial. Reordenando:

$$\frac{p(x+dx) - p(x)}{dx} = -p(x) \frac{N_t \sigma}{V} \Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} = -\frac{N_t \sigma}{V} p(x) \Rightarrow p(x) = c e^{-\frac{N_t \sigma}{V} x}$$

donde  $C = \frac{N_t \sigma}{V}$  para que  $p(x)$  esté normalizada en  $(0, \infty)$  por ser una probabilidad.

El *camino libre medio* es el valor medio de  $x$ :  $\lambda = \langle x \rangle = \int_0^\infty x p(x) dx = \int_0^\infty x \frac{N_t \sigma}{V} e^{-\frac{N_t \sigma}{V} x} dx = \frac{V}{N_t \sigma} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{V}{N_t 4\pi R^2}}$

Usando valores, sabemos que hay  $N_{Av}$  moléculas en 22,4 litros:

$$\lambda = \frac{22.4 l}{N_{Av} 4\pi R^2} = \frac{22.4 \times 10^{-3} m^3}{6.02 \times 10^{23} 4\pi (0.15 \times 10^{-9} m)^2} \approx 0.132 \times 10^{-6} m \approx 130 nm.$$

Tamaño del át de oxígeno  $\approx 0,048$  nm

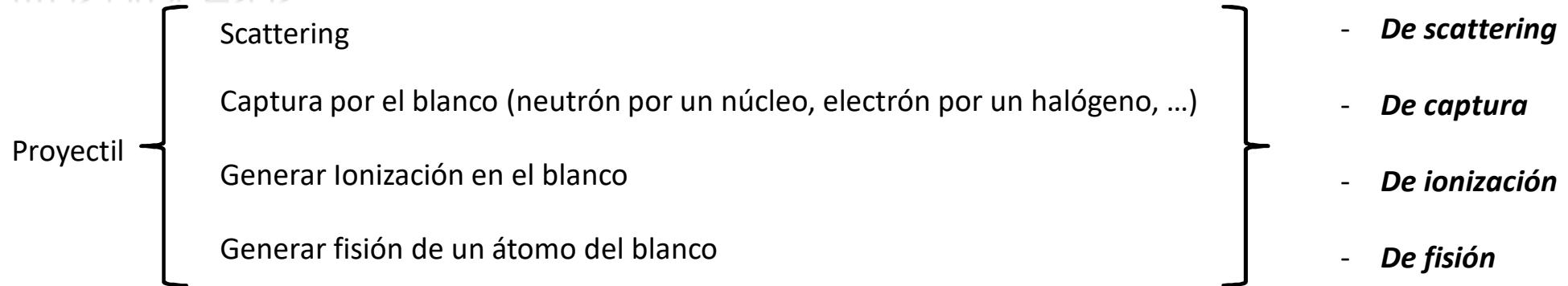
Dist interatómica de eq. en el  $O_2 \approx 1,208 \text{ \AA} \approx 0,1208 \text{ nm}$

Tamaño del át de nitrógeno  $\approx 0,056$  nm

Dist interatómica de eq. en el  $N_2 \approx 1,094 \text{ \AA} \approx 0,1094 \text{ nm}$

El problema de dos cuerpos y una fuerza central:

Otros procesos:



$$\sigma_{cap} = N_{cap}/n_p.$$

$$\sigma_{ion} = N_{ion}/n_p.$$

$n_p$ : número de proyectiles por unidad de área transversal a la dirección incidente

$$\sigma_{tot} = \sigma_{cap} + \sigma_{sc}.$$

$$\sigma_{tot} = N_{tot}/n_p.$$