

MECÁNICA LAGRANGIANA

MECÁNICA RACIONAL – 2018

La formulación Lagrangiana de la Mecánica

Dinámica analítica:

Tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos.

Se tratan por separado:

- Consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento: se formulan las ***coordenadas, vínculos y magnitudes cinéticas*** del sistema dado.
- Consideraciones puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones: los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso)

* Joseph Louis Lagrange - *Mécanique Analytique* (1788)

* William Rowan Hamilton (1805-1865)

La formulación Lagrangiana de la Mecánica

Las ecuaciones de Lagrange son una formulación de la Mecánica equivalente a la de las ecuaciones de Newton.

Ventajas:

- Tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas.
- Permiten describir la dinámica ignorando las fuerzas de vínculo, que en general son desconocidas y que muchas veces no interesa conocer.
- Las ecuaciones de Lagrange son derivables de un principio variacional, tal como demostró Hamilton en la década de 1830.
- El principio de Hamilton encuentra generalizaciones más allá de la Mecánica Clásica, en la Teoría de Campos y finalmente en la Mecánica Cuántica.

Las ecuaciones de Lagrange

Una Partícula sin vínculos:

Sea una partícula en ***IR***³, sujeta a fuerzas conservativas.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = U(\vec{\mathbf{r}}) = U(x, y, z)$$

El lagrangiano \mathcal{L} se define como:

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Sus derivadas parciales serán:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \text{ la fuerza en dirección } x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x, \text{ el momento lineal en dirección } x$$

De la misma forma se trabaja en las direcciones y y z .

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

Derivando la segunda expresión respecto del tiempo y usando la Segunda Ley de Newton ($F_x = \dot{p}_x$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{p}_x = F_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Generalizando en x , y y z :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x},$$

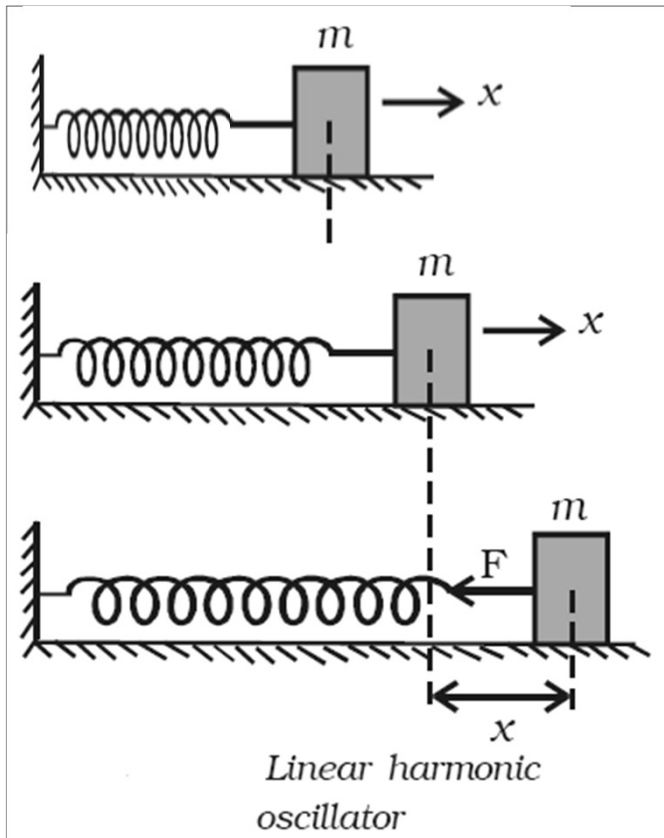
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}$$

Las *ecuaciones de Lagrange* (en coordenadas cartesianas) son equivalentes a las de Newton

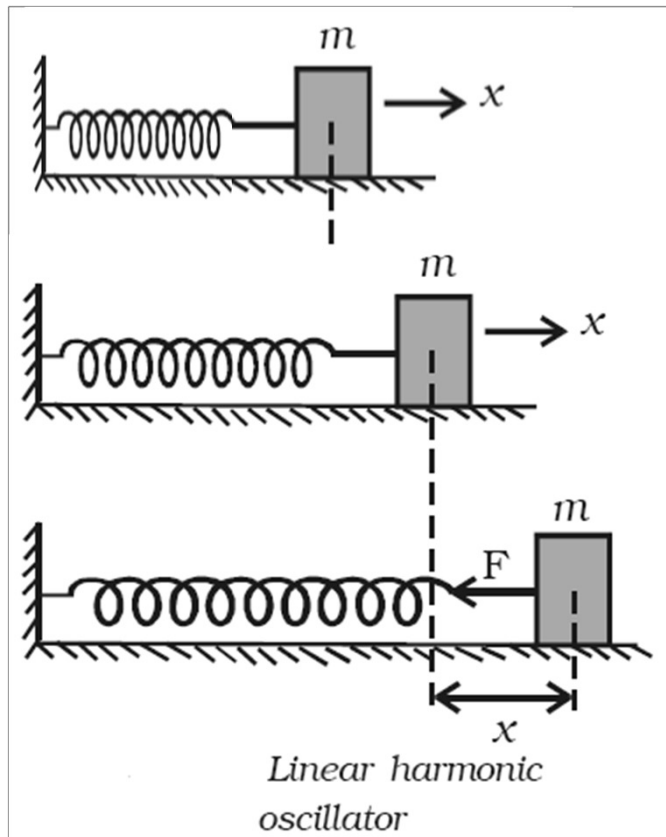
Las ecuaciones de Lagrange

Oscilador armónico simple:



Las ecuaciones de Lagrange

Oscilador armónico simple:



$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m \ddot{x} + kx = 0$$

Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos y Coordenadas generalizadas:

Caso de coordenadas no cartesianas

- Problemas con una simetría evidente (existencia de un eje de simetría)
- Las partículas pueden estar obligadas a moverse de determinada manera (pista, riel, en contacto con cuerpos)



VINCULOS

En estos casos se usarán coordenadas adecuadas a cada tipo de problema



COORDENADAS GENERALIZADAS

Las expresiones de las componentes de la aceleración en coordenadas no cartesianas pueden ser muy complicadas. En polares son complicadas (en coordenadas arbitrarias mucho más). Esto hace que la Segunda Ley de Newton sea difícil de usar en coordenadas no cartesianas. El método de Lagrange, que es equivalente al de Newton, funciona de forma excelente en *coordenadas generalizadas*.

Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

Dado un sistema de N partículas \longrightarrow tendrá $3N$ coordenadas cartesianas

Si no existen vínculos entre ellas, entonces tenemos $3N$ coordenadas independientes.

Si existen vínculos entre las coordenadas, entonces disminuye la cantidad de coordenadas independientes.

A veces los vínculos son relaciones geométricas del tipo: $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, y se llaman *holónomos*

Las ecuaciones de Lagrange

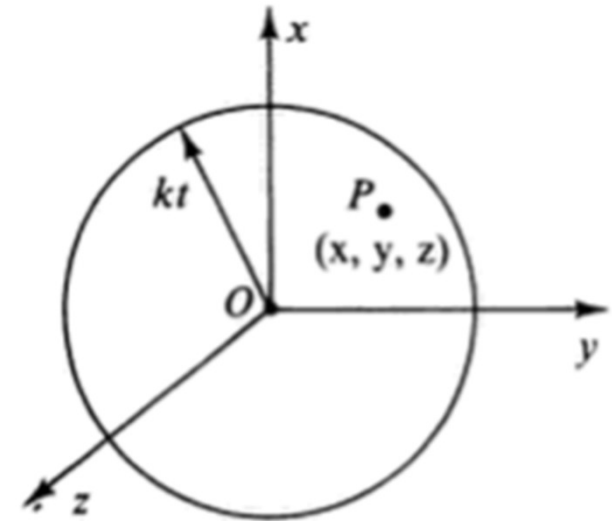
Vínculos:

Suponga una partícula que se mueve sobre una esfera cuyo radio crece proporcional al tiempo ($R = kt$)

Si la esfera está centrada en el origen O , las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ cumplen: $x^2 + y^2 + z^2 = k^2 t^2$.

La función $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - k^2 t^2 = 0$ es un **vínculo holónomo**.

Se podrá despejar una coordenada en función de las demás. La descripción puede hacerse con una coordenada menos.



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

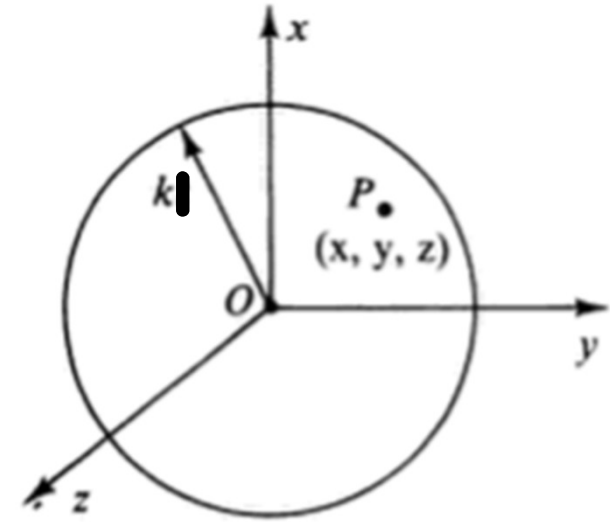
Suponga una partícula que se mueve en el interior de una esfera cuyo radio es $R = k = cte$

Si la esfera está centrada en el origen O , las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ cumplen: $x^2 + y^2 + z^2 < k^2$.

Este vínculo es **no holónimo o anholónimo**.

Podrían haber vínculos que pueden expresarse como funciones de coordenadas y de las velocidades de esas coordenadas y eventualmente del tiempo: $f(\vec{r}_\alpha, \dots, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0$.

Este vínculo también se denomina **no holónimo o anholónimo**.



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

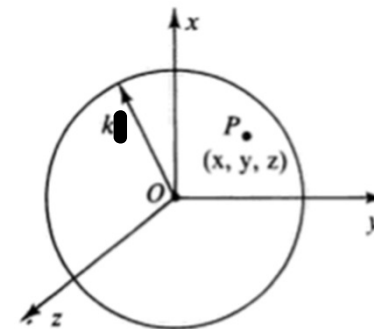
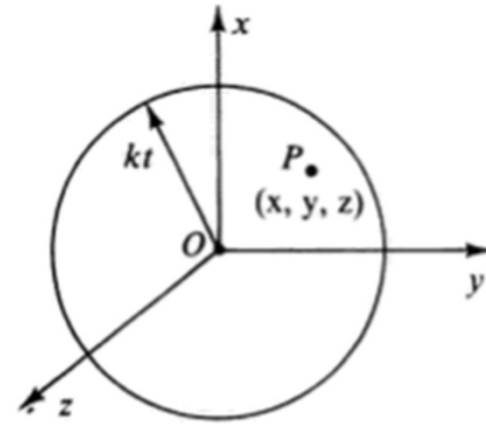
Hay otra clasificación posible.

Hay vínculos cuya expresión funcional involucran *explícitamente* al tiempo.

Este vínculo se denomina **reónomo**. $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, El caso de la partícula que se mueve sobre la superficie esférica de radio creciente es el caso de un vínculo **reónomo**. ($f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - k^2 t^2 = 0$)

Hay otros vínculos que no dependen *explícitamente* con el tiempo.

Este tipo de vínculo se denomina **esclerónomo**. El ejemplo de la partícula que se mueve en un volumen esférico de radio R sin tocar su superficie es un caso de vínculo **esclerónomo**. (Ec vínculo: $x^2 + y^2 + z^2 < k^2$)



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

Ejemplo:

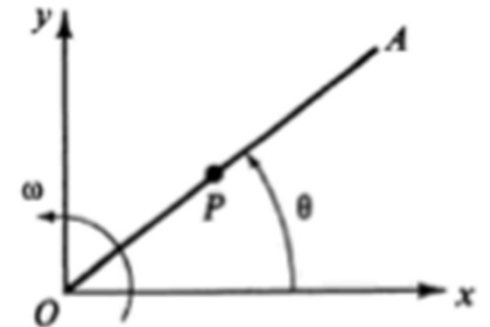
Una barra OA gira alrededor de un extremo fijo O con ω constante. Una partícula de masa m se mueve libremente a lo largo de la barra con velocidad constante: $u = kt$

P tiene una velocidad \vec{v} que puede descomponerse en la dirección radial \vec{u} y en la dirección tangencial \vec{w} de la siguiente manera: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow v^2 = u^2 + w^2$

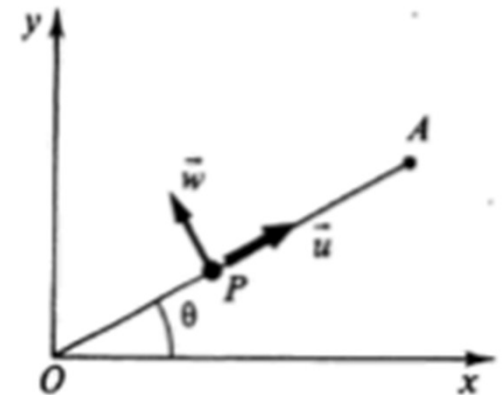
$$w = r\omega \text{ y } u = kt = \dot{r} \Rightarrow r = kt^2$$

El vínculo de velocidades es reónomo y no holónomo al quedar:

$$v^2 = k^2 t^2 + k^2 \omega^2 t^4 \quad \text{o también: } v = kt\sqrt{1 + \omega^2 t^2} \quad f(\vec{r}; \vec{v}; t) = 0$$



El punto material P se mueve en un vínculo reónomo.



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos: Grados de libertad

Cada ecuación de un vínculo holónomo permite despejar una de las coordenadas en función de las otras, reduciendo el número de las ecuaciones dinámicas, hasta obtener:

$$n = 3N - \# \text{ ec. de vínculo}$$

n: número de grados de libertad

Para describir la posición de un sistema, se necesitan $n \leq 3N$ coordenadas independientes.

Las ecuaciones de Lagrange

Coordenadas generalizadas: un conjunto cualquiera de parámetros $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, que sirven para determinar de manera unívoca la *configuración del sistema*.

Las n coordenadas generalizadas (independientes) se eligen.

Dado un sistema de N partículas con posiciones $\vec{r}_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ se dice que $\{q_1, \dots, q_n\}$ son *coordenadas generalizadas* del sistema si cada posición r_α puede escribirse como una función de las q_i :

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Y recíprocamente, cada q_i puede escribirse como una función de las posiciones r_α :

$$q_i = q_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

El espacio de las q_i se llama ***espacio de configuraciones***.

El sistema completo está definido por un punto en este espacio. El problema principal consiste en encontrar la evolución temporal de ese punto. Basta conocer una configuración $q_i(t_0)$ a un tiempo dado y además todas las *velocidades generalizadas* $\dot{q}_i(t_0)$. Conociendo $q_i(t_0)$ y $\dot{q}_i(t_0)$ queda determinado todo el movimiento posterior.

Las ecuaciones de Lagrange

Coordenadas generalizadas:

El movimiento está determinado por las ecuaciones de Lagrange. Tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n}$$

para vínculos holónomos

Nota: Las derivadas de \mathcal{L} en coordenadas cartesianas dan las componentes de la fuerza y del momento lineal. En coordenadas generalizadas se denomina:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = \text{fuerza generalizada sub } i,$$

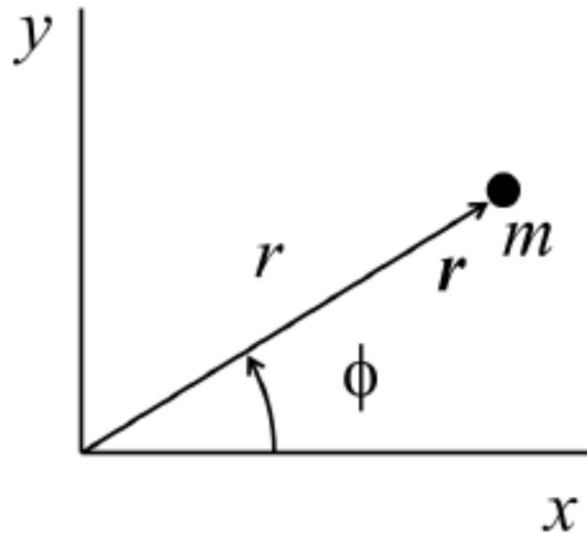
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{momento generalizado sub } i,$$

Así como las unidades de las coordenadas generalizadas pueden no ser longitudes (pueden ser ángulos, por ejemplo), las unidades de las fuerzas y los momentos generalizados no necesariamente son de fuerza o de momento. Pueden ser torques y momentos angulares, o incluso otras magnitudes.

Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación:

Encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en 2D, usando coordenadas polares como coordenadas Generalizadas. Use método Lagrange.



Las ecuaciones de Lagrange

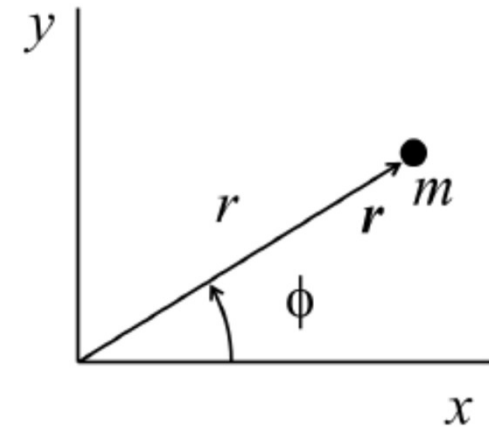
Ejemplo de aplicación:

Encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en 2D, usando coordenadas polares como coordenadas generalizadas

Coordenadas cartesianas $(x, y) \Rightarrow$ coordenadas polares (r, ϕ)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r, \phi).$$



Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación:

Ecuación radial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \xRightarrow{\text{derivar}} mr\dot{\phi}^2 \underbrace{- \frac{\partial U}{\partial r}}_{F_r \text{ (fuerza radial)}} = \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r},$$

$\xrightarrow{\hspace{10em}} \mathbf{a}_R$

$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$

Ecuación angular:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \xRightarrow{\text{derivar}} \underbrace{- \frac{\partial U}{\partial \phi}}_{\text{¿qué es esto?}} = \frac{d}{dt} mr^2 \dot{\phi}$$

Calcular $\mathbf{F} = -\nabla U$ en polares para interpretar esta ecuación.

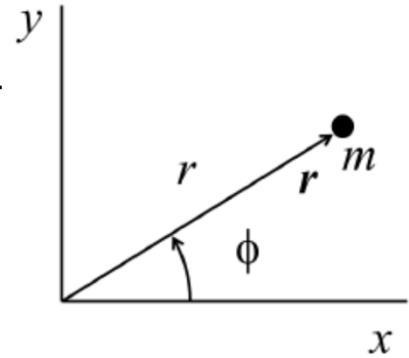
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow F_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi,$$

$mr^2 \dot{\phi} \Rightarrow$ momento angular respecto al origen

$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi \Rightarrow$ torque respecto al origen

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = rF_\phi$$



Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación: El péndulo plano

La principal ventaja práctica del método de Lagrange es su capacidad de encontrar las ecuaciones de movimiento de sistemas con vínculos, ignorando las fuerzas. Un ejemplo de este tipo de sistemas es un péndulo plano.

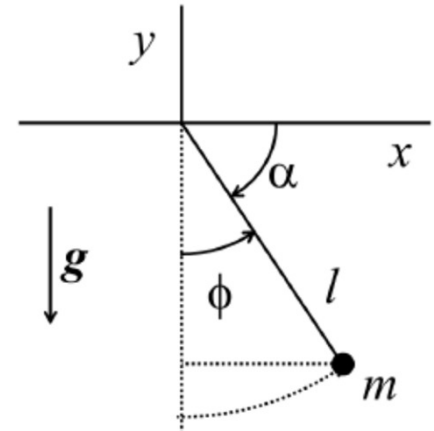
1 partícula \rightarrow 2 coordenadas cartesianas $(x, y) \rightarrow$ 1 ec vínculo: $x^2 + y^2 = l^2$

$n = 2 - 1 = 1$ grado de libertad \rightarrow 1 coordenada generalizada que se elige (puede ser x o y)

$y = \sqrt{l^2 - x^2} \rightarrow$ las raíces cuadradas pueden complicar el cálculo.

Por la geometría del problema, conviene adoptar coordenadas polares:

$$x = l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi.$$



$$T = \cancel{\frac{1}{2}ml^2} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2.$$

$$U = mg \times \text{altura} = mg(-y) = mg(-l \cos \phi) = -mgl \cos \phi.$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación: El péndulo plano

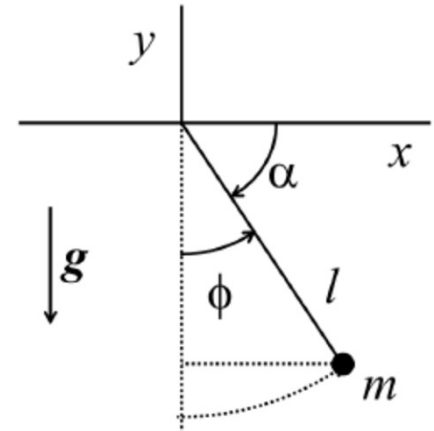
Derivando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \phi} (mgl \cos \phi) = mgl \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi) = -mgl \sin \phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}^2 \right) = ml^2 \dot{\phi} \xrightarrow{d/dt} ml^2 \ddot{\phi}.$$

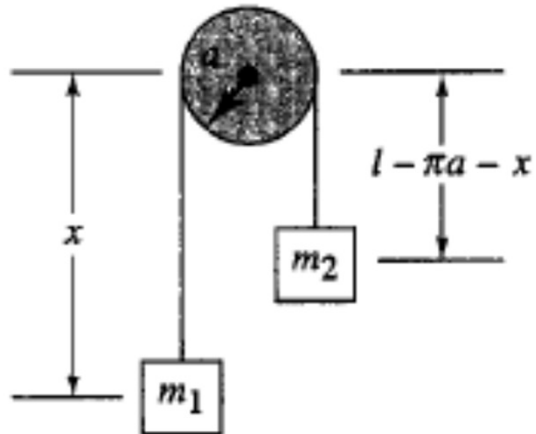
$$\Rightarrow \underbrace{-mgl \sin \phi}_{\text{torque resp. O}} = \underbrace{ml^2}_{\text{mom. inercia}} \ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi} \quad \text{Ecuación de movimiento.}$$



Las ecuaciones de Lagrange

Máquina de Atwood:



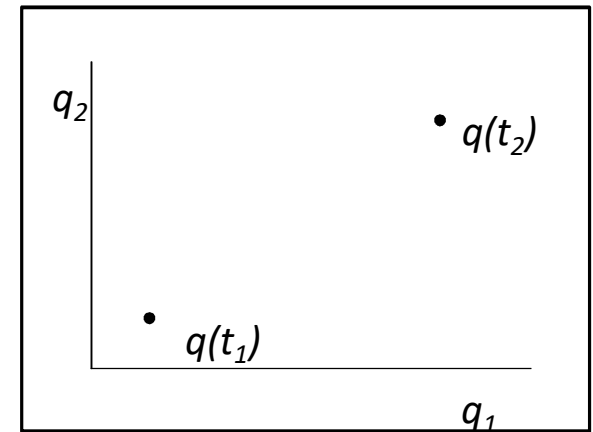
Principio de Hamilton y Cálculo de variaciones

Principio de Hamilton (1830): Deduce las ecuaciones de Lagrange

Punto $q(t_1)$: estado de un sistema a tiempo t_1 del espacio de configuraciones

Punto $q(t_2)$: ídem a tiempo t_2 .

Al avanzar el tiempo la configuración del sistema cambia: las partículas se mueven, los cuerpos rotan, etc. Cada punto representa *la configuración entera* del sistema.



De manera que el ***estado*** del sistema sigue una trayectoria $q(t)$ en ese espacio.

Esta trayectoria no necesariamente tiene una conexión obvia con las trayectorias de las partículas en el espacio físico!!!

Principio de Hamilton y Cálculo de variaciones

Principio Variacional de Hamilton o Principio de Acción Mínima:

Hamilton demostró que, si todas las fuerzas (excepto las de vínculo) son derivables de potenciales (que dependan de la posición, de las velocidades y del tiempo), entonces:

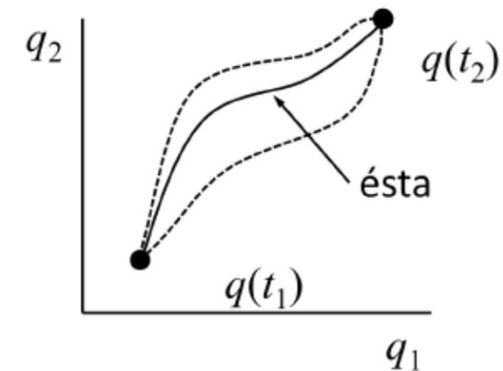
La evolución del sistema entre t_1 y t_2 es tal que la integral $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ tiene

un valor mínimo (estrictamente: estacionario) sobre la trayectoria real del sistema, con respecto a variaciones de trayectoria.

De todas las posibles trayectorias que conectan $q(t_1)$ con $q(t_2)$, la integral S (llamada *acción*) evaluada sobre la trayectoria que realmente sigue el sistema tiene el **menor valor**.

Si los vínculos son holónomos, el Principio de Hamilton es necesario y suficiente para que valgan las ecuaciones de Lagrange.

\mathcal{L} está construido con T y U , que son escalares. Así que \mathcal{L} también es escalar, y S también. Por esto, no dependen del sistema de coordenadas, a diferencia de los vectores que aparecen en la Segunda Ley de Newton. Así que las ecuaciones de movimiento tendrán la misma forma lagrangiana sin importar cómo se elijan las coordenadas generalizadas.



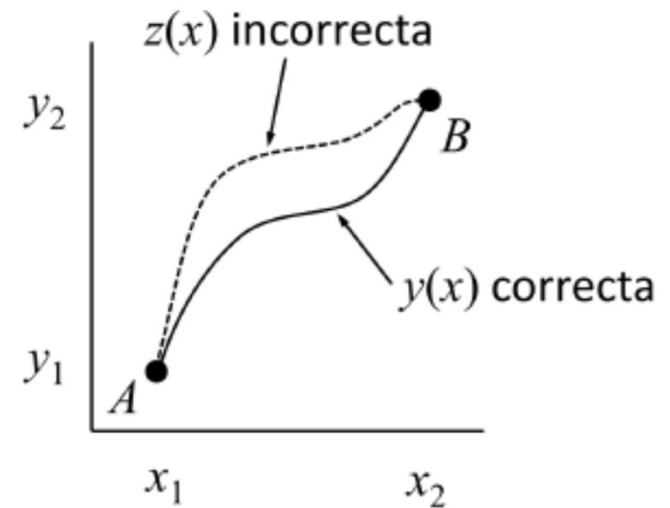
Cálculo de variaciones

Se busca encontrar el mínimo, o el máximo, de una cantidad que podemos expresar como una integral (por ej, el camino más corto entre dos puntos). En general:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

donde $y(x)$ es una curva desconocida, que conecta los puntos $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$. De entre todas las curvas A - B se debe encontrar la que hace que S sea mínima (o máxima, o al menos extrema). La idea es similar a encontrar el mínimo o el máximo de una función $f(x)$. ($\frac{df}{dx} = 0$, y hay tres casos, según sea $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$. Cuando se satisface $\frac{df}{dx} = 0$ y no se conoce nada de la segunda derivada, se dice que f es extrema).

Este método deja a S extrema (o estacionaria).



Cálculo de variaciones

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

$y = y(x)$ es la solución correcta y $z(x)$ es cualquier otra trayectoria que pasa por A y B, la “variación”: $z(x) = y(x) + \delta y$.

Se sabe que $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ porque $y(x)$ y $z(x)$ coinciden en A y B.

¿Cómo cambia f ante la variación dada por δy ? $\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'$.

Regla de la cadena

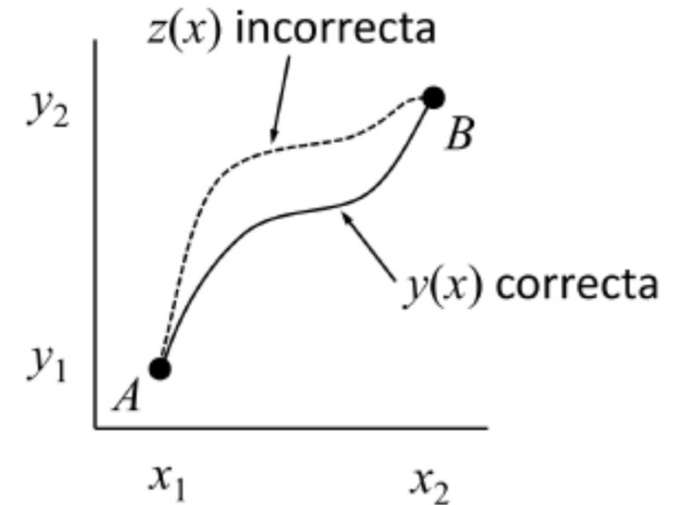
Qué es $\delta y'$? $\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \delta y$.

Entonces: $\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx$.

Analizando el segundo término:



$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \delta y}_{v'} dx$$



Paréntesis matemático

Integración por partes:

La regla del producto establece que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] dx = \int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx + \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x)$$

Si $f(x) = u$ y $g(x) = v \Rightarrow \int u' \cdot v \cdot dx + \int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v$

$$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$$

$$\int u \cdot v' \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}; v = \delta y$$

Cálculo de variaciones

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \delta y}_{v'} dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_u \underbrace{\delta y}_v \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\delta y}_v \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}}_{u'} dx.$$

El primer término de la expresión se anula porque $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$



$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx. \end{aligned}$$

Para que S tenga un extremo, S debe anularse para variaciones δy *arbitrarias*, lo cual es posible solamente si el paréntesis que tenemos en el integrando es idénticamente nulo:

Ecuación de Euler - Lagrange $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$

Las ecuaciones de la Mecánica

Hamilton demostró que las ecuaciones de la Mecánica son las ecuaciones de Lagrange que se derivan del principio variacional que ya se mencionó: la integral $S = \int \mathcal{L} dt$ tiene un valor estacionario sobre la trayectoria real del sistema, respecto de variaciones de trayectoria.

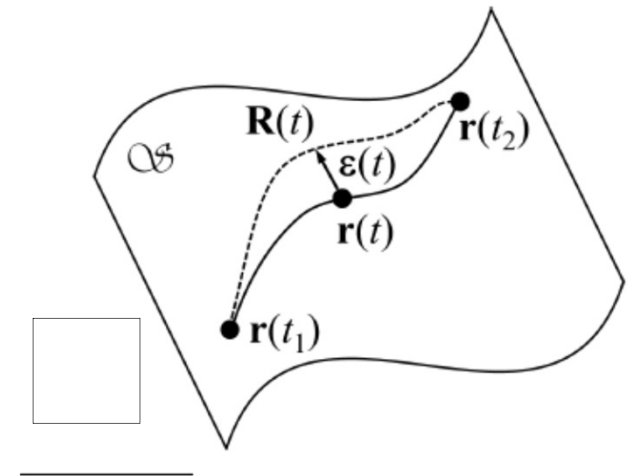
Sigue una demostración simplificada que de todos modos contiene las ideas fundamentales de la demostración más general.

Suponga una partícula, restringida a moverse sobre una superficie debido a un vínculo holónomo, y sometida a fuerzas conservativas además de las de vínculo. La fuerza total sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v - \nabla U(\mathbf{r}).$$

Sean \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 dos puntos de la superficie, por donde pasa la partícula a tiempo t_1 y t_2 . Sea $\mathbf{r}(t)$ el camino “correcto” (el que dan las ecuaciones de Newton) y $\mathbf{R}(t)$ una variación cercana sobre la superficie:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon(t).$$



Las ecuaciones de la Mecánica

Como \mathbf{R} y \mathbf{r} están sobre la superficie, $\boldsymbol{\epsilon}$ también lo está, a todo tiempo. Además,

$$\boldsymbol{\epsilon}(t_1) = \boldsymbol{\epsilon}(t_2) = 0.$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) dt \quad \text{sobre } \mathbf{R}, \quad S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt \quad \text{sobre } \mathbf{r}.$$

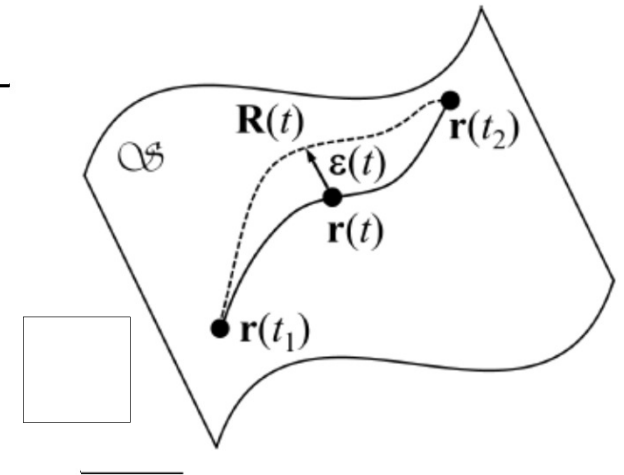
Se quiere demostrar que $\delta S = S - S_0 = \int (\mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)) dt = \int \delta \mathcal{L} dt$ es cero

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 - U(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}})^2 - U(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}),$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m [(\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}})^2 - \dot{\mathbf{r}}^2] - [U(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}) - U(\mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}^2 + 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2) - [\cancel{U(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla U - \cancel{U(\mathbf{r})} + o(\epsilon^2)] \quad (\text{Taylor}) \\ &= m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla U + o(\epsilon^2), \end{aligned}$$

donde $o(\epsilon^2)$ son los términos en potencias superiores de $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, que se va a ignorar



Las ecuaciones de la Mecánica

A primer orden en ϵ :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} (m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\epsilon} - \epsilon \cdot \nabla U) dt.$$

La integral del primer término puede hacerse por partes ($\dot{\mathbf{r}} = u$, $d\epsilon = dv$, $\Rightarrow \epsilon = v$, $\ddot{\mathbf{r}} dt = du$)

$$\int m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\epsilon} dt = \int m \dot{\mathbf{r}} \cdot d\epsilon = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \epsilon \Big|_{t_1}^{t_2} - \int m \epsilon \cdot \ddot{\mathbf{r}} dt$$

y el primer término se anula porque $\epsilon(t_1) = \epsilon(t_2) = 0$.

Así:

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} (m \epsilon \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \epsilon \cdot \nabla U) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \cdot (m \ddot{\mathbf{r}} + \nabla U) dt.$$

$\mathbf{r}(t)$ es el camino “correcto”, donde valen las leyes de Newton. Así que $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_v - \nabla U$:

$$\Rightarrow \delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \cdot (\mathbf{F}_v - \nabla \mathcal{U} + \nabla \mathcal{U}) dt.$$

Las ecuaciones de la Mecánica

Pero la **fuerza de vínculo es normal** a la superficie, $\mathbf{F}_v \perp \boldsymbol{\epsilon}$, por tanto $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{F}_v = 0$ y queda $\delta S = 0$ sobre el camino $\mathbf{r}(t)$

Entonces la acción S es extrema para variaciones que están sobre la superficie (es suficiente).

Se trata de una partícula sometida a **un vínculo holónomo** que la obliga a mantenerse sobre la superficie. Es decir, se tienen dos grados de libertad y dos coordenadas generalizadas q_1 y q_2 independientes.

Cualquier variación de q_1 y q_2 deja la partícula sobre la superficie. Así que la transformación entre coordenadas cartesianas y generalizadas permite reescribir el lagrangiano, que da la misma acción, en términos de q_1 y q_2 :

$$S = \int \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt$$

y esta acción es extrema para cualquier variación del camino correcto sobre la superficie, es decir para cualquier variación de q_1 y q_2 . Por lo tanto el camino “correcto”, la trayectoria mecánica de la partícula, satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}.$$

Para un sistema de N partículas, con m vínculos holónomos y n grados de libertad, en cuyo caso se obtiene que las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Newton.

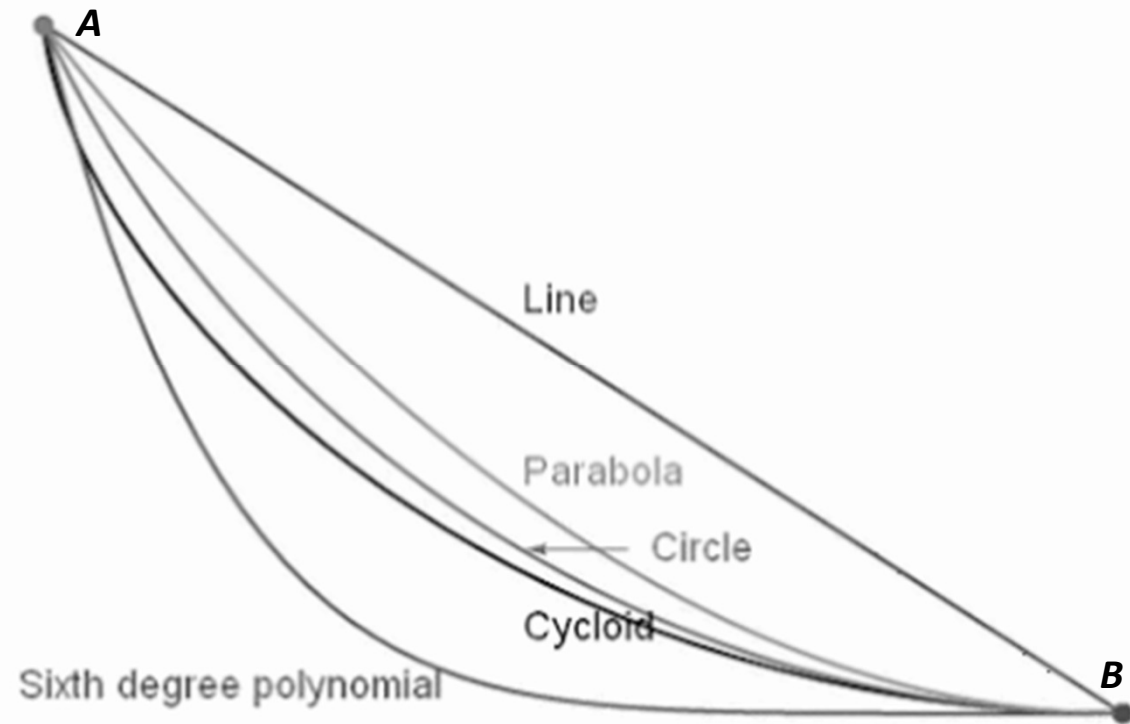
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}; \quad i = 1, \dots, n}$$

El problema de la Braquistócrona

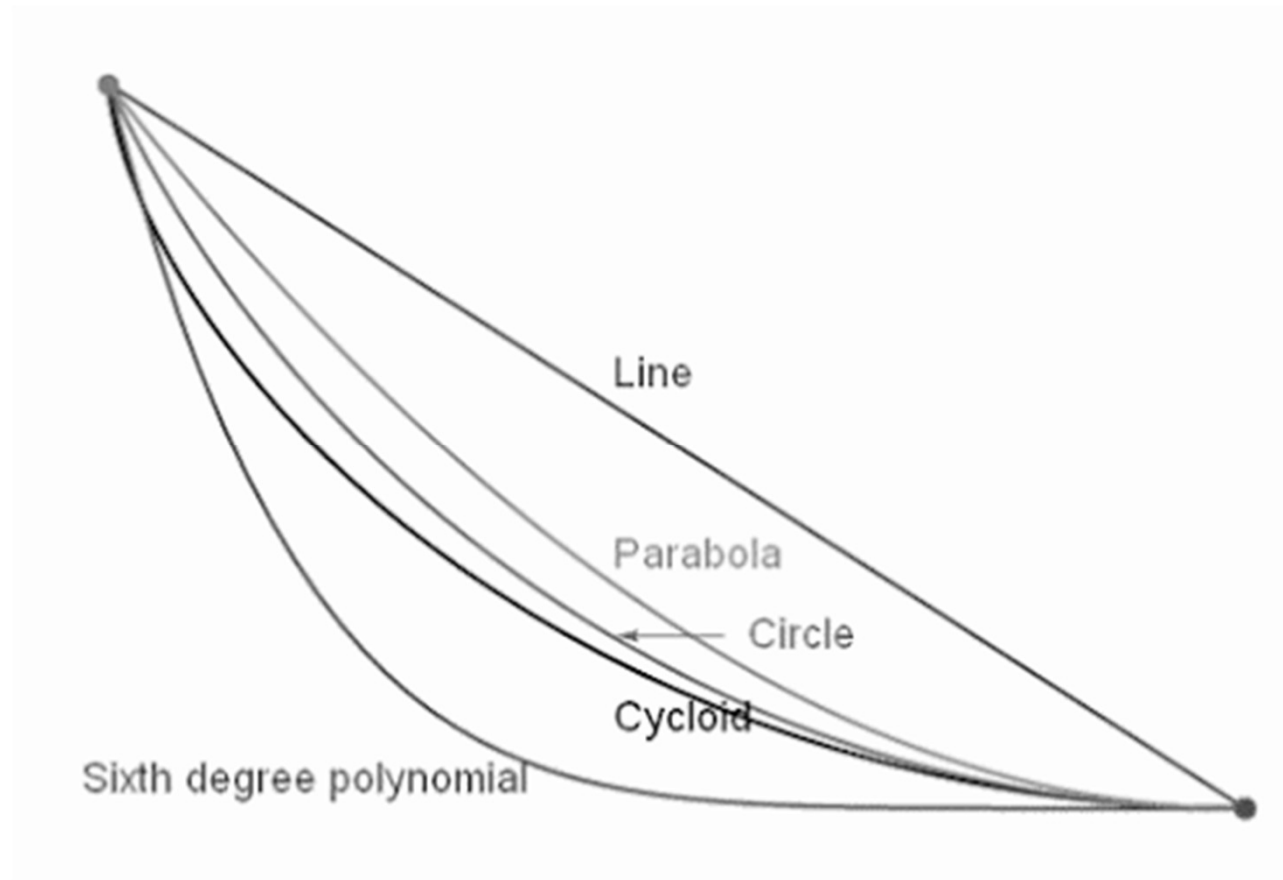
Es un problema muy conocido. A través de él, Bernoulli sentó los fundamentos del cálculo variacional

Dados dos puntos en un plano vertical, A y B , ¿cuál es la forma de la trayectoria que debe seguir una partícula para llegar de A a B , por acción de la gravedad, en el menor tiempo posible?

Braquistócrona, del griego, significa “mínimo tiempo”.



El problema de la Braquistócrona



El problema de la Braquistócrona

El tiempo de viaje de A a B es: $t(A \rightarrow B) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}$, con ds a lo largo de la trayectoria.

La energía es $E = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgx_A = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$, por tanto: $v = \sqrt{2gx}$.

Además, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + y'(x)^2 dx^2} = \sqrt{y'(x)^2 + 1} dx$, dado que $y'(x) = dy/dx$.

El tiempo será: $t(A \rightarrow B) = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}} dx$.

Se tiene un problema variacional. El integrando está dado por: $f(y, y', x) = \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}}$.

Para encontrar la trayectoria se debe aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a esta función f $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$.

El problema de la Braquistócrona

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{y'(x)^2 + 1}}{\sqrt{x}}. \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ porque } f \text{ es independiente de } y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}} = \text{constante}.$$

Es una ecuación diferencial ordinaria compleja que puede simplificarse elevándola al cuadrado:

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{2a}{x} = \frac{1+y'^2}{y'^2} = \frac{1}{y'^2} + 1 \Rightarrow \frac{2a}{x} - 1 = \frac{2a-x}{x} = \frac{1}{y'^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}},$$

Se puede escribir como integral: $\int dy = y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$

Esta ecuación puede resolverse realizando el siguiente cambio de variable: $x = a(1 - \cos \theta) \Rightarrow dx = a \sin \theta d\theta,$

El problema de la Braquistócrona

$$\int dy = y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$$

$$\boxed{x = a(1 - \cos \theta)} \Rightarrow dx = a \sin \theta d\theta,$$

$$y = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{2a - a + a \cos \theta}} a \sin \theta d\theta = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a + a \cos \theta}} a \sin \theta d\theta$$

$$= a \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta = a \int \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} d\theta$$

$$= a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta}} d\theta = a \int \sqrt{(1 - \cos \theta)^2} d\theta = a \int (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{y = a(\theta - \sin \theta) + c.}$$

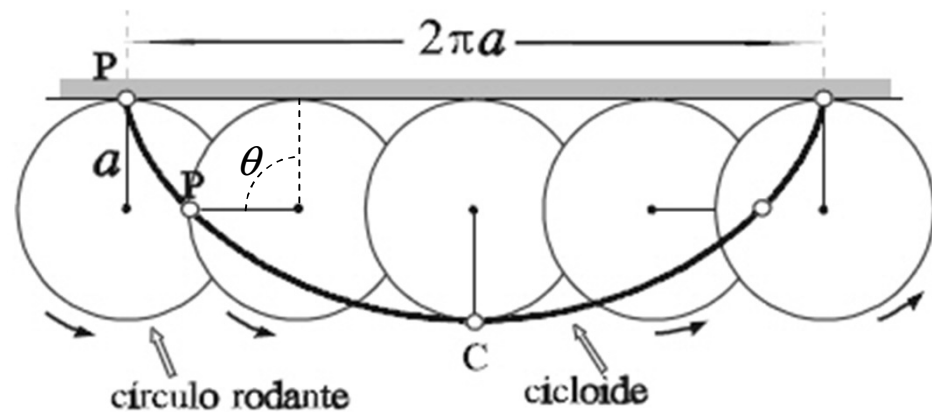
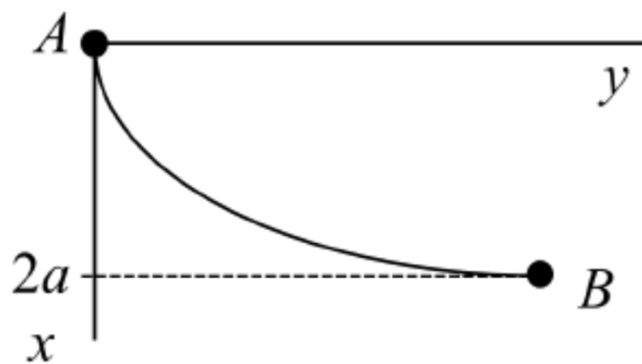
El problema de la Braquistócrona

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad y = a(\theta - \sin \theta) + c.$$

Son ecuaciones paramétricas de la curva buscada, dando x e y en función de θ .

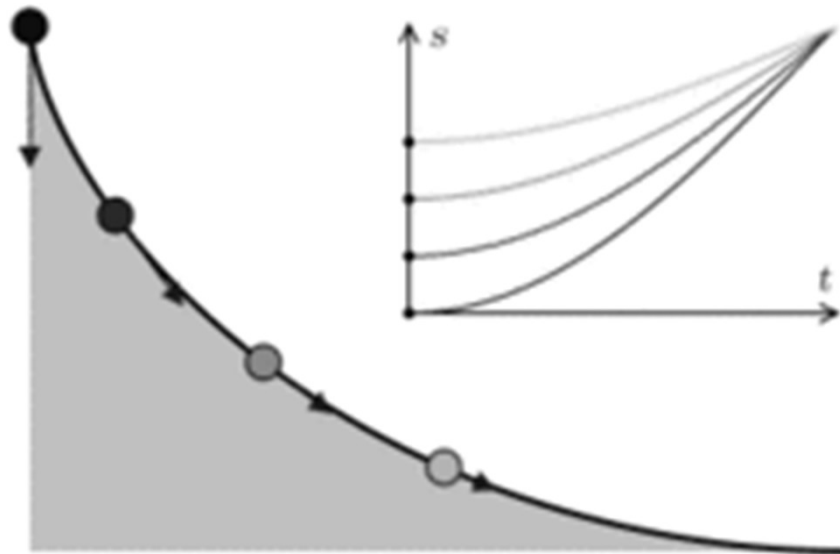
Esta curva es una cicloide (la curva que describe un punto fijo a un círculo de radio a cuando “rueda sin deslizar” por la parte de abajo del eje horizontal).

Hay que elegir las constantes de integración a y c adecuadamente para que la curva pase por los puntos A y B :
 $c = 0$ y $2a$ es la diferencia de altura



El problema de la Braquistócrona

Esta curva tiene otra propiedad, tal vez aún más notable que la de ser la de mínimo tiempo de recorrido: es *isócrona*, vale decir que la partícula tarda *el mismo tiempo* en llegar al punto *B*, sin importar desde dónde la dejemos caer entre *A* y *B*.



Caso de las fuerzas no conservativas

Fuerzas conservativas: procedentes de un potencial $Q_i^U = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$, siendo Q_i^U la fuerza generalizada según la coordenada generalizada q_i .

Fuerzas no conservativas: fuerzas que no procedan de un potencial Q_i^N

Fuerza total aplicada: $Q_i = Q_i^U + Q_i^N = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^N$, considerando Q_i es una fuerza si q_i es una posición y es un torque si q_i es un ángulo.

La ecuación de Lagrange para estos casos: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^N; i = 1, \dots, n$

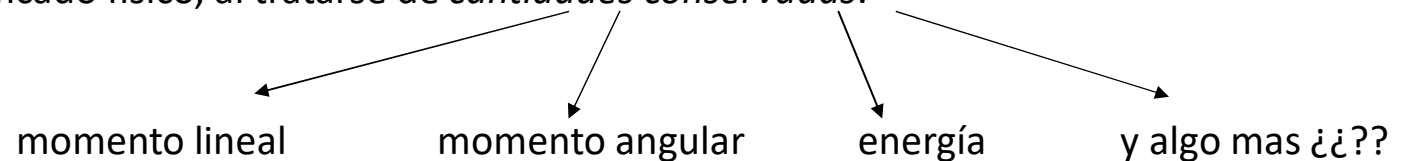
Teoremas de Conservación

Un sistema de n grados de libertad \longrightarrow está descrito por n ecuaciones de Lagrange.

\downarrow
Para las n coordenadas generalizadas q_i

Muchas veces una de las ecuaciones puede reemplazarse por una ecuación de *primer orden*, lo cual facilita la integración del problema diferencial.

Estas *primeras integrales* o *integrales de movimiento* no sólo facilitan el trabajo matemático sino que encierran siempre un importante significado físico, al tratarse de *cantidades conservadas*.



Teoremas de Conservación: Coordenadas cíclicas

El caso más sencillo de conservación es el que involucra *coordenadas cíclicas*: coordenadas que ***no aparecen*** en el lagrangiano de manera explícita:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad q_k : \text{coordenada cíclica.}$$

En la ecuación de Lagrange correspondiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}^0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{cte}},$$

independiente del tiempo. Ésta es la ecuación de primer orden.

Teoremas de Conservación: Coordenadas cíclicas

Ejemplo: Un proyectil con gravedad.

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \mathcal{L}(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

x e y son cíclicas. Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{cte} = p_x, \text{ el momento lineal en } x,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{cte} = p_y, \text{ el momento lineal en } y,$$

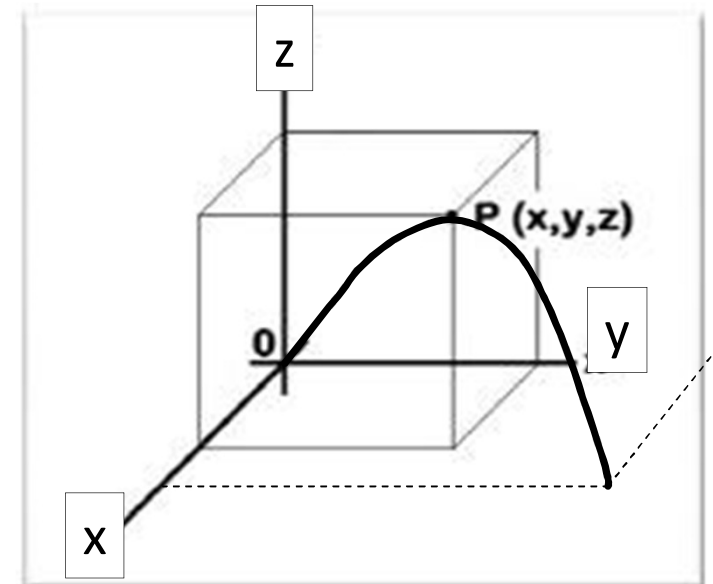
son las dos ecuaciones de primer orden que se mencionó anteriormente.

Por analogía con el caso cartesiano, la cantidad de movimiento conservado se llama *momento generalizado*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} := p_i, \quad (\text{notar que no tiene necesariamente unidades de momento lineal}).$$

Así que:

Si q_i es cíclica, p_i se conserva.



Cuando se eligen coordenadas generalizadas, se debe tratar de forma **que la mayor cantidad posible sean cíclicas**

Teoremas de Conservación: Coordenadas cíclicas

Otro ejemplo: Un potencial con simetría cilíndrica. Sea un potencial que depende sólo de la distancia al eje z. ¿Qué coordenadas conviene usar? Cilíndricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(r), \text{ con } \phi \text{ y } z \text{ cíclicas.}$$

Entonces: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z = \text{cte},$ se conserva el momento lineal a lo largo del eje vertical,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = p_\phi = mr \underbrace{r\dot{\phi}}_{\text{vel. tangencial}} = L_z : \text{ se conserva el momento angular en dirección } z$$

Simetría: \mathcal{L} no cambia (es *invariante*) cuando cambia q_k manteniendo las demás q_i fijas

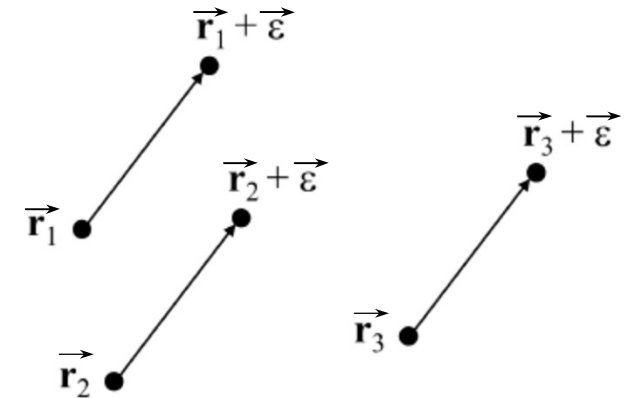
Hay una relación entre **cantidades conservadas** y operaciones de transformación de coordenadas que dejan invariante el Lagrangiano.

Matemáticamente las operaciones que dejan “algo” invariante son las **simetrías**.

Teorema de Conservación del Momento Lineal

Suponga un sistema aislado, ¿cómo saber dónde está? Si se trasladan todas las partículas una misma cantidad $\vec{\epsilon}$, no habría manera de darse cuenta. Nada físicamente relevante debería cambiar.

El sistema es invariante ante traslaciones, o que *el espacio es homogéneo*: en todos lados ocurre lo mismo.



La transformación es: $\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + \vec{\epsilon}; \forall i = 1 \dots N$, con ϵ independiente de i . En particular, la energía potencial no cambia:

$$U(\vec{r}_1 + \vec{\epsilon}, \vec{r}_2 + \vec{\epsilon}, \dots, \vec{r}_N + \vec{\epsilon}) = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \Rightarrow \delta U = 0.$$

La traslación no afecta las velocidades (derivando la transformación se ve que $\mathbf{v}_i \longrightarrow \mathbf{v}_i$), así que la energía cinética tampoco cambia:

$$\delta T = 0. \longrightarrow \delta T = 0, \delta U = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \epsilon.$$

Si $\vec{\epsilon}$ es un *desplazamiento infinitesimal* \Rightarrow se puede calcular \mathcal{L} de manera diferencial. En la dirección x y desarrollando por Taylor:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \dots + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0.$$

Teorema de Conservación del Momento Lineal

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \longrightarrow \text{De Lagrange: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} p_{ix},$$

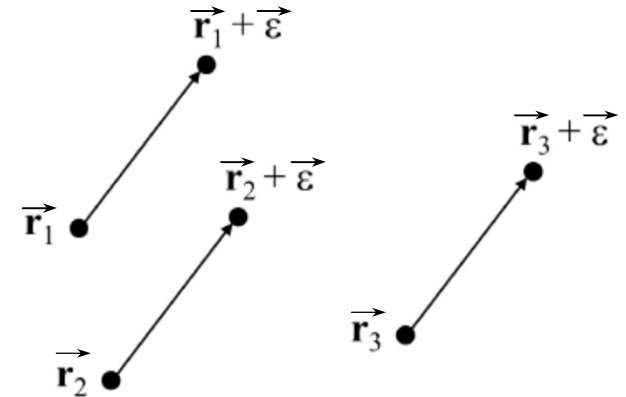
$$0 = \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} p_{ix} = \boxed{\frac{d}{dt} P_x = 0},$$

donde P_x es la componente en x de $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ (el momento lineal total).

Repitiendo el argumento en y y z, se concluye que la invariancia del lagrangiano ante traslaciones (la *simetría de traslación del lagrangiano*) produce la conservación del momento lineal total del sistema.

Se planteó un sistema aislado. Pero *lo importante es la invariancia*. Si el sistema es abierto, o si no sabemos si está aislado o no, no importa.

Si el lagrangiano tiene simetría de traslación, el momento lineal total se conserva.



Teorema de Conservación del Momento Angular

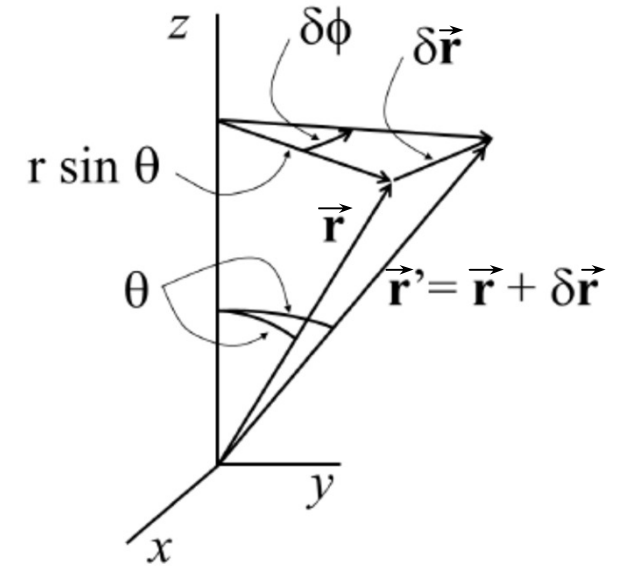
Suponga un sistema aislado.

El espacio es *isótropo*, además de homogéneo. ¿Qué consecuencias tendrá esto? Hay otra operación, otra transformación de coordenadas, que deja invariante el lagrangiano: **rotación**.

Se realiza una rotación de todas las coordenadas alrededor del eje z , en un ángulo infinitesimal $\delta\phi$. Tenemos $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$.

¿Cuánto vale $\delta\vec{r}$?

$$\delta r = \delta\phi \underbrace{r \sin \theta}_{\text{dist. al } \hat{z}} \Rightarrow \delta\vec{r} = \underbrace{\delta\vec{\phi}}_{\delta\phi\hat{z}} \times \vec{r}.$$



$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{v}' \neq \vec{v}$, a diferencia de la traslación $\Rightarrow \delta\dot{\vec{r}} = \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}$ es lo que tenemos que usar en el $\delta\mathcal{L}$.

El lagrangiano es invariante:

$$0 = \delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta\dot{\vec{r}}_i$$

donde el \cdot indica sumar en las 3 coordenadas (producto escalar). En el primer término se usan las ecuaciones de Euler-Lagrange, y usar las transformaciones recién calculadas:

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i).$$

Teorema de Conservación del Momento Angular

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i).$$

Se usa la propiedad: $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)$ para extraer la rotación $\delta \vec{\phi}$ como factor común:

$$0 = \sum_{i=1}^N \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) + \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), = \delta \vec{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \vec{p}_i), \quad (\text{es la derivada de un producto})$$

$$= \delta \vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{\phi} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \boxed{\vec{L} = \text{cte}} : \text{ el momento angular total es constante.}$$

Notar: si el sistema está aislado, esto pasa en cualquier eje. Pero lo importante no es el aislamiento, sino la **invariancia del lagrangiano**.

Si el sistema no está aislado, sino que está metido en un campo de fuerzas externo, *pero* este campo tiene un eje de simetría de rotación, entonces la componente del momento angular a lo largo de ese eje se conserva. Es precisamente el caso de z y ϕ cíclicas que se vio anteriormente.

La relación entre simetrías y conservación comienza a ser sumamente importante.

Teorema de Conservación: la Energía y el Hamiltoniano

Simetría de traslación temporal: Para un sistema con n grados de libertad y cuyo lagrangiano es independiente del tiempo (el sistema es invariante ante la traslación temporal), tiene *simetría de traslación temporal*:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}^0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right) \quad (\text{usando las Ec. de Euler-Lagrange})$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (\text{sacando } d/dt \text{ factor común})$$

La derivada total temporal del lagrangiano no da cero, pero da otra derivada temporal. Reordenando, se obtiene una derivada temporal igual a cero:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = 0$$

Se tiene una cantidad conservada asociada a la simetría de traslación temporal. La llamamos \mathcal{H} , en homenaje a William Rowan Hamilton.

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}}$$

Entonces: si \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo, \mathcal{H} es una cte de movimiento.

Teorema de Conservación: \mathcal{H} vs la energía

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Bajo ciertas condiciones, el hamiltoniano es igual a la energía mecánica.

Por un lado, se necesitan **vínculos esclerónomos** (que no dependan ni de las velocidades ni del tiempo. En tal caso la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las \dot{q}_i

Si además el potencial no depende de las velocidades, $U = U(\mathbf{r}_i) = U(q_i)$, con $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$.

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T - U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - U)$$

$$\mathcal{H} = 2T - T + U = \boxed{T + U = E},$$

donde la última línea explota el hecho de que T es cuadrática homogénea en las velocidades, lo cual permite usar un teorema de Euler sobre funciones homogéneas: Si f es homogénea de grado k , entonces $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$

Sólo en el caso de los vínculos esclerónomos $\mathcal{H} = E$.

Nota: si ocurriera que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y los vínculos son **holónomos** pero dependientes del tiempo, $\mathcal{H} = cte$, pero $\mathcal{H} \neq T + U$.

Teorema de Conservación: \mathcal{H} vs la energía

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

En resumen:

- Si las fuerzas (aplicadas y de vínculo) son conservativas (no hay disipación en calor u otra forma de energía), entonces la energía mecánica se conserva.
- Si el sistema es invariante ante traslaciones temporales, el hamiltoniano se conserva.
- Si los vínculos son esclerónomos y el potencial no depende de las velocidades, el hamiltoniano es igual a la energía mecánica.

Las preguntas:

¿es $\mathcal{H} = E$?

¿se conserva E ?

*son aspectos diferentes del sistema, que deben ser analizados **por separado**.*

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones canónicas del movimiento de Hamilton \longrightarrow

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Teorema de Conservación: Teorema de Noether

Si \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo \Rightarrow se conserva E y coincide con $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
└─→ Traslación temporal

Si una coordenada generalizada q_k es cíclica (no aparece explícitamente en \mathcal{L}) \Rightarrow se conserva el momento generalizado
 $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ conjugado a ella. └─→ Traslación espacial

El teorema de Noether generaliza esta idea que existe una correspondencia entre **simetrías** y **cantidades conservadas**.

Presenta una relación entre cada principio de conservación de una magnitud física (energía, Hamiltoniano, momento lineal, momento angular) y una invarianza formal de las leyes de la física.

Dicho de otro modo, para toda simetría continua (por ejemplo, una rotación espacial) del lagrangiano del sistema, hay una magnitud conservada a lo largo de la evolución del mismo.

Es un resultado central en física teórica que expresa la existencia de ciertas simetrías abstractas en un sistema físico que lleva a la existencia de leyes de conservación.

Multiplicadores de Lagrange

Mecánica lagrangiana: se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento aún sin conocer las fuerzas de vínculo.

Pero a veces es necesario *conocer* las fuerzas de vínculo. Para estos casos: **Método de los Multiplicadores de Lagrange**

El método apunta a encontrar una forma modificada de las ecuaciones de Lagrange, mediante un método algo distinto al usado, en casos en que las coordenadas están vinculadas.

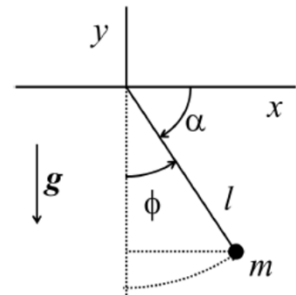
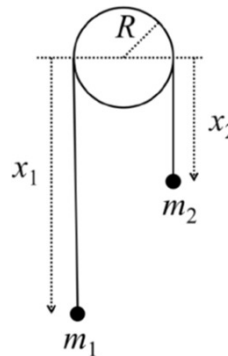
Suponga un sistema con dos coordenadas cartesianas, x e y , entre las cuales existe un *vínculo holónomo*: $f(x, y) = 0$.

Son ejemplos:

1. Un péndulo plano, con x e y sus coordenadas cartesianas. El vínculo es: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0$

2. Una máquina de Atwood donde el vínculo es:

$$f(x, y) = x + y - l = 0.$$



En ambos casos el método permitirá encontrar las funciones $x(t)$ e $y(t)$, y las fuerzas de vínculo T .

Multiplicadores de Lagrange

El lagrangiano será $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.

El Principio de Hamilton plantea la integral de acción: $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt$ **S** tiene un extremo cuando se evalúa a lo largo de la trayectoria del sistema.

Si nos corremos de esa trayectoria “correcta”: $x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$, $y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$.

Este desplazamiento es *compatible con el vínculo*. De esta forma, la acción **S** no cambia:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt = 0 \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}}_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}}_B \right) dt \quad (\text{por Regla de la Cadena})$$

donde *A* y *B* pueden integrarse por partes:

y de manera similar el término *B*. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_{u} \underbrace{\delta \dot{x} dt}_{dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x}_{0 \text{ pues } \delta x = 0 \text{ en } t_1 \text{ y } t_2} \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_{du/dt} \underbrace{\delta x}_v dt, \quad = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta y \right) dt$$

$$= \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dt = 0}.$$

$\forall \delta x, \delta y$ compatibles con el vínculo.

Multiplicadores de Lagrange

Los desplazamientos δx y δy deben satisfacer el vínculo: $f(x, y) = 0 \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0$. La ecuación del vínculo indica que cuando se hace el desplazamiento $(\delta x, \delta y)$, el vínculo sigue valiendo, no cambia

La expresión (2) tiene un término en δx y uno en δy . Como vale cero, puede sumarse a la expresión (1) y además, puede

multiplicarse por un factor arbitrario $\lambda(t)$: $\lambda(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right] = 0$. (3)

(1) + (3): $\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dt = 0$ (4) Para todo δx y δy compatible con el vínculo.

$\lambda(t)$ es arbitraria \Rightarrow se elige de modo que anule el primer paréntesis de (4): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0$. (5)

(5) Es la ec de Lagrange modificada con un término λ adicional. Con este λ para que valga (5), toda la primera integral de (4) se anula. Por lo tanto la *segunda* integral de (4) queda igual a cero, y debe valer $\forall \delta y$.

Luego, el coeficiente de δy debe ser nulo, y se obtiene una ecuación de Lagrange modificada: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 0$. (6)

Las ecuaciones (5) y (6) son dos ecuaciones para *tres* incógnitas: $x(t)$, $y(t)$ y $\lambda(t)$. Se necesita una tercera ecuación para

encontrar las incógnitas. La tercera ecuación es la ecuación de vínculo $f(x, y) = 0$.

$\lambda(t)$ es el **multiplicador de Lagrange**. Un artificio matemático para resolver el problema con **coordenadas no independientes**.

Multiplicadores de Lagrange

¿Cuál es la relación de $\lambda(t)$ con la fuerza de vínculo, que es un concepto físico? $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - U(x, y)$

(Para el ejemplo del péndulo, $m_1 = m_2 = m$, para la máquina de Atwood son m_1 y m_2 , etc.). Reemplazando \mathcal{L} en (5):

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0} \quad (5) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \Rightarrow \quad m_1 \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}.$$

\nwarrow
 componente x
de la fuerza total

\downarrow
 componente
x de la fuerza
(del potencial)

\swarrow
 componente x de
la fuerza de vínculo

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = F_x^{vin}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = F_y^{vin}.$$

Como $f = f(x, y) \Rightarrow$ las ecuaciones de Lagrange modificadas pueden obtenerse como ecuaciones de Euler-Lagrange de un *lagrangiano modificado*:

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L} + \lambda f(x, y) = T - U + \lambda f(x, y) = T - (U + U_{ef})$$

donde hay un $U_{ef} = -\lambda f$ del cual la fuerza de vínculo resulta como $-\partial U_{ef} / \partial x$:

Multiplicadores de Lagrange

Ejemplo: Máquina de Atwood

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2,$$

$$U = -m_1gx - m_2gy,$$

$$F_1^g = -\frac{\partial U}{\partial x} = -(-m_1g) = +m_1g \Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1gx + m_2gy.$$

Vínculo: $f(x, y) = \boxed{x + y = cte} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad (7)$

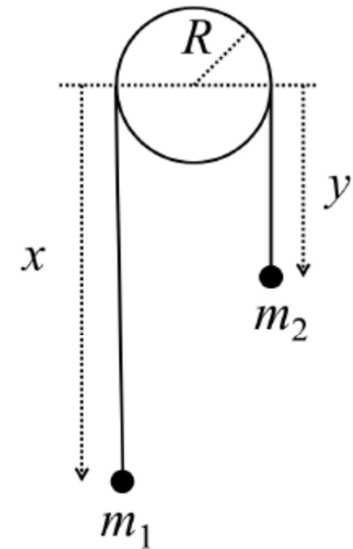
De la ec (5): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \boxed{m_1g + \lambda = m_1\ddot{x}},$ De la ec (6): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \Rightarrow \boxed{m_2g + \lambda = m_2\ddot{y}}. \quad (8) \quad (9)$

Hay que resolver (7), (8) y (9). De (7): $\ddot{x} = -\ddot{y}$. y restando (8) - (9):

$$m_1g + \lambda - m_2g - \lambda = m_1\ddot{x} - m_2\ddot{y} \Rightarrow (m_1 - m_2)g = m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} = (m_1 + m_2)\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g} \quad \text{De aquí se obtiene } x(t) \quad (10)$$

(10) en (8): $\lambda = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$

Y la fuerza de vínculo es: $\vec{F}_1^{vin} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} = \lambda \hat{x} = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \hat{x}.$ Coincide con la mecánica newtoniana



Multiplicadores de Lagrange

Expresión general con m vínculos

Para no perderse en notaciones se ha hecho todo el cálculo con un solo grado de libertad y un vínculo.

La expresión general con n grados de libertad y m vínculos holónomos es:

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad j = 1 \dots m,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots n.$$

Y las fuerzas de vínculo son:

$$Q_i = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i},$$

(el signo es arbitrario, hay que estudiar cada situación en cada problema para interpretar la física y saber hacia dónde apuntan estas “fuerzas generalizadas”).