Coordenadas cilíndricas

$$x=\rho\cos\theta \qquad y=\rho\sin\theta \qquad z=z$$

$$\boldsymbol{u}_\rho=\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\,\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{u}_\theta=-\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\,\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$

$$r=\rho\,\boldsymbol{u}_\rho+z\,\boldsymbol{k}$$

$$\dot{r}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho+\rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta+\dot{z}\,\boldsymbol{k}$$

$$\ddot{r}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u}_\rho+(2\dot{\rho}\,\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\,\boldsymbol{u}_\theta+\ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$

Coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{u}_\rho=\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u}_\theta=-\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}-\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u}_\varphi=\boldsymbol{u}_\theta\wedge\boldsymbol{u}_\rho=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta+\rho\dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix}(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-\rho\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u}_\rho\\(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+\rho\ddot{\theta})\,\boldsymbol{u}_\theta\\(2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\theta-2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+\rho\ddot{\varphi}\cos\theta)\,\boldsymbol{u}_\varphi\end{bmatrix}$$

Lagrange

$L=T-U$ donde T es la energía cinética del sistema y U es su energía potencial

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j$ donde Qj son fuerzas generalizadas

utilizando el multiplicador de Lagrange λ **:** $Q_{q_j}=\lambda.\frac{\partial F}{\partial q_j}$

Hamilton

$$H=H(q_i,p_i)$$

$$H=\sum_i \dot{q}_i\,p_i-L=T+U$$

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i=\frac{-\partial H}{\partial q_i}$$

Fuerzas Centrales

$$G=6{,}67.10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \qquad F=\frac{G\,m_1 m_2}{r^2} \qquad \mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1 m_2}{M}$$

$$L=r\,\boldsymbol{x}\,p=\mu\,r\,\boldsymbol{x}\,\dot{r}=cte$$

Lagrangiano en polares: $\mathcal{L}=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-U(r)$

En una orbita, el radio vector al moverse en su trayectoria barre un área

$$dA=\frac{r^2}{2}d\,\phi \qquad \Rightarrow\dot{A}=\frac{r^2}{2}\dot{\phi}=\frac{L}{2\mu}$$

$$\Rightarrow L=\mu\,r^2\dot{\phi}=2\mu\,\dot{A} \qquad \Rightarrow\dot{\phi}=\frac{L}{\mu r^2}$$

Desarrollando el Lagrangiano y reemplazando la ecuación anterior llegamos a

$$\mu\ddot{r}=\frac{L^2}{\mu r^3}-\frac{\partial U}{\partial r}$$

$s=\frac{1}{r}=\frac{k\mu}{L^2}(1+\varepsilon\cos\phi)$ con : $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}}$, donde $k=Gm_1 m_2$

$$r(\phi)=\frac{L^2}{\mu\,k}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\phi}$$

en el apogeo $\phi=\pi$, en el perigeo $\phi=0$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{G\,M_0}r^3$$

Oscilaciones

$$k=\frac{d^4 G}{8D^3 n}$$

d= diámetro del alambre del resorte [m]
G= módulo de elasticidad tranversal o módulo de corte [N/m²]
D= diámetrod el resorte [m]
n= número de espirales

Combinación de elementos:

Resortes en paralelo: $k_{eq}=k_1+k_2$ Resortes en serie : $\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

Amortiguadores en paralelo: $c_{eq}=c_1+c_2$ Resortes en serie : $\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}$

En una ecuación de movimiento para un sistema en oscilación como $m\ddot{x}+c\,\dot{x}+k\,x=0$
Puede obtenerse un factor de amortiguación $\zeta=\frac{b}{2m\omega}$, donde ω , es la frecuencia del sistema

Cuerpos rígidos.

Centro de masa

$$x_{cm}=\frac{\int_v \rho\, x\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad y_{cm}=\frac{\int_v \rho\, y\, dv}{\int_v \rho\, dv} \qquad z_{cm}=\frac{\int_v \rho\, z\, dv}{\int_v \rho\, dv}$$

para un cascarón, entonces cambiamos $dv \rightarrow ds.$. Para un alambre delgado cambiamos $dv \rightarrow dl$

Momento de inercia $I=\int_\Omega r^2\, dm \qquad dm=\rho_{lineal}.dl \quad , \qquad dm=\rho_{superficial}.ds \quad , \quad dm=\rho_{volumétrica}.dv$

Ejes paralelos $I_{ZZ/A}=I_{ZZ/cm}+M.r_{Acm}^2$

Tensor de Inercia: $I=\begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum m\,x\,y & -\sum m\,x\,z \\ -\sum m\,y\,x & \sum m(x^2+z^2) & -\sum m\,y\,z \\ -\sum m\,z\,x & -\sum m\,z\,y & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$

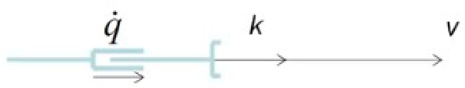
Momento angular: $L=I.\omega \qquad T_{rot}=\frac{\omega}{2}.L=\frac{1}{2}.\omega_{transpuesta}.I.\omega \qquad T=T_{rot}+T_{translación}=\frac{\omega}{2}.L+\frac{v_{cm}}{2}.P$

Matrices de Rotación

$$rot_x(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad rot_y(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad rot_z(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

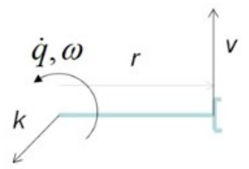
$R=rot_i(\theta_1).rot_{ii}(\theta_2).\ \ldots$ _ $d=\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$. Matriz de transformación: $H_1^0=\begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Unión Prismática o translacional



$v=\dot{q}.\hat{k} \qquad \omega=0$

Unión Giratoria o de revolución



$v=\dot{q}.\hat{k}\,x\,r \qquad \omega=\dot{q}.\hat{k}$

Jacobiano de velocidad (lineal): $v=J_v.q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_q} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

Jacobiano de velocidad angular (simplificado): $\omega=j_\omega.\dot{q} \Leftrightarrow \omega=[j_1 \quad j_2].\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

Si la articulación **i** es giratoria $\Rightarrow j_i=1$ Si la articulación **i** es tranlacional $\Rightarrow j_i=0$:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j_v \\ j_\omega \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}=J_{(q)}.\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}=J_{(q)}^{-1}.\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$