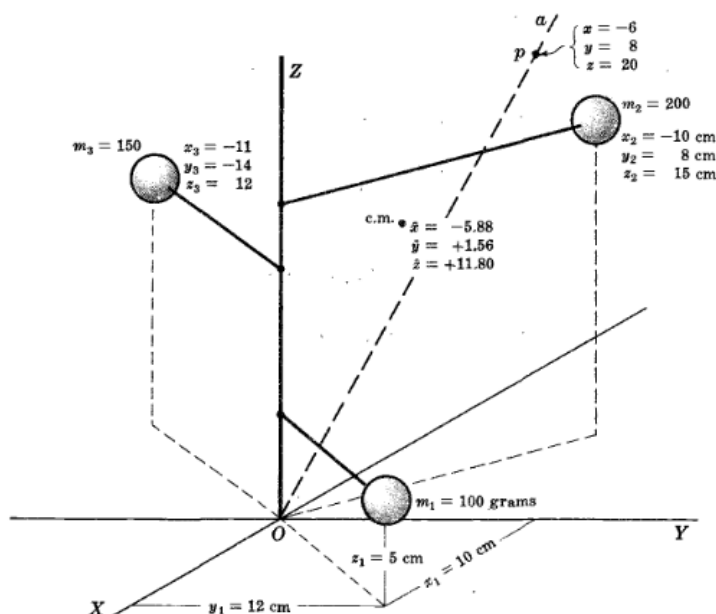




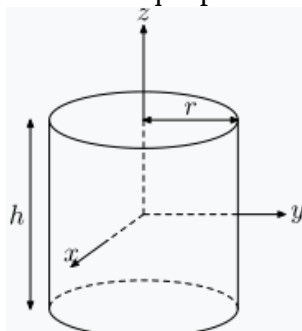
### Trabajo Práctico N° 8

### Cuerpos rígidos

- Hallar los momentos de inercia para los siguientes sistemas de partículas desde el centro de masa.
  - molécula de dos átomos de masas  $m_1$   $m_2$  separados por una distancia  $l$
  - molécula de tres átomos alineados, masas  $m_1$   $m_2$   $m_3$ , distancias  $l_1$   $l_2$
  - molécula de tres átomos formando un triángulo isósceles, masas  $m_1$ ,  $m_1$ ,  $m_2$
- Hallar los momentos de inercia para los siguientes sistemas continuos
  - Barra delgada uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$ , en el centro de masa
  - Barra delgada uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$ , en el borde de la barra
  - Una esfera de densidad uniforme, masa  $M$  y radio  $R$
  - Un cilindro circular de radio  $R$  altura  $h$  y masa  $M$
- Hallar el momento de inercia en el eje de rotación para una rueda de tren formada por 8 rayos de 0,5 m y 0,75 kg y un aro de 2,8 kg.  $I_{\text{rayo}} = \frac{m l^2}{3}$ ,  $I_{\text{aro}} = m R^2$
- Considere un péndulo formado por una barra delgada uniforme, con su eje de rotación a una distancia  $d$  del centro de masa. Encuentre la expresión general de la frecuencia para el caso de pequeñas oscilaciones.
- Encuentre el tensor de inercia para el sistema de la imagen, evaluado en  $O$   
Encuentre el momento angular para una rotación en la dirección  $Op$   
Encuentre el valor del momento de inercia para una rotación  $\omega$  en la dirección  $Op$



6. Considere un bloque tipo ladrillo, de lados  $a, b, c$ , y densidad  $\rho$
- Encuentre el tensor de inercia:
    - considerando el origen de coordenadas en el centro de masa
    - considerando el origen de coordenadas en un vértice del bloque
  - suponga que  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=3$  y la masa total es  $M$ , calcule el momento de inercia para una rotación en la dirección:
    - de la diagonal principal del cuerpo
    - de un eje vertical paralelo a la arista mas corta, y que pasa por el centro de masa
    - de un eje vertical paralelo a la arista mas corta, y que pasa por uno de los vértices
 Realice los cálculos de este punto usando el tensor obtenido en a.1 y repita los cálculos usando el tensor de a.2 (ayuda: utilice el teorema de los ejes paralelos).
  - ¿Son equivalentes los tensores obtenidos en a.1 y a.2?
7. Encuentre el momento de inercia de una lámina cuadrada de lado  $a$  y masa  $m$  en su diagonal, considere el origen en uno de los vértices de la lámina
8. Para el caso anterior, encuentre el momento angular desde el origen de la placa cuando está rotando con una velocidad angular  $\omega$  y calcule su magnitud
- en el eje  $x$
  - en la diagonal desde el origen
9. Encuentre la energía cinética de rotación para el punto anterior
10. Encuentre los momentos de inercia **principales** para un lámina cuadrada desde su esquina.
11. Para el caso anterior, encuentre las direcciones de los ejes principales
12. Demuestre que para un cilindro su tensor de inercia en el centro de mas está dado por:



$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$$

### Conceptos útiles sobre cuerpos rígidos (en revisión)

Para un sistema de partículas podemos definir el centro de masa como:

$$x_{cm} = \frac{\sum_i^n x_i \cdot m_i}{\sum_i^n m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum_i^n y_i \cdot m_i}{\sum_i^n m_i} \quad z_{cm} = \frac{\sum_i^n z_i \cdot m_i}{\sum_i^n m_i}$$

Si se trata de un cuerpo con determinado volumen y una función de densidad tenemos

$$x_{cm} = \frac{\int_V \rho x \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad y_{cm} = \frac{\int_V \rho y \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad z_{cm} = \frac{\int_V \rho z \, dv}{\int_V \rho \, dv}$$

Si en lugar de un volumen tenemos un cascarón, entonces cambiamos  $dv \rightarrow ds$ .

Para el caso de un alambre delgado cambiamos  $dv \rightarrow dl$

El momento de inercia con respecto a un eje se puede definir según:

$$I = \int_{\Omega} r^2 \, dm$$

Según el caso el diferencial de masa se puede expresar en función de la densidad  $\rho$  :

$$dm = \rho_{lineal} \cdot dl \quad dm = \rho_{superficial} \cdot ds \quad dm = \rho_{volumétrica} \cdot dv$$

Si tenemos un eje que pasa por **A** y es paralelo al centro de masa **cm**, el momento de inercia será:

$$I_{ZZ/A} = I_{ZZ/cm} + M \cdot r_{Acm}^2$$

Dónde  $r_{Acm}$  es la distancia entre **A** y **cm**.

El tensor de inercia es una propiedad del cuerpo y representa la distribución de masas alrededor del centro de masas y se define como:

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Si al rotar el cuerpo sobre un eje no se producen torques fuera del eje, se dice que es un eje principal. Para todo cuerpo rígido existe un sistema de referencia que puedo poner sobre él de modo tal que la matriz de inercia sea diagonal, es decir esté formada solo por los componentes de los ejes principales. Un eje paralelo a un eje principal, también es un eje principal.

Para una velocidad angular  $\omega$  y un tensor de inercia  $I$ , tenemos

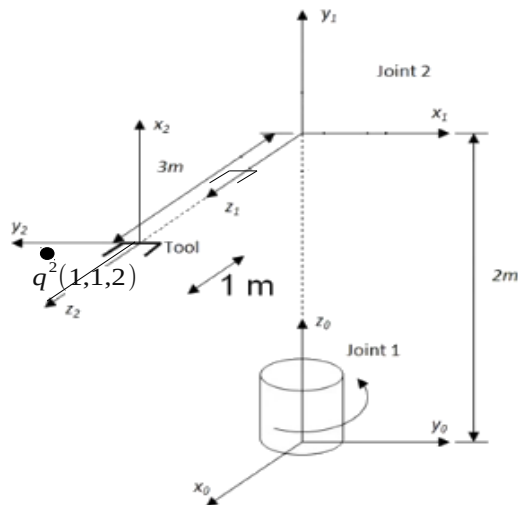
Momento angular:  $L = I \cdot \omega$

La energía cinética de rotación:  $T_{rot} = \frac{\omega}{2} \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \omega_{transpuesta} \cdot I \cdot \omega$

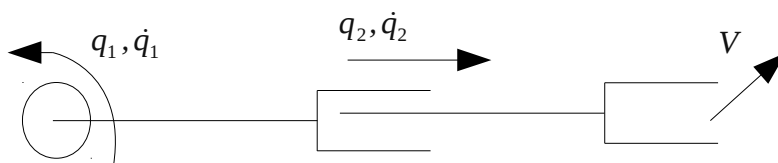
Energía cinética  $T = T_{rot} + T_{translación} = \frac{\omega}{2} \cdot L + \frac{v_{cm}^2}{2} \cdot P$

## Transformaciones de sistemas de referencia Aplicación en Mecatrónica

1. Un brazo robótico tiene dos articulaciones y dos uniones como se ve en el diagrama. Cada una de las uniones y la punta de la herramienta tienen un sistema de referencia asociados a ellos, cuyos orígenes y ejes se ven en la figura.



- En la unión 1 tenemos una articulación giratoria
  - En la unión 2 tenemos una articulación prismática
- a) Encuentre las transformaciones que realizan los marcos de referencia 1 y 2 desde la base del marco 0
- b) Relacione el punto  $q^2(1,1,2)$  en el sistema de referencia 0
2. Considere un brazo formado por un servomotor unido a una plancha de 300 mm que en la punta tiene otro servo unido a una planchuela de 200 mm que soporta la punta de la herramienta. El conjunto está limitado a rotar en el eje z por lo que el desplazamiento de la herramienta se realiza en el plano x,y
- a) Encuentre las ecuaciones de cinemática inversa para conocer los ángulos de las articulaciones  $(\theta_1, \theta_2)$  para una determinada posición de la punta de la herramienta definida por  $(x, y)$
- b) Encuentre el total de grados recorridos por cada articulación para llegar desde (300,200) hasta (0,500)
3. Para el brazo de la figura donde tenemos una articulación giratoria y una telescópica.
- a) Determine las ecuaciones de posición
- b) calcule el Jacobiano de velocidad, el de velocidad angular y el Jacobiano completo
- c) Suponga que la el brazo apunta el la dirección x con la articulación 2 extendida a 0,5 m. La articulación 1 rota a 2 rad/s y la articulación 2 se extiende a 1 m/s. Encuentre la velocidad en la punta de la herramienta
- d) Sabiendo que la punta de la herramienta tiene una velocidad en x de 1 m/s e igual velocidad en y, use la inversa del Jacobiano para encontrar las velocidades de las articulaciones.



## Fórmulas y conceptos útiles (en revisión)

### Matrices de Rotación

$$rot_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad rot_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad rot_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si para pasar de un sistema de referencia **0** a **1**, se realiza primero una rotación  $\theta_1$  en el eje **x** y luego una rotación  $\theta_2$  en el eje **z**. Entonces la matriz que define la transformación de rotación es:

$$R = rot_x(\theta_1) \cdot rot_z(\theta_2)$$

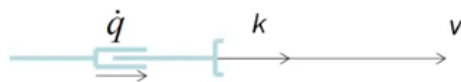
Si además se produce un desplazamiento del sistema de referencia definido por el vector  $d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ ,

tenemos que la transformación homogénea que relaciona el marco **0** y **1** es:

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de transformación}$$

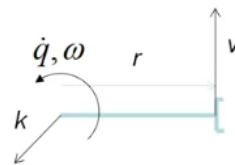
### Tipos de unión

Prismática o translacional



$$v = \dot{q} \cdot \hat{k} \quad \omega = 0$$

Giratoria o de revolución



$$v = \dot{q} \cdot \hat{k} \times r \quad \omega = \dot{q} \cdot \hat{k}$$

Para relacionar la velocidad de la punta de la herramienta con la velocidad de las articulaciones podemos utilizar el Jacobiano de velocidad (lineal):

$$v = J_v \cdot \dot{q} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Para el Jacobiano de velocidad angular en principio definimos

$$\omega = j_\omega \cdot \dot{q} \Leftrightarrow \omega = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Si la articulación **i** es giratoria  $\Rightarrow j_i = 1$

Si la articulación **i** es translacional  $\Rightarrow j_i = 0$

Básicamente este jacobiano nos indica para cada articulación, si afecta o no a la velocidad angular.

Para obtener la descripción completa de la velocidad lineal y angular tenemos, el Jacobiano completo:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_v \\ j_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J_{(q)} \cdot \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = J_{(q)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$