MECÁNICA LAGRANGIANA

MECÁNICA RACIONAL – 2018

La formulación Lagrangiana de la Mecánica

Dinámica analítica:

Tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos.

Se tratan por separado:

- Consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento: se formulan las ***coordenadas***, ***vínculos*** y ***magnitudes cinéticas*** del sistema dado.

- Consideraciones puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones: los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso)

* Joseph Louis Lagrange - *Mécanique Analytique* (1788)
* William Rowan Hamilton (1805-1865)

La formulación Lagrangiana de la Mecánica

Las ecuaciones de Lagrange son una formulación de la Mecánica equivalente a la de las ecuaciones de Newton.

Ventajas:

- Tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas.

- Permiten describir la dinámica ignorando las fuerzas de vínculo, que en general son desconocidas y que muchas veces no interesa conocer.

- Las ecuaciones de Lagrange son derivables de un principio variacional, tal como demostró Hamilton en la década de 1830.

- El principio de Hamilton encuentra generalizaciones más allá de la Mecánica Clásica, en la Teoría de Campos y finalmente en la Mecánica Cuántica.

Las ecuaciones de Lagrange

Una Partícula sin vínculos:

Sea una partícula en ***IR3***, sujeta a fuerzas conservativas.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = U(\vec{\mathbf{r}}) = U(x, y, z)$$

*El lagrangiano **L** se define como:*

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Sus derivadas parciales serán:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \text{ la fuerza en dirección } x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x, \text{ el momento lineal en dirección } x$$

De la misma forma se trabaja en las direcciones *y* y *z*.

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

Derivando la segunda expresión respecto del tiempo y usando la Segunda Ley de Newton ()

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{p}_x = F_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

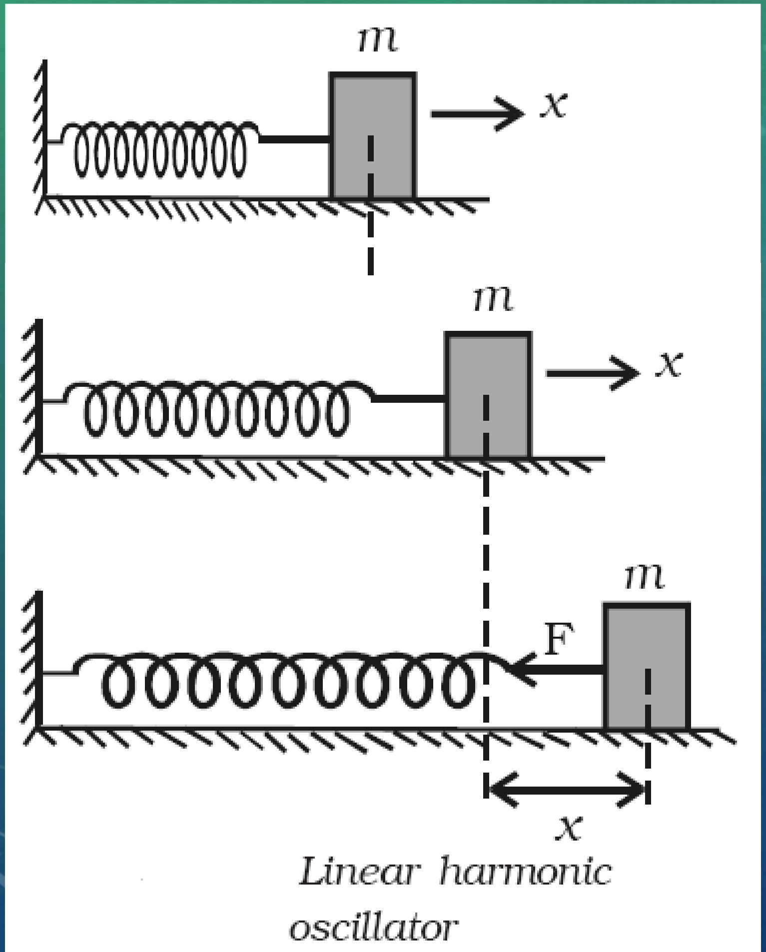
Generalizando en *x*, *y* y *z*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}$$

Las *ecuaciones de Lagrange* (en coordenadas cartesianas) son equivalentes a las de Newton

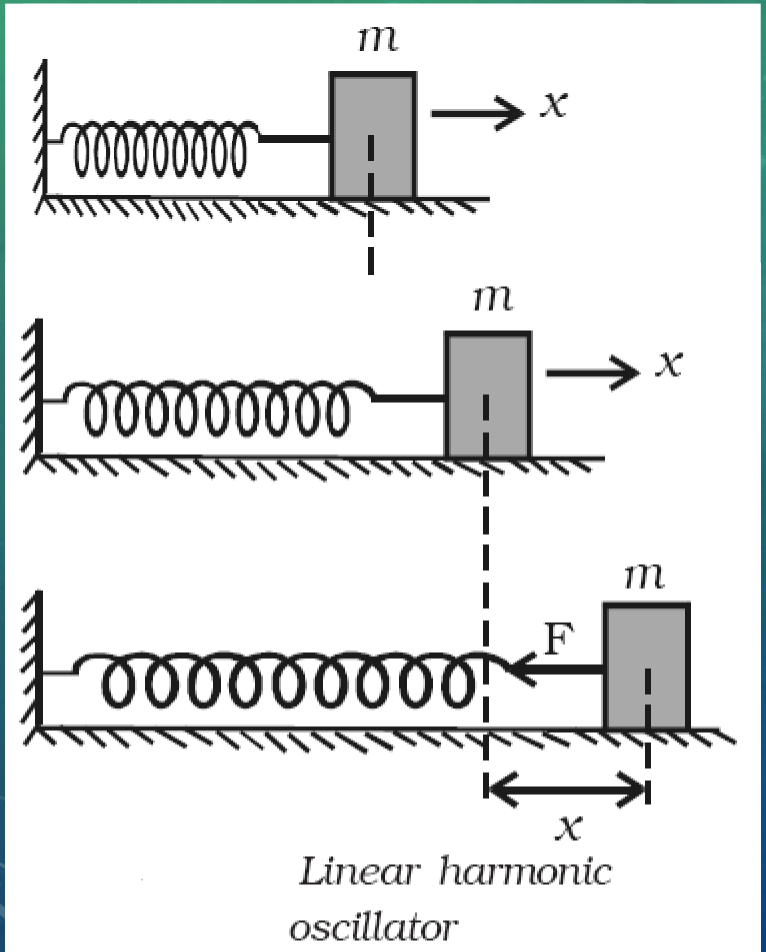
Las ecuaciones de Lagrange

Oscilador armónico simple:



Las ecuaciones de Lagrange

Oscilador armónico simple:



$$L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0$$

Las ecuaciones de Lagrange

***Vínculos y Coordenadas generalizadas*:**

Caso de coordenadas no cartesianas

- Problemas con una simetría evidente (existencia de un eje de simetría)
- Las partículas pueden estar obligadas a moverse de determinada manera (pista, riel, en contacto con cuerpos)

VINCULOS

En estos casos se usarán coordenadas adecuadas a cada tipo de problema

COORDENADAS GENERALIZADAS

Las expresiones de las componentes de la aceleración en coordenadas no cartesianas pueden ser muy complicadas. En polares son complicadas (en coordenadas arbitrarias mucho más). Esto hace que la Segunda Ley de Newton sea difícil de usar en coordenadas no cartesianas. El método de Lagrange, que es equivalente al de Newton, funciona de forma excelente en *coordenadas generalizadas*.

Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

Dado un sistema de N partículas $\longrightarrow$ tendrá 3N coordenadas cartesianas

Si no existen vínculos entre ellas, entonces tenemos 3N coordenadas independientes.

Si existen vínculos entre las coordenadas, entonces disminuye la cantidad de coordenadas independientes.

A veces los vínculos son relaciones geométricas del tipo: $f(\vec{\mathbf{r}}_1, \ldots \vec{\mathbf{r}}_N, t) = 0,$ y se llaman *holónomos*

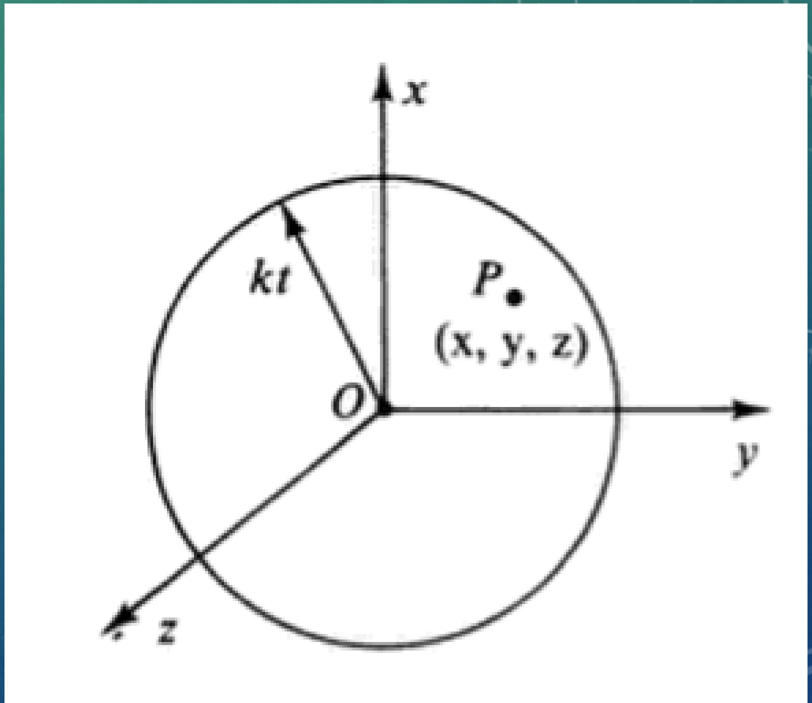
Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

Suponga una partícula que se mueve sobre una esfera cuyo radio crece proporcional al tiempo ($R = kt$)

Si la esfera está centrada en el origen O, las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ cumplen: $x^2 + y^2 + z^2 = k^2t^2$.

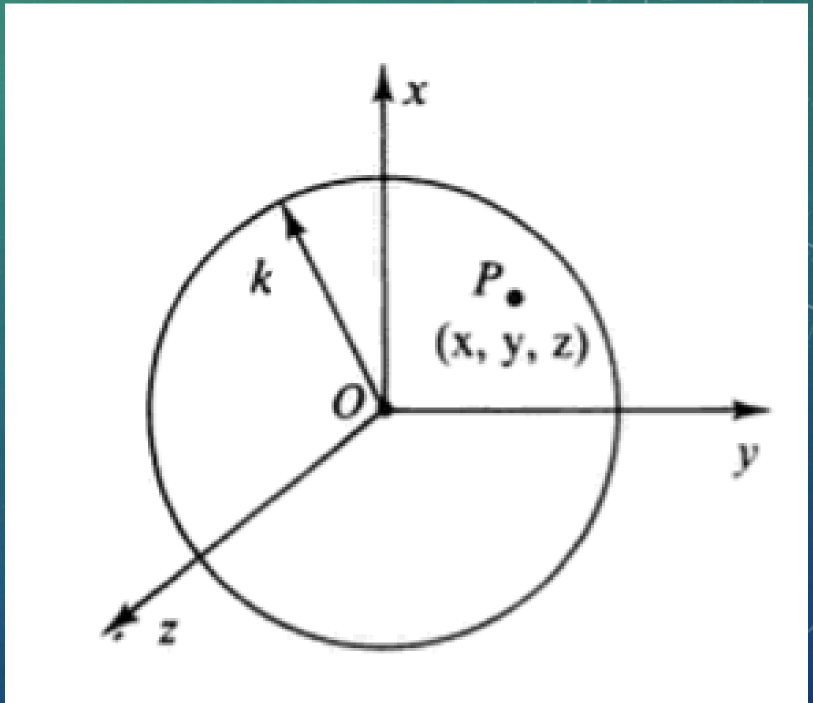
La función f(x, y, z, t) = $x^2 + y^2 + z^2 - k^2t^2 = 0$ es un ***vínculo holónomo***.



Se podrá despejar una coordenada en función de las demás. La descripción puede hacerse con una coordenada menos.

Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:



Suponga una partícula que se mueve en el interior de una esfera cuyo radio es $R = k = cte$

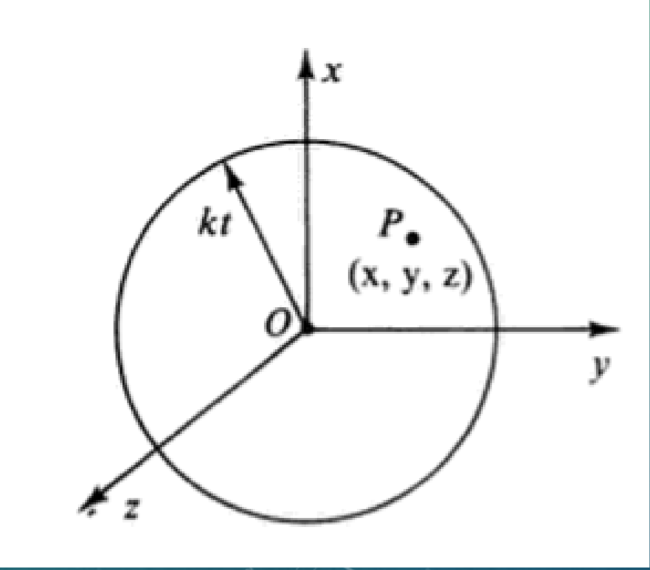
Si la esfera está centrada en el origen O, las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ cumplen: $x^2 + y^2 + z^2 < k^2$.

Este vínculo es ***no holónomo o anholónomo***.

Podrían haber vínculos que pueden expresarse como funciones de coordenadas y de las velocidades de esas coordenadas y eventualmente del tiempo: $f(\vec{r}_\alpha, \ldots \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0$

Este vínculo también se denomina ***no holónomo o anholónomo***.

Las ecuaciones de Lagrange



Vínculos:

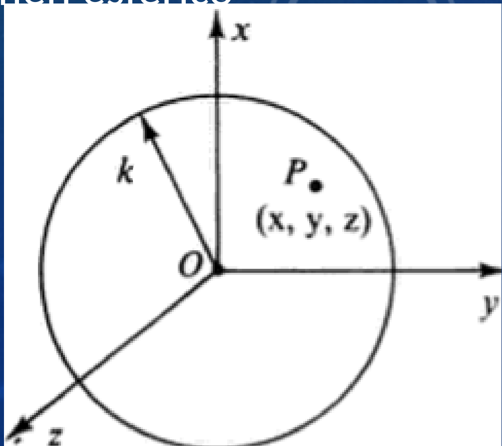
Hay otra clasificación posible.

Hay vínculos cuya expresión funcional involucran *explícitamente* al tiempo.

Este vínculo se denomina ***reónomo***. $f(\vec{\mathrm{r}}_1, \ldots \vec{\mathrm{r}}_N, t) = 0,$ El caso de la partícula que se mueve sobre la superficie esférica de radio creciente es el caso de un vínculo ***reónomo***. (f(x, y, z, t) = $x^2 + y^2 + z^2 - k^2t^2 = 0$)

Hay otros vínculos que no dependen *explícitamente* con el tiempo.

Este tipo de vínculo se denomina ***esclerónomo***. El ejemplo de la partícula que se mueve en un volumen esférico de radio R sin tocar su superficie es un caso de vínculo **esclerónomo**. (Ec vínculo: $x^2 + y^2 + z^2 < k^2$)



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos:

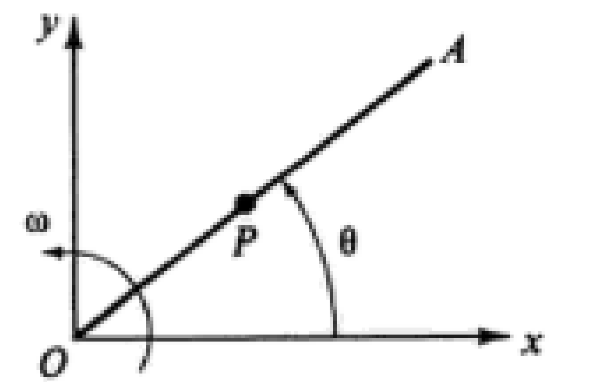
Ejemplo:
Una barra OA gira alrededor de un extremo fijo O con ω constante. Una partícula de masa m se mueve libremente a lo largo de la barra con velocidad constante: $u = kt$

P tiene una velocidad $\vec{v}$ que puede descomponerse en la dirección radial $\vec{u}$ y en la dirección tangencial $\vec{w}$ de la siguiente manera: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow v^2 = u^2 + w^2$

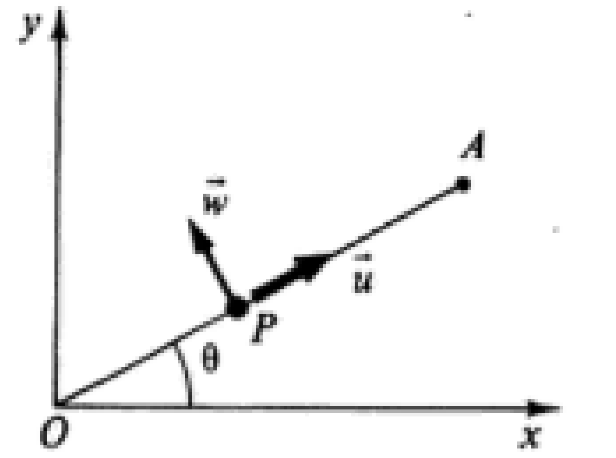
$w = r\omega$ y $u = kt = \dot{r} \Rightarrow r = kt^2$

El vínculo de velocidades es reónomo y no holónomo al quedar:

$v^2 = k^2t^2 + k^2\varpi^2t^4$ o también: $v = kt\sqrt{1+\varpi^2t^2}$ $\quad f(\vec{r};\vec{v}:t) = 0$



El punto material P se mueve en un vínculo reónomo.



Las ecuaciones de Lagrange

Vínculos: Grados de libertad

Cada ecuación de un vínculo holónomo permite despejar una de las coordenadas en función de las otras, reduciendo el número de las ecuaciones dinámicas, hasta obtener:

$$n = 3N - \#\ \text{ec. de vínculo}$$

n: número de grados de libertad

Para describir la posición de un sistema, se necesitan $n \leqslant 3N$ coordenadas independientes.

Las ecuaciones de Lagrange

Coordenadas generalizadas: un conjunto cualquiera de parámetros , que sirven para determinar de manera unívoca la *configuración del sistema*.
Las n coordenadas generalizadas (independientes) se eligen.

Dado un sistema de N partículas con posicion $\vec{\mathbf{r}}_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots N$ se dice que $q_1, \ldots q_n$ son *coordenadas generalizadas* del sistema si cada posición r_α puede escribirse como una función de las q_i:

$$\vec{\mathbf{r}}_\alpha = \vec{\mathbf{r}}_\alpha(q_1, \ldots q_n, t), \qquad \alpha = 1, \ldots N.$$

Y recíprocamente, cada q_i puede escribirse como una función de las posiciones r_α :

$$q_i = q_i(\vec{\mathbf{r}}_1, \ldots \vec{\mathbf{r}}_N, t), \qquad i = 1, \ldots n.$$

El espacio de las q_i se llama ***espacio de configuraciones***.

El sistema completo está definido por un punto en este espacio. El problema principal consiste en encontrar La evolución temporal de ese punto. Basta conocer una configuración $q_i(t_0)$ a un tiempo dado y además todas las *velocidades generalizadas* . Conociendo $q_i(t_0)$ y queda determinado todo el movimiento posterior.

Las ecuaciones de Lagrange

***Coordenadas generalizadas*:**

El movimiento está determinado por las ecuaciones de Lagrange. Tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots n}$$

para vínculos holónomos

Nota: Las derivadas de ***L*** en coordenadas cartesianas dan las componentes de la fuerza y del momento lineal.
En coordenadas generalizadas se denomina:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = \text{fuerza generalizada sub } i,$$

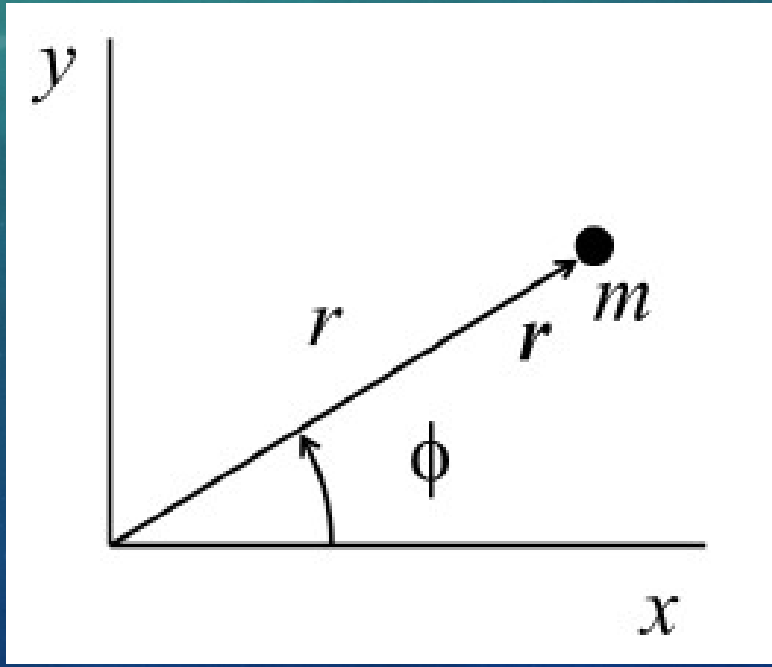
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{momento generalizado sub } i,$$

Así como las unidades de las coordenadas generalizadas pueden no ser longitudes (pueden ser ángulos, por ejemplo), las unidades de las fuerzas y los momentos generalizados no necesariamente son de fuerza o de momento. Pueden ser torques y momentos angulares, o incluso otras magnitudes.

Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación:

Encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en 2D, usando coordenadas polares como coordenadas Generalizadas. Use método Lagrange.



Las ecuaciones de Lagrange

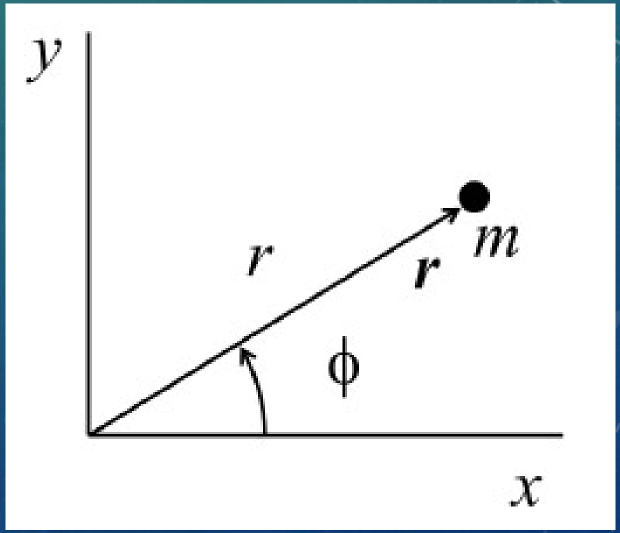
Ejemplo de aplicación:

Encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en 2D, usando coordenadas polares como coordenadas generalizadas

Coordenadas cartesianas *(x, y)* => coordenadas polares *(r, ϕ)*

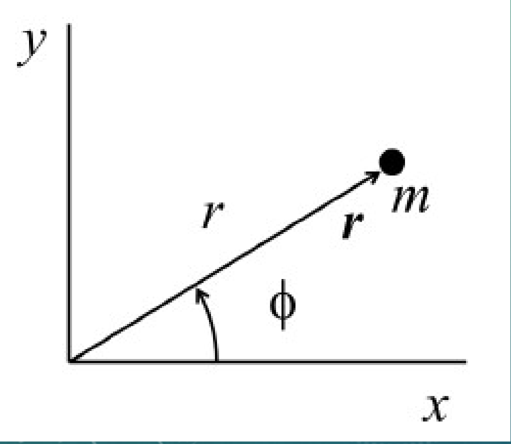
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r, \phi).$$



Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación:



Ecuación radial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r} \overset{\text{derivar}}{\Rightarrow} mr\dot\phi^2 \quad \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial r}}_{F_r\ \text{(fuerza radial)}} \quad = \frac{d}{dt}m\dot r = m\ddot r,$$

$$\boxed{F_r = m(\ddot r - r\dot\phi^2)}$$

$\boldsymbol{a_R}$

Ecuación angular:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} \overset{\text{derivar}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial \phi}}_{\text{¿qué es esto?}} \quad = \frac{d}{dt}mr^2\dot\phi$$

Calcular $\mathbf{F} = -\nabla U$ en polares para interpretar esta ecuación.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat\phi$$

$$\Rightarrow F_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi,$$

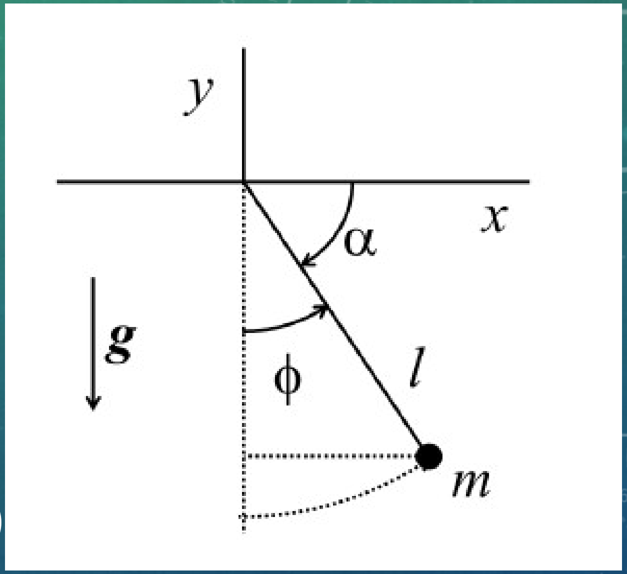
$mr^2\dot\phi$=> momento angular respecto al origen

$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi$ => torque respecto al origen

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\phi\right) = rF_\phi$$

Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación: El péndulo plano



La principal ventaja práctica del método de Lagrange es su capacidad de encontrar las ecuaciones de movimiento de sistemas con vínculos, ignorando las fuerzas. Un ejemplo de este tipo de sistemas es un péndulo plano.

1 partícula –> 2 coordenadas cartesianas (x,y) –> 1 ec vínculo:

n = 2 – 1 = 1 grado de libertad –> 1 coordenada generalizada que se elige (puede ser x o y)

–> las raíces cuadradas pueden complicar el cálculo.

Por la geometría del problema, conviene adoptar coordenadas polares: $x = l\sin\phi,$ $y = l\cos\phi.$

$$T = \cancel{\tfrac{1}{2}m\dot{l}^2} + \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2.$$

$$U = mg \times \text{altura} = mg(-y) = mg(-l\cos\phi) = -mgl\cos\phi.$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Las ecuaciones de Lagrange

Ejemplo de aplicación: El péndulo plano

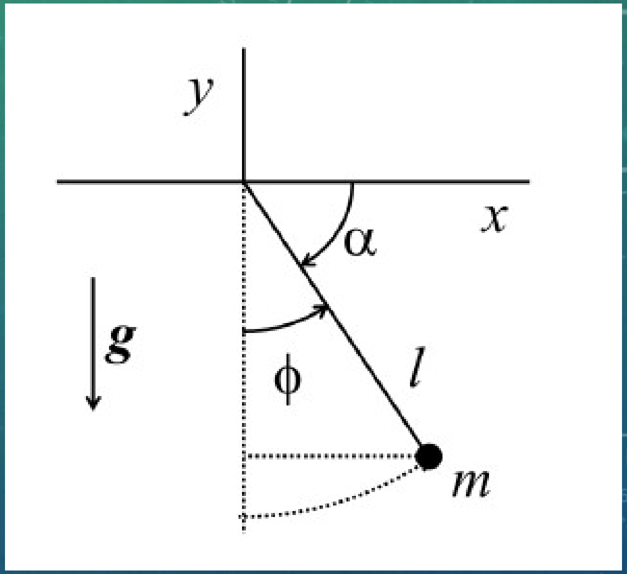
Derivando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \phi}(mgl\cos\phi) = mgl\frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi) = -mgl\sin\phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = \frac{\partial}{\partial \dot\phi}\left(\tfrac{1}{2}ml^2\dot\phi^2\right) = ml^2\dot\phi \xrightarrow{d/dt} ml^2\ddot\phi.$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\cancel{m}g\cancel{l}\sin\phi}_{\text{torque resp. O}} = \underbrace{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}_{\text{mom. inercia}}\ \ddot\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\phi = -\frac{g}{l}\sin\phi} \quad \text{Ecuación de movimiento.}$$



Las ecuaciones de Lagrange

Máquina de Atwood: