Oscilaciones

MECÁNICA RACIONAL – 2019

Introducción

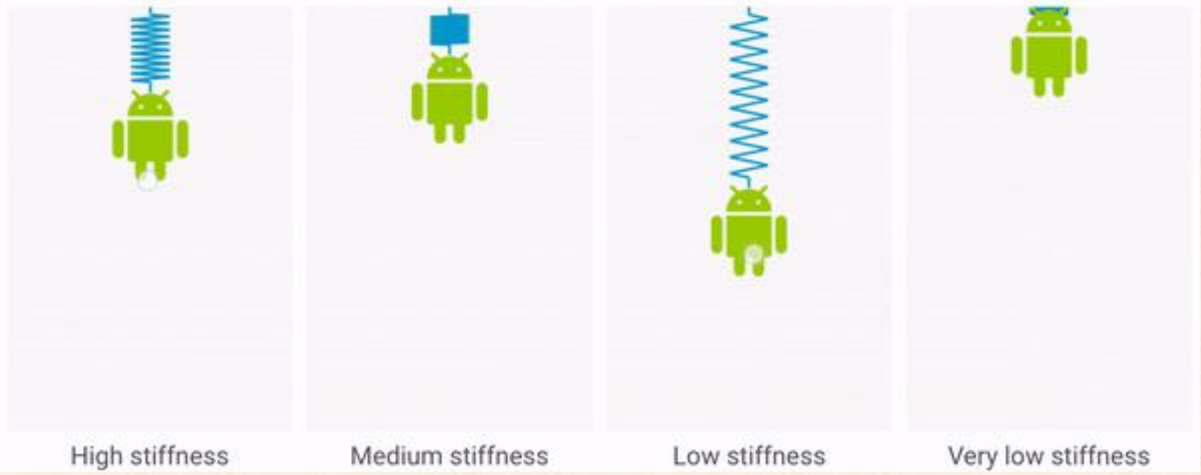
SISTEMAS → *Equilibrio Estable*

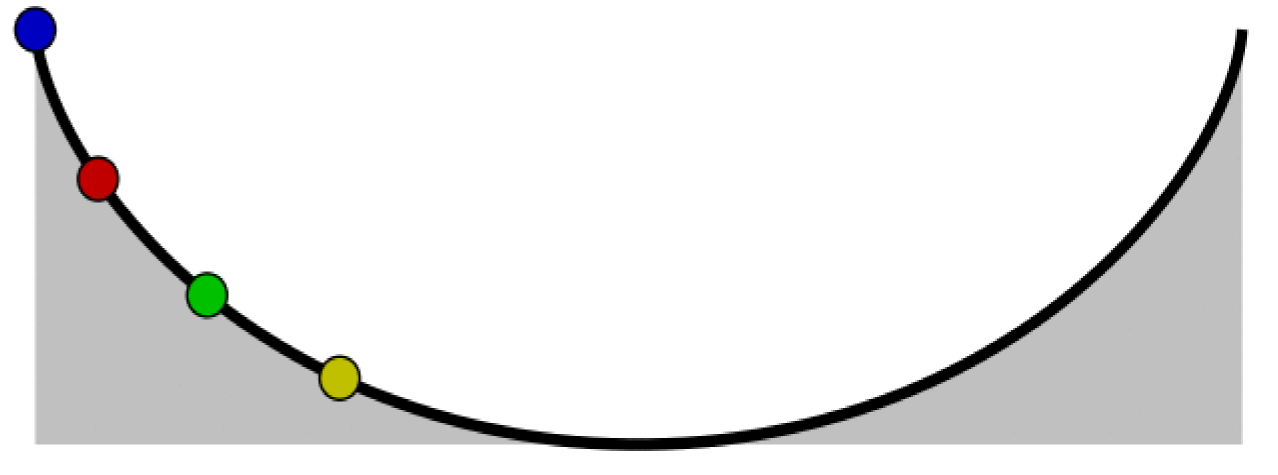
SISTEMAS → *Respuesta: pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio*

Perturbación por el medio o por un mecanismo

Si existen fuerzas disipativas o si desaparece la perturbación: se podría alcanzar la posición de equilibrio

Sin fuerzas disipativas o con permanentes perturbaciones: Podría mantenerse la oscilación





Introducción

MINIMO LOCAL DE POTENCIAL

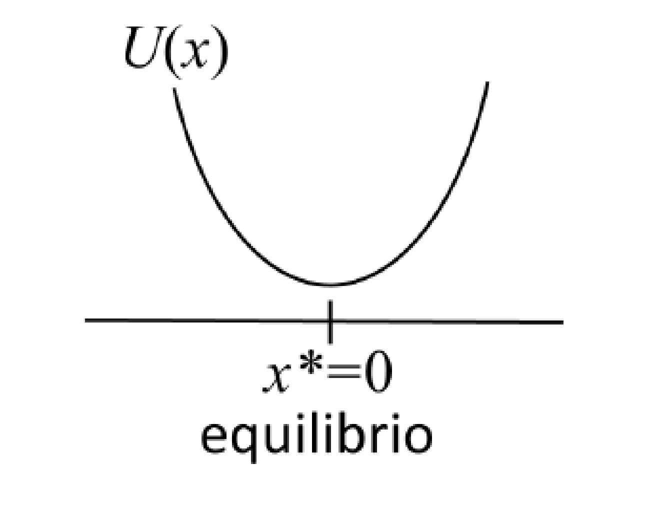
DISIPACION

PERTURBACION

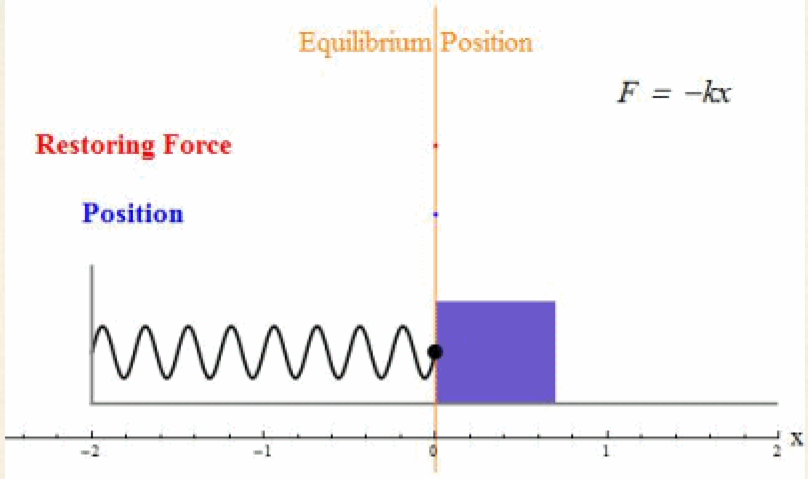
DINAMICA DE SISTEMAS

El oscilador armónico

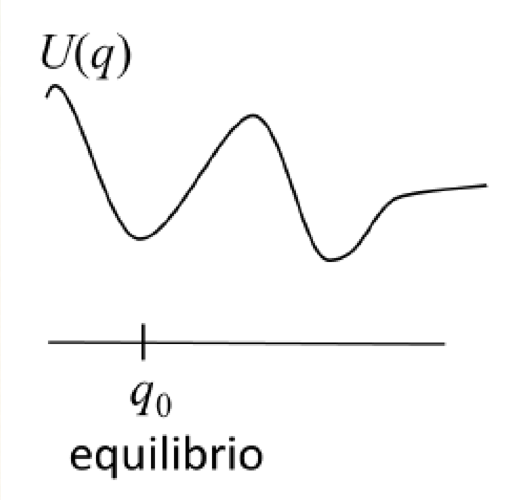
Una masa sujeta al extremo de un resorte experimenta una ***fuerza*** $F(x) = -kx$



La ***energía potencial*** de la cual se deriva esta fuerza es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$



Suponga un sistema ***arbitrario, conservativo y unidimensional***, caracterizado por un potencial $U(q)$ que tiene un equilibrio en q_0.



En la proximidad de q_0, se puede desarrollar el potencial $U(q)$ en serie de Taylor:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)x + \frac{1}{2}U''(q_0)x^2 + \cdots \qquad \text{donde } x = q - q_0$$

es cero porque $U'(q_0) = 0$

es una constante

$$\boxed{U(q) \approx \frac{1}{2}U''(q_0)x^2}$$

Potencial con la forma del potencial elástico de la Ley de Hooke.
Éste y la dinámica asociada son el modelo más general de la dinámica en la ***proximidad de un equilibrio estable*** de cualquier sistema.

(Paréntesis matemático)

<u>Serie de Taylor:</u> Es una aproximación a una función por medio de una suma de infinitos términos con determinada forma.

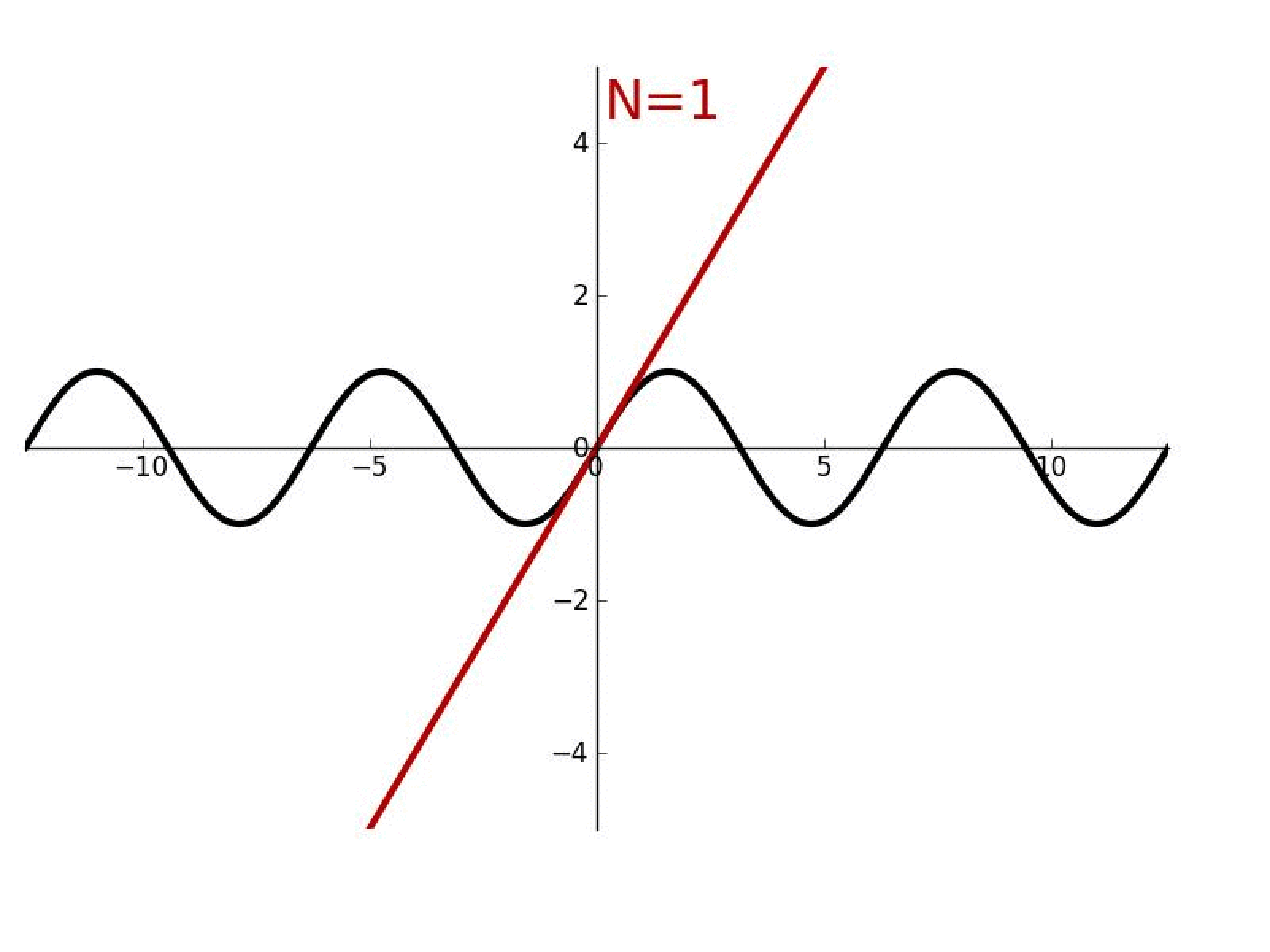
La serie de Taylor de una función *f(x)* infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo *a* será:

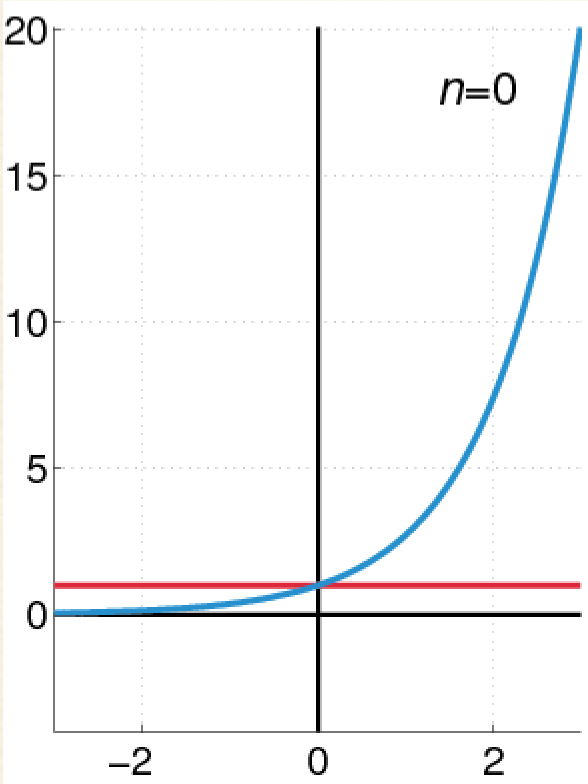
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El oscilador armónico

(Paréntesis matemático) – ***Serie de Taylor:***

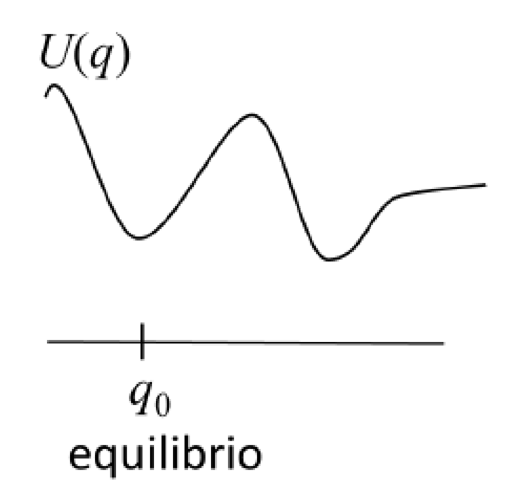




El oscilador armónico

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Suponga un sistema ***arbitrario, conservativo y unidimensional***, caracterizado por un potencial $U(q)$ que tiene un equilibrio en q_0.



En la proximidad de q_0, se puede desarrollar el potencial *U(q)* en serie de Taylor:

$$U(q) = \underbrace{U(q_0)}_{\text{es una constante}} + \underbrace{U'(q_0)x}_{\text{es cero porque } U'(q_0)=0} + \frac{1}{2}U''(q_0)x^2 + \cdots \qquad \text{donde } x = q - q_0$$

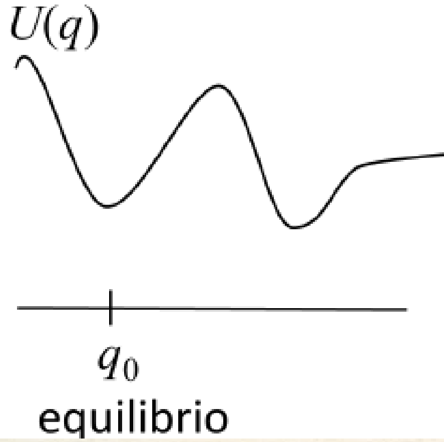
$$\boxed{U(q) \approx \frac{1}{2}U''(q_0)x^2}$$

Potencial con la forma del potencial elástico de la ***Ley de Hooke***.

Éste y la dinámica asociada son el modelo más general de la dinámica en la ***proximidad de un equilibrio estable*** de cualquier sistema.

El oscilador armónico

$$\boxed{U(q) \approx \frac{1}{2} U''(q_0) x^2}$$



El lagrangiano será: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$ donde $k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0=0} > 0$ por ser un mínimo.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \qquad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \qquad (1)$$

EDO de ***2do orden, lineal, homogéneo y con coeficientes constantes***

Tenemos 2 soluciones. Se propone una solución exponencial: $\boxed{x(t) = Ce^{\lambda t}}$ (2)

(2) en (1): $m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$

donde ***Frecuencia natural del oscilador***: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Dos soluciones: $x_1(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t}$ y $x_2(t) = C_2 e^{-i\omega_0 t}$ ambas con la misma frecuencia ω_0

La ecuación general de $\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$ es una combinación lineal de las dos: $\boxed{x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}}$

es IR => C_1 y C_2 deben elegirse con cuidado

El oscilador armónico

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}}$$

Considerando la fórmula de Euler: $e^{\pm i\omega_0 t} = cos\omega_0 t \pm i\ sen\omega_0 t$

$$x(t) = (C_1 + C_2)cos\omega_0 t + i(C_1 - C_2)sen\omega_0 t \Rightarrow \boxed{x(t) = B_1 cos\omega_0 t + B_2 sen\omega_0 t} \quad (1)$$

Cualquier movimiento que sea combinación de las formas seno y coseno se llama ARMÓNICO

B_1 y B_2 deben ser ***reales*** porque *x(t)* es real.

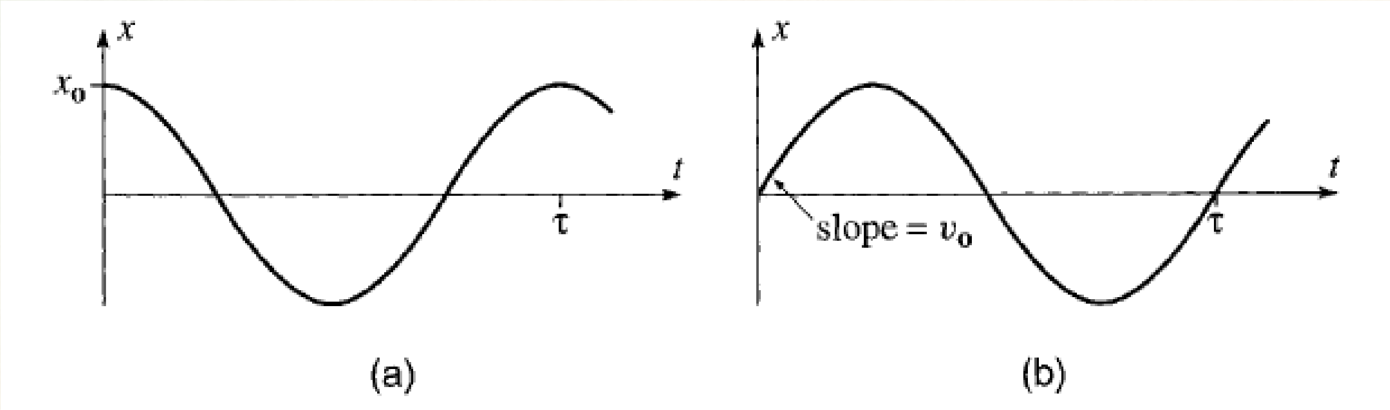
En función a las ***condiciones iniciales***, se pueden identificar B_1 y B_2:

1) A $t = 0$, de la expresión (1) se obtiene que $x(0) = B_1 = x_0$

2) Diferenciando (1): $\dot{x}(t) = -B_1\omega_0 sen\omega_0 t + B_2\omega_0 cos\omega_0 t$ => $\dot{x}(0) = B_2\omega_0 = v_0$

Si la oscilación comienza en un punto diferente de x_0, y desde el reposo ($v_0 = 0$) => $B_2 = 0$ => $\boxed{x(t) = x_0 cos\omega_0 t}$ Fig (a)

Si la oscilación comienza en el origen pero con $v_0 \neq 0$ => $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} sen\omega_0 t$ Fig (b)

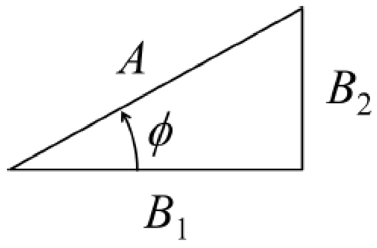


La solución general es más difícil de visualizar porque es una combinación de ambos términos:

$$\boxed{x(t) = x_0 cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} sen\omega_0 t}$$

El oscilador armónico

$$x(t) = B_1 cos\omega_0 t + B_2 sen\omega_0 t$$

Definimos una nueva constante: $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ (Es la hipotenusa de: )

Podemos reescribir:

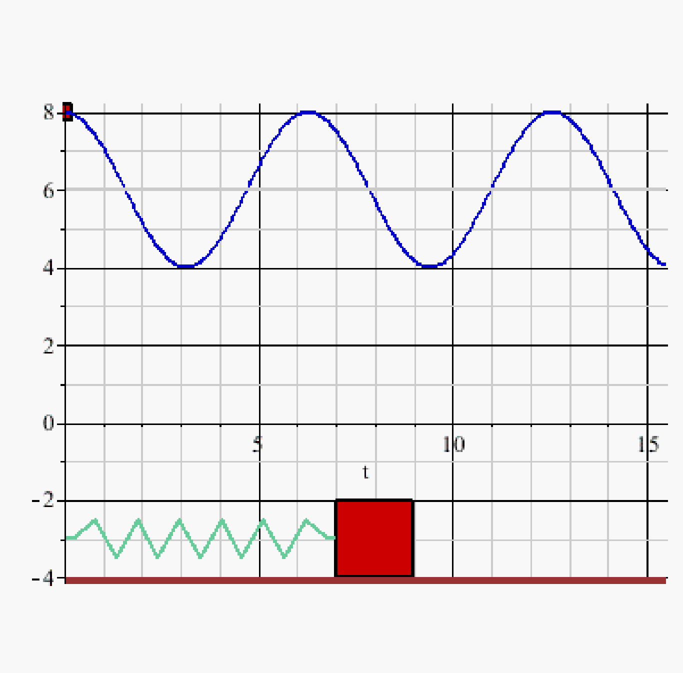
$$x(t) = A\left(\frac{B_1}{A} cos\omega_0 t + \frac{B_2}{A} sen\omega_0 t\right) = A(cos\phi\ cos\omega_0 t + sen\phi\ sen\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{x(t) = A\ cos(\omega_0 t - \phi)}$$

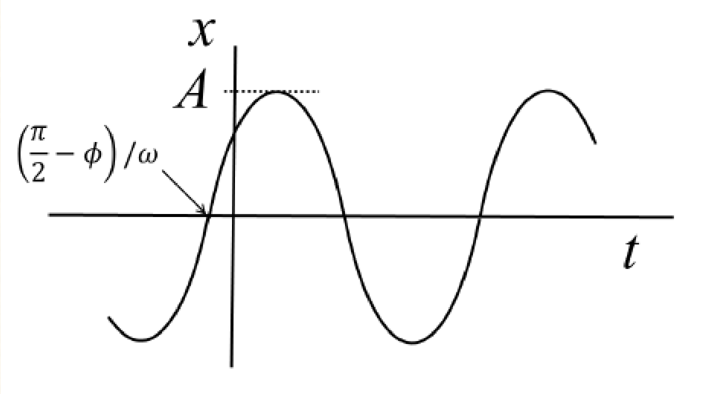
Donde ***A*** es la amplitud de la oscilación y ϕ es el desfasaje resultante de la combinación.

Formas alternativas de la solución general del oscilador armónico:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) = B_1 cos\omega_0 + B_2 sen\omega_0 t \\ x(t) = A\ cos(\omega_0 t - \phi) \end{array}\right.$$

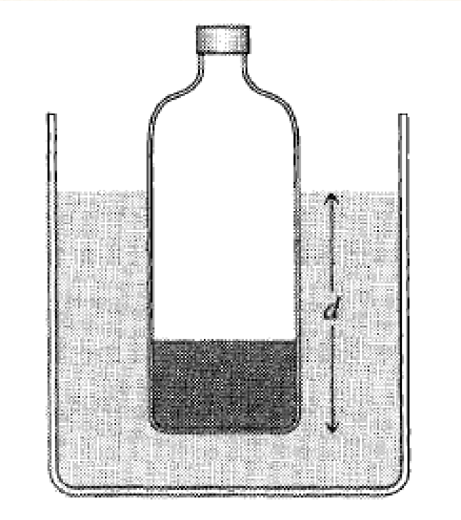




El oscilador armónico

Ejemplo: Una botella en un balde

Una botella está flotando en un balde con la tapa hacia arriba. En el equilibrio, está sumergida una profundidad d_0 desde la superficie del agua. Demuestre que, si se la empuja hasta una profundidad d y se la suelta, la botella tendrá un movimiento armónico simple. Encuentre la frecuencia de sus oscilaciones.



El oscilador armónico

$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$

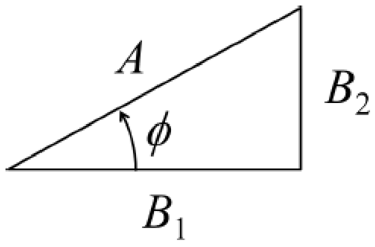
$x(t) = B_1 cos\omega_0 + B_2 sen\omega_0 t$

$x(t) = A\, cos(\omega_0 t - \phi)$

Hay una forma más para expresar la solución *x(t)*

$C_1 = \frac{1}{2}(B_1 - iB_2)$ y $C_2 = \frac{1}{2}(B_1 + iB_2)$ => $C_2 = C_1^*$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1^* e^{-i\omega_0 t} = 2Re\; C_1 e^{i\omega_0 t}$$

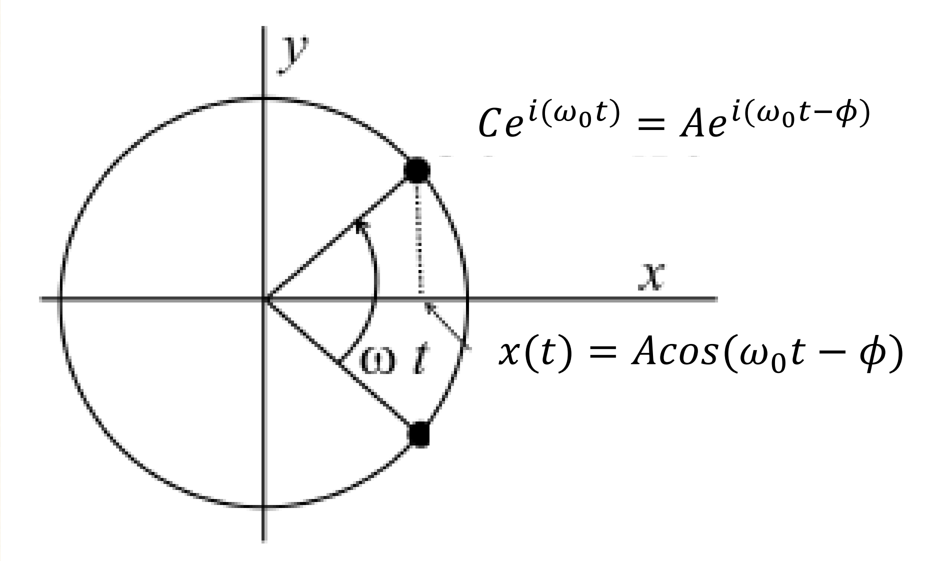


Si $C = 2C_1 \Rightarrow \mathrm{C} = B_1 - iB_2 = Ae^{-i\phi}$

$$x(t) = Re\; Ce^{i\omega_0 t} \Rightarrow \boxed{x(t) = Re\; Ae^{i(\omega_0 t - \phi)}}$$

Se representa al número complejo $Ae^{i(\omega_0 t-\phi)}$que rota en sentido antihorario con velocidad angular ω_0 alrededor de un círculo de radio *A*. Su parte real (*x(t)*) es la proyección sobre el eje *x*.

La proyección oscila hacia adelante y atrás con frecuencia ω_0 y amplitud *A*. Específicamente, $x(t) = A\; cos(\omega_0 t - \phi)$



El oscilador armónico amortiguado

Además de fuerza conservativa dada por U(x), suponga que existe una fuerza disipativa proporcional a la velocidad: $-\gamma\dot{x}$ (con γ : ***cte de amortiguamiento***). La ecuación de movimiento será: $\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0}$

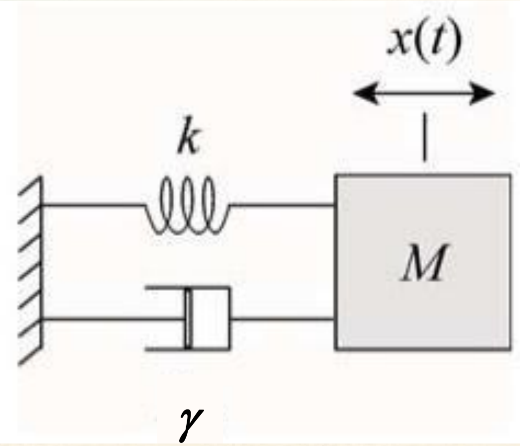
Es lineal y de segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes. De la misma forma que antes, se propone una solución exponencial: $x(t) = Ce^{\lambda t}$

$$\dot{x}(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + \gamma\lambda Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Factor de amortiguamiento: $b = \frac{\gamma}{2m} \Rightarrow \frac{\gamma}{m} = 2b$ $\qquad \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad => \quad \lambda_{1/2} = -b \pm \frac{2\sqrt{b^2-\omega_0^2}}{2} \quad => \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \quad => \quad x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Análisis más complejo



3 casos

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

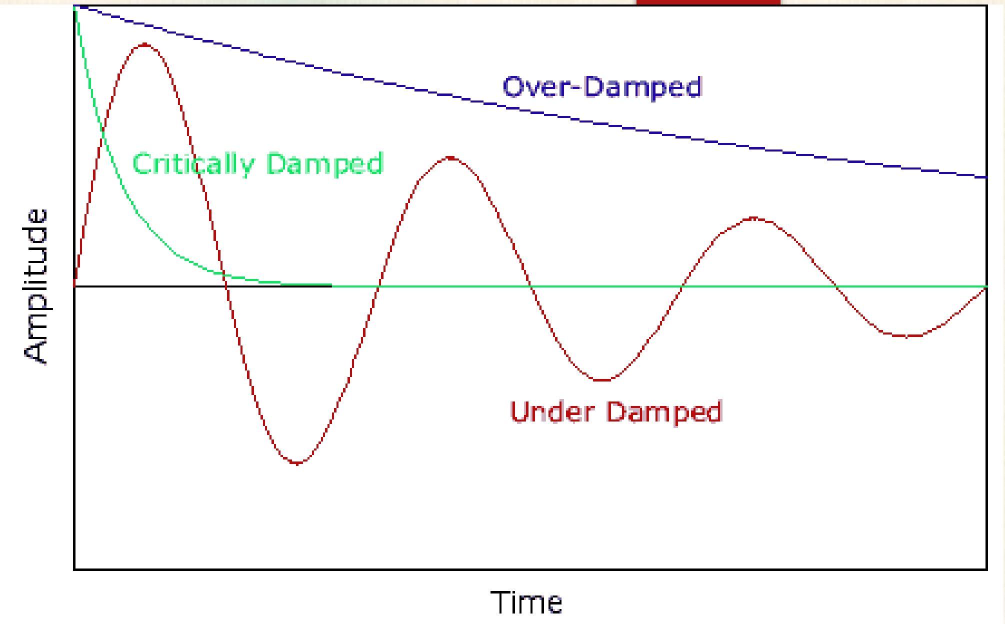
El oscilador armónico amortiguado

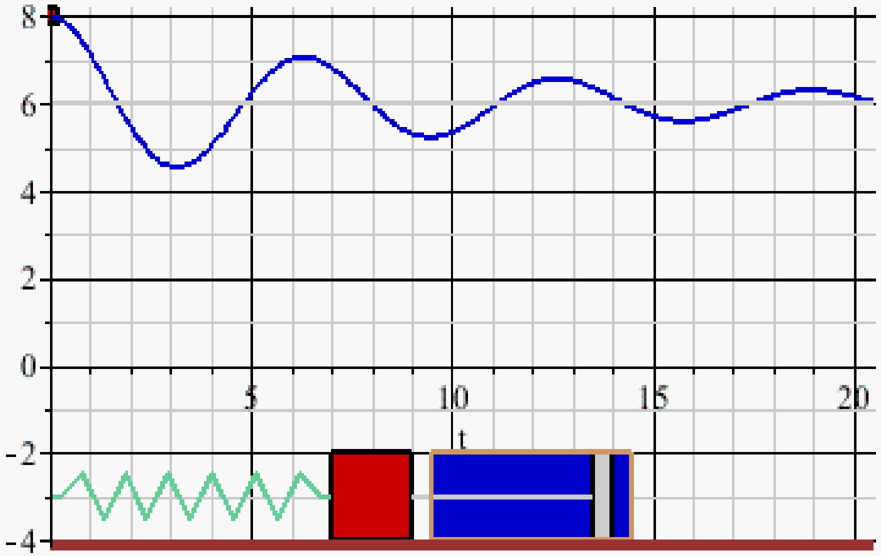
$$\boxed{\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}$$

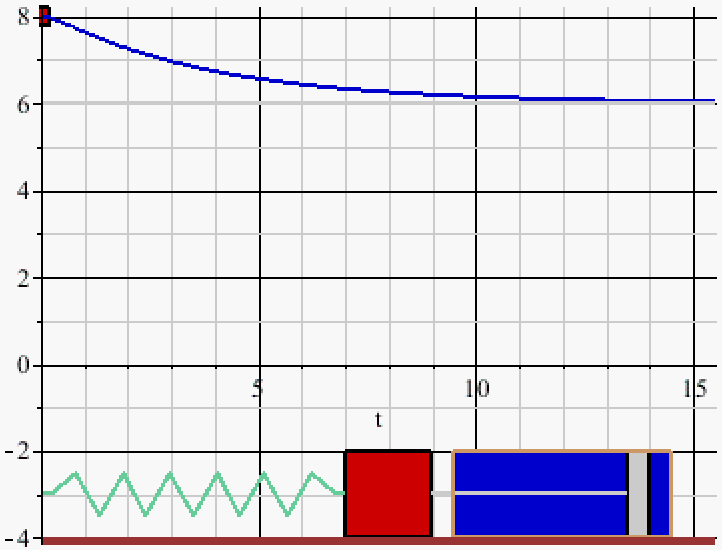
1) Movimiento subamortiguado: $b^2 < \omega_0^2$

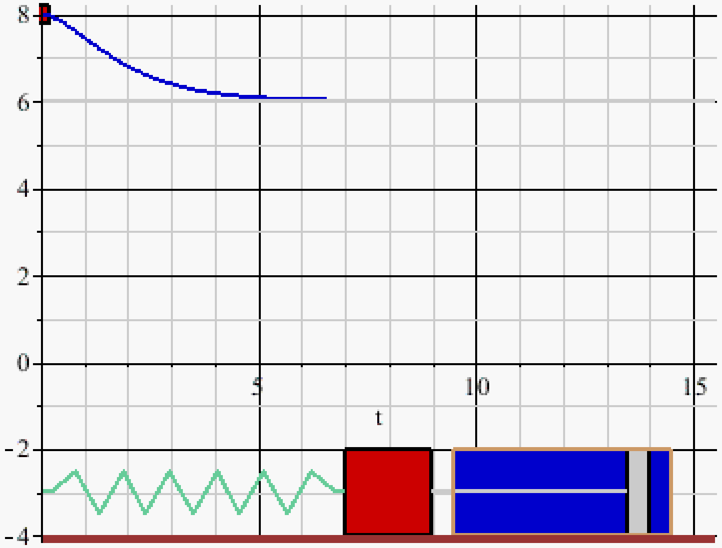
2) Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > \omega_0^2$

3) Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = \omega_0^2$









El oscilador armónico amortiguado

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

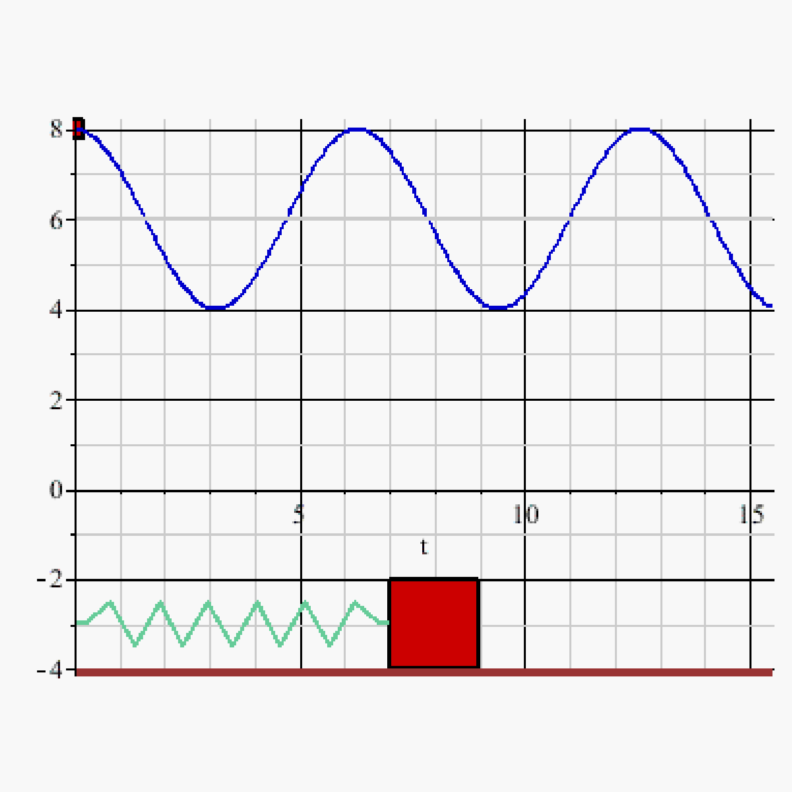
Paréntesis:

Movimiento no amortiguado: $b = 0$

$$x(t) = \left(C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Solución de la familia del oscilador armónico sin amortiguamiento

Parámetro de decaimiento: $b = 0$



El oscilador armónico amortiguado

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right)$$

1) Movimiento subamortiguado: $b^2 < \omega_0^2$

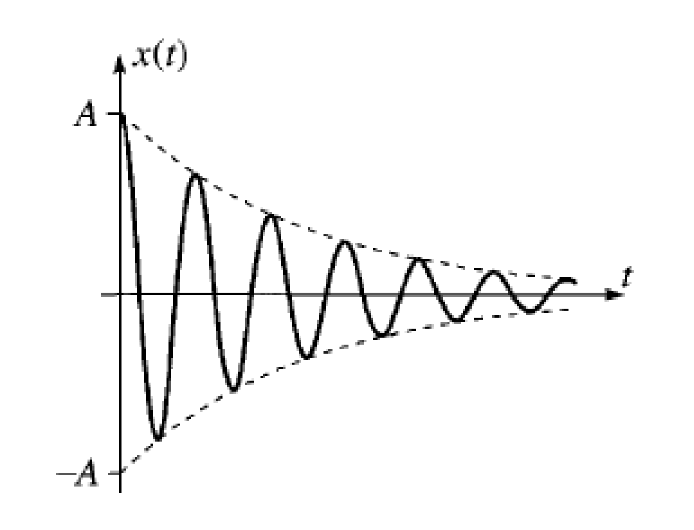
$$\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - b^2} = i\omega_1$$, ω_1 es la frecuencia de amortiguamiento

Donde $\omega_1 < \omega_0$. En el caso particular de un amortiguamiento muy pobre, b << ω_0 y $\omega_1 \approx \omega_0$:

$$x(t) = \underbrace{e^{-bt}}_{\text{Decaimiento exponencial}}\underbrace{\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right)}_{\text{Movimiento no amortiguado}}$$

Decaimiento exponencial

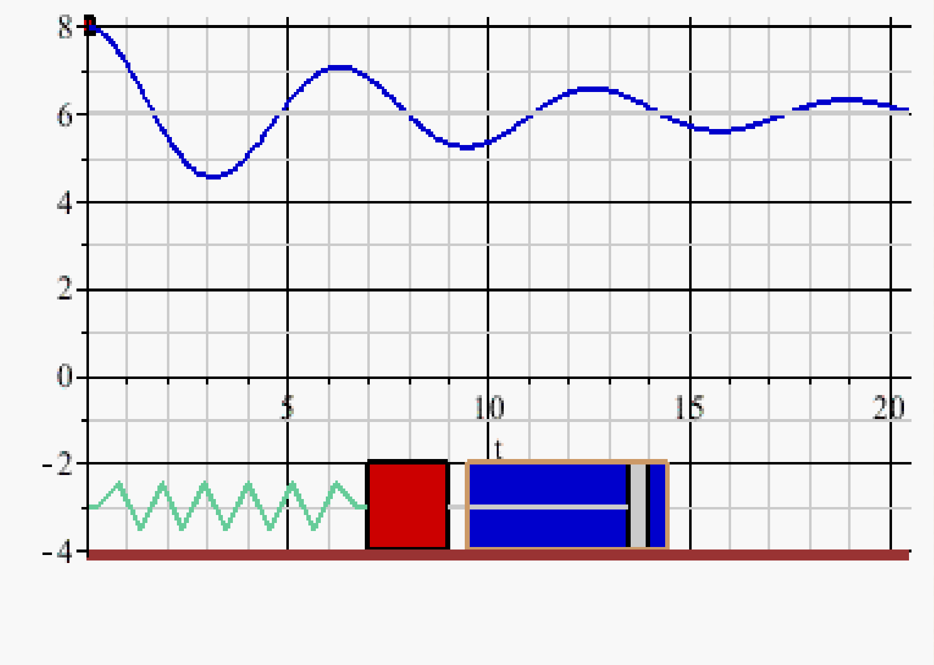
Movimiento no amortiguado, podemos escribirlo como $Acos(\omega_1 t - \phi)$



$$x(t) = Ae^{-bt}cos(\omega_1 t - \phi)$$

Parámetro de decaimiento: *b*

A mayor valor de *b*, más rápidamente se amortiguan las oscilaciones.



El oscilador armónico amortiguado

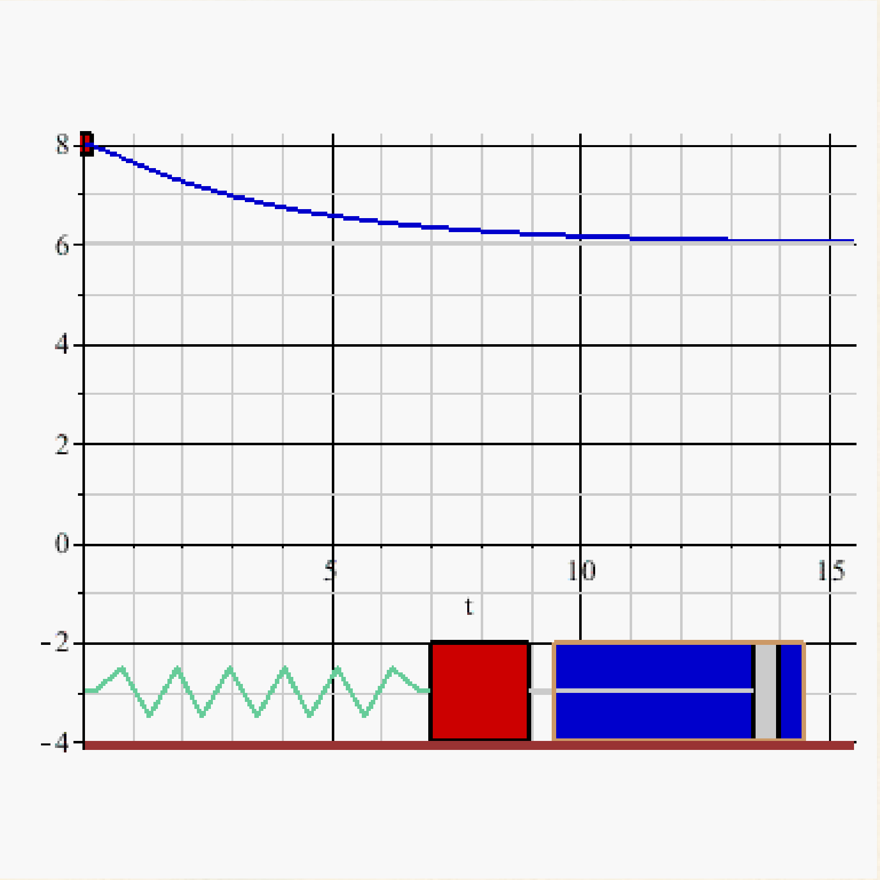
$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right)$$

2) Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > \omega_0^2$

Donde *b* es un valor grande.

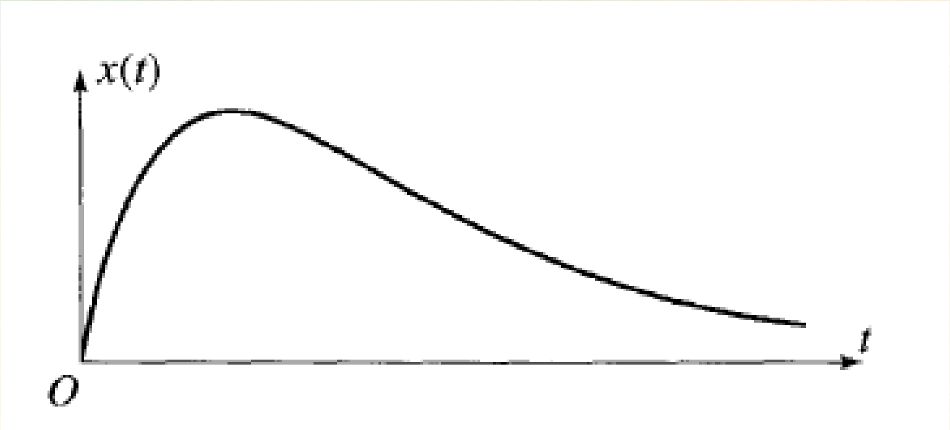
$$x(t) = C_1 e^{-\left(b-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(b+\sqrt{b^2-\omega_0^2}\right)t}$$

Ambos términos son decrecientes, aunque el primero decrece en menor medida por la forma de su exponente.



Parámetro de decaimiento: $b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

(a medida que *b* aumenta, el parámetro disminuye)



$x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

El oscilador armónico amortiguado

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right)$$

3) Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = \omega_0^2$. Es el límite de los casos anteriores.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

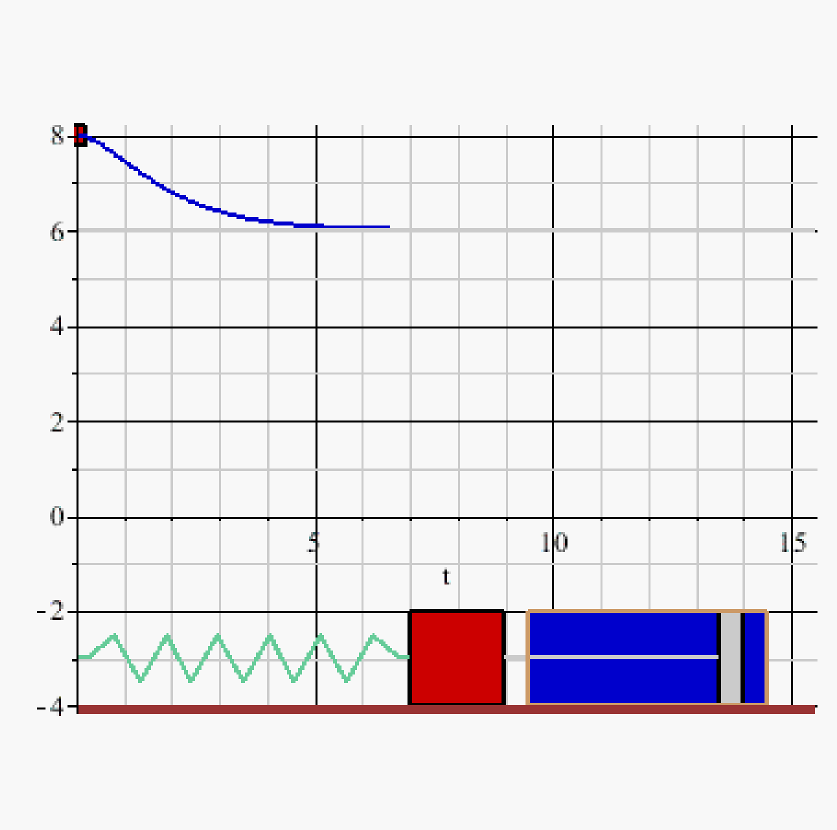
Cuando $b^2 = \omega_0^2$, la ecuación $\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ genera $\lambda_1 = \lambda_2$

Se genera una sola solución del tipo: $x(t) = C_1 e^{-bt}$

La segunda ecuación se obtiene de proponer $x(t) = te^{-bt}$, que también es

solución de $\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0}$ cuando $b^2 = \omega_0^2$

La solución general para este caso: $x(t) = C_1 e^{-bt} + C_2 te^{-bt} = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$



Parámetro de decaimiento: $b = \omega_0$
Ambos términos decaen de la misma forma.

El oscilador armónico amortiguado

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2 t}} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2 t}}\right)$$

Comparación de parámetros de decaimiento:

damping	β	decay parameter
none	$\beta = 0$	0
under	$\beta < \omega_o$	β
critical	$\beta = \omega_o$	β
over	$\beta > \omega_o$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$

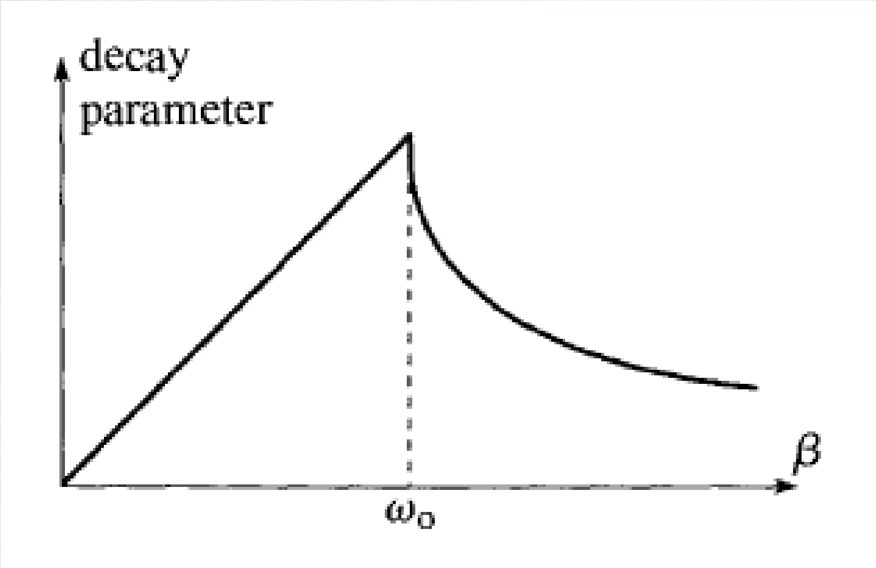
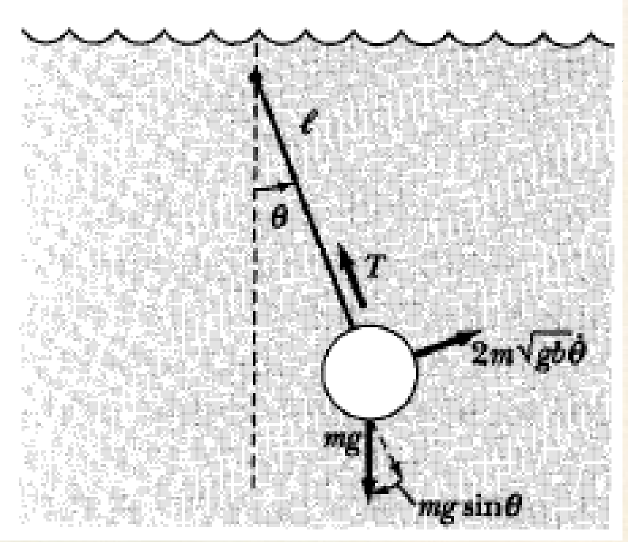


Gráfico del parámetro de decaimiento vs *b*. Muestra que las oscilaciones se amortiguan más rápidamente en el caso que $b = \omega_0$, que es la situación del amortiguamiento crítico.

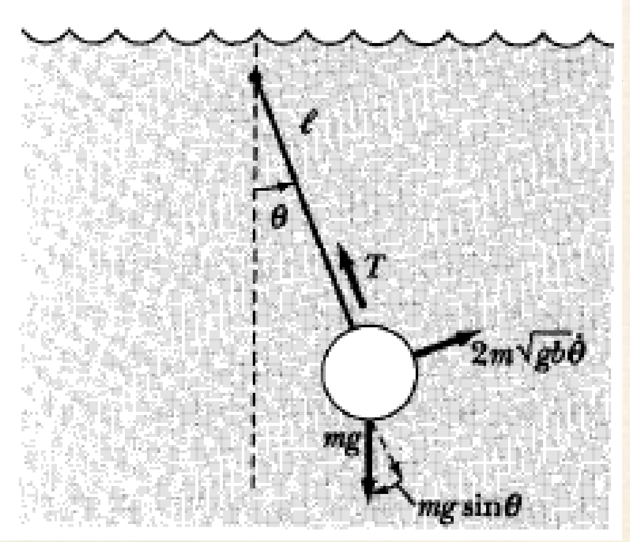
Por ejemplo, es un auto se busca que las oscilaciones causadas por un camino con baches decaigan rápidamente.

El oscilador armónico amortiguado



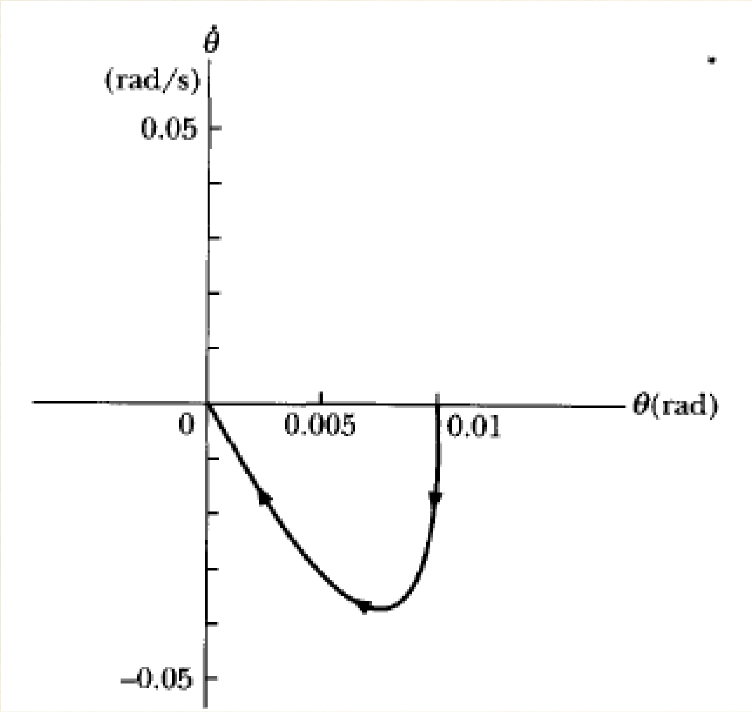
Un péndulo de longitud *l* y masa *m* se mueve sumergido en aceite con un ángulo θ decreciente. El aceite retarda el movimiento con una fuerza resistiva proporcional a la velocidad: $F = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta})$. Inicialmente, el péndulo arranca a $t_0 = 0$ con un ángulo $\theta = \alpha$ y desde el reposo. Encuentre el desplazamiento angular y la velocidad angular.

El oscilador armónico amortiguado



Un péndulo de longitud *l* y masa *m* se mueve sumergido en aceite con un ángulo θ decreciente. El aceite retarda el movimiento con una fuerza resistiva proporcional a la velocidad: $F = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta})$. Inicialmente, el péndulo arranca a $t_0 = 0$ con un ángulo $\theta = \alpha$ y desde el reposo. Encuentre el desplazamiento angular y la velocidad angular.

Considerando: $\sqrt{\frac{g}{l}} = 10s^{-1}$ y $\alpha = 10^{-2}rad$, el diagrama de fase será:



Luego de soltarlo desde el reposo, el péndulo se acelera rápidamente volviendo al punto de equilibrio. Después se desacelera a medida que θ tiende a cero. $\dot{\theta}$ es siempre negativa.

Oscilaciones amortiguadas forzadas

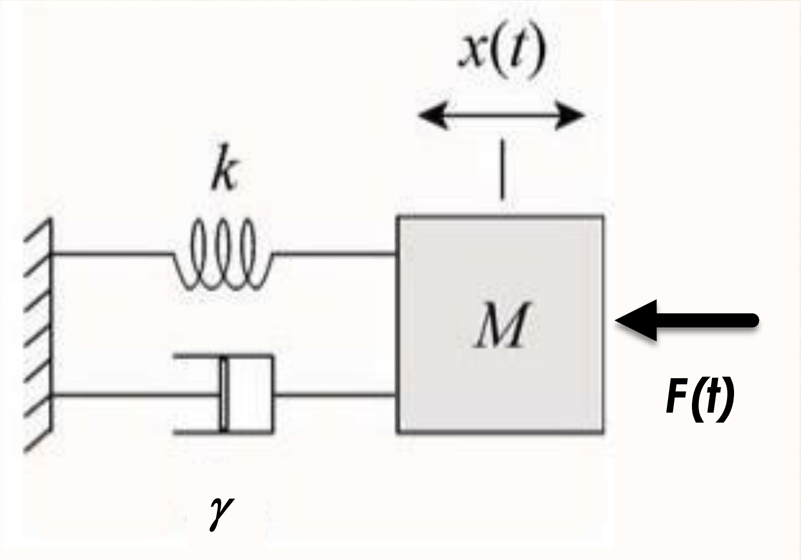
Cualquier oscilador natural que evoluciona pierde energía por el efecto de la amortiguación y termina en el ***REPOSO***

Para que continúen las oscilaciones, debe existir ***fuerzas externas*** que perturben el sistema. Por ejemplo, un niño en una hamaca que recibe un empujón periódico de su padre.

La fuerza neta F_N sobre el sistema será: $F_N = -\gamma\dot{x} - kx + F(t)$

donde: $-\gamma\dot{x}$ es la fuerza de amortiguamiento y *F(t)* es la fuerza externa

La ecuación de movimiento será: $F(t) = m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)}$



donde: $f(t) = \frac{F(t)}{m}$, fuerza por unidad de masa.

$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ es una ecuación inhomogénea.

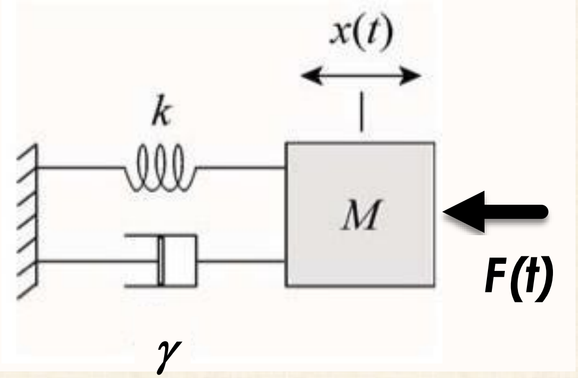
Se puede demostrar que la solución de esta ecuación será: $\boxed{x(t) = x_p(t) + x_h(t)}$

donde:

$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ que es la solución de la ecuación homogénea $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x_p(t)$ es una solución particular que dependerá de la forma de ***F(t)***.

Oscilaciones sinusoidalmente forzadas



Un caso particular es el de aplicación de una fuerza que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_N = -\gamma\dot{x} - kx + F_0\,cos\omega t$$

donde también se considera una fuerza restauradora $(-kx)$ y una fuerza de amortiguación $(-\gamma\dot{x})$

La ecuación de movimiento será: $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0\,cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = A\,cos\omega t}$ ***(1)***

con $\quad A = \dfrac{F_0}{m}$ y ω es la frecuencia de la fuerza externa.

Solución homogénea $x_h(t)$

Solución particular $x_p(t)$

Solución homogénea: $x_h(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right)$ ***(2)***

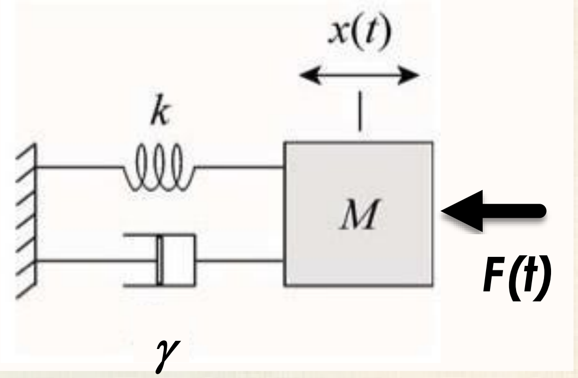
Solución particular: Se propone la solución $\quad x_p(t) = D\,cos(\omega t - \delta)$ ***(3)***

(3) En ***(1)***: $\{A - D[(\omega_0^2 - \omega^2)cos\delta + 2\omega b\,sen\delta]\}\,cos\omega t = \{D[(\omega_0^2 - \omega^2)sen\delta - 2\omega b\,cos\delta]\}\,sen\omega t$ ***(4)***

Dado que las funciones seno y coseno son linealmente independientes, la única manera que se satisfaga ***(4)*** será anulando ambos coeficientes a la vez. Por lo tanto:

Oscilaciones sinusoidalmente forzadas

$$\{A - D[(\omega_0^2 - \omega^2)cos\delta + 2\omega b\, sen\delta]\}\, cos\omega t = \{D[(\omega_0^2 - \omega^2)sen\delta - 2\omega b\, cos\delta]\}\, sen\omega t$$



Del término *sen ωt*: $tan\delta = \frac{2\omega b}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad sen\delta = \frac{2\omega b}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2 b^2}} \quad y \quad cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2 b^2}}$$

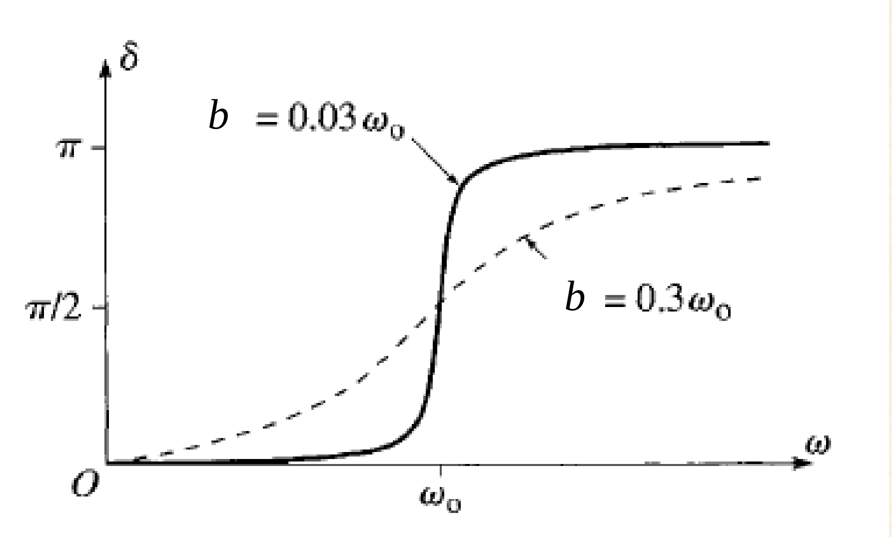
Del término *cos ωt*: $D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2 b^2}}$

La solución particular será: $\boxed{x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2 b^2}} cos(\omega t - \delta)}$ con $\delta = arctan\frac{2\omega b}{\omega_0^2-\omega^2}$

δ representa la diferencia de fase entre la fuerza externa y el movimiento resultante.

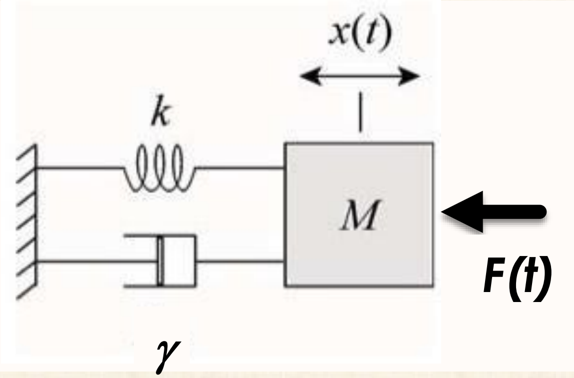
Para un ω_0 fijo:

ω	δ
$\omega = 0$	$\delta = 0$
$\omega = \omega_0$	$\delta = \pi/2$
$\omega \to \infty$	$\delta \to \pi$



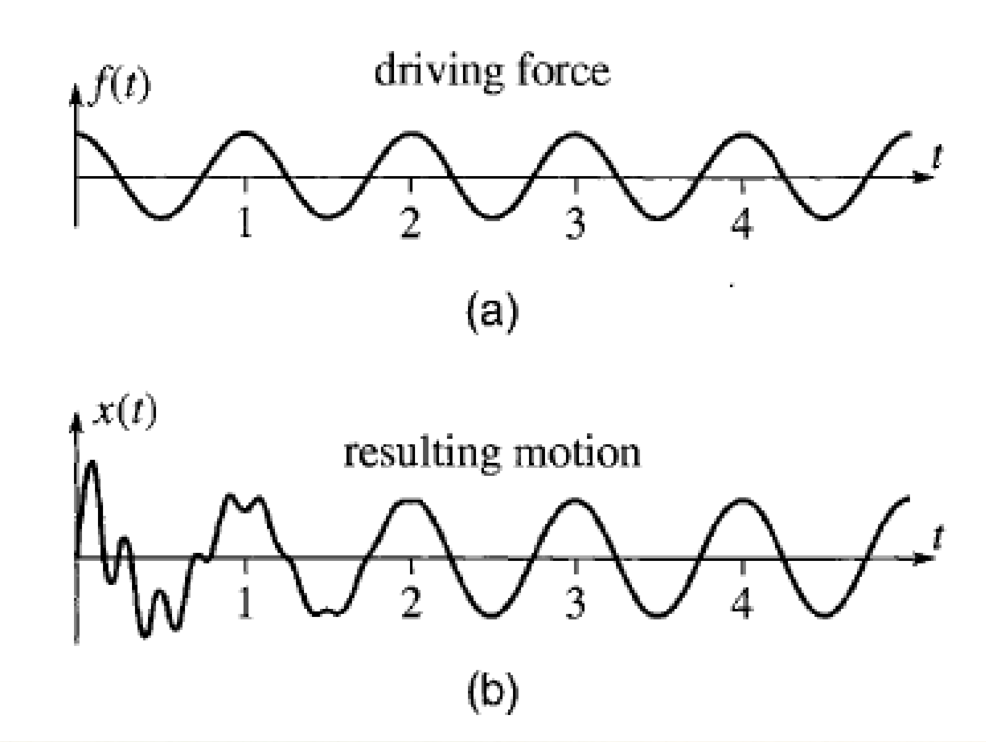
Oscilaciones sinusoidalmente forzadas

La solución gral será: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right) + D\cos(\omega t - \delta)$

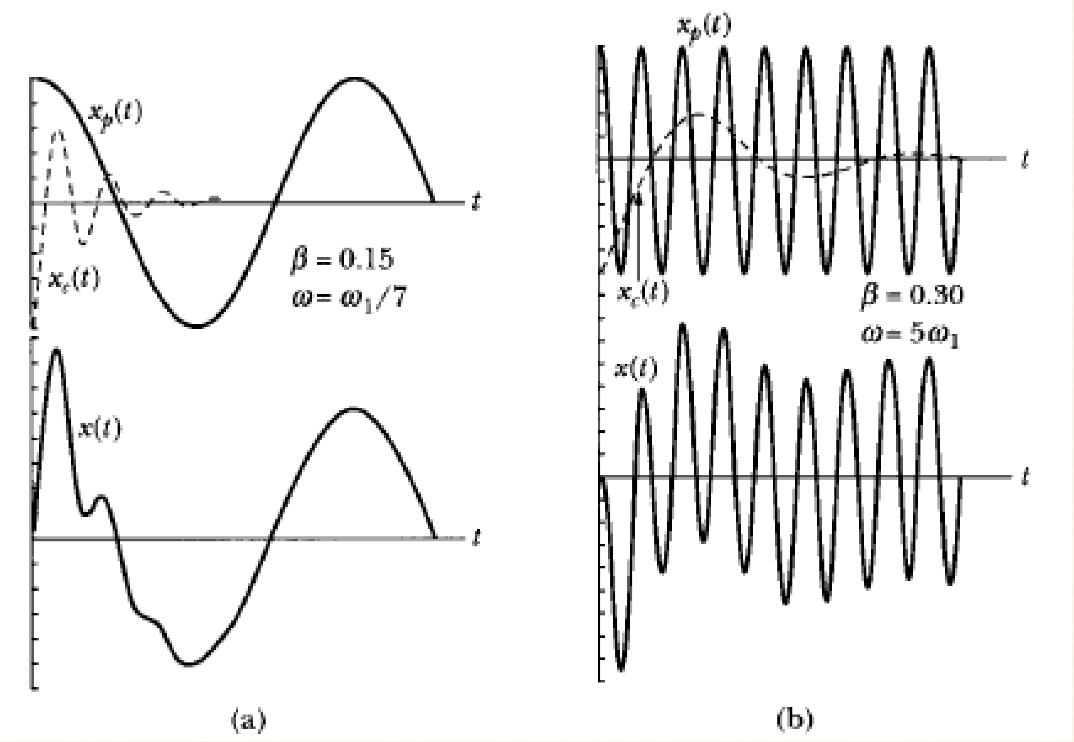


$x_h(t)$ representa los efectos del transiente (régimen transitorio, no estacionario) que se extinguen con el tiempo por el factor exponencial e^{-bt}. Es irrelevante con el tiempo.

$x_p(t)$ representa los efectos del estado estacionario (régimen permanente)



Respuesta de un oscilador lineal amortiguado a una fuerza externa sinusoidal. a) Fuerza externa cosenoidal b) Movimiento resultante ($x_0 = v_0 = 0$). Por los 2 o 3 primeros ciclos, es visible el régimen no estacionario. Luego sólo se visualiza el estado estacionario.



Ejemplos de oscilaciones amortiguadas perturbadas por fuerzas externas. La solución del estado estacionario x_p, la del transiente x_h y la suma x se muestran en a) para una frecuencia de perturbación $\omega > \omega_1$ y en b) para $\omega < \omega_1$

Fenómeno de Resonancia

La Resonancia se da a un valor determinado de frecuencia y consiste en que la amplitud *D* alcanza ***un valor máximo***.

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 b^2}} \Rightarrow \left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

De esta expresión se obtiene: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$

Comparación de frecuencias de oscilación:

1) Oscilaciones libres: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

2) Oscilaciones libres con amortiguamiento: $\omega_1^2 = \omega_0^2 - b^2$

3) Oscilaciones forzadas con amortiguamiento: $\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2b^2$ (Notar que $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$)

El grado de amortiguamiento puede evaluarse en un sistema oscilatorio *Q* que es un ***"Factor de Calidad"***:

$$Q = \frac{\omega_R}{2b}$$

Fenómeno de Resonancia

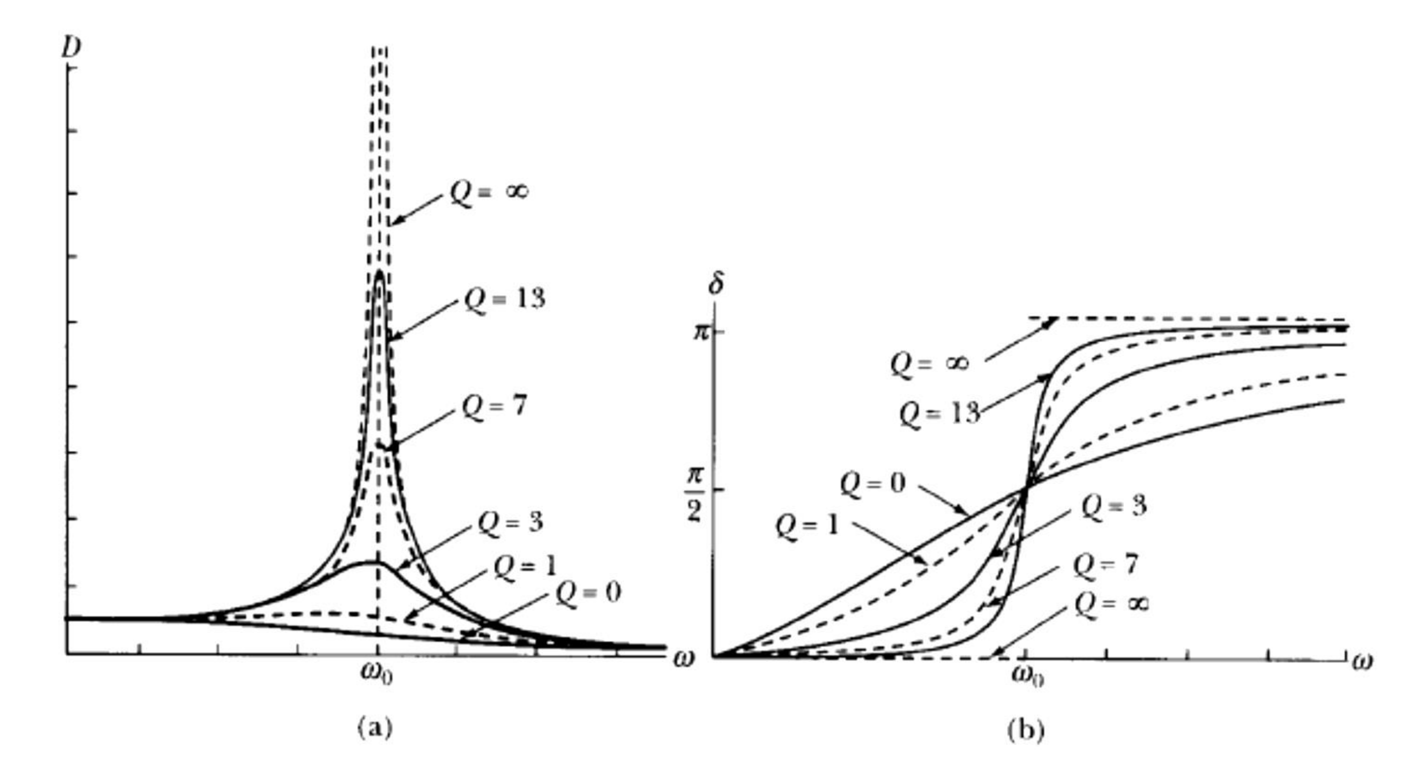
$$Q = \frac{\omega_R}{2b} \qquad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$$

Con un amortiguamiento débil, *Q* crece y la curva de resonancia se asemeja a la de un oscilador sin amortiguamiento.

Si el amortiguamiento es muy grande, Q es muy pequeño.

a) Muestra la amplitud *D* como función de la frecuencia de la perturbación ω para diferentes valores de *Q*.

b) Desfasaje δ (la diferencia de fase entre la fuerza externa y el movimiento resultante) en función a la frecuencia de la perturbación ω para diferentes valores de *Q*.



Oscilaciones sinusoidalmente forzadas