UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

Matemática IV - Ing. Mecánica - 2018
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 1: Subespacios y Transformaciones Lineales

Ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

a) Todas las sucesiones como $(1, 0, 1, 0, ...)$ que incluyen una infinidad de ceros.

b) Todas las sucesiones $(x_1, x_2, ...)$ con $x_j = 0$ a partir de un punto.

c) Todas las sucesiones decrecientes: $x_{j+1} \leq x_j$ para cada j.

d) Todas las sucesiones convergentes: la x_j tiene límite cuando $j \to\to \infty$.

e) Todas las progresiones aritméticas: $x_{j+1} - x_j$ para cada j.

f) Todas las progresiones geométricas $(x_1, kx_1, k^2x_1, ...)$ permitiendo toda k y x_1.

Ejercicio 2. Encuentre la dimensión y una base para los cuatro subespacios fundamentales de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Si $Ax = b$ siempre tiene por lo menos una solución, demuestre que la única solución de $A^Ty = 0$ es $y = 0$. (Sugerencia ¿Cuál es el rango?)

Ejercicio 4. Falso o verdadero (Según corresponda, proporcione una razón o un contraejemplo)

a) A y A^T tienen el mismo número de pivotes.

b) A y A^T tienen el mismo espacio nulo izquierdo.

c) Si el espacio renglón es igual al espacio columna, entonces $A^T = A$.

d) Si $A^T = -A$, entonces el espacio renglón de A es igual al espacio columma.

Ejercicio 5. Encuentre una base de cada uno de los cuatro subespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. ¿Qué matriz tiene el efecto de rotar cada vector un ángulo de 90º y luego proyectar el resultado sobre el eje x? ¿Qué matriz representa la proyección sobre el eje x seguida de la proyección sobre el eje y?.

Ejercicio 7. La matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
produce un *alargamiento* en la dirección x. Trace el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y a su alrededor trace los puntos $(2x, y)$ que resulta de la multiplicación por A. ¿Qué forma tiene esa curva?

Ejercicio 8. La matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
produce una transformación por *esfuerzo cortante*, que deja el eje y sin cambio. Bosqueje este efecto en el eje x, indicando lo que le ocurre a $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y cómo se transforma todo el eje.

Ejercicio 9. ¿Cuáles son las matrices de 3 por 3 que representan las transformaciones que:

a) Proyectan cada vector sobre el plano $x - y$?

b) Reflejan cada vector a través del plano $x - y$?

c) Rotan el plano $x - y$ un ángulo de 90º, dejando sólo al eje z?

d) Rotan un ángulo de 90º al plano $x - y$, luego al plano $x - z$, luego al plano $y - z$?

e) Realizan las tres rotaciones, pero cada una de un ángulo de 180º?

Ejercicio 10. En el espacio P_3 de polinomios cúbicos, ¿qué matriz representa $\frac{d^2}{dt^2}$? Construya la matriz de 4×4 a partir de la base estándar $1, t, t^2, t^3$. Encuentre su espacio nulo y su espacio columna. ¿Qué significan éstos en términos de polinomios?

Ejercicio 11. Encuentre la matriz A de 4×3 que representa un desplazamiento derecho: (x_1, x_2, x_3, x_4) se transforma en $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. ¿Cuál es el efecto de A^2? Demuestre que $A^3 = A^{-1}$.

Ejercicio 12. En el espacio vectorial P_3 de todos los $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, sea S el subconjunto de todos los polinomios con Compruebe que S es un subespacio y encuentre una base.

Ejercicio 13. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones no son lineales? La entrada es $v = (v_1, v_2)$.

a) $T(v) = (v_2, v_1)$.

b) $T(v) = (v_1, v_1)$.

c) $T(v) = (0, v_1)$.

d) $T(v) = (0, 1)$.

e) $T(v) = (v_1, 2v_2, v_1 + v_2)$.

f) $T(v) =$ la mayor componenete de v.

Ejercicio 14. Dada la matriz

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre el rango de A, y proporcione una base de su espacio nulo.

b) Los 3 primeros renglones de U son una base del espacio renglón de A: ¿Falso o Verdadero?
Las columnas $1, 3, 6$ de U son una base del espacio columna de A: ¿falso o verdadero?
Los cuatro renglones de A son una base del espacio renglón de A: ¿falso o verdadero?.

c) Encuentre tantos vectores b linealmente independientes como sea posible para los cuales $Ax = b$ tenga una solución.

d) En la eliminación sobre A, ¿Qué múltiplo del tercer renglón se restó para eliminar el cuarto renglón?.

Ejercicio 15.

a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ en $(2, 5)$ y $(0, 1)$ en $(1, 3)$?.

b) ¿Qué matriz transforma $(2, 5)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?.

c) ¿Por qué ninguna matriz transforma $(2, 6)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?

Ejercicio 16.

a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (r, t) y (s, u)?.

b) ¿Qué matriz transforma (a, c) y (b, d) en $(1, 0)$ y $(0, 1)$?.

c) ¿Qué condición sobre a, b, c, d hace imposible el inciso b)?

Ejercicio 17. Suponga que v_1, v_2, v_3 son vectores característicos para T (esto significa que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ para $i = 1, 2, 3$). ¿Cuál es la matriz para T cuando las bases de entrada y de salida son estos vectores?

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: