MECÁNICA RACIONAL

INGENIERÍA MECÁNICA

FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

Trabajo Práctico N° 1 — Conceptos básicos

Repaso de Física I

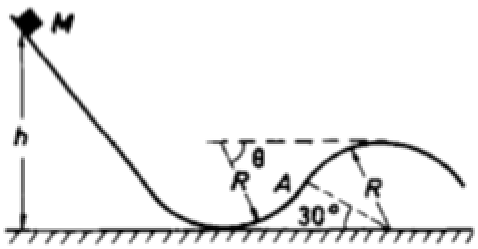
1. Un hombre de peso ***w*** está en un ascensor que acelera verticalmente hacia arriba con aceleración ***a*** y en determinado instante tiene una velocidad ***V,*** la gravedad es **g**.
   a) ¿Cuál es el peso aparente del hombre?
   b) El hombre sube una escalera vertical dentro del ascensor a una velocidad ***v,*** relativa al elevador. ¿Con qué potencia con respecto al suelo está subiendo el hombre?

2. En un parque de diversiones hay un disco que gira horizontalmente. Un niño puede sentarse en él a cualquier distancia ***R***, del centro. Mientras el disco comienza a aumentar su velocidad de giro, el niño puede resbalarse si la fuerza de fricción es insuficiente. La masa del niño es 50 kg y el coeficiente de fricción es 0,4. La velocidad angular es 2 rad/s. ¿Cuál es el máximo radio ***R*** donde él puede sentarse sin resbalar?

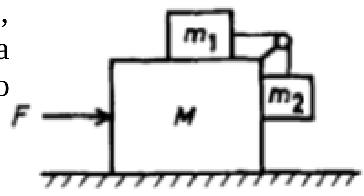
3. Una cuerda que pasa por una polea sin fricción tiene una masa de 9kg atada a un extremo y una de 7 kg en el otro. Determine la aceleración y la tensión en la cuerda.

4. A un ladrillo se le da un impulso con una velocidad de 5 m/s subiendo un plano inclinado con un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción estático es $\mu_e = \sqrt{3}/6$, y su coeficiente de fricción dinámico es $\mu_k = \sqrt{3}/12$. Después de 0,5 segundos, ¿A qué distancia de la posición original está el ladrillo? Puede tomar ***g=9,8 m/s²***

5. Una masa ***M*** se desliza sin fricción en el riel de una montaña rusa como se ve en la figura. Las secciones curvadas de las vías tienen un radio de curvatura ***R***. La masa comienza su descenso desde una altura ***h***. En determinado valor de ***h*** la masa empezará a perder contacto con las vías. Indique, en el diagrama, dónde la masa pierde contacto con las vías y calcule el mínimo valor de ***h*** para que esto ocurra

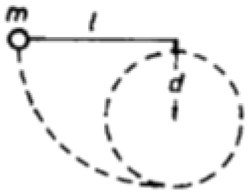


6. Considere que todas las superficies de la figura carecen de fricción, además la polea y la cuerda tienen masas despreciables. Encuentre la fuerza horizontal necesaria para prevenir cualquier movimiento relativo de ***m1***, ***m2***, y ***M***.



7. Una pequeña partícula descansa en el borde de un disco horizontal de radio ***R***. Una pequeña perturbación hace que la masa se desliza del disco y cae al piso. ¿a qué distancia de la horizontal desprende del disco?

8. Un péndulo de masa ***m*** y longitud ***l,*** se suelta desde una posición en que el hilo está horizontal. Un clavo que se encuentra a una distancia ***d*** debajo del punto donde se sostiene el péndulo, provoca que la masa se mueva según la trayectoria que indica la línea de puntos en la figura. Encuentre la mínima distancia ***d*** en términos de ***l*** tal que la masa realice un giro completo alrededor del círculo cómo se ve en la figura



9. Un satélite defectuoso de se arroja de una nave en el espacio. Ambos cuerpos están conectados por una cuerda de 50m uniforme cuya masa por unidad de longitud es 1kg/m. La nave espacial está acelerando en línea recta a $5\,m/seg^2$

a) ¿Cuál es la fuerza realizada por la nave espacial sobre la cuerda?

b) Calcule la tensión de la cuerda

c) Debido al cansancio, la tripulación de la nave se duerme y un cortocircuito en uno de los controles de impulsión resulta en una desaceleración de $1\,m/seg^2$. Describa en detalle las consecuencias de este fallo.

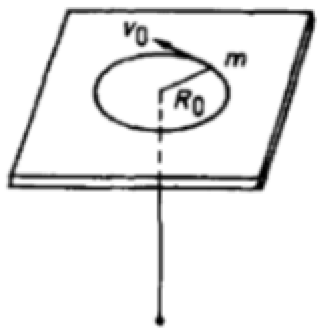
10. Una masa ***m*** se mueve en un círculo sobre un plano horizontal con velocidad ***v0*** en un radio ***R0***. La masa está adherida a una cuerda que pasa a través de un agujero en el plano como se ve en la figura. En todos los casos considere ausencia de fricción.

a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

b) ¿Cuál es el momento angular de ***m***?

c) ¿Cuál es el valor de la energía cinética de ***m***?

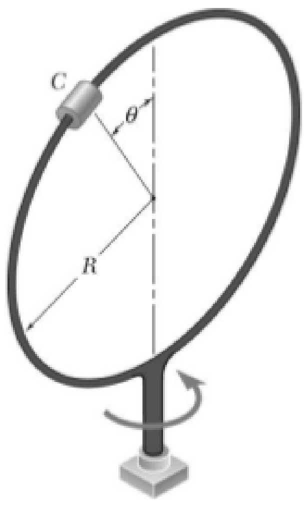
d) La tensión en la cuerda es aumentada gradualmente y finalmente ***m*** se mueve en un círculo de radio ***R0/2***. ¿Cuál es el valor final de la energía cinética?



11. Un pequeño cilindro de masa $\boldsymbol{m_c}$, que puede considerarse como una partícula, se desliza libremente en un anillo de radio **R**, y masa $\boldsymbol{m_r}$. El anillo está soldado a un eje vertical corto de masa despreciable. Inicialmente el anillo gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega_1}$ y el pequeño cilindro está en la parte más alta del anillo ($\theta=0$) . El momento de inercia del anillo está dado por $I_r=\frac{1}{2}m_r R^2$ .Se le da un pequeño empuje y el cilindro empieza a deslizarse. Despreciando los efectos de la fricción determine:

a) la velocidad angular de la anillo cuando el cilindro pasa por la posición $\theta=90°$

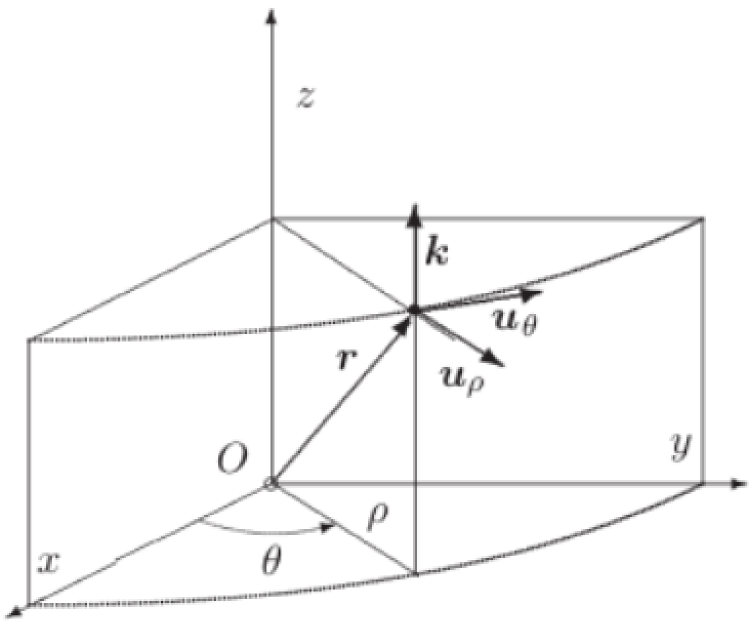
b) la velocidad del cilindro con respecto al anillo



Sistemas de coordenadas

12. Coordenadas Cilíndricas

En ciertos problemas de movimiento, es conveniente definir la posición de la partícula P mediante sus coordenadas cilíndricas.



En este caso, las coordenadas que definen la posición son (ρ, θ, z) , siendo ρ la distancia desde un punto fijo O , θ el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y z la altura del punto sobre dicho plano.

El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$. El versor $\boldsymbol{u}_\rho$ queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de **r** sobre el plano; **k** es el versor perpendicular al mismo, y $\boldsymbol{u}_\theta$ es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto $\boldsymbol{u}_\rho$ como $\boldsymbol{u}_\theta$ varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas curvilíneas.

La posición queda definida mediante

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{u}_\rho + z \boldsymbol{k}$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano cuando z = 0

Las coordenadas cilíndricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta \qquad z = z$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$$

Halle las siguientes expresiones, en función de los versores (u_ρ, u_θ, k) y las variables (ρ, θ, z) :

$\dot{\boldsymbol{r}} =$

$\ddot{\boldsymbol{r}} =$

Ayuda: desarrolle primero $\dot{\boldsymbol{u}}_\rho, \dot{\boldsymbol{u}}_\theta, \dot{\boldsymbol{k}}$

Exprese las componentes radiales y tangenciales de la velocidad y la aceleración para $\rho = cte$ y $z = 0$

$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}_\rho} =$ $\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}_\theta} =$

$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}_\rho} =$ $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}_\theta} =$

¿A qué expresiones conocidas llegó?

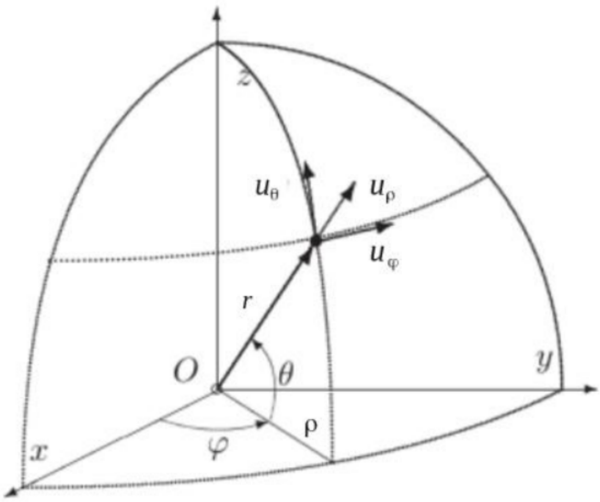
¿Puede obtenerse la aceleración radial a partir de derivar la velocidad radial con respecto al tiempo?

13. Coordenadas esféricas

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio ρ , la longitud φ y la latitud θ

Las coordenadas esféricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi \qquad z = \rho \cos\theta$$



El triedro físico es ahora $(\boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_\rho)$. La línea coordenada de longitud φconstante define el meridiano, al cual es tangente el versor u_θ . Asimismo la línea de latitud θ constante define un paralelo, al cual es tangente el versor u_φ . Por último, el versor u_ρ lleva la dirección y sentido del radio vector r. El vector posición es $r = \rho u_\rho$

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

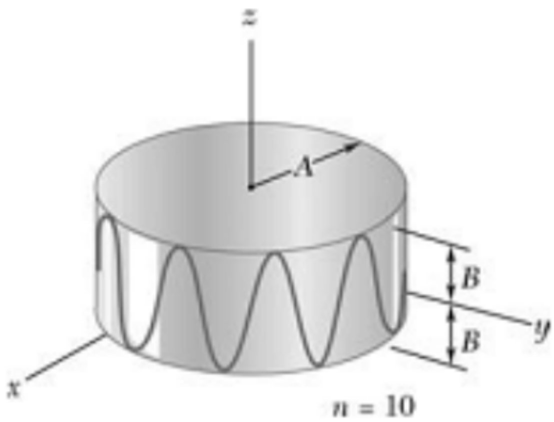
$$\boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{j} + \sin\theta\, \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{i} - \sin\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{j} + \cos\theta\, \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{u}_\varphi = \boldsymbol{u}_\theta \wedge \boldsymbol{u}_\rho = -\sin\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\, \boldsymbol{j}$$

Demuestre que:

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\rho}\boldsymbol{u}_{\rho}+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_{\theta}+\rho\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_{\varphi}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix}(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^{2}\cos^{2}\theta-\rho\dot{\theta}^{2})\boldsymbol{u}_{\rho}\\(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\dot{\varphi}^{2}\sin\theta\cos\theta+\rho\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_{\theta}\\(2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\theta-2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+\rho\ddot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{u}_{\varphi}\end{bmatrix}$$

14. El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular se define por medio de las relaciones $R=A$, $\rho=2\pi t$, $z=B.\sin(2\pi nt)$, donde **A** y **B** son constantes, **n** es un entero. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo **t**.



15. El movimiento tridimensional de una partícula se define por medio de las coordenadas cilíndricas $R=A(1-e^{-t})$, $\theta=2\pi t$, $z=B(1-e^{-t})$. Demuestre que las magnitudes de la velocidad y de la aceleración son:

a) Para $t=0$ ➔ $v=\sqrt{A^2+B^2}$ $a=\sqrt{(1+16\pi^2)A^2+B}$

b) Para $t=\infty$ ➔ $v=2\pi A$ $a=4\pi^2 A$

16. Una partícula tiene un desplazamiento en el espacio determinado por $R=A/(t+1)$, $\theta=Bt$ y $z=C.t/(t+1)$. Encuentre las expresiones de velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas.

17. Una partícula de masa **m** que se mueve pegada a la superficie de una esfera de radio **R**, calcule la energía cinética de la partícula en función de **m**, **R**, **θ**, **φ**, usando coordenadas esféricas.

18. Una partícula tiene un desplazamiento en el espacio determinado por el vector posición $r=(Rt\cos\omega_n t)\boldsymbol{i}+cf\,\boldsymbol{j}+(Rt\sin\omega_n t)\boldsymbol{k}$. Muestre que las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula están dadas por:

a) $v=\sqrt{R^2(1+\omega_n^2 t^2)+c^2}$

b) $a=R\omega_n\sqrt{4+\omega_n^2 t^2}$

Problemas con ecuaciones diferenciales

19. Una partícula de masa m cae desde una altura h comenzando desde el reposo. Encuentre y(t):

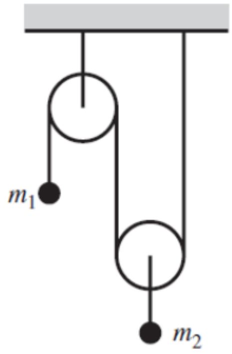
a) a través de la expresión de $a = \frac{dv}{dt}$

b) mediante la expresión $a = v . \frac{dv}{dy}$

20. Considere las poleas del sistema de la figura. Por debajo de cada polea cuelgan **m_1** y **m_2** respectivamente. Considere que las cuerdas y las poleas tienen masa despreciable.

a) ¿Cuáles son las aceleraciones de las masas?

b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda más larga?



21. Una pelota se deja caer desde el reposo a una altura h. Asuma que la fuerza de arrastre generada por el aire es: $\boldsymbol{F_a = m\alpha v}$.

Encuentre la velocidad y la altura como funciones del tiempo.

22. Muestre que $\theta(t) = \theta_0 . \cos(\sqrt{g/l} . t)$ describe la posición del péndulo de la figura en función del tiempo, si θ es suficientemente pequeño

(cuándo el ángulo es pequeño puede considerar sin (θ) ≈ θ).

Ayuda: debe plantear una EDO de 2° orden.

¿Podría encontrar una solución para grandes valores de θ? En caso afirmativo mencione sin resolver qué método usaría.