Mecánica de los Cuerpos Rígidos

MECANICA RACIONAL – 2019

Momento angular

La idea de superposición de un movimiento de traslación y uno de rotación sirve con el concepto de cantidad de movimiento de un cuerpo rígido.

El movimiento de traslación tiene asociado un momento lineal P:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\alpha} m_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}} = M \frac{\sum_{\alpha} m_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}}}{M} = M \boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{p}_{CM}$$

Con su correspondiente ec diferencial:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{P} = \sum_{\alpha} \dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ext}} = M \dot{\boldsymbol{v}}_{CM}$$

Por otro lado, el momento angular ***L*** es definido como la Σ de los momentos angulares (respecto de un mismo punto) de todas las partículas: $\boldsymbol{L}_O = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{p}_{\alpha}$

Su derivada será: $\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha} \times \boldsymbol{p}_{\alpha}}_{0\ por\ ser\ \parallel} + \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}$

$\boldsymbol{F}_{\alpha}$ es la fuerza neta actuando sobre la partícula , así que se puede descomponer en una parte externa y una parte de interacción con el resto de las partículas del cuerpo: $\boldsymbol{F}_{\alpha} = \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\beta \neq \alpha} \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$

Momento angular

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}$$

$$\boldsymbol{F}_{\alpha} = \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\beta \neq \alpha} \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$$

Entonces: $\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$

$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{r}_{\beta} \times \boldsymbol{F}_{\beta\alpha})$ (se puede verificar)

$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} - \boldsymbol{r}_{\beta} \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta})$ (por 3ra ley)

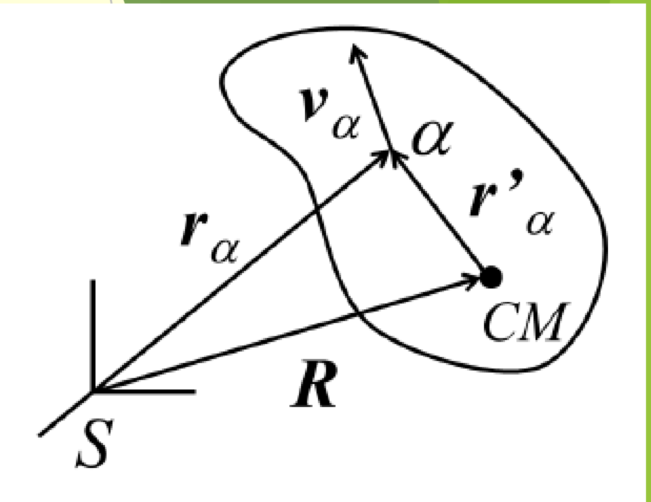
$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} \underbrace{(\boldsymbol{r}_{\alpha} - \boldsymbol{r}_{\beta}) \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}}_{0 \; por \; ser \; \parallel}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{F}_{\alpha}^{ext} \equiv \boldsymbol{T}_{ext}}$$

La variación del momento angular total es igual al torque total externo: $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{T}_{ext}$

Momento angular

Usando el campo de posiciones y velocidades del cuerpo rígido en $\boldsymbol{L_O} = \sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{p}_\alpha$, relacionando las velocidades v con la velocidad angular ω y la del CM:



$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_\alpha \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha$$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_\alpha) \times (m_\alpha \boldsymbol{v}_{CM} + m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha)$$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \boldsymbol{R} \times m_\alpha \boldsymbol{v}_{CM} + \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R} \times \left(\sum_\alpha m_\alpha\right) \boldsymbol{v}_{CM} = \boxed{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}}$$

$$+ \sum_\alpha \boldsymbol{r}'_\alpha \times m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha) + \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum_\alpha m_\alpha [\boldsymbol{r}'_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha)]}$$

$$+ \sum_\alpha \boldsymbol{R} \times m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha) + \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{\omega} \times \cancel{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}'_\alpha} = 0$$

$$+ \sum_\alpha \boldsymbol{r}'_\alpha \times m_\alpha \boldsymbol{v}_{CM} \quad \rightarrow \quad \left(\cancel{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}'_\alpha}\right) \times \boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}}_{} + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha [\boldsymbol{r}'_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_\alpha)]}_{}}$$

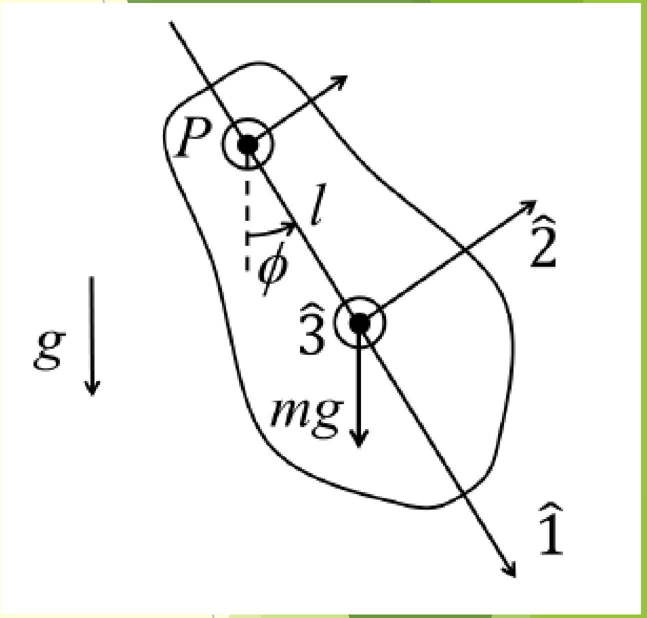
L de toda la masa concentrada en el CM

Término relacionado al movimiento alrededor del CM.
Se llama ***momento angular intrínseco*** o ***spin***:

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_{CM} + \boldsymbol{L}_{spin}}$$

Ejemplo: Péndulo físico

Se suspende un cuerpo plano y simétrico de un punto *P* ∈ eje de simetría. *P* no es CM (que también ∈ eje de simetría).



Eje de simetría = eje $\widehat{\mathbf{1}}$ y el eje $\widehat{\mathbf{3}}$ sale del plano vertical.

El tensor de inercia $\mathbb{I}_{\boldsymbol{P}}$ es diagonal en los ejes principales.

¿***Cuántos grados de libertad hay***? Uno, el ángulo ϕ => $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\widehat{\mathbf{3}}$

El momento angular respecto a P será ($\mathbb{I}_{\boldsymbol{P}}$ es diagonal):

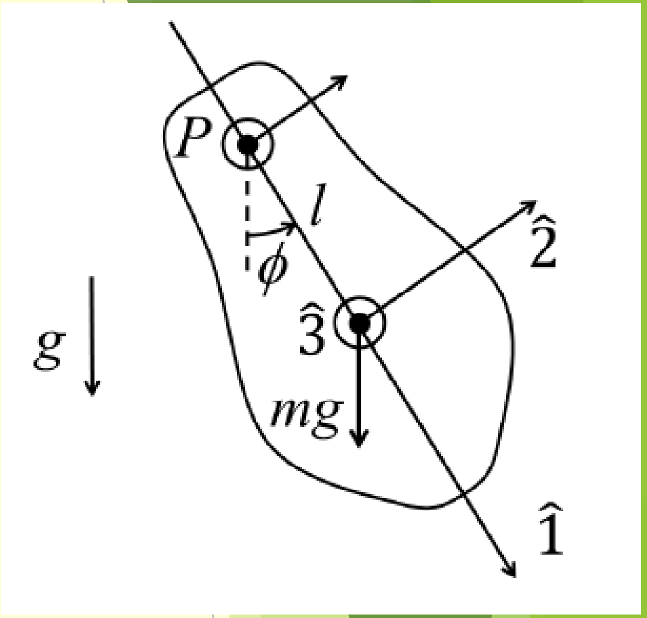
$$\boldsymbol{L_P} = \mathbb{I}_P\boldsymbol{\omega} = I_1^P \cancel{\omega_1}\widehat{\mathbf{1}} + I_2^P \cancel{\omega_2}\widehat{\mathbf{2}} + I_3^P \omega_3\widehat{\mathbf{3}} \qquad \boldsymbol{L_P} = I_3^P\dot{\phi}\widehat{\mathbf{3}}$$

El momento angular cambia porque hay un torque aplicado ($\boldsymbol{T_P}$). El torque es el que produce el peso con respecto al punto de suspensión: $\boldsymbol{T}_P = -Mgl\ sen\ \phi\ \widehat{\mathbf{3}}$. La ecuación de movimiento será:

$$\frac{d\boldsymbol{L}_P}{dt} = \boldsymbol{T}_P \Rightarrow \boxed{I_3^P\ddot{\phi} = -Mgl\ sen\ \phi}$$

Ejemplo: Péndulo físico

$$I_3^P \ddot{\phi} = -Mgl\, sen\, \phi$$



Si se define: $\Omega^2 = \frac{Mgl}{I_3^P}$ => se puede escribir la ecuación para pequeñas oscilaciones:

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = 0$$

El momento de inercia será (por Steiner):

$$I_3^P = I_3^{CM} + Ml^2 \equiv Md^2 + Ml^2 = M(d^2 + l^2)$$

donde *d* es la ***longitud efectiva*** que depende de la forma del cuerpo. Por lo tanto:

$$\Omega^2 = \frac{Mgl}{M(d^2 + l^2)} = \frac{g}{\frac{d^2}{l} + l} \equiv \frac{g}{l_1}$$

donde $l_1 = l + d^2/l$ es otra longitud efectiva.

El péndulo se mueve como un péndulo simple de longitud l_1.

Dinámica de un cuerpo rígido

Hay dos situaciones principales a las cuales se puede aplicar los conceptos vistos:

1. Un cuerpo rígido *apoyado en un punto fijo* (un trompo, por ejemplo). En este caso elegiremos como punto de referencia el ***punto de apoyo***.

2. Un cuerpo rígido *sin punto fijo* alguno (un cuerpo rígido lanzado al aire, por ejemplo). En este caso elegiremos como punto de referencia el ***centro de masa***.

3. Un cuerpo rígido que presenta *rodadura*. La estrategia es buscar un ***punto de referencia que sirva para descomponer el movimiento.***

En todos los casos, siempre es conveniente trabajar ***sobre los ejes principales de inercia*** (porque se simplifica la expresión de T).

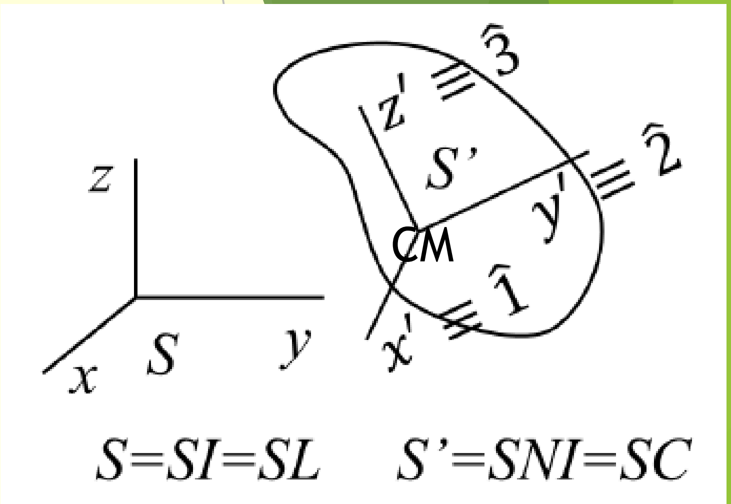
Este sistema de ejes ***rota con el cuerpo rígido***, así que es un ***sistema de referencia no inercial***.

Recordar que las magnitudes comunes a todos los puntos de cuerpo pueden no mantenerse constantes:
al moverse el cuerpo tanto ω como la ***dirección del eje de rotación*** y los puntos que se encuentran en el eje de rotación pueden cambiar ***instante a instante***.

Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de movimiento surgen del análisis Newtoniano o también del Lagrangiano (aunque es más complejo)
Las ***Ecuaciones de Euler*** son una "versión rotacional" de la segunda ley de Newton, **F** = *m***a**.

Recordar: ∀ cuerpo y ∀ punto del cuerpo ***existen ejes principales*** que, elegidos como base del sistema de coordenadas, simplifica la forma del ***L***.



Se deben considerar 2 dos hechos:

1) Usando como ejes principales a ($\hat{\mathbf{1}}$; $\hat{\mathbf{2}}$; $\hat{\mathbf{3}}$), ***L*** en el *SC* será: $\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$

2) La evolución de ***L*** en el *SL*, por acción del torque externo será: $\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{SL} = \boldsymbol{T}$

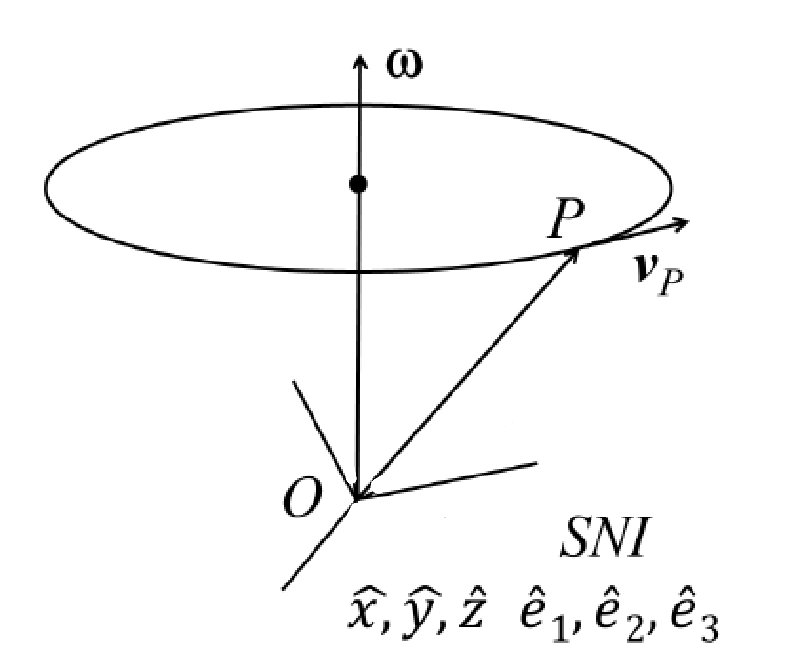
Cómo vincular 1) con 2)?

El *SC* es un sistema no inercial que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Se debe calcular ***una derivada temporal en un sistema no inercial.***

Se hace este cálculo a continuación y después se sigue con las ecuaciones de Euler.

Ecuaciones de Euler

Derivadas temporales en un sistema rotante



La velocidad de cualquier punto fijo al cuerpo rígido (al *SNI* en rotación) es:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Esto es válido para cualquier vector ***r*** fijo al SNI, incluso para los versores:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_i$$

Sea un vector ***a*** arbitrario, que pueda cambiar en el tiempo. Se debe encontrar la relación entre su ***velocidad*** vista desde el *SI* y desde el *SNI* , que se van a llamar respectivamente: $\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SI}$ y $\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SNI}$

Entonces el vector ***a*** en coordenadas en el *SNI* será: $\boldsymbol{a} = a_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + a_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$

donde los $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ están fijos en el *SNI* (es conveniente si el observador está en el *SNI*)

Notar que el desarrollo en estas coordenadas vale también en el *SI*, sólo que los $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ se mueven.

Se calcula la derivada en el *SNI*:

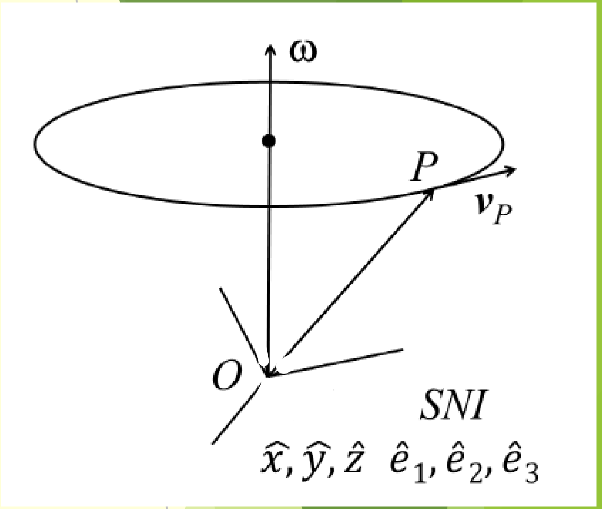
Ecuaciones de Euler

$$\boldsymbol{a} = a_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + a_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_i \quad \textbf{(2)}$$

Se calcula la derivada en el *SNI*:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SNI} = \sum_i \frac{da_i}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad (3)$$



Notar: ***las componentes cambian y los versores no***. Los versores no cambian porque en el *SNI* están fijos. Sólo cambian las componentes. Pero al escribir la derivada no es necesario usar los paréntesis y el subíndice SNI, porque las componentes son las mismas vistas en los dos sistemas.

Ahora se deriva en el *SI*:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SI} = \underbrace{\sum_i \frac{da_i}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_i}_{(3)} + \sum_i a_i \left(\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}\right)_{SI}$$

donde los versores sí cambian, vistos desde el *SI*. Usando (2):

$$\sum_i a_i \left(\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}\right)_{SI} = \sum_i a_i(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{e}}_i) = \boldsymbol{\omega} \times \sum_i a_i\,\hat{\boldsymbol{e}}_i \;\; (\boldsymbol{\omega}\ es\ indep\ de\ i) \;\; => \;\; \sum_i a_i \left(\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}\right)_{SI} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SI} = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{SNI} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{SI} = \left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{SNI} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot}$$

Ecuaciones de Euler

Puede escribirse:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{SL} = \left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{SC} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \Rightarrow \left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{SC} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}$$

$$\left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{SI} = \left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{SNI} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{SL} = \boldsymbol{T}$$

que en general se escribe sin el subíndice SC, pero sin olvidar que se refiere al SC:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}}$$

Ésta es la ecuación de Euler (ecuación dinámica equivalente a ***F*** = *m**a***) para la rotación referida al SC.

Aún no se han usado los ejes principales, así que la ecuación $\dot{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}$ es completamente general.

Usando los ejes principales: $\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ y $\dot{\boldsymbol{L}} = (I_1\dot{\omega}_1, I_2\dot{\omega}_2, I_3\dot{\omega}_3)$

También se tiene: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = det\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{1}} & \hat{\boldsymbol{2}} & \hat{\boldsymbol{3}} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} I_3\omega_2\omega_3 - I_2\omega_2\omega_3 \\ I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1\omega_3 \\ I_2\omega_1\omega_2 - I_1\omega_1\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}$

Juntando los términos y escribiendo una ecuación por coordenada tenemos las ***Ecuaciones de Euler***:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= T_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= T_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= T_3 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones determinan la evolución de ω, vista en un sistema solidario al cuerpo.

Ecuaciones de Euler

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3$$

Las ecuaciones de Euler son complicadas por dos razones:

1) Son 3 ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales

2) Las componentes del torque externo ***T***, *vistas desde el cuerpo*, son funciones del tiempo (porque el torque es externo y el SC está girando), desconocidas y en general complicadas. Por esto la mayor utilidad de estas ecuaciones corresponde a los casos en que el ***T** = 0* =>

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

Hay otras situaciones simplificadas:

Notar que los I_i aparecen restados, así que las simetrías del cuerpo ***ayudan a simplificar las ecuaciones.***

Por ejemplo, si $I_1 = I_2 \neq I_3$ la tercer ecuación se desacopla.

Y si el torque es siempre $\perp$ al eje de simetría (I_3), como es el caso del torque gravitatorio para un trompo apoyado, entonces $N_3 = 0$ => $\dot{\omega}_3 = 0$. Así que ω_1 y ω_2 cambian sin afectar a ω_3.

Ecuaciones de Euler

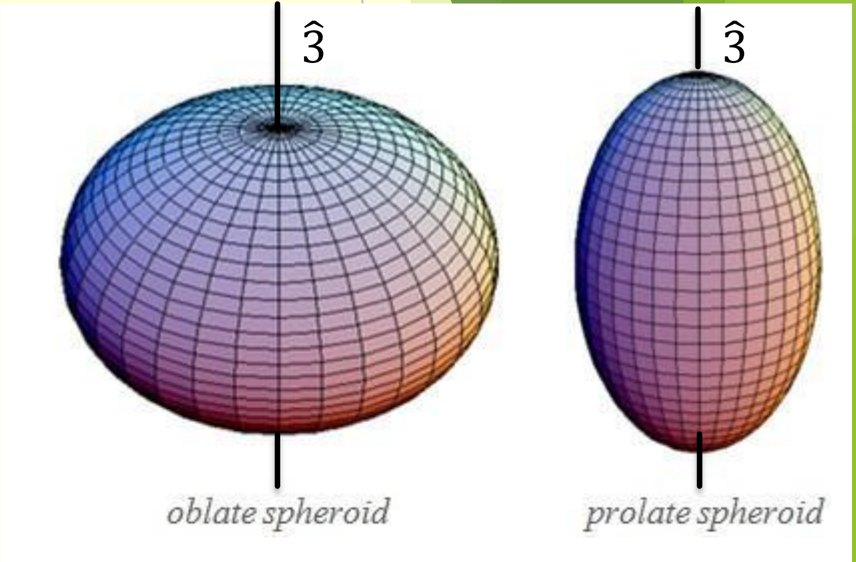
Movimiento libre de un trompo simétrico

Ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido libre de torques:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

Si además $\Sigma \boldsymbol{F}_{ext} = 0$, el CM está quieto con respecto al SL (o moviéndose con MRU, y se puede considerar quieto). En tal caso se conserva la ***T*** y ***L***. Estas dos constantes permiten integrar completamente las ecuaciones de Euler.

Para el caso de un *trompo simétrico*: $I_1 = I_2 \neq I_3$ => $\hat{\mathbf{3}}$ es eje de simetría del cuerpo



Hay dos tipos de cuerpos con esta forma: *prolados* (como un huevo) y *oblados* (como un zapallito de relleno)

Suponga además que $\boldsymbol{\omega}$ no coincide con ninguno de los ejes principales:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_1\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_1)\omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega_3 = cte$$

Así que podemos escribir las otras dos ecuaciones como:

$$\dot{\omega}_1 = \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\right)\omega_2 \equiv \Omega_c\omega_2$$

donde Ω_c es una cte (con unidades de $\boldsymbol{\omega}$) con subíndice *c* (depende del cuerpo y que está vista desde el cuerpo).

$$\dot{\omega}_2 = -\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\right)\omega_1 \equiv -\Omega_c\omega_1$$

Ecuaciones de Euler

Resolución de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}\dot{\omega}_1 = \Omega_c\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\Omega_c\omega_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dot{\omega}_1 - \Omega_c\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega_c\omega_1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dot{\omega}_1 - \Omega_c\omega_2 = 0 \\ i\dot{\omega}_2 + \Omega_c i\omega_1 = 0\end{array}\right\}$$

Sumando:

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 - \Omega_c\omega_2 + \Omega_c i\omega_1 = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2}_{*} + \Omega_c\left(\underbrace{i\omega_1 - \omega_2}_{**}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } z = \omega_1 + i\omega_2 \Rightarrow \dot{z} = \dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 = * \\ \text{Por otro lado: } iz = i\omega_1 + i^2\omega_2 \Rightarrow iz = i\omega_1 - \omega_2 = **\end{array}\right\} \quad \dot{z} + i\Omega_C z = 0$$

Resolviendo: $z_{(t)} = z_0 e^{-i\Omega_C t} \;,\; z_0 \in \mathbb{C}$

Se puede elegir los ejes $\hat{\mathbf{1}}$ y $\hat{\mathbf{2}}$ de manera que a t = 0 el eje $\hat{\mathbf{1}}$ apunte en la dirección de la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ en ese plano, y se tiene entonces $\omega_1 = \omega_0$ y $\omega_2 = 0$, con lo cual $z_0 = \omega_0 \in \mathbb{R}$. Así: $\boxed{z_{(t)} = \omega_0 e^{-i\Omega_C t}}$

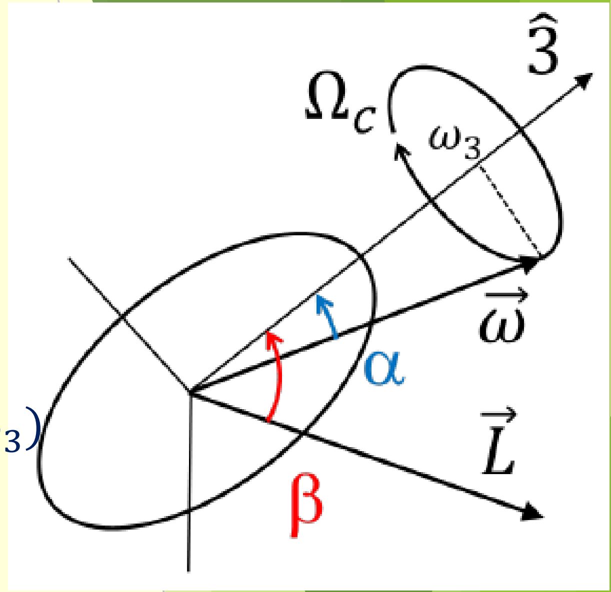
Tomando las partes real e imaginaria de *z(t)* se llega a la solución completa: $\boxed{\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 \cos\Omega_C t\,, -\omega_0 \operatorname{sen}\Omega_C t\,, \omega_3)}$

Con ω_0 y ω_3 constantes (son condiciones iniciales)

Ecuaciones de Euler

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 \cos\Omega_C t\ , -\omega_0 \mathrm{sen}\Omega_C t\ , \omega_3)$$

¿Cómo es el movimiento? ω_3 es cte a lo largo del eje $\hat{\mathbf{3}}$, mientras que ω_1 y ω_2 rotan con velocidad cte.



Vista desde el cuerpo, $\boldsymbol{\omega}$ *precede* alrededor del eje de simetría. La velocidad de esta precesión es Ω_C. El ángulo que forma $\boldsymbol{\omega}$ con el eje $\hat{\mathbf{3}}$ es constante (α en la figura). Es decir, $\boldsymbol{\omega}$ describe un *cono* cuyo eje es el eje de simetría. (El sentido de la precesión depende del signo de I_1 - I_3)

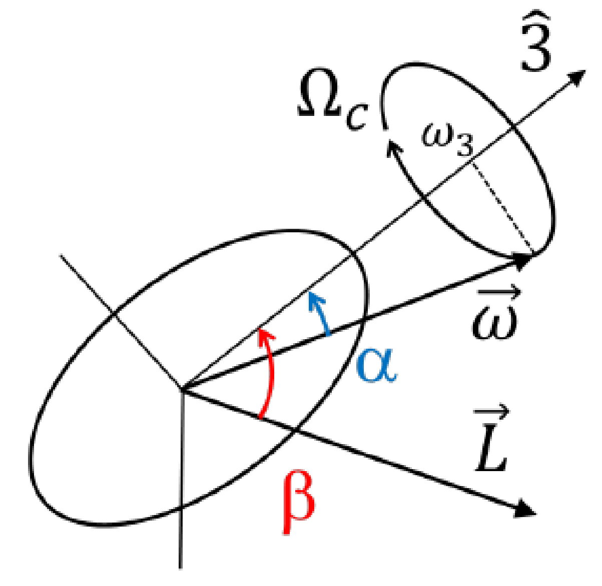
$$\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (I_1\omega_0 \cos\Omega_C t, -I_1 \mathrm{sen}\Omega_C t\ , I_3\omega_3)$$

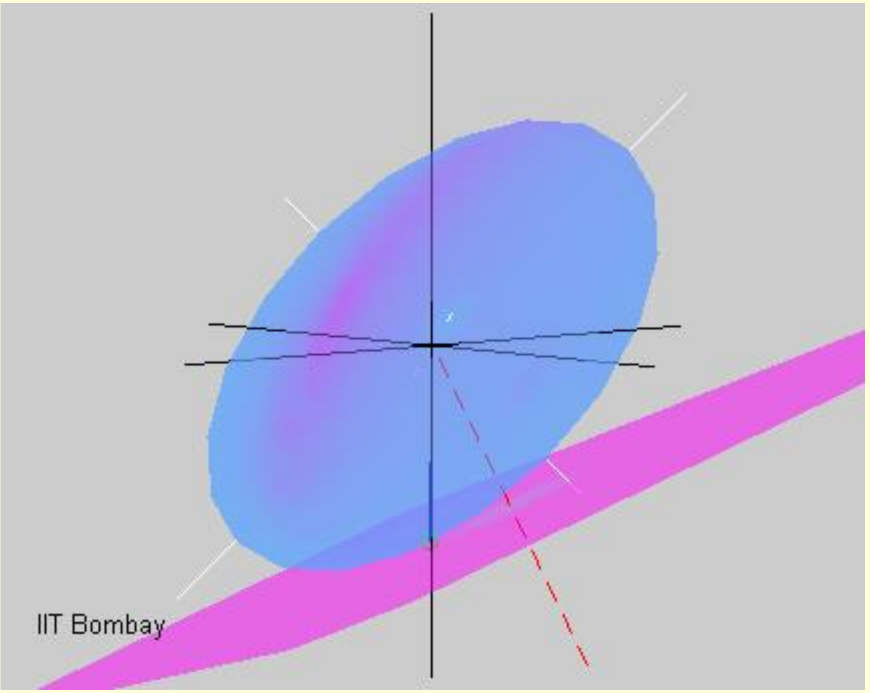
L ∦ $\boldsymbol{\omega}$, pero está relacionado con ella.

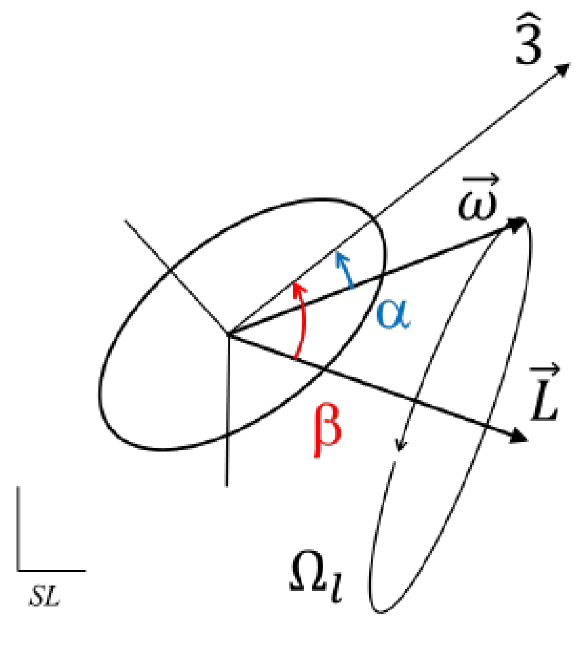
Pasa lo mismo que a $\boldsymbol{\omega}$: la componente $\hat{\mathbf{3}}$ es cte ($I_3\omega_3$) y la componente en el plano ($\hat{\mathbf{1}}$; $\hat{\mathbf{2}}$) rota con velocidad angular cte.

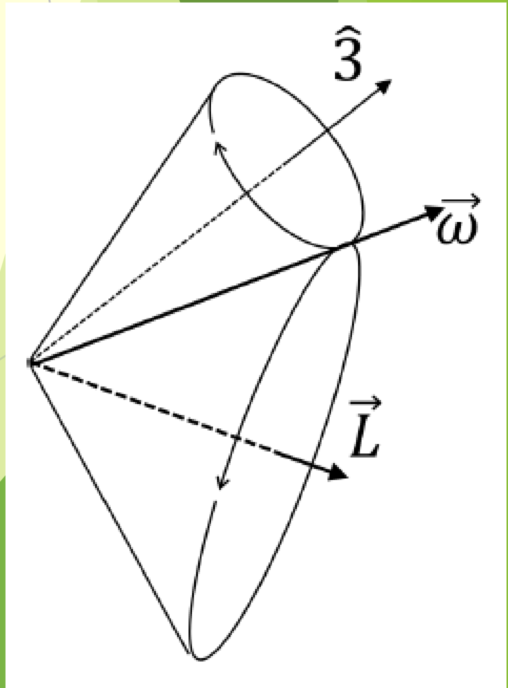
L también *precede* con velocidad Ω_C alrededor del eje $\hat{\mathbf{3}}$. Como Ω_C es la misma para $\boldsymbol{\omega}$ que para ***L***, los vectores $\hat{\mathbf{3}}$, $\boldsymbol{\omega}$ y ***L*** están ***siempre en un mismo plano***, manteniendo los ángulos α y β.

Ecuaciones de Euler









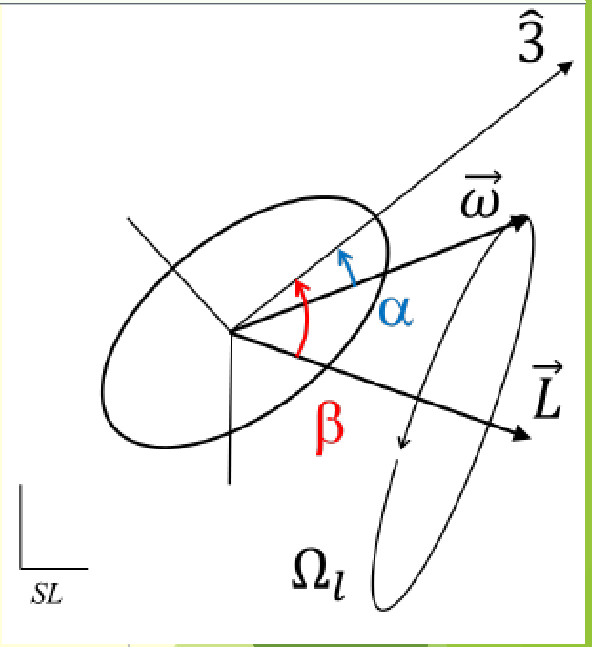
$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 \cos\Omega_C t\,, -\omega_0 \mathrm{sen}\Omega_C t\,, \omega_3)$$

Ecuaciones de Euler

¿Cómo se ve el movimiento desde el sistema inercial del laboratorio?

En el SL el vector ***L*** está fijo porque no actúan torques. Para satisfacer que $\widehat{\mathbf{3}}$, $\boldsymbol{\omega}$ y ***L*** permanezcan en el mismo plano, ambos vectores, $\widehat{\mathbf{3}}$ y $\boldsymbol{\omega}$, tienen que rotar alrededor de **L**, conservando los ángulos α y β. Esto define *otro* cono, el *cono del laboratorio* de $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de ***L***.

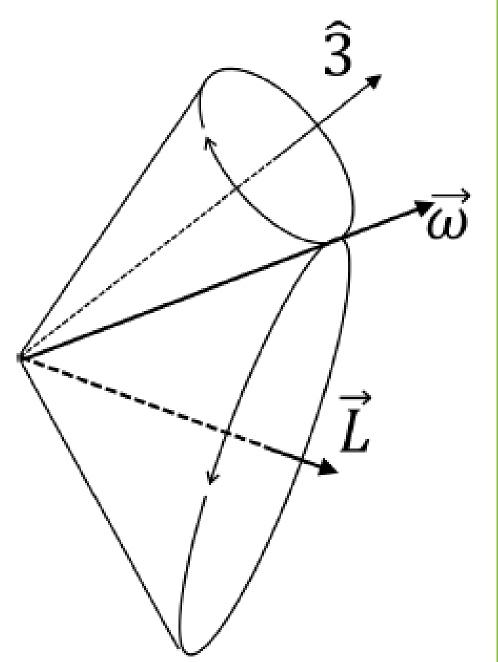
$$\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (I_1\omega_0\cos\Omega_C t, -I_1\mathrm{sen}\Omega_C t\,, I_3\omega_3) = cte$$



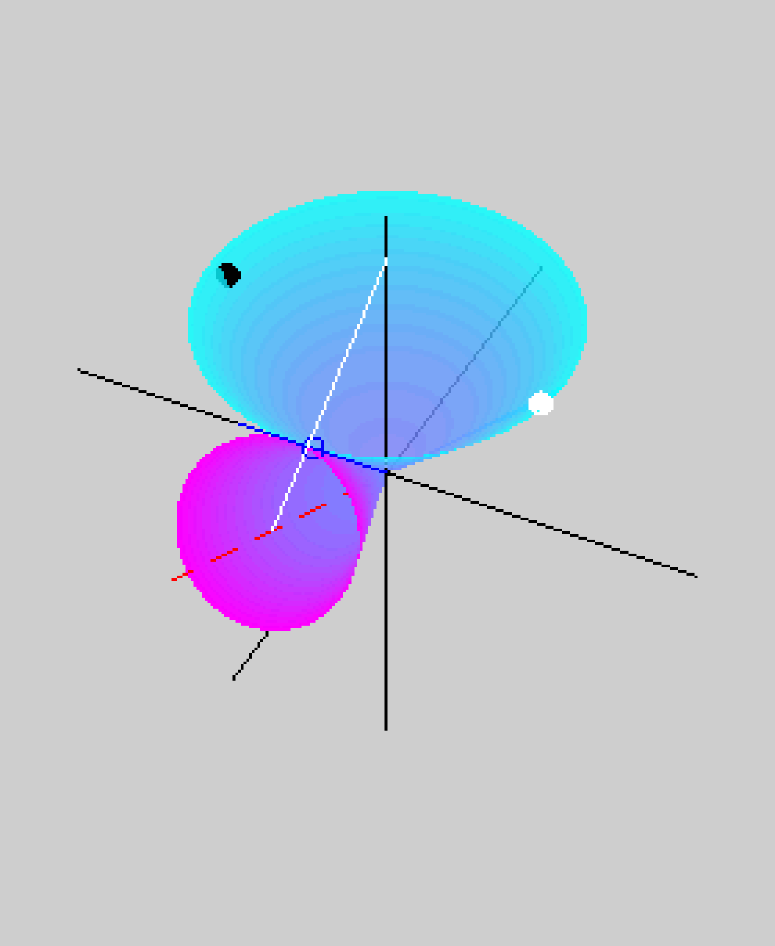
Esto ocurre dado que los tres vectores están en un plano, con ángulos ctes entre ellos. Esto es así en cualquier sistema de referencia (no relativista). Los vectores tienen direcciones y sentidos definidos. Sus coordenadas ***dependen*** del sistema de referencia.
Entonces, con ***L*** fijo y el cuerpo rotando alrededor de $\boldsymbol{\omega}$, necesariamente el eje $\widehat{\mathbf{3}}$ tiene que rotar alrededor de ***L***. Y entonces $\boldsymbol{\omega}$ también debe rotar, acomodándose para permanecer los tres en un mismo plano.

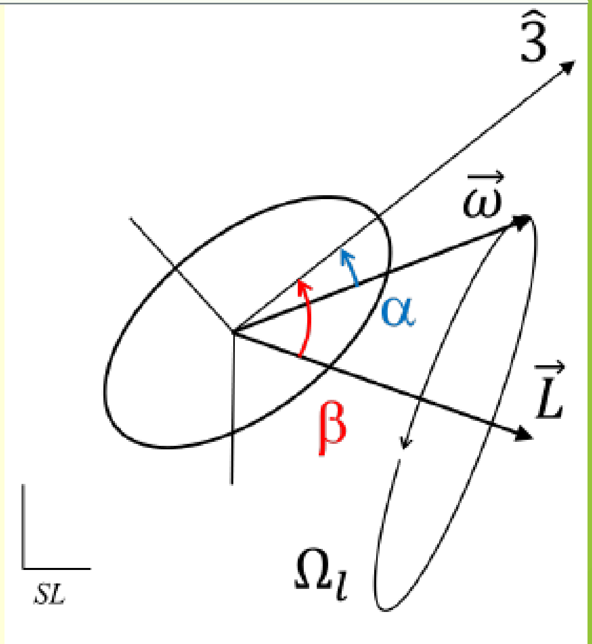
Otra forma de considerarlo es la siguiente. En ausencia de fuerzas la energía cinética es constante: $T_{rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ **.** En ese producto escalar, ***L*** está fijo, $\boldsymbol{\omega}$ debe cambiar de manera que su proyección en la dirección de ***L*** sea constante. Esto determina el cono del laboratorio y la precesión de $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de ***L*** con velocidad $\boldsymbol{\Omega_L}$.
Tenemos entonces dos conos, apoyados uno sobre el otro a lo largo de una generatriz (ω), y rodando uno sobre el otro: con $\widehat{\mathbf{3}}$ fijo visto desde el cuerpo, y con ***L*** fijo visto desde el laboratorio.

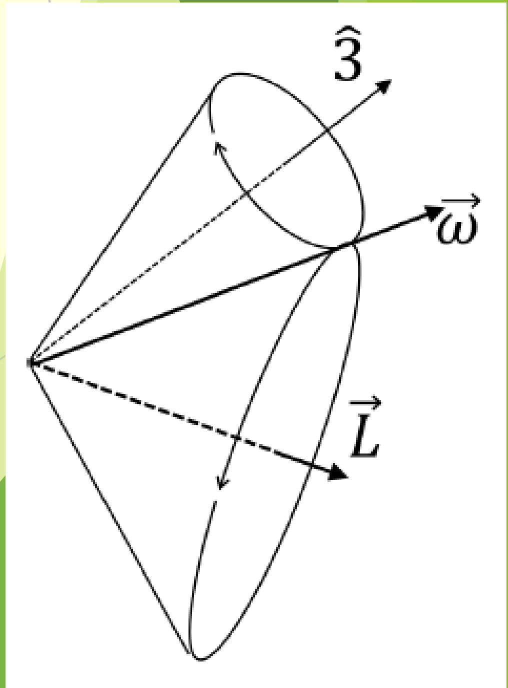
Los ángulos α y β son en general distintos, así que las velocidades de precesión $\Omega_C \neq \Omega_L$.



Ecuaciones de Euler







$$\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (I_1\omega_0\cos\Omega_C t, -I_1\mathrm{sen}\Omega_C t\,, I_3\omega_3) = cte$$