Trabajo Práctico N° 3

Grados de libertad

Se define como el número de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento en un sistema.
Para el caso de una partícula en el espacio tenemos:

- Grados de libertad=3
- Coordenadas: translación con x, y, z.

Para el caso de un cuerpo en el espacio tenemos:

- Grados de libertad= 6
- Coordenadas:
  - Translación, definida con: x, y, z
  - Rotación, definida con: $\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z$

De forma simplificada, el número de grados de libertad se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$GL = 6 * n_{cuerposrígidos} + 3 * m_{partículas} - c_{restricciones}$$

Analicemos el caso de un cuerpo que se mueve en el plano. Por ejemplo, considere un disco de *hokey* que se mueve pegado a una pista de hielo, tenemos movimiento de translación en el plano y rotación.

- restricciones: $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0, \qquad \theta_x = \dot{\theta}_x = \ddot{\theta}_x = 0, \qquad \theta_y = \dot{\theta}_y = \ddot{\theta}_y = 0$
- grados de libertad: $GL = 6 * 1 - 3 * 0 - 3 = 3$
- coordenadas: $q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = \theta$

1. Determine restricciones, grados de libertad y el sistema de coordenadas que considere más conveniente para cada uno de los siguientes casos

- Ladrillo que se desliza sobre un plano inclinado.
- Disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado.
- Disco que rueda, pudiendo deslizar, sobre un plano inclinado.
- Péndulo simple plano, cuerda inextensible.
- Péndulo doble plano, cuerda inextensible
- Péndulo simple plano, cuerda elástica
- Péndulo doble plano, cuerda elástica
- Máquina de Atwood
- Máquina de Atwood compuesta (ejercicio 6)
- Un bloque B está suspendido de una cuerda (se mueve como un péndulo) unida a un carrito A, el cual puede rodar libremente sobre una pista horizontal y sin fricción.
- El diagrama del ejercicio 10

Repaso del método de Lagrange

Se define la función del Lagrangianano:

$$L = T - U \qquad (1)$$

donde T es la energía cinética del sistema y U es su energía potencial
Además, se ha demostrado que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \qquad (2)$$

j= grados de libertad
Q_j= fuerzas generalizadas, no conservativas
q_j= coordenadas generalizadas

Algunas propiedades de las coordenadas generalizadas:

- No son necesariamente cartesianas.
- No necesariamente pertenecen a un sistema inercial.
- Deben ser independientes: si fijo todas las coordenadas excepto una, aún tengo rango de movimiento en el sistema.
- Deben estar completas: capaz de localizar cada partícula del sistema a cada momento
- Deben pertenecer a un sistema holonómico: el número de grados de libertad es igual al número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento.

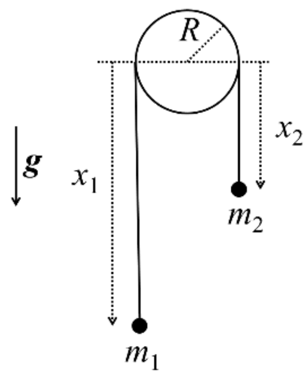
Procedimiento propuesto:

- Determinar grados de libertad y elegir coordenadas generalizadas q_j.
- Verificar que las coordenadas sean completas independientes y holonómicas.
- Calcular T y V para cada cuerpo del sistema
- Calcular la expresión (2) para cada q_j

2. Considere un péndulo de longitud $\boldsymbol{l}$ y masa $\boldsymbol{m}$, utilice las ecuaciones de Lagrange para demostrar que $\theta(t) = A.\cos(t\sqrt{g/l})$, cuando $\boldsymbol{\theta}$ es pequeño.

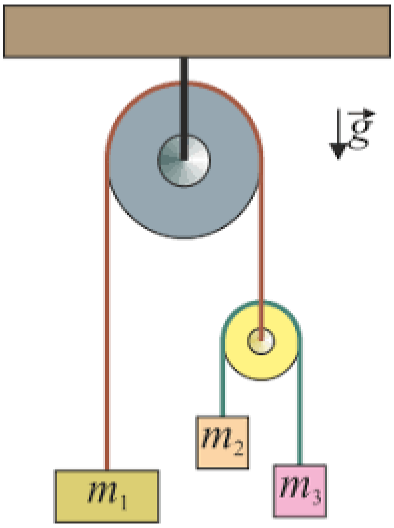
3. Considere un bloque unido a un resorte de constante $\boldsymbol{k}$ que se desliza sin fricción sobre el eje $\boldsymbol{x}$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener las expresiones del movimiento armónico simple.

4. Considere una máquina de Atwood, donde $\boldsymbol{m1} > \boldsymbol{m2}$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener la aceleración del sistema. Desprecie la masa de la polea.

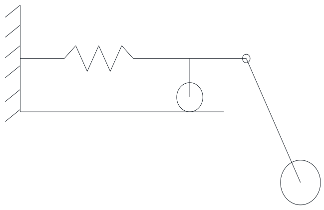


5. Considere una máquina de Atwood, donde $m1 > m2$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener la aceleración del sistema. La polea tiene una masa $\boldsymbol{M}$ y un radio $\boldsymbol{R}$. Momento de inercia $I = 1/2 * M.R^2$

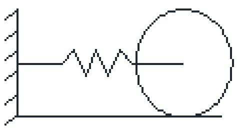
6. Considere una máquina de Atwood compuesta donde las masas de las poleas son despreciables, $\boldsymbol{m_1} < \boldsymbol{m_2} + \boldsymbol{m_3}$, y $\boldsymbol{m_3} > \boldsymbol{m_2}$. Utilice las ecuaciones de Lagrange para obtener las expresiones de aceleración del sistema.



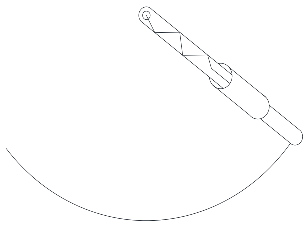
7. Péndulo con eje de rotación oscilante. La masa del péndulo es $\boldsymbol{m}$, su centro de rotación está unido un soporte que se desliza por acción de un resorte de constante $\boldsymbol{k}$. Tanto el resorte como el soporte deslizante se consideran de masa despreciable. Obtenga las expresiones de Lagrange para el sistema



8. Un resorte de masa despreciable y constante **k** está unido a un disco de masa $\boldsymbol{M}$ y radio $\boldsymbol{R}$ que rueda sin deslizar como se ve en la figura. Obtenga las expresiones de Lagrange para el sistema



9. Considere un péndulo compuesto de una barra de masa $\boldsymbol{M_1}$, longitud $\boldsymbol{L_1}$ y momento de inercia $\boldsymbol{I_{z1}}$. Esta barra esta cubierta parcialmente por un resorte de masa despreciable y con constante $\boldsymbol{k}$ cuya longitud en reposo es $\boldsymbol{L_0}$. Adherido al final del resorte hay un cilindro de masa $\boldsymbol{M_2}$, longitud $\boldsymbol{L_2}$ y momento de inercia $\boldsymbol{I_{Z2}}$ que se desliza sobre la barra. Desarrolle las ecuaciones de Lagrange del sistema



10. Utilice las ecuaciones de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento y las matrices de rigidez y masa del sistema. La masa de la polea es $\boldsymbol{M}$ y su momento de inercia es $\boldsymbol{I}$. Ignore la gravedad.