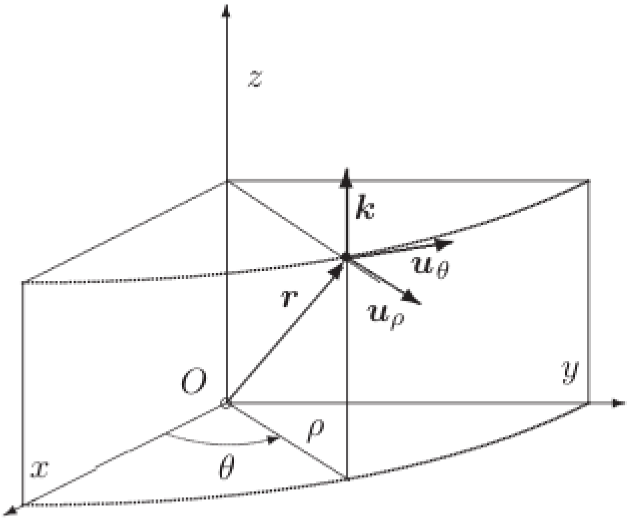
Trabajo Práctico N° 2

1. Coordenadas Cilíndricas

En ciertos problemas de movimiento, es conveniente definir la posición de la partícula P mediante sus coordenadas cilíndricas.



En este caso, las coordenadas que definen la posición son (ρ, θ, z), siendo ρ la distancia desde un punto fijo O, θ el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y z la altura del punto sobre dicho plano.
El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es $(\boldsymbol{u_\rho}, \boldsymbol{u_\theta}, \boldsymbol{k})$. El versor $u_\rho$queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de $r$sobre el plano; $k$es el versor perpendicular al mismo, y $\boldsymbol{u_\theta}$ es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto $\boldsymbol{u_\rho}$como $\boldsymbol{u_\theta}$varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas curvilíneas.

La posición de un punto queda definida mediante

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{u_\rho} + z\boldsymbol{k}$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano cuando $z = 0$

Las coordenadas cilíndricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho sen\theta \qquad z = z$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\boldsymbol{u_\rho} = \cos\theta\ \boldsymbol{i} + sen\theta\ \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{u_\theta} = -sen\theta\ \boldsymbol{i} + \cos\theta\ \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$$

a) Halle las siguientes expresiones, en función de los versores$(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$y las variables (ρ, θ, z):

$\dot{\boldsymbol{r}}$=

$\ddot{\boldsymbol{r}}$=

Ayuda desarrolle primero $\dot{\boldsymbol{u}}_\rho$, $\dot{\boldsymbol{u}}_\theta$, $\dot{\boldsymbol{k}}$

b) Exprese las componentes radiales y tangenciales de la velocidad y la aceleración para $\rho = cte$ y $z = 0$

$\dot{\boldsymbol{r}}_{u_\rho}$= $\dot{\boldsymbol{r}}_{u_\theta}$ =

$\ddot{\boldsymbol{r}}_{u_\rho}$= $\ddot{\boldsymbol{r}}_{u_\theta}$=

¿A qué expresiones conocidas llegó?

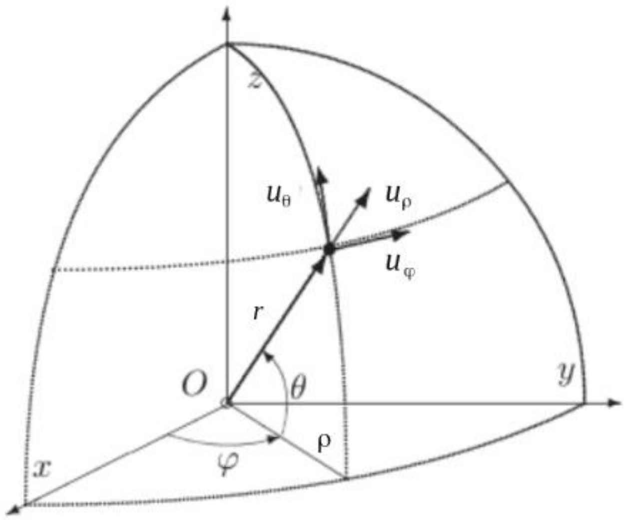
¿Puede obtenerse la aceleración radial a partir de derivar la velocidad radial con respecto al tiempo?

2. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio ρ: la longitud φy la latitud θ

Las coordenadas esféricas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi \quad z = \rho \cos\theta$$



El triedro físico es ahora $(\boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_\rho)$. La línea coordenada de longitud φconstante define el meridiano, al cual es tangente el versor $\boldsymbol{u}_\theta$. Asimismo la línea de latitud θconstante define un paralelo, al cual es tangente el versor $\boldsymbol{u}_\varphi$. Por último, el versor $u_\rho$lleva la dirección y sentido del radio vector $\boldsymbol{r}$. El vector posición es $\boldsymbol{r} = \rho . \boldsymbol{u}_\rho$

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta\cos\varphi\ \boldsymbol{i} + \cos\theta sen\varphi\ \boldsymbol{j} + sen\theta\ \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{u}_\theta = -sen\theta\cos\varphi\ \boldsymbol{i} - sen\theta sen\varphi\ \boldsymbol{j} + \cos\theta\ \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u_\varphi} = \boldsymbol{u_\theta} \wedge \boldsymbol{u_\rho} = -sen\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\, \boldsymbol{j}$$

a) Demuestre que:

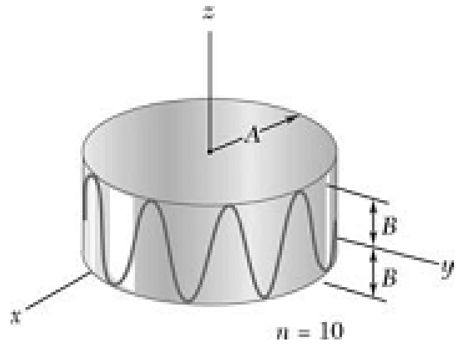
$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot\rho\, \boldsymbol{u_\rho} + \rho\dot\theta\, \boldsymbol{u_\theta} + \rho\dot\varphi\cos\theta \boldsymbol{u_\varphi}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{cases} (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\cos^2\theta - \rho\dot\theta^2)\boldsymbol{u_\rho} + \\ (2\dot\rho\dot\theta + \rho\dot\varphi^2 sen\theta\cos\theta + \rho\ddot\theta)\boldsymbol{u_\theta} + \\ (2\dot\rho\dot\varphi\cos\theta - 2\rho\dot\theta\dot\varphi sen\theta + \rho\ddot\varphi\cos\theta)\boldsymbol{u_\varphi} \end{cases}$$

Ayuda, desarrolle $\dot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol\theta}, \dot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol\varphi}$como en este ejemplo:

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\dot\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\dot\varphi = \dot\theta\boldsymbol{u_\theta} + \dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{u_\varphi}$$

3. El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular se define por medio de las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$, $z = B.\sin(2\pi n t)$, donde A y B son constantes, n es un entero. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo **t**.



4. El movimiento tridimensional de una partícula se define por medio de las coordenadas cilíndricas $R = A/(t+1)$, $\theta = B\,.\,t$ y z= C . t/(t+1). Demuestre que las magnitudes de la velocidad y de la aceleración son:

A) Para $t = 0$ → $v = \sqrt{A^2 + B^2}$ $a = \sqrt{(1 + 16\,\pi^2).A^2 + B}$

B) Para $t = \infty$ → $v = 2\pi A$ $a = 4\pi^2 A$

5. Considere una partícula de masa ***m*** que se mueve pegada a la superficie de una esfera de radio ***R***, calcule la energía cinética de la partícula en función de ***m, R, θ, φ,*** usando coordenadas esféricas.

6. Una partícula de masa ***m*** cae desde una altura ***h*** comenzando desde el reposo. Encuentre ***y(t)***:

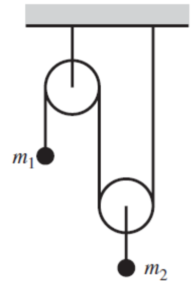
a) a través de la expresión de $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$

b) mediante la expresión $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dy}}$

7. Considere las poleas del sistema de la figura. Por debajo de cada polea cuelgan $\mathbf{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ respectivamente. Considere que las cuerdas y las poleas tienen masa despreciable.

a) ¿Cuáles son las aceleraciones de las masas?

b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda más larga?



8. Una pelota se deja caer desde el reposo a una altura ***h***. Asuma que la fuerza de arrastre generada por el aire es: $\boldsymbol{F_a}$ =**mαv**.
Encuentre la velocidad y la altura como funciones del tiempo.

9. Muestre que $\theta(t) = \theta_0 \, . \cos(\sqrt{g/l} \, . t)$ describe la posición del péndulo de la figura en función del tiempo, si θ es suficientemente pequeño
(cuándo el ángulo es pequeño puede considerar $\sin(\theta) \approx \theta$).
Ayuda: debe plantear una EDO de 2° orden.
¿Podría encontrar una solución para grandes valores de θ? En caso afirmativo mencione sin resolver qué método usaría.