Trabajo Práctico N° 3 Multiplicadores de Lagrange y Fuerzas generalizadas

Multiplicadores de Lagrange

Cuando utilizamos las ecuaciones de Lagrange con fuerzas generalizadas podemos usar la siguiente expresión:

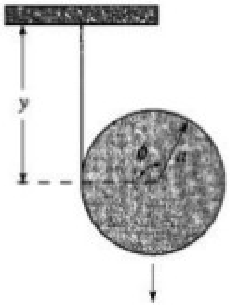
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_{q_j}$$

Cuando existe una ecuación de vínculo F, podemos expresar las fuerzas generalizadas utilizando el multiplicador de Lagrange λ :

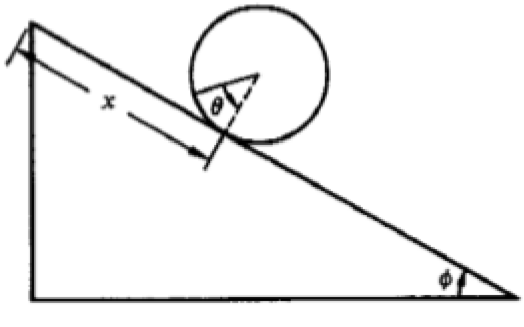
$$Q_{q_j}=\sum \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial q_j}$$

1. Considere una máquina de Atwood simple con polea de masa despreciable en la que se colocan dos masas $\mathbf{m_1}$ y $\mathbf{m_2}$. Utilice los multiplicadores de Lagrange para obtener la expresión de la tensión en la cuerda

2. Considere la esfera maciza enrollada en una cuerda de masa despreciable que se muestra en la figura. Utilice los multiplicadores de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento y las fuerzas de vínculo



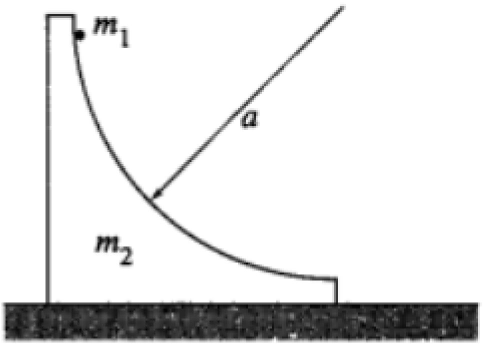
3. Considere un disco que rueda sin deslizar como se muestra en la figura. Considere que existen dos sistemas de coordenadas independientes y con una ecuación de vínculo. Exprese el Lagrangiano del sistema para cada una de las coordenadas definidas y resuelva utilizando multiplicadores de Lagrange



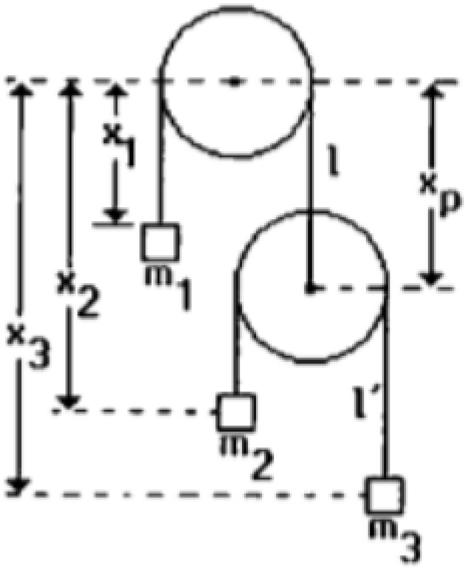
4. Una partícula de masa m comienza a deslizar desde la parte más alta de una esfera de radio **R**. Encuentre la fuerza de vínculo normal que ejerce la esfera sobre la partícula y el ángulo relativo a la vertical en el cual la partícula se desprende de la esfera. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

5. Una partícula de masa **m1** se desliza sin rozamiento en una superficie circular de radio de curvatura a y de masa **m2**, que es libre de moverse sin rozamiento de forma horizontal sobre el plano en el que se apoya.

   Encuentre las ecuaciones de movimiento para cada masa. Encuentre la fuerza de vínculo normal ejercida por la superficie curva sobre la partícula. Use el método de los multiplicadores de Lagrange.



6. Use los multiplicadores de Lagrange para encontrar las tensiones en las dos cuerdas de la máquina de Atwood compuesta que se muestra en la imagen. Desprecie las masas de las cuerdas y las poleas



7. En la punta de un plano inclinado de ángulo θ se encuentra una polea de masa despreciable que une un bloque de masa **m1**, que desliza sobre el plano inclinado y otro bloque de masa **m2** que cuelga de la polea bajo la accción de la gravead. Utilice el multiplicador de Lagrange para resolver el sistema e interprete el significado de las fuerzas generalizadas

Fuerzas generalizadas

En el caso de que existan fuerzas no conservativas, para cada coordenada generalizada q_i es necesario calcular la cantidad Q_i que la afecta. Podemos calcular el trabajo virtual $\delta W_{no\,conservativo}$ asociado a un desplazamiento virtual δq_j mediante la siguiente expresión:

$$\delta W_j = Q_j . \delta_j$$

Este trabajo virtual también se puede expresar como:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} F_i . \delta r_i \quad , \quad \delta r_i = \delta q_1 + \delta q_2 + ... + \delta q_n$$

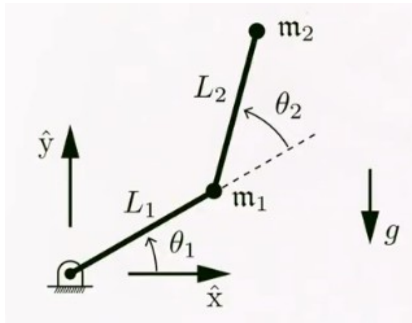
Por lo que finalmente podemos expresar la fuerzas no conservativas que afectan a la coordenada generalizada q_j como:

$$Q_j = \sum F_i . \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

8. Un disco de masa **m**, y momento de inercia **I**, que tiene una cuerda enrollada está con una de sus caras lisas apoyado sobre un plano sin fricción y una fuerza **F** actua sobre la cuerda, obtenga las expresiones de las fuerzas generalizadas y las ecuaciones de movimiento usando el método de Lagrange

9. Un brazo robótico con una única articulación giratoria mueve una barra de longitud **l** y cuya masa es despreciable y mueve a la masa **m**, en un plano vertical bajo la acción de la gravedad. Obtenga las expresiones del torque necesario para un determinado movimiento usando las ecuaciones de Lagrange. Obtenga la expresión de la energía consumida para ese movimiento

10. Demuestre que para el brazo robótico de la figura los torques necesarios en las articulaciones están dados por la siguiente expresión:



$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(m_1 L_1^2 + m_2(L_1^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\right)\ddot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2(L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad - m_2L_1L_2\sin\theta_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\
&\quad + (m_1 + m_2)L_1 g\cos\theta_1 + m_2 g L_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\
\tau_2 &= m_2(L_1L_2\cos\theta_2 + L_2^2)\ddot{\theta}_1 + m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 \\
&\quad + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 \\
&\quad + m_2 g L_2\cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
$$