MECÁNICA RACIONAL

INGENIERÍA MECÁNICA

FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

Trabajo Práctico N° 5

Multiplicadores de Lagrange

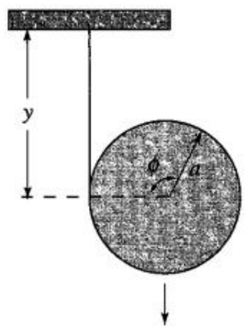
Cuando utilizamos las ecuaciones de Lagrange con fuerzas generalizadas podemos usar la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_{q_j}$$

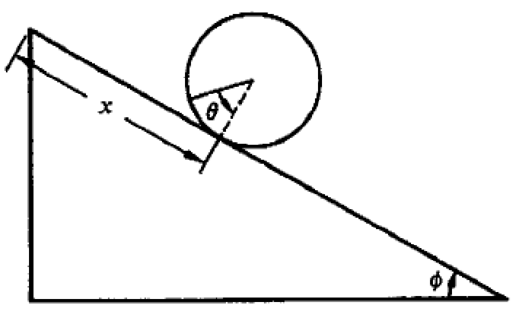
Cuando existe una ecuación de vínculo F , podemos expresar las fuerzas generalizadas utilizando el multiplicador de Lagrange λ:

$$Q_{q_j}=\lambda.\frac{\partial F}{\partial q_j}$$

1. Considere el disco enrollado en una cuerda de masa despreciable que se muestra en la figura. Utilice los multiplicadores de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento y las fuerzas de vínculo



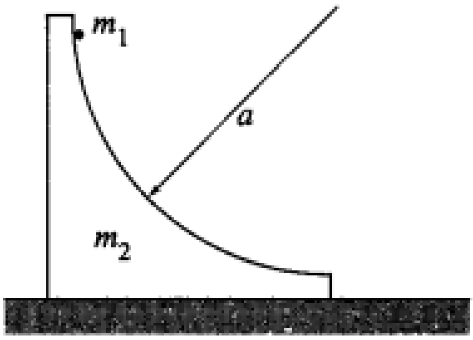
2. Considere un disco que rueda sin deslizar como se muestra en la figura. Considere que existen dos sistemas de coordenadas independientes y con una ecuación de vínculo. Exprese el lagrangiano del sistema para cada una de las coordenadas definidas y resuelva utilizando multiplicadores de Lagrange



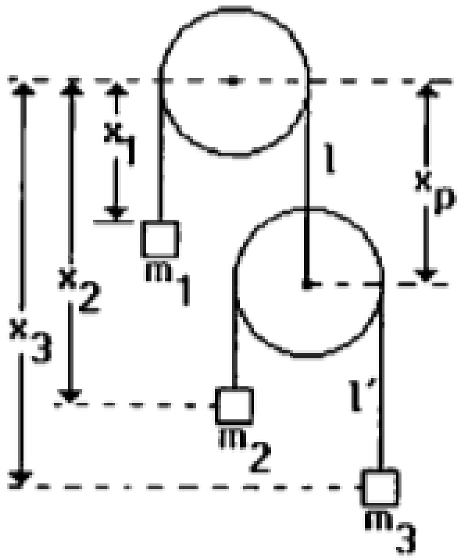
3. Una partícula de masa m comienza a deslizar desde la parte más alta de una esfera de radio R. Encuentre la fuerza de vínculo normal que ejerce la esfera sobre la partícula y el ángulo relativo a la vertical en el cual la partícula se desprende de la esfera. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

4. Una partícula de masa m_1 se desliza sin rozamiento en una superficie circular de radio de curvatura a y de masa m_2, que es libre de moverse sin rozamiento de forma horizontal sobre el plano en el que se apoya.

5. Encuentre las ecuaciones de movimiento para cada masa. Encuentre la fuerza de vínculo normal ejercida por la superficie curva sobre la partícula. Use el método de los multiplicadores de Lagrange.



6. Use los multiplicadores de Lagrange para encontrar las tensiones en las dos cuerdas de la máquina de Atwood compuesta que se muestra en la imagen. Desprecie las masas de las cuerdas y las poleas



El Hamiltoniano

La función del Hamiltoniano en coordenadas generalizadas se puede expresar como:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = T + U$$

Comparando con el Lagrangiano tenemos que:

- el Lagrangiano es función de la posición y la velocidad en coordenadas generalizadas

$$L = L(q_i \dot{q}_i)$$

- el Hamiltoniano es función de la posición y el momento

$$H = H(q_i, p_i)$$

Expresar las ecuaciones de movimiento en función del momento simplifica los cálculos en muchos casos, en especial fuera de las aplicaciones de la mecánica clásica.
Para hallar la expresión del momento en coordenadas generalizadas se puede utilizar la siguiente expresión $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ o la expresión $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$
Una vez que obtuvimos el Hamiltoniano es necesario obtener las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q_i}}$$

7. Considere un oscilador armónico, formado por una partícula de masa m que oscila en el eje x, acoplada a un resorte de constante k de masa despreciable. Obtenga las ecuaciones de Hamilton

8. Considere un péndulo de longitud **L** y masa **m**, con momento de indercia **I=mL²**. Obtenga el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento del sistema $\dot{\theta}\dot{p}$

9. Consideremos una partícula en un plano moviéndose sujeta a una fuerza conservativa central. Usaremos coordenadas polares, y la energía potencial es función del radio,

$$U = U(r)$$

   Encuentre las ecuaciones de movimiento a partir del Hamiltoniano

10. Encuentre el Hamiltoniano y las expresiones de movimiento para una máquina de Atwood Simple, con polea de masa despreciable, y luego considerando momento de inercia **I**

11. Encuentre el Hamiltoniano y las expresiones de movimiento para una partícula deslizándose por un plano inclinado sin fricción

12. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están conectadas por un resorte de masa despreciable que en reposo tiene una longitud l y tiene una constante k. El sistema es libre de rotar y vibrar sobre una superficie plana horizontal sin rozamiento. Utilice coordenadas polares, y coloque el inicio de coordenadas el centro del resorte. Encuentre el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento del sistema.