ĐỔI BIẾN

TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA

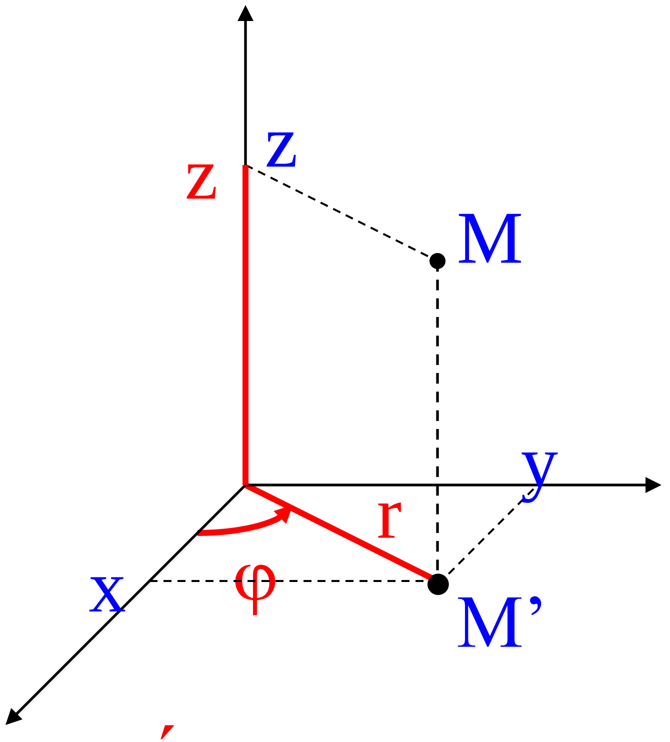
f(x,y,z) xác định trong Ω, đặt $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$

$(x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Omega'$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} g(u,v,w)\,|\,J\,|\,dudvdw}$$

TỌA ĐỘ TRỤ



cố định z

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

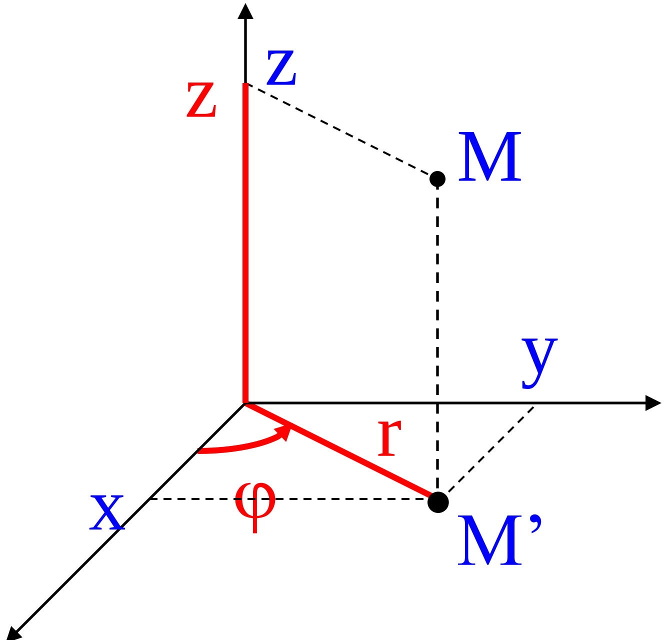
đổi sang tọa độ trụ ⇔ hình chiếu D đổi sang tọa độ cực.

TỌA ĐỘ TRỤ

$$x = r\,cos\varphi,\; y = r\,sin\varphi,\; z = z$$

$$J = r$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz$$

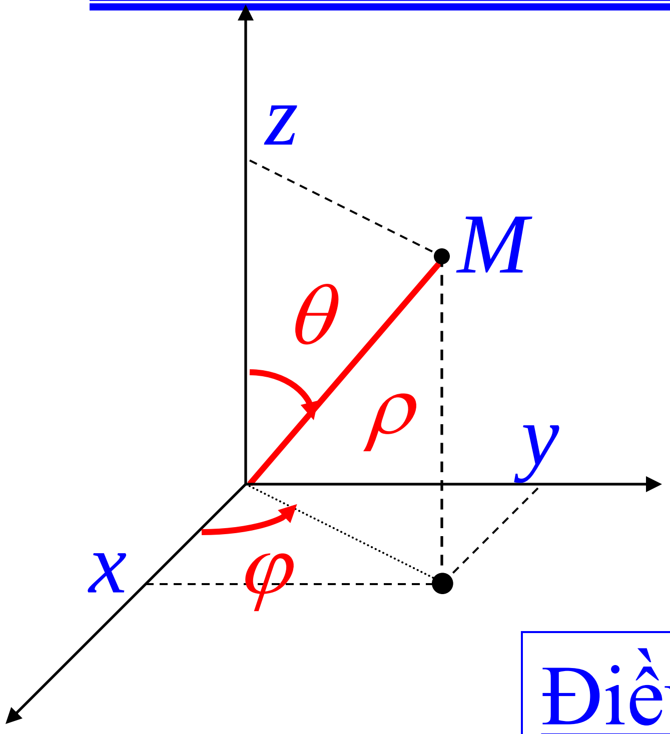


Điều kiện giới hạn:

$1.\, r \geq 0$

$2.\, \varphi \in [0, 2\pi]$ hay $\varphi \in [-\pi, \pi]$

TỌA ĐỘ CẦU



$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = \rho \cos\theta$$

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

<u>Điều kiện giới hạn</u>:

1. $\rho \geq 0$

2. $\varphi \in [0, 2\pi]$ hay $\varphi \in [-\pi, \pi]$

3. $\theta \in [0, \pi]$

Lưu ý:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin\theta$$

Tọa độ cầu thường dùng cho miền giới hạn bởi mặt cầu hoặc mặt nón và mặt cầu.

Áp dụng vào việc xét tính đối xứng của Ω

Nếu Ω gồm 2 phần Ω_1 và Ω_2 đối xứng nhau qua mp $z = 0$

1. f chẵn theo z : $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz$$

2. f lẻ theo z : $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

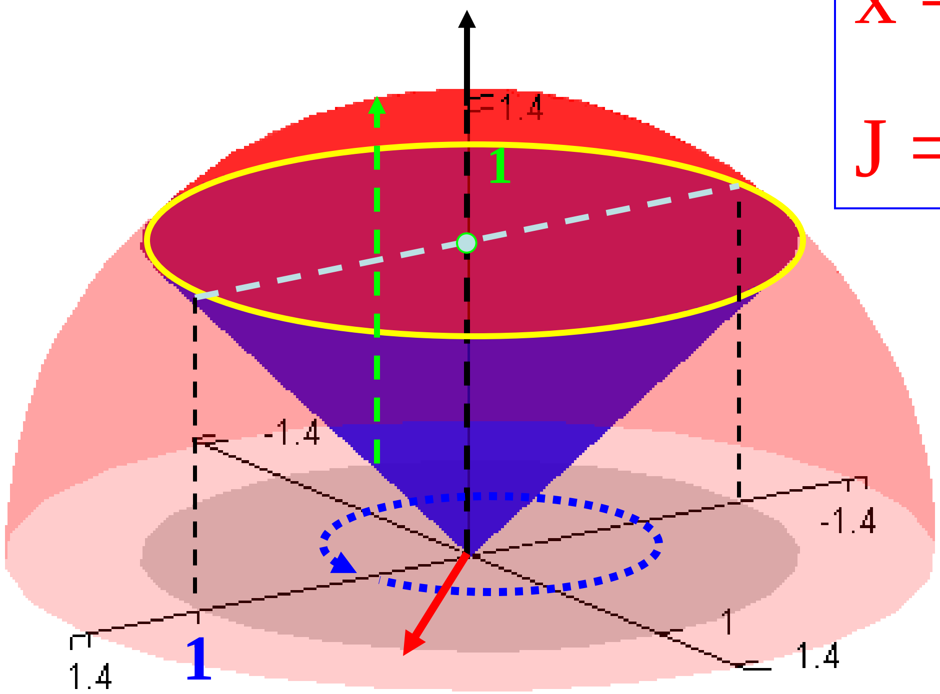
VÍ DỤ

1/ Tính tp sau sử dụng tọa độ trụ và tọa độ cầu:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

$$\Omega : z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2, \;\; z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$$



x = rcosφ, y = rsinφ, z = z

J = r

Giao tuyến: $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z.r\,dz = \frac{\pi}{2}$$

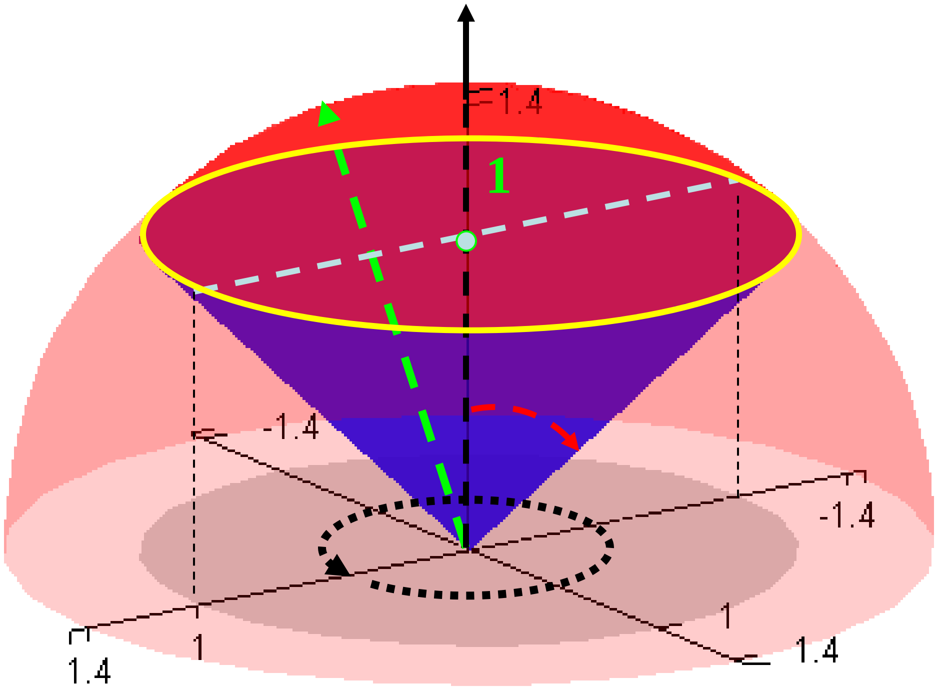
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

x = ρsinθcosφ,

y = ρsinθsinφ,

z = ρcosθ.

J = ρ^2 sinθ



Giao tuyến: $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\theta\rho^2 \sin\theta d\rho$$

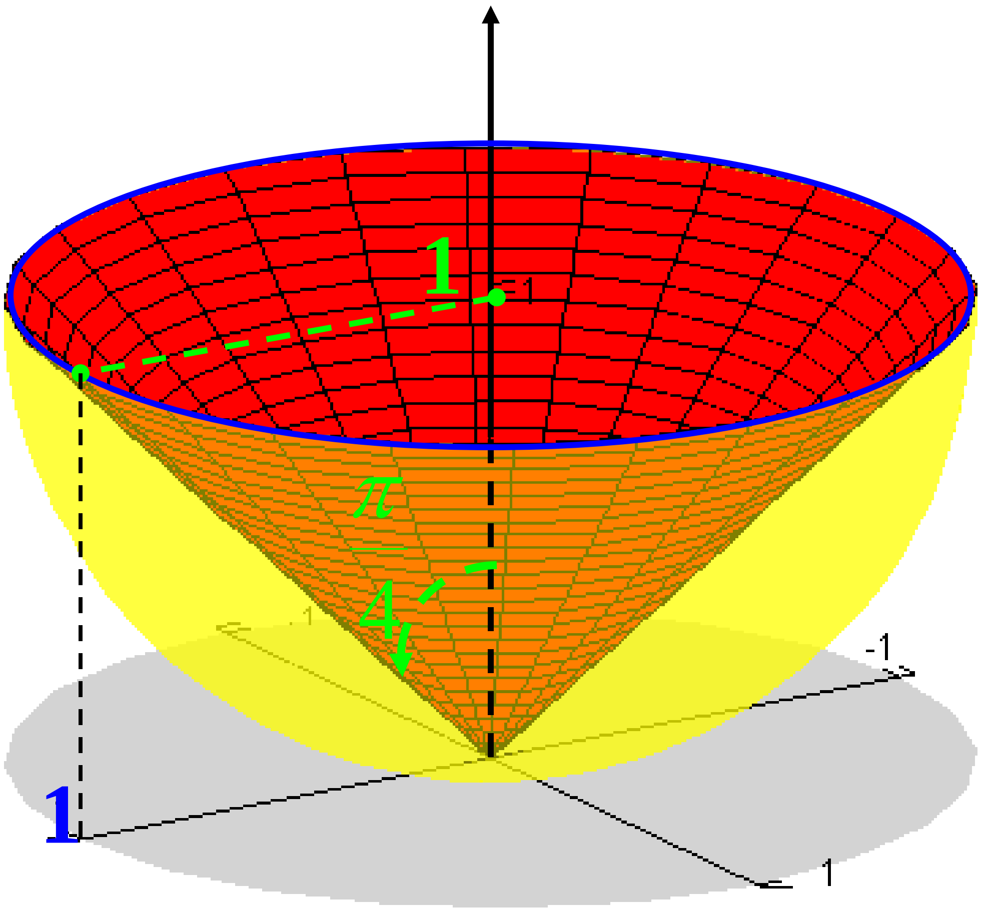
2/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

Ω: $\quad z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$

$$z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$$

Giao tuyến của mặt cầu và nón



$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

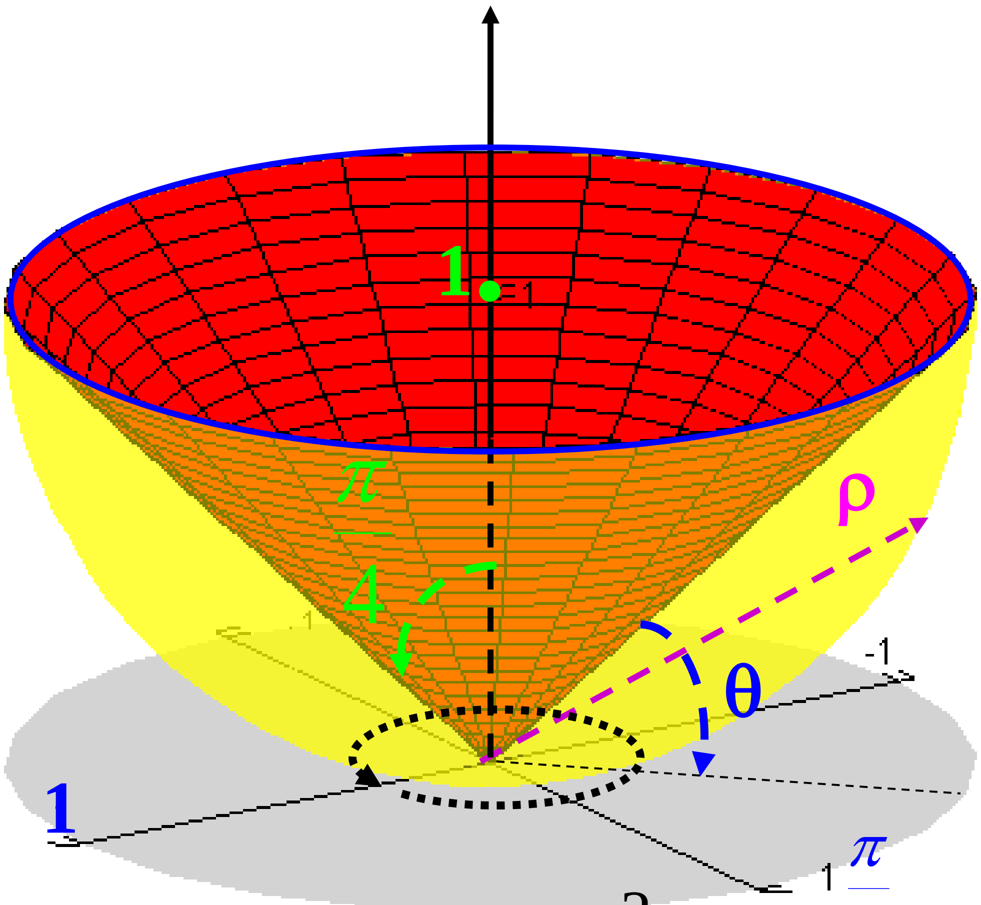
$$z \le \sqrt{x^2+y^2},\ \ x^2+y^2+z^2 \le 2z$$

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = \rho\cos\theta.$

$J = \rho^2 \sin\theta$



Pt mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2=2z$$

$$\Leftrightarrow \rho = 2\cos\theta$$

$$\iiint_\Omega z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cos\theta\rho^2\sin\theta\, d\rho$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{2\cos\theta} \rho\cos\theta\rho^2\sin\theta\,d\rho$$

$$= \frac{\boldsymbol{\pi}}{6}$$

Cách 2: Ω: $z \le \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2 \le 2z$

Biểu diễn lại Ω: $\begin{cases} \rho\cos\theta \le \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sin\theta \\ \rho \le 2\cos\theta \end{cases}$

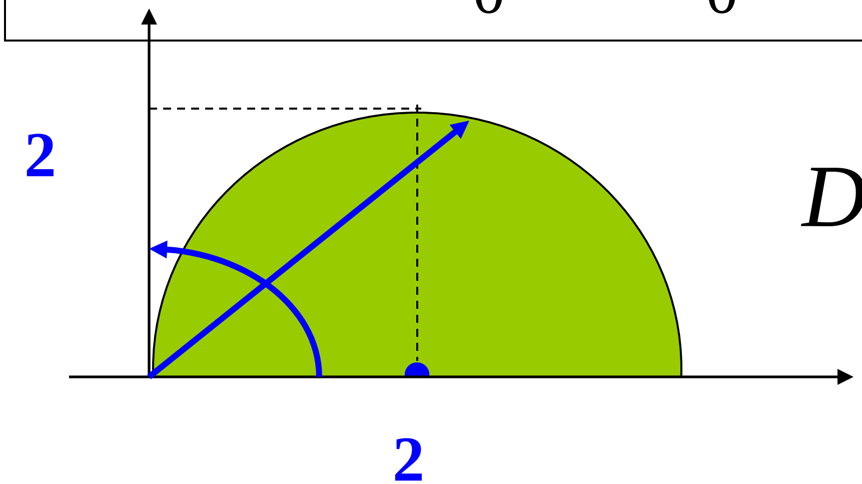
$$\begin{cases} \rho\cos\theta \le \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sin\theta \\ \rho \le 2\cos\theta \quad (\Rightarrow \cos\theta \ge 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \boldsymbol{\rho} \le 2\cos\boldsymbol{\theta} \\ (0 \le \boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{\pi}/2) \\ \tan\boldsymbol{\theta} \ge 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \boldsymbol{\rho} \le 2\cos\boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\pi}/4 \le \boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{\pi}/2 \\ 0 \le \boldsymbol{\varphi} \le 2\boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

VÍ DỤ

3/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ

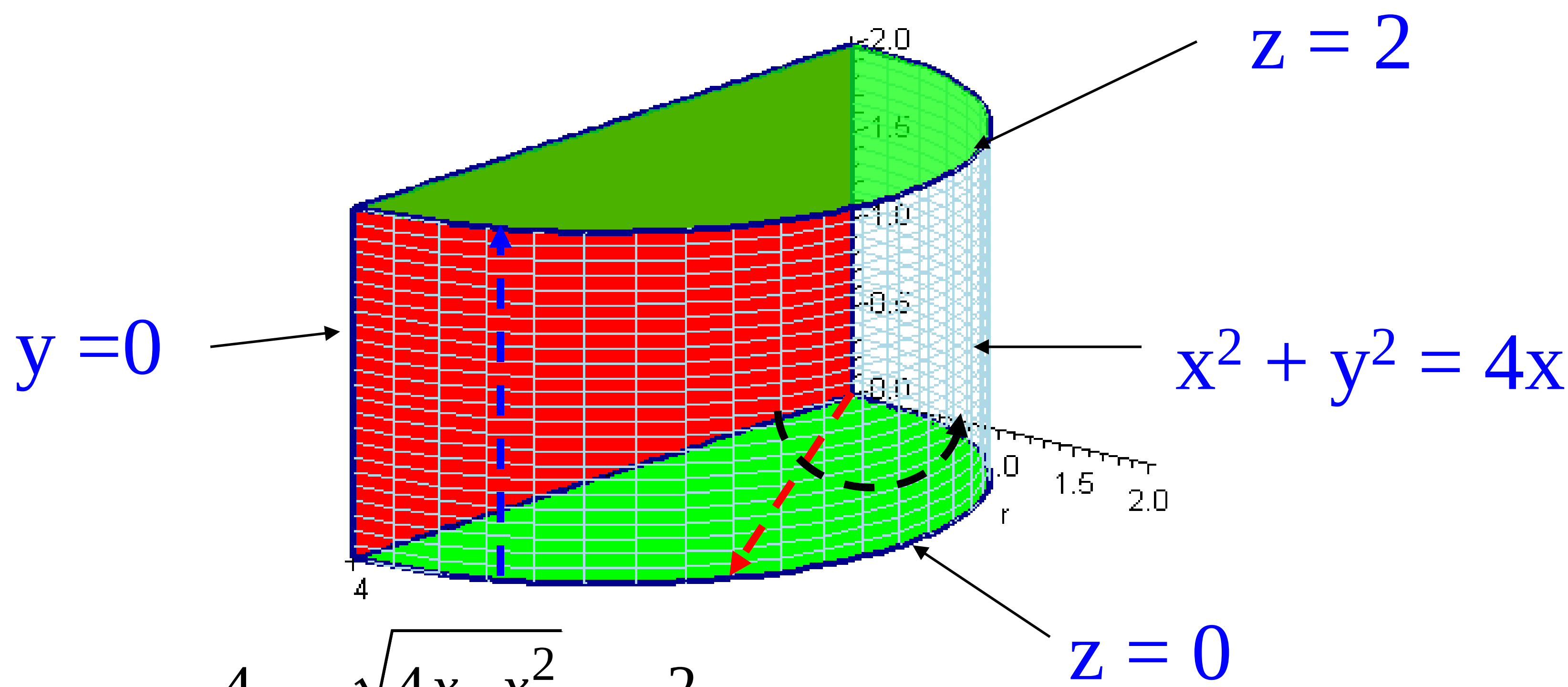
$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xzdz$$



$$D = \underset{Oxy}{hc}\,\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{4x - x^2} \end{cases}$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$

$$\Omega : 0 \le r \le 4\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le z \le 2$$



$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz\,dz$$

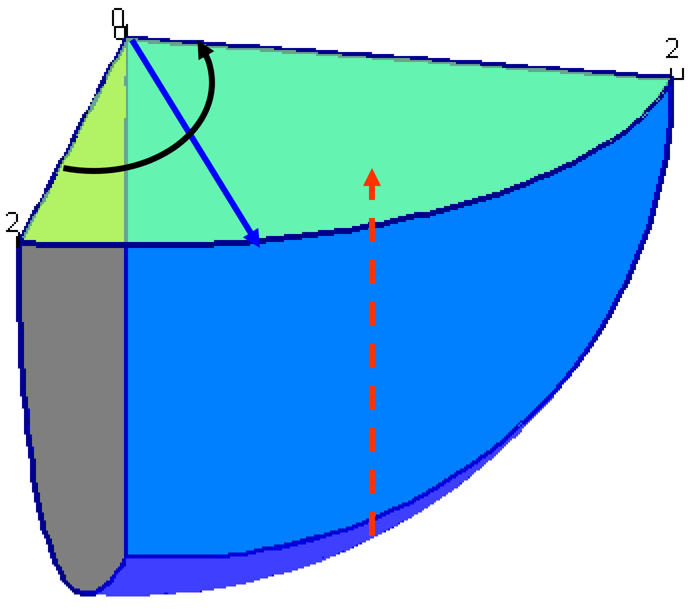
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} dr \int_0^2 r\cos\varphi . z . r\,dz$$

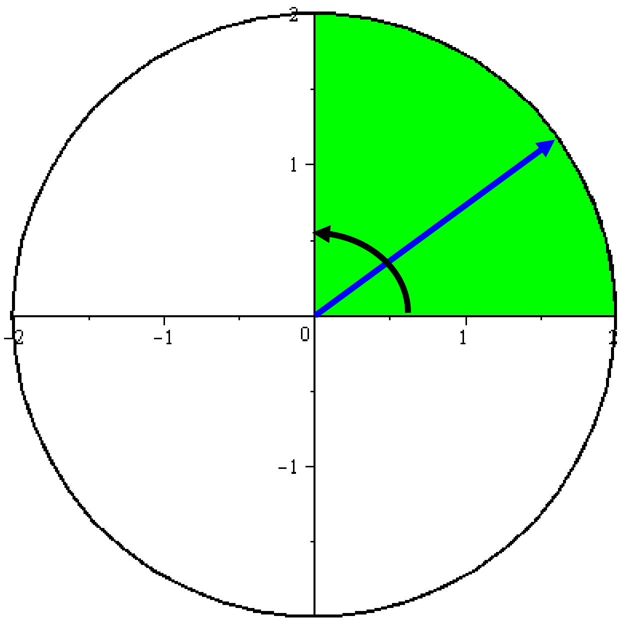
4/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ, cầu:

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} xz dz$$

$$I=\int_{0}^{2}dy\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0}xzdz$$

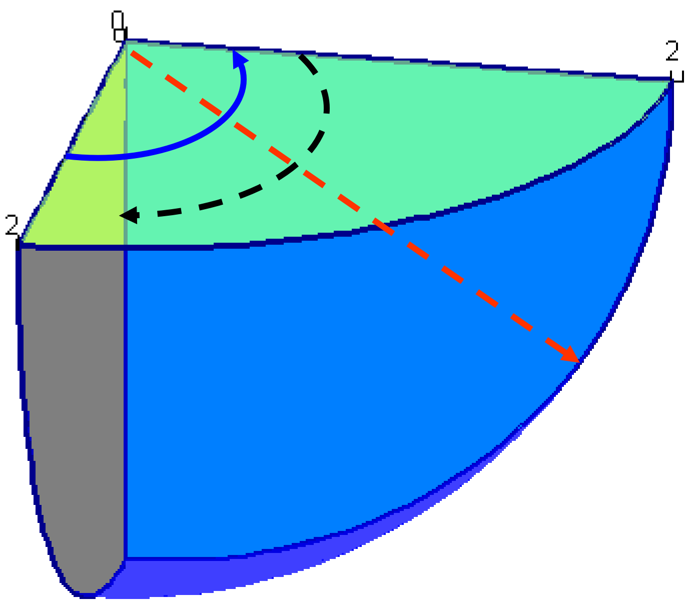
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$





$$I=\int_{0}^{\pi/2}d\varphi\int_{0}^{2}dr\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{0}r\cos\varphi . z . r dz$$

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} xz\,dz$$



$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = \rho\cos\theta.$

$J = \rho^2 \sin\theta$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sin\theta\cos\varphi.\rho\cos\theta.\rho^2\sin\theta d\rho$$

5/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu:

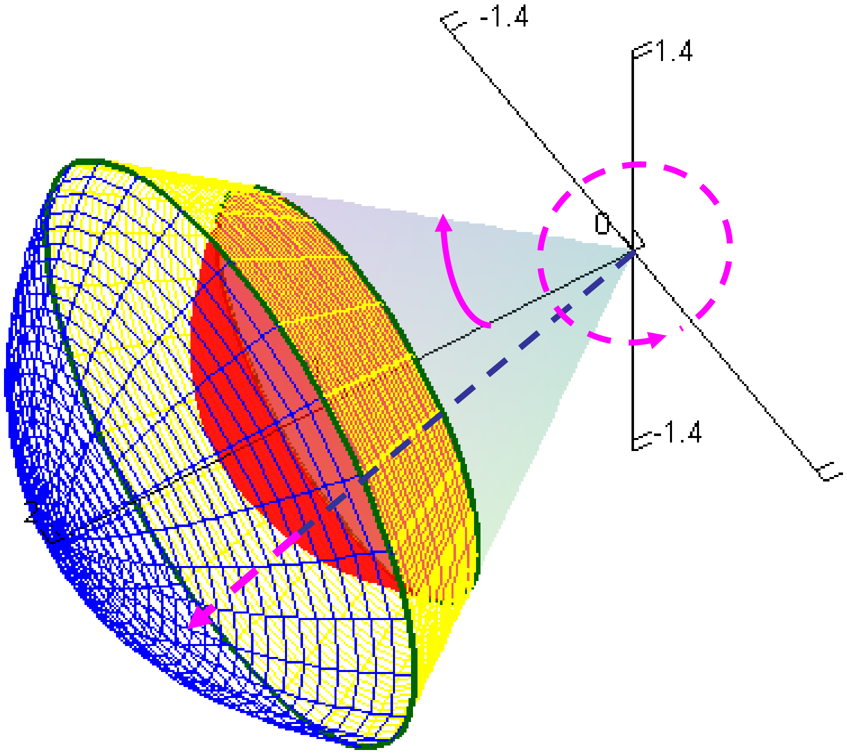
$$I = \iiint_{\Omega} x\,dxdydz$$

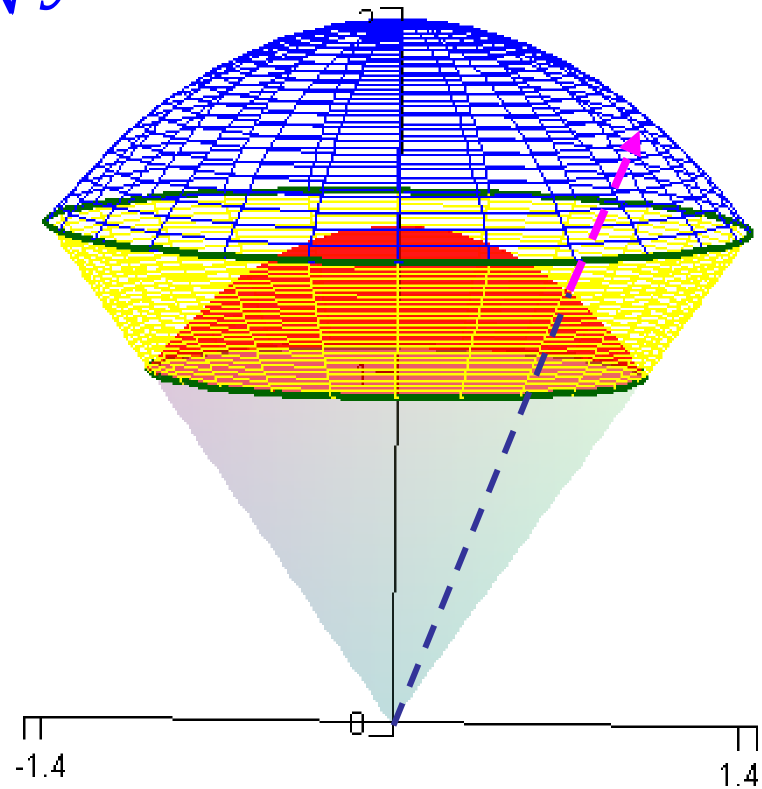
Ω: $2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$

x = ρcosθ, y = ρsinθcosφ, z = ρsinθsinφ

J = ρ² sinθ

$$2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$$





$$I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2} \rho \cos\theta \rho^2 \sin\theta \, d\rho$$

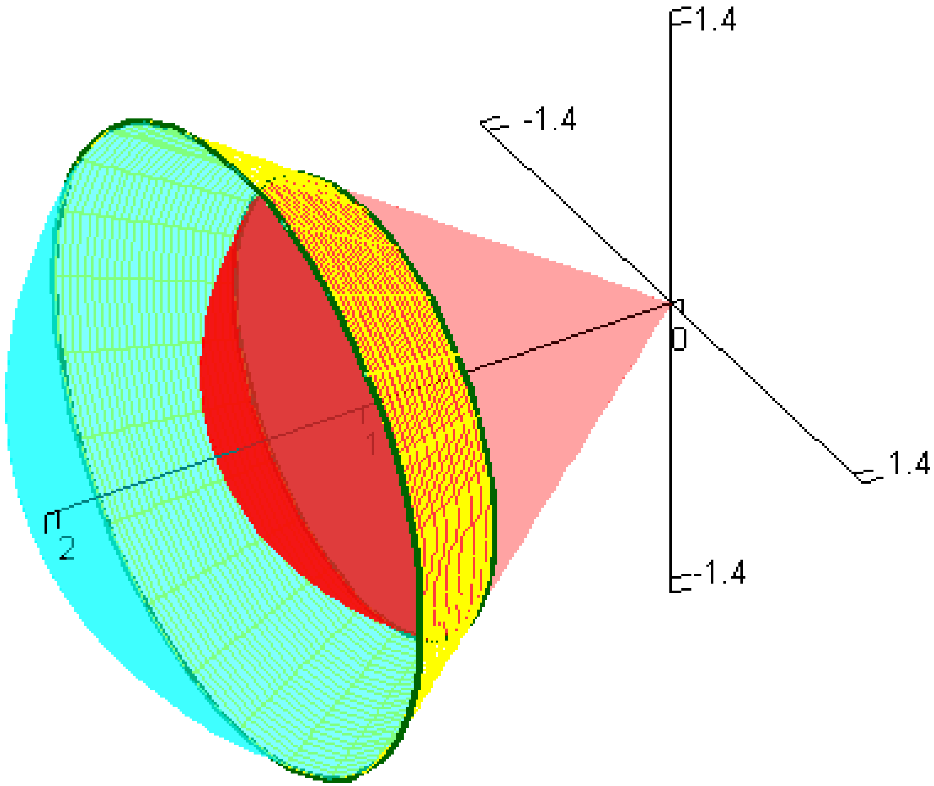
$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pi$$

Cách 2: $2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$

Ω: $\begin{cases} \rho\cos\theta \ge \rho\sin\theta (0 \le \theta \le \pi) \\ 2 \le \rho^2 \le 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\theta \le 1 \\ \sqrt{2} \le \rho \le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/4 \\ \sqrt{2} \le \rho \le 2 \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

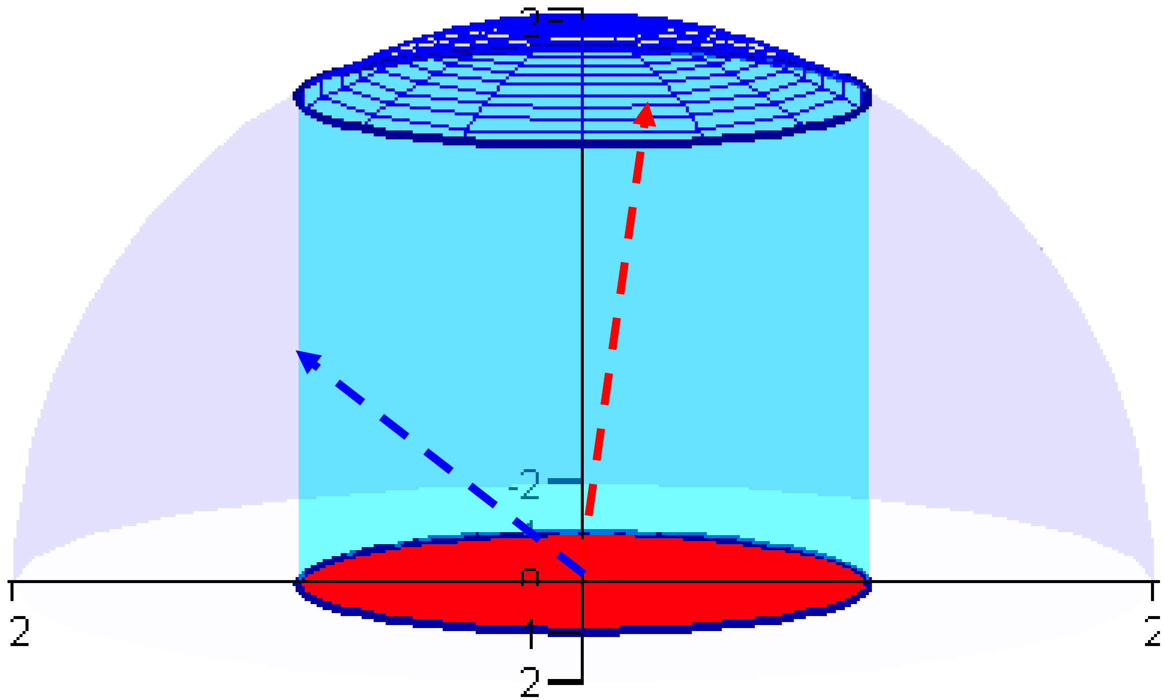


1.4
-1.4
0
1
2
1.4
-1.4

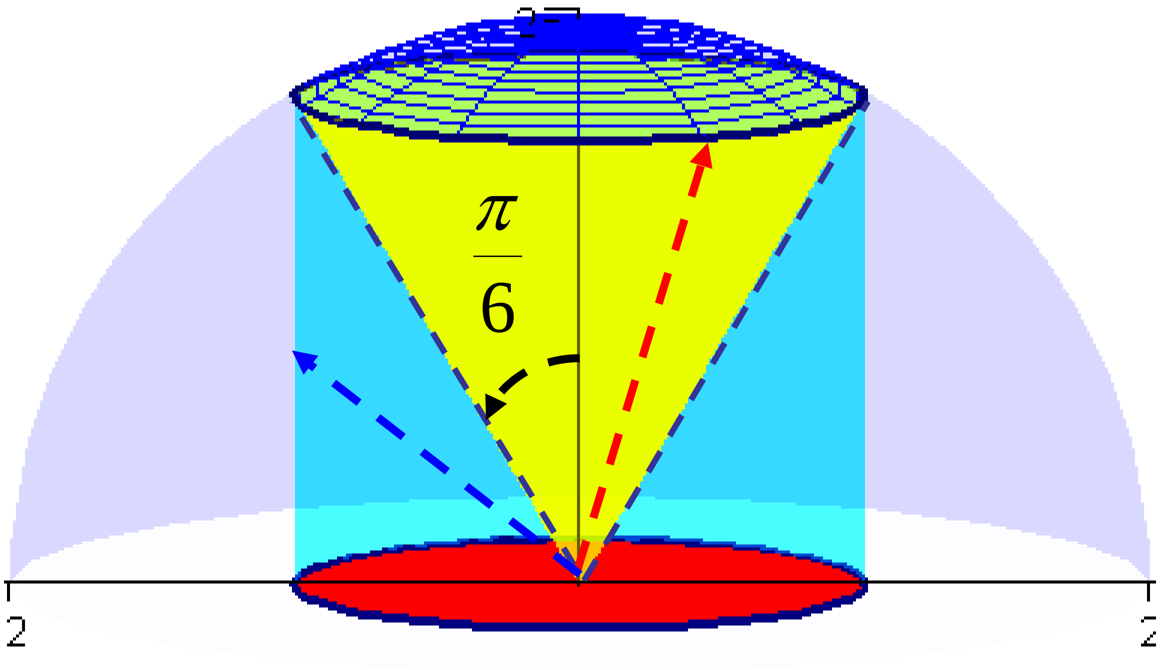
5/ Đổi tp sau sang tọa độ cầu:

$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz$$

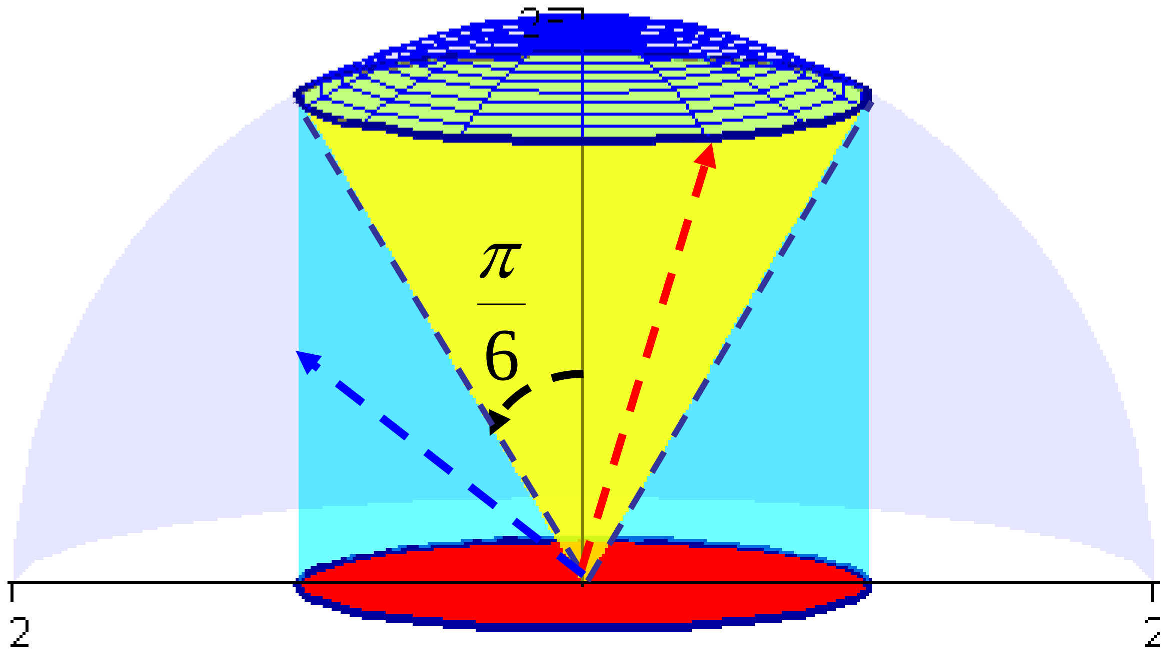
$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$



2
-2
0
1
2
2
2



Giao tuyến: $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$



$$\Omega_1:\begin{cases}0\le\rho\le 2\\0\le\theta\le\pi/6\\0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$\Omega_2:\begin{cases}0\le\rho\le\dfrac{1}{\sin\theta}\\\pi/6\le\theta\le\pi/2\\0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\rho\cos\theta\le\sqrt{4-\rho^2\sin^2\theta}\\\rho^2\sin^2\theta\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\rho\le 2,\\\cos\theta\ge 0\Leftrightarrow 0\le\theta\le\pi/2\\0\le\rho\le\dfrac{1}{\sin\theta}\end{cases}$$

vì $\dfrac{1}{\sin\boldsymbol{\theta}} \geq 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} \leq \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{6}$ nên Ω được chia làm 2 miền:

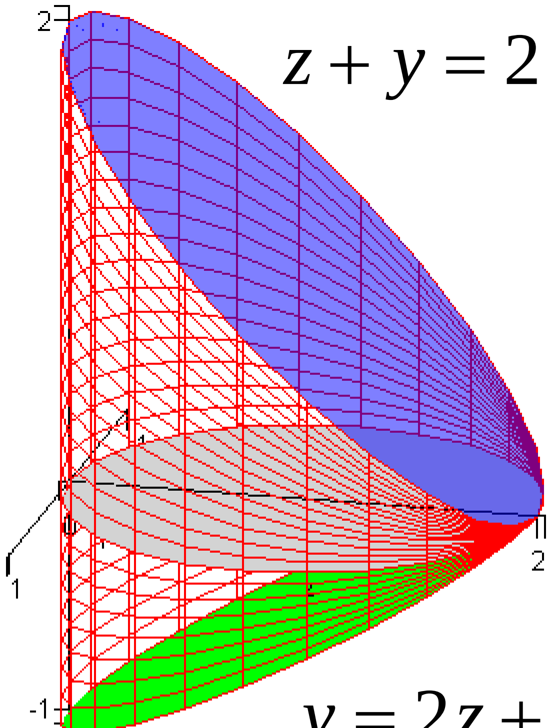
$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \qquad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^2 \rho^3 \sin\theta d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\sin\theta} \rho^3 \sin\theta d\rho$$

6/ Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau:

$$x^2 + y^2 = 2y, z + y = 2, y = 2z + 2$$



$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 2y} \left(\int_{\frac{y}{2}-1}^{2-y} dz \right) dxdy$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} dr \int_{\frac{1}{2}r\sin\varphi-1}^{2-2r\sin\varphi} rdz$$

Dùng tọa độ trụ

Đổi biến cho hình cầu tổng quát, ellipsoid

$$\Omega : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$$

Đổi biến:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = a + \rho\sin\theta\cos\varphi ,\\ &y = b + \rho\sin\theta\sin\varphi,\\ &z = c + \rho\cos\theta\\ &J = \rho^2 \sin\theta \end{aligned}}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Ω là ellipsoid: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

Đổi biến:

$x = a\,\rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = b\,\rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = c\,\rho\cos\theta$

$J = abc\rho^2\sin\theta$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

VÍ DỤ

Ví dụ: Tính tích phân bội ba hàm f(x,y,z)=x+y trên miền Ω giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1, x\le 0, y\ge 0, z\le 0$$

Đặt : $\begin{cases} x/2=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y/3=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=3\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$

$$J=2.3.\rho^2\sin\theta=6\rho^2\sin\theta$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1\Leftrightarrow \rho\le 1$$

Điều kiện x ≤ 0, y ≥ 0 nên hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là ¼ hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ 2 nên ta có $\pi/2 \le \varphi \le \pi$

Cắt dọc Ω bởi 1 mặt phẳng chứa trục Oz là mặt *x* = *y*

D_1 : $\frac{y^2}{9} + z^2 \le 1$, *z ≤ 0, y ≥ 0* (¼ ellipse) nên $\pi/2 \le \theta \le \pi$ và đi theo chiều mũi tên từ gốc tọa độ ta chỉ gặp 1 mặt ellipsoid với phương trình ρ = 1 nên ta có ρ≤1

Vậy : $I_8 = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^1 6\rho^2 \sin\theta(\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi)d\rho$

$$I_8 = \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 6\rho^3 d\rho$$

§2. Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu