Bài tập chương 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Phần 1:   Đạo hàm riêng cấp 1

Các dạng bài tập cơ bản

1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa (2 biến)
2. Tính đạo hàm bằng công thức (2 biến, 3 biến)
3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng (hệ số góc tiếp tuyến)
4. Ý nghĩa thực tế của đạo hàm riêng

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

Đạo hàm riêng cấp 1 của $f\,(x, y)$ theo biến x tại (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

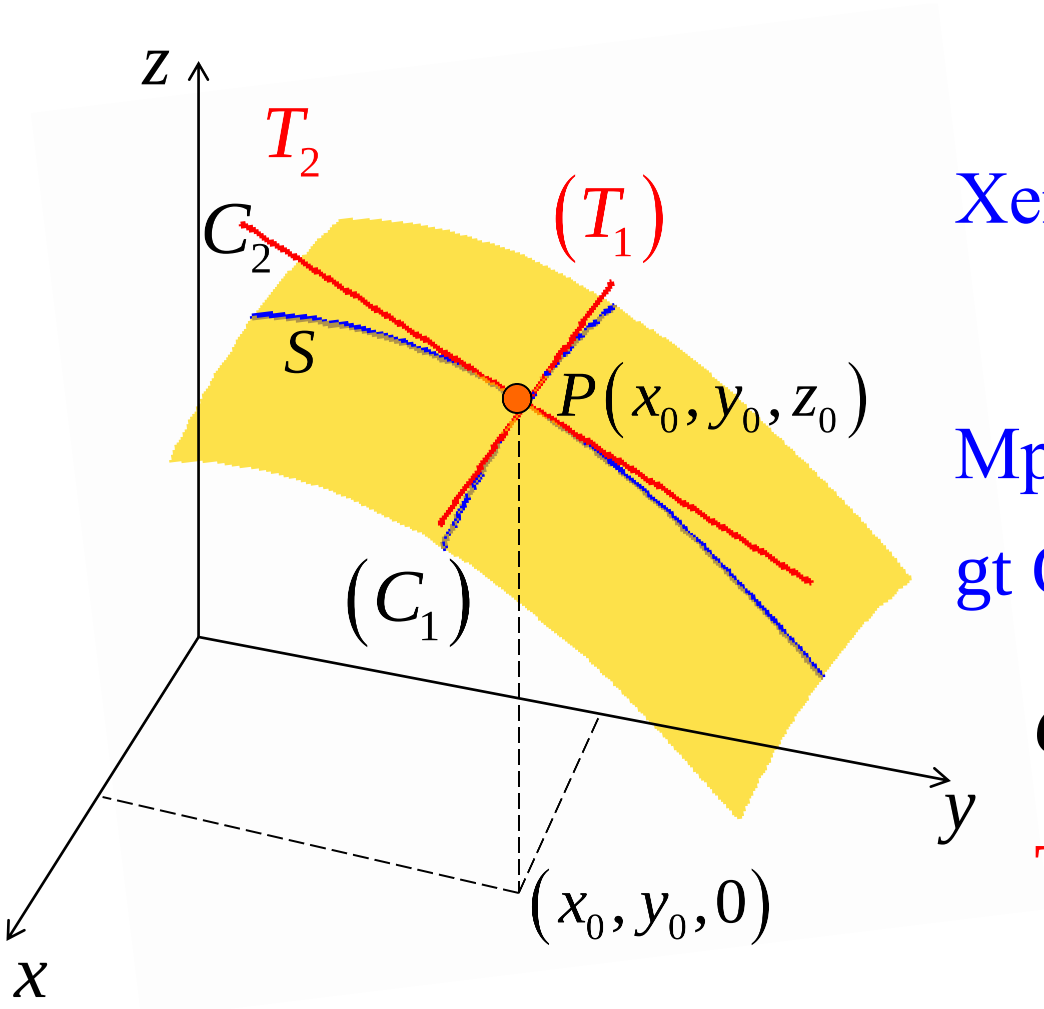
(Cố định y_0, biểu thức là hàm 1 biến theo x, tính đạo hàm của hàm này tại x_0)

Đạo hàm riêng cấp 1 của f theo biến y tại (x_0, y_0)

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ý nghĩa của đhr cấp 1

Cho mặt cong S: z = f(x, y), xét $f'_x(x_0, y_0)$



Xem phần mặt cong S gần

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

Mphẳng y = y_0 cắt S theo gt C_1 đi qua P.

$$C_1 : z = g(x) = f(x, y_0)$$

T_1 là tiếp tuyến của C_1 tại P.

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

$f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $x = x_0$

(C_1 là phần giao của S với mp $y = y_0$)

$f'_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_2 của C_2 tại $y = y_0$

(C_2 là phần giao của S với mp $x = x_0$)

Các ví dụ về cách tính.

1/ Cho f(x,y) = $3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(1,2),\ f'_y(1,2)$

$\boxed{f'_x(1,2):}$ cố định $y_0 = 2$, ta có hàm 1 biến

$$f(x,2) = 6x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'_x(1,2) = (6x^2+4x)'\,|_{x=1} \quad = 12x + 4\,|_{x=1} = 16$$

$$\boxed{f(x,y) = 3x^2y + xy^2}$$

$\boxed{f'_y(1,2)}$ cố định $x_0 = 1$, ta có hàm 1 biến

$$f(1,y) = 3y + y^2$$

$$\Rightarrow f'_y(1,2) = (3y + y^2)'|_{y=2} = (3 + 2y)|_{y=2} = 7$$

2/ $f(x,y) = 3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ với mọi (x, y) ∈ R_2

$\boxed{f'_x(x,y)}$ Xem y là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo x

$$f'_x(x,y) = 6xy + y^2, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính: $f'_x(1,2) = (6xy + y^2)|_{x=1,y=2} = 16$

(Đây là cách thường dùng để tính đạo hàm tại 1 điểm)

$f(x,y) = 3x^2y + xy^2$

$\boxed{f'_y(x,y)}$ Xem x là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo y

$$f'_y(x,y) = 3x^2 + x2y, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính:

$$f'_x(1,2) = \quad (3x^2 + 2xy)\,|_{x=1,y=2} = 7$$

2/ Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ với f(x, y) = x^y

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = 1 \times 1^{1-1} = 1;$$

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_y(1,1) = 1^1 \ln 1 = 0$$

3/ Cho $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

$$f(x,1)=\frac{x}{x^2+1}=g(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'_x(0,1)=1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,0)=0=g(x)\Rightarrow g'(x)=0$$

$$\Rightarrow f'_x(0,0)=0$$

4/ Cho $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tính $f'_x(x,y)$

Hàm f xác định tại, mọi (x,y)

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Công thức trên không đúng cho (x, y) = (0, 0)

$$f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$f(x,0) = e^{-|x|} = g(x)$$

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-|x|}{x} \quad \Rightarrow \nexists$$

f không có đạo hàm theo x tại (0, 0)

(f’$_x$(0,0) không tồn tại) .

Ví dụ :

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là giao tuyến của mặt (S): $f(x,y) = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$ với mặt phẳng y=1 tại điểm có hoành độ x=3.

Đáp số: $f'_x(3,1) = \dfrac{3}{4}$

Ví dụ :

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là giao tuyến của mặt (S): $f(x,y) = \sin(xy) + 2x^2 - y$ với mặt phẳng $x = \pi$ tại điểm có tung độ y=1.

Đáp số: $f'_y(\pi,1) = -\pi - 1$

Ví dụ cho hàm 3 biến

(Tương tự hàm 2 biến)

Cho $f(x,y,z) = x + ye^{xz}$

Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,-1,2)$

$$f'_x = 1 + yze^{xz} \quad \Rightarrow f'_x(0,-1,2) = 1 - 2 = -1$$

$$f'_y = e^{xz}$$

$$f'_z = xye^{xz}$$

Bài toán thực tế

Ví dụ :

Chiều cao h (feet) của sóng trong đại dương phụ thuộc vào vận tốc v (feet/giờ) của gió và khoảng thời gian gió thổi t (giờ) tại vận tốc đó, h=f(v,t). Nêu ý nghĩa của:

a/ f(40,15)=25

b/ f(30,t)

c/ f(v,30)

f(40,15)=25	Gió thổi 40 (feet/giờ) trên biển suốt 15 giờ sẽ tạo ra các con sóng cao khoảng 25 (feet)
f(30,t)	Là một hàm theo t cho các chiều cao của sóng được tạo ra bởi các cơn gió 30 (feet/giờ) thổi suốt t (giờ)
f(v,30)	Là một hàm theo v theo các chiều cao của sóng được tạo ra bởi các cơn gió vận tốc v thổi suốt 30 (giờ)

Bài toán thực tế

Ví dụ :

Chiều cao h (feet) của sóng trong đại dương phụ thuộc vào vận tốc v (feet/giờ) của gió và khoảng thời gian gió thổi t (giờ) tại vận tốc đó, h=f(v,t). Nêu ý nghĩa của:

a/ $f'_v(40,15) = 2$

b/ $f'_t(40,15) = 1,4$

$\boxed{f'_v(40,15) = 2}$ Khi v = 40 (feet/giờ) và t = 15 (giờ) thì chiều cao h tăng 2 (feet) khi v tăng lên 1 (feet/giờ)

$\boxed{f'_t(40,15) = 1,4}$ Khi v = 40 (feet/giờ) và t = 15 (giờ) thì chiều cao h tăng 1,4 (feet) khi t tăng lên 1 (giờ)

Ví dụ:

Vào một ngày nóng, độ ẩm cực cao làm cho chúng ta có cảm giác nhiệt độ cao hơn nhiệt độ thực, ngược lại trong không khí cực khô chúng ta cảm thấy nhiệt độ thấp hơn nhiệt độ nhiệt kế chỉ. Trung tâm khí tượng quốc gia đã đưa ra khái niệm chỉ số cảm nhiệt (còn được gọi là chỉ số nhiệt độ - độ ẩm) để mô tả các hiệu ứng của nhiệt độ và độ ẩm kết hợp với nhau.

Chỉ số cảm nhiệt I là nhiệt độ cảm nhận khi nhiệt độ thật là T và độ ẩm tương đối là H. Do đó

$$I = f(T, H)$$

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
92	100	103	105	108	**112**	115	119	123	128
94	104	107	111	114	**118**	122	127	132	137
96	**109**	**113**	**116**	**121**	**125**	**130**	**135**	**141**	**146**
98	114	118	123	127	**133**	138	144	150	157

a/ Tìm $f'_T(96,70)$ và nêu ý nghĩa

b/ Tìm $f'_H(96,70)$ và nêu ý nghĩa

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157

Nếu độ ẩm tương đối H=70% thì ta đang xét chỉ số cảm nhiệt như hàm một biến T với giá trị cố định H. Ta viết g(T)=f(T,70). Lúc đó g(T) mô tả chỉ số cảm nhiệt I tăng như thế nào khi nhiệt độ thật T tăng trong khi độ ẩm tương đối là 70%. Đạo hàm của g khi $T = 96^0 F$ là tốc độ biến thiên của I theo T khi $T = 96^0 F$

$$g'(96)=\lim_{h\to 0}\frac{f(96+h,70)-f(96,70)}{h}$$

Ta có thể tính xấp xỉ g'(96), lấy h=2 và h= -2

$$g'(96)=\frac{f(96+2,70)-f(96,70)}{2}=\frac{f(98,70)-f(96,70)}{2}=\frac{133-125}{2}=4$$

$$g'(96)=\frac{f(96-2,70)-f(96,70)}{-2}=\frac{f(94,70)-f(96,70)}{-2}=\frac{118-125}{-2}=3.5$$

Lấy trung bình các giá trị này, ta nói g'(96) xấp xỉ bằng 3.75. Điều này có nghĩa rằng, khi nhiệt độ thật là $T=96^0F$ Và độ ẩm tương đối là 70% thì chỉ số cảm nhiệt tăng khoảng $T=3.75^0F$ khi nhiệt độ tăng lên một độ.

Kết luận

- Đạo hàm riêng có thể được hiểu là tốc độ biến thiên. 1/ Nếu z=f(x,y) thì $\partial z / \partial x$ biểu diễn tốc độ biến thiên của z theo x khi y cố định.
- 2/ Tương tự, $\partial z / \partial y$ biểu diễn tốc độ biến thiên của z theo y khi x cố định.

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

Xét hàm 2 biến f(x,y)

f'_x, f'_y cũng là các hàm 2 biến

Đạo hàm riêng cấp 2 của f là các đhr cấp 1(nếu có) của f'_x, f'_y

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad f''_{yy} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

VÍ DỤ

$$f(x,y) = x^2 + xy + \cos(y-x)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của f

$$f'_x = 2x + y + \sin(y-x) \qquad f'_y = x - \sin(y-x)$$

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \left(2x + y + \sin(y-x)\right)'_x$$

$$= 2 - \cos(y-x)$$

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = 1 + \cos(y-x)$$

$$f'_y = x - \sin(y - x)$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y \right)'_x = 1 + \cos(y - x)$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y \right)'_y = -\cos(y - x)$$

Tổng quát thì các đạo hàm hỗn hợp không bằng nhau

$$f''_{xy} \neq f''_{yx}$$

Định lý Schwartz: *nếu f(x, y) và các đạo hàm riêng*

$f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ *liên tục trong miền mở chứa (x_0, y_0)*

thì $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

(VD 2.28 trang 53, Toán 3, Đỗ Công Khanh)

•Đối với các hàm sơ cấp thường gặp, định lý Schwartz luôn luôn đúng tại các điểm mà đạo hàm tồn tại.

•Định lý Schwartz cũng đúng cho các đạo hàm từ cấp 3 trở lên.

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$$

Cách viết đạo hàm cấp cao và cách tính:

$$\boxed{f^{(m+n)}_{x^m y^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)}$$

Lưu ý: đối với các hàm sơ cấp tính theo thứ tự nào cũng được.

Ví dụ

1/ Cho $f(x,y) = e^{xy}$ tính $f'''_{xyy},$

$$f'_x(x,y) = ye^{xy}$$

$$f''_{xy}(x,y) = (1+xy)e^{xy}$$

$$f'''_{xyy}(x,y) = \left[x + (1+xy)x\right]e^{xy} \qquad = (2x + x^2 y)e^{xy}$$

Cách 2: $f(x,y) = e^{xy}$

$$f''_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = \left(2x + x^2 y\right) e^{xy}$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO TẠI 1 ĐIỂM

Ví dụ 1: Cho $f(x,y) = x^2 + (y-1)\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Tính $f''_{xx}\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Cách 1: $f''_{xx} = (f'_x)'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

$$f'_x = 2x + (y-1)\frac{1/y}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} = 2x + \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 2 + \frac{x(y-1)}{\sqrt{(y^2 - x^2)^3}}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}\left(\frac{1}{2},1\right) = 2$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO TẠI 1 ĐIỂM

Ví dụ 1: Cho $f(x,y) = x^2 + (y-1)\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Tính $f''_{xx}\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Cách 2: Thế y=1 vào f(x,y) chuyển về hàm 1 biến

$$f(x,1) = x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 2x, g''(x) = 2$$

$$\Rightarrow g''(1/2) = 2$$

Vậy $f''_{xx}\left(\dfrac{1}{2},1\right) = 2$