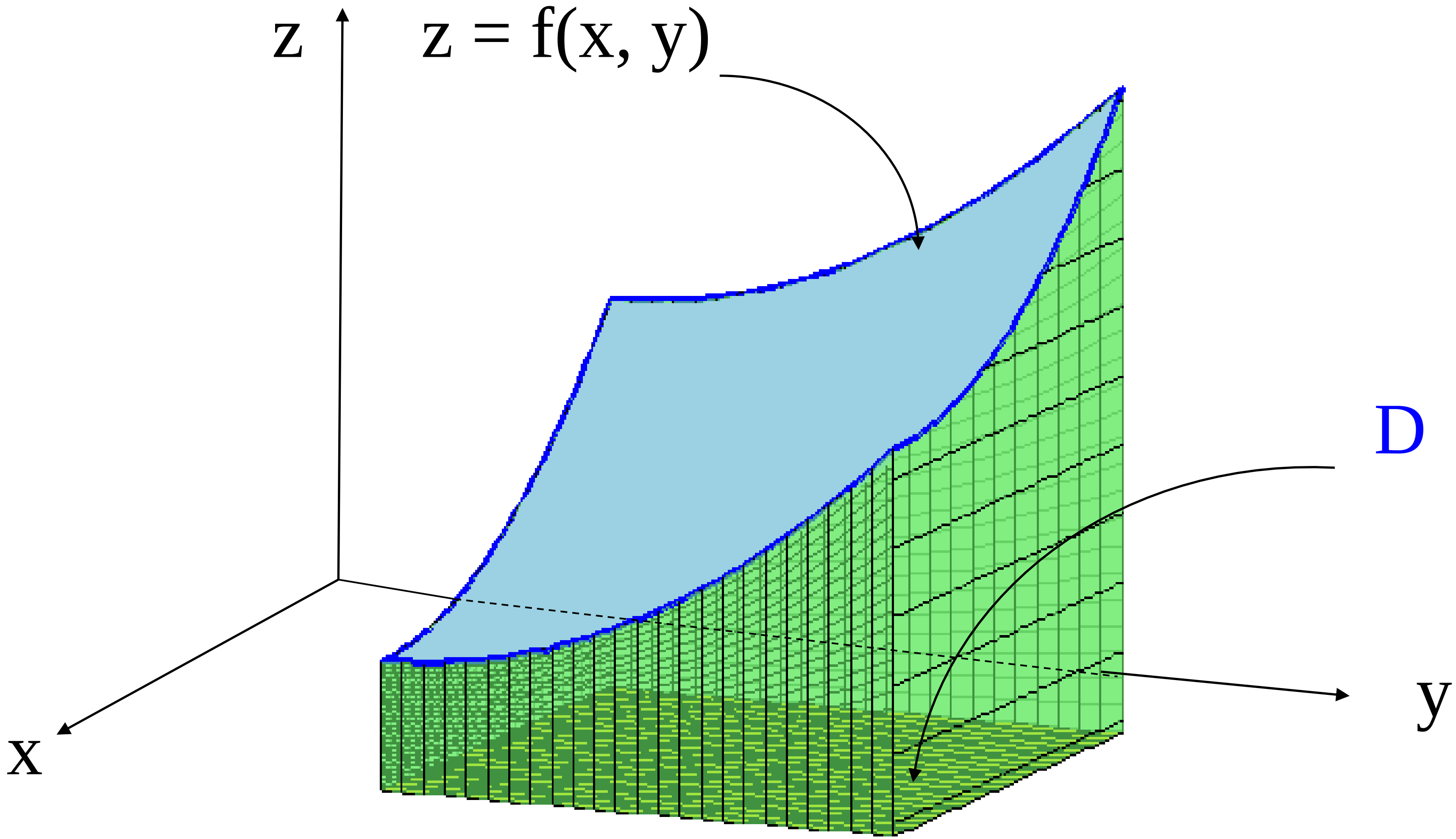
Chương 2:

TÍCH PHÂN BỘI

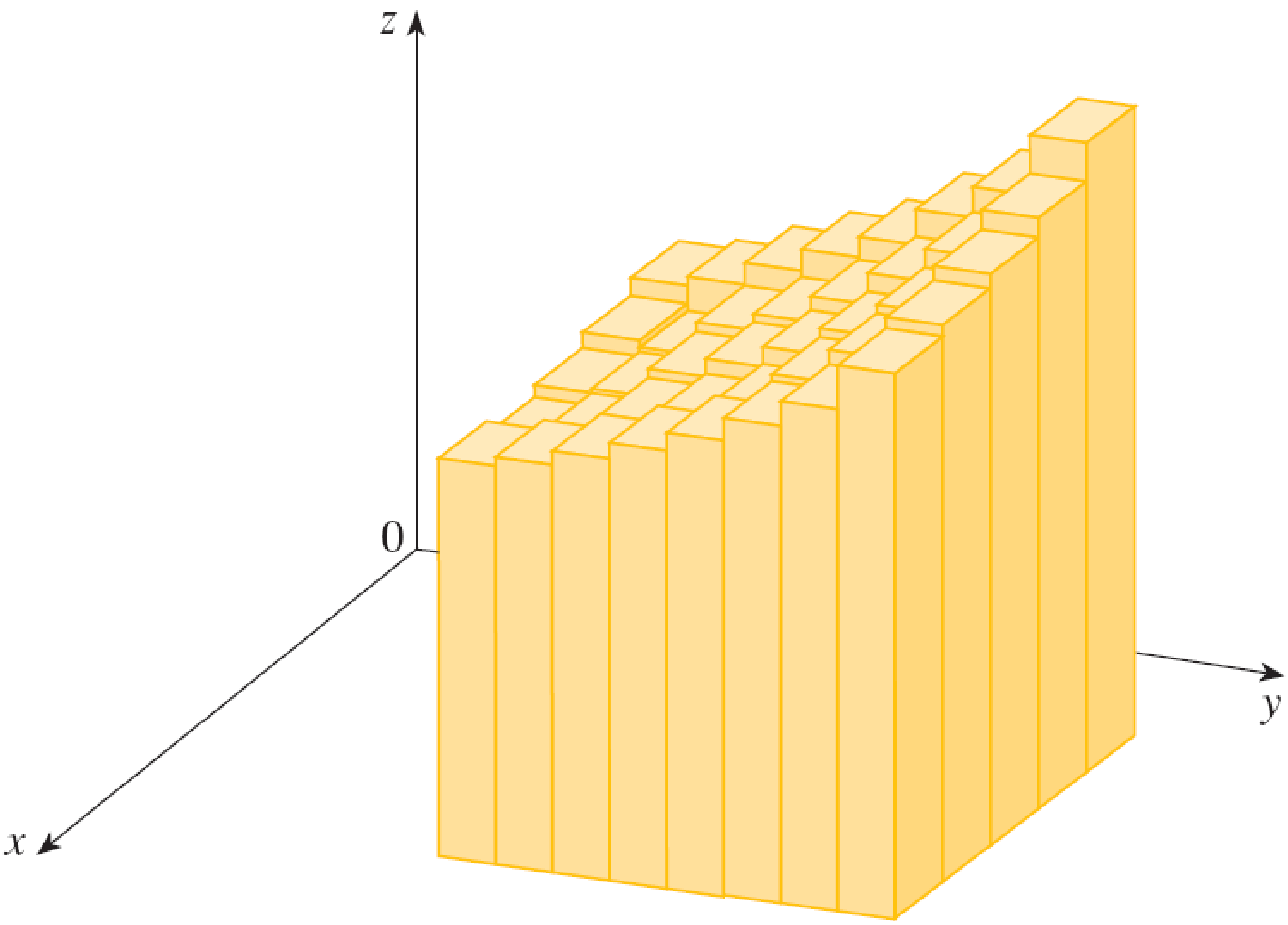
Phần 1: TÍCH PHÂN KÉP

BÀI TOÁN THỂ TÍCH

Xét vật thể hình trụ Ω được giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x, y) > 0$, mặt dưới là Oxy, bao xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz và đường chuẩn là biên của miền D đóng và bị chặn trong Oxy. Tìm thể tích Ω.


z
z = f(x, y)
D
x
y

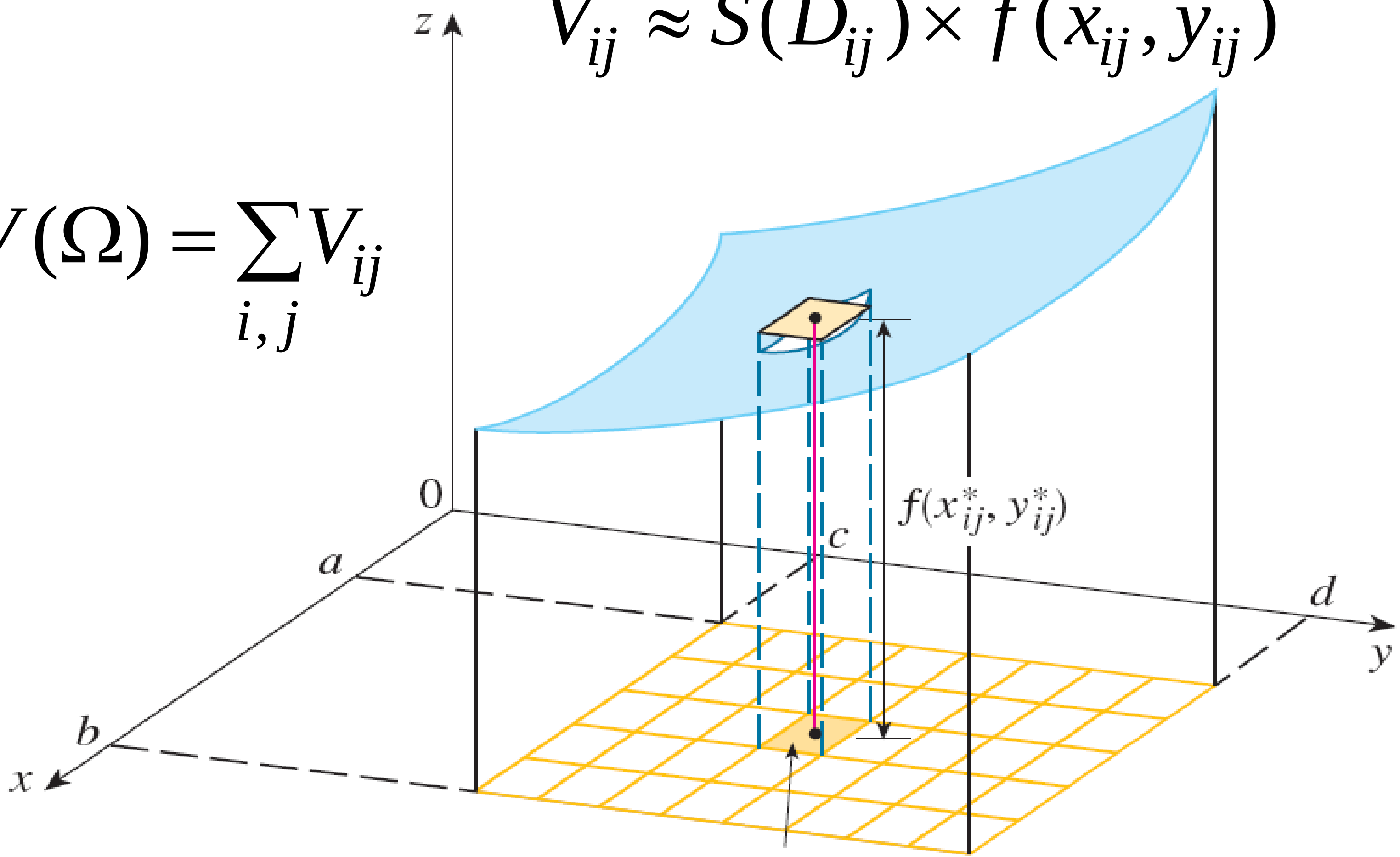
Xấp xỉ Ω bằng các hình trụ con



Thể tích xấp xỉ của hình trụ con

$$V_{ij} \approx S(D_{ij}) \times f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$$

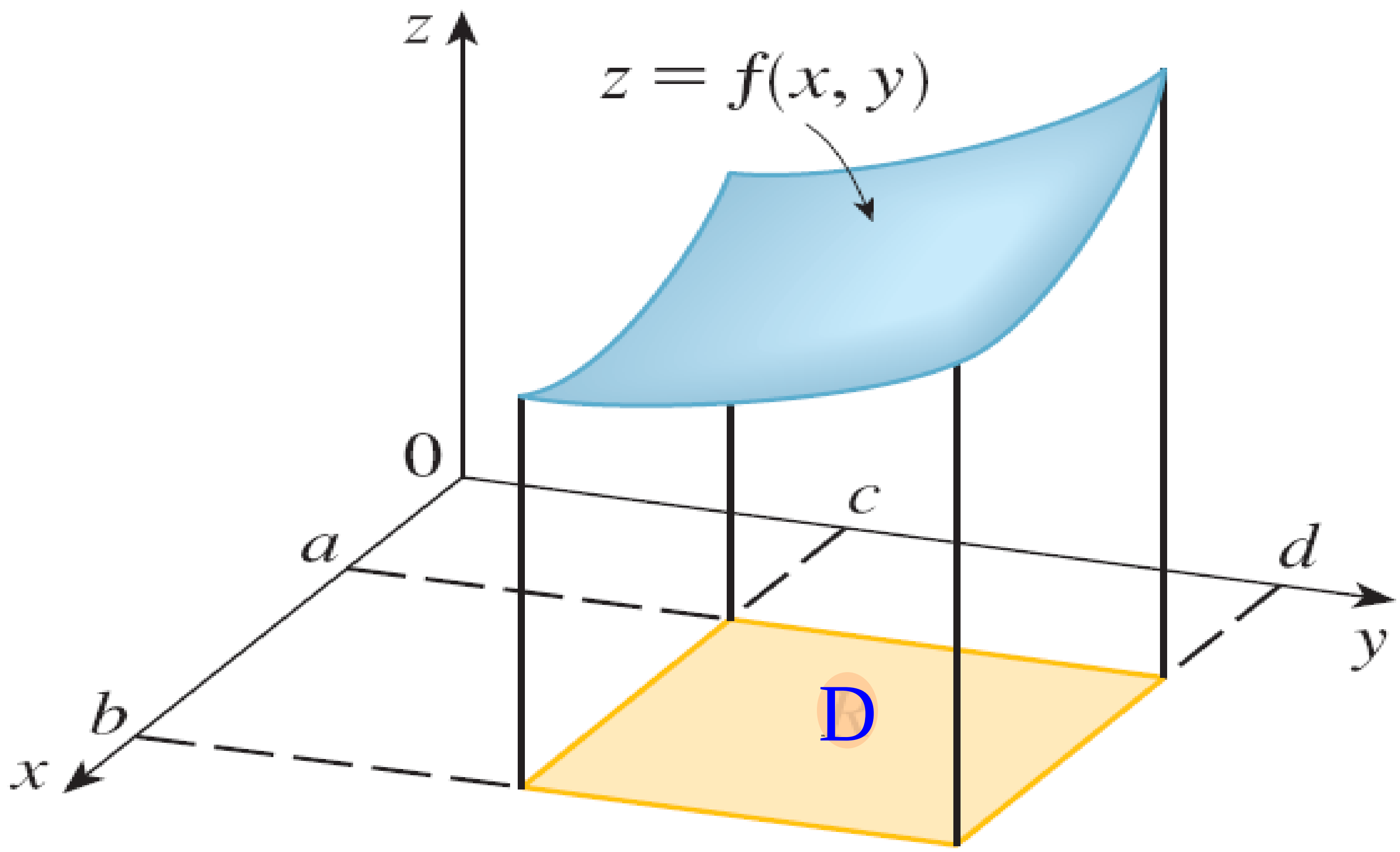
$$V(\Omega) = \sum_{i,j} V_{ij}$$



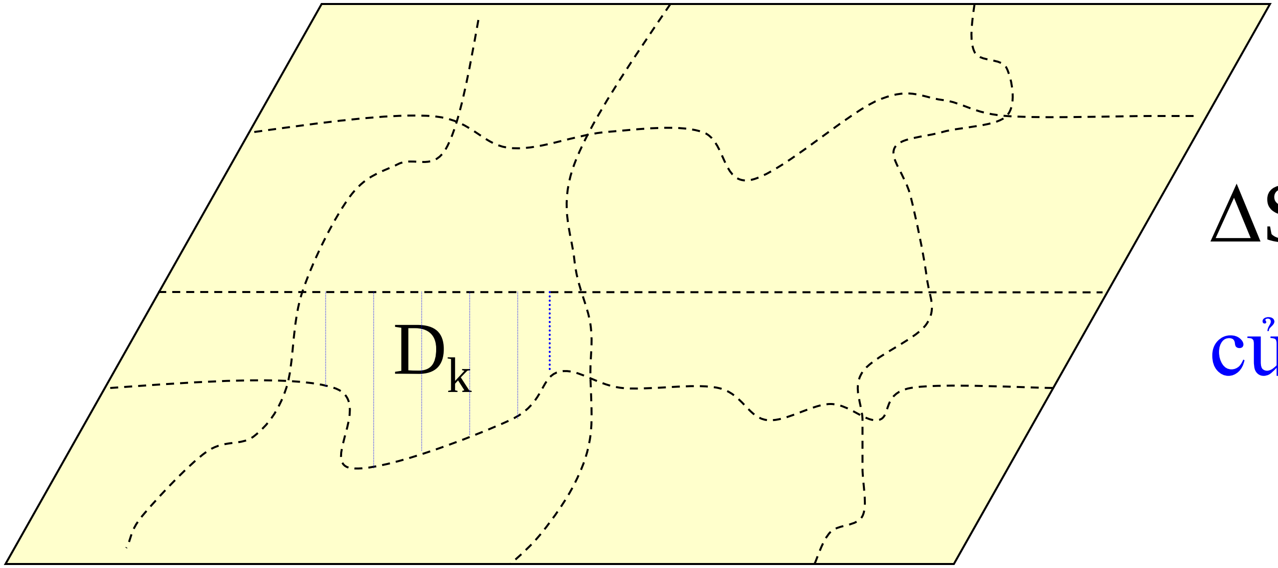
D_{ij}

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP

Cho hàm số z = f(x, y) xác định trong miền D đóng và bị chặn.



Phân hoạch D thành các miền con D_1, D_2, …, D_n

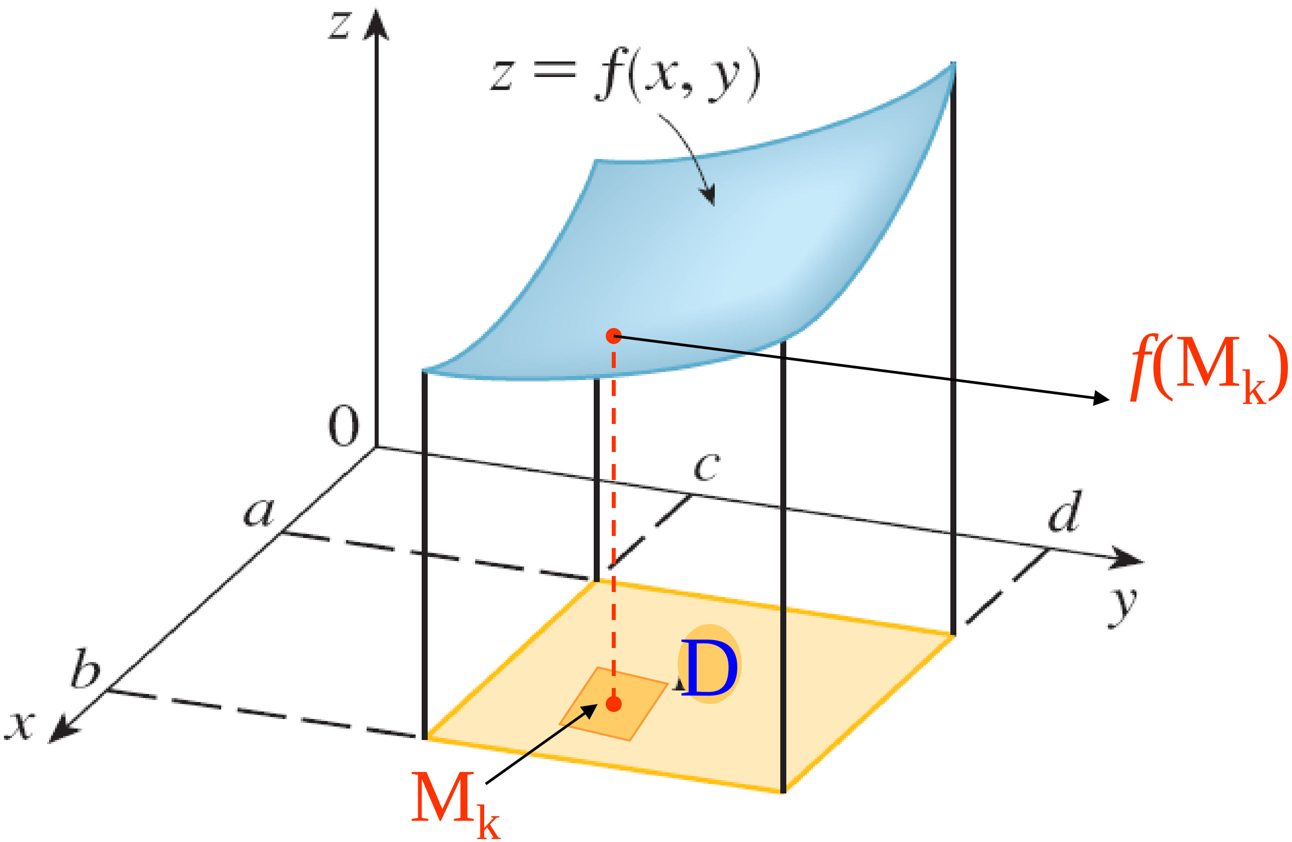


ΔS_k là diện tích của miền con D_k.

$d(D_k)$ = đường kính D_k = khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm trong D_k.

$$d = \max_{k=\overline{1,n}} \{ d(D_k) \}$$ Đường kính phân hoạch

M_k được chọn tùy ý trong D_k



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$$

Tổng tích phân của f

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$$

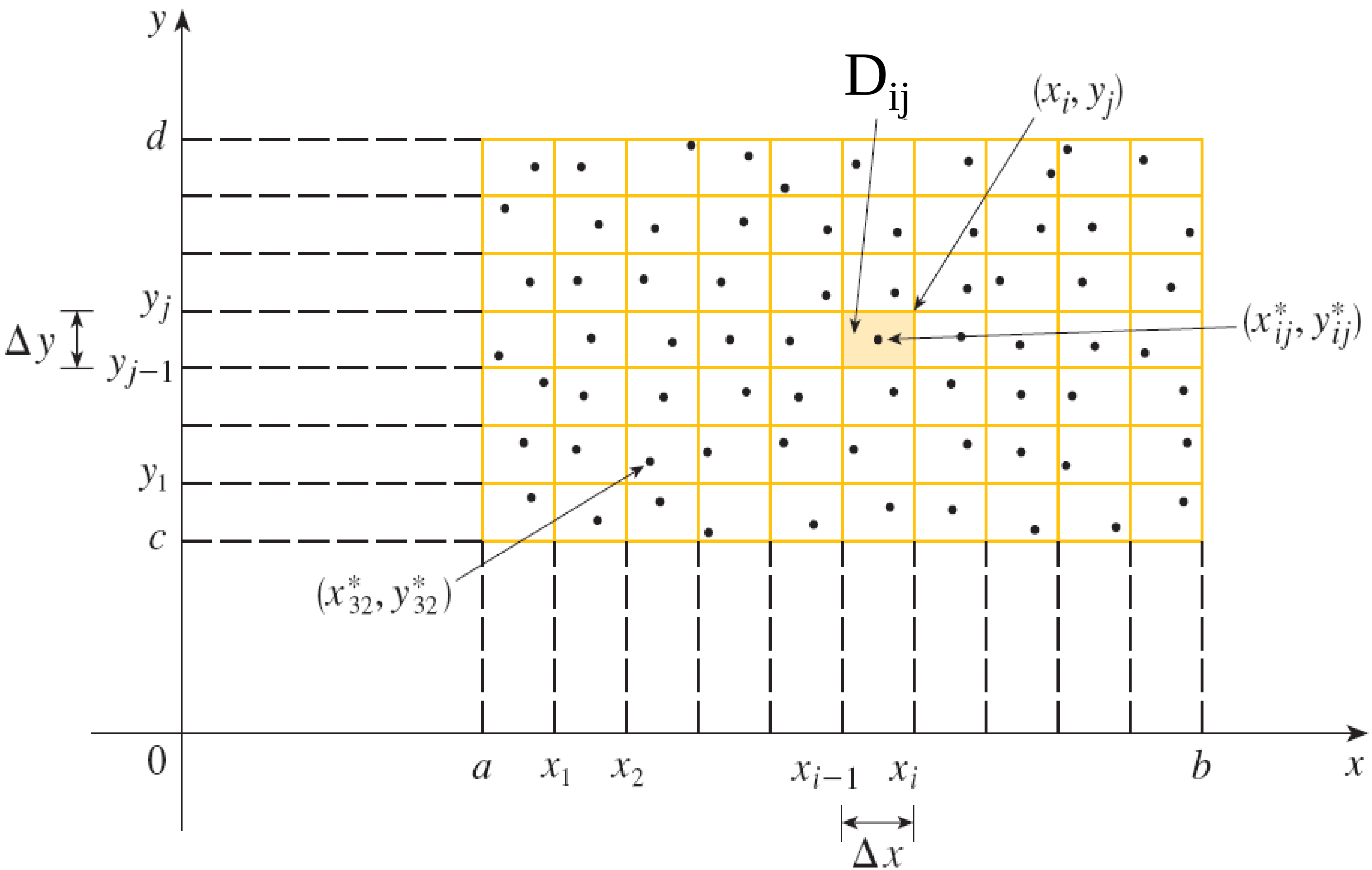
f khả tích nếu: $\lim\limits_{d \to 0} S_n < \infty$

với phân hoạch tùy ý của D

Tích phân kép của f trên D là giới hạn nếu có của S_n

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{d \to 0} S_n}$$

Phân hoạch D theo các đường // ox, oy



Khi f khả tích, việc tính tích phân không phụ thuộc vào phân hoạch. Do đó có thể phân hoạch D theo các đường song song Ox, Oy.

D_k là hình chữ nhật với các cạnh Δx, Δy

$$\Rightarrow \Delta S_k = \Delta x.\, \Delta y$$

$\Rightarrow$ Thay cách viết tp kép

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)ds}$$

Tính chất hàm khả tích

Cho D là miền đóng và bị chặn

$1/\ S(D) = \iint\limits_{D} 1dxdy$ (Diện tích D)

$$2/\ \iint\limits_{D} c.f(x,y)dxdy = c.\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

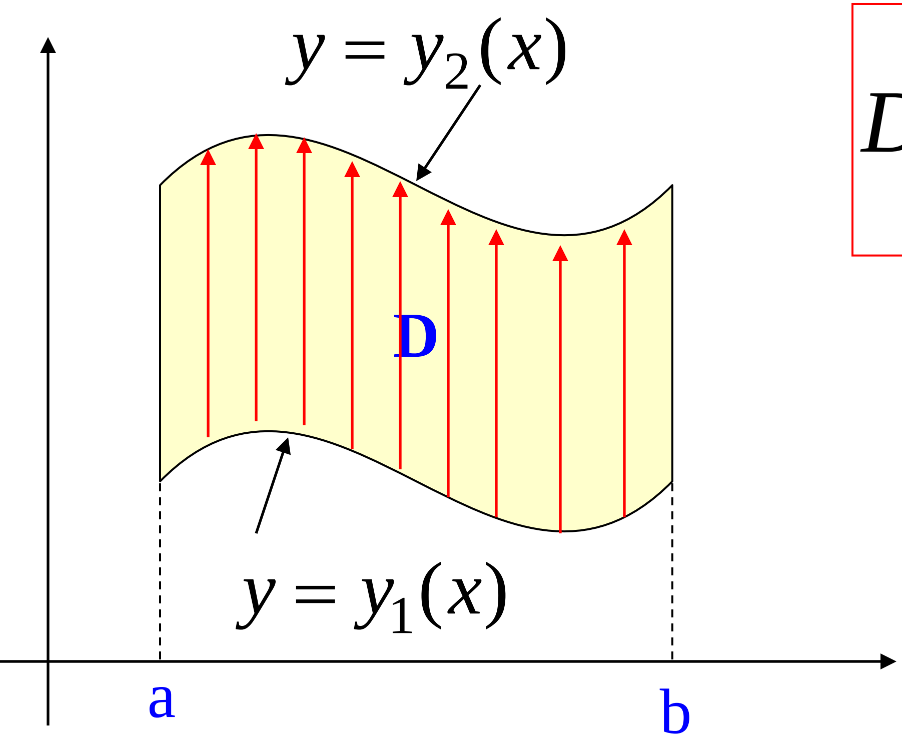
$$\iint\limits_{D} (f+g)dxdy = \iint\limits_{D} fdxdy + \iint\limits_{D} gdxdy$$

$3/\ D = D_1 \bigcup D_2, D_1$ ***và*** D_2 ***không dẫm nhau***

(tối đa chỉ dính biên)

$$\iint\limits_{D_1 \bigcup D_2} fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy$$

CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP



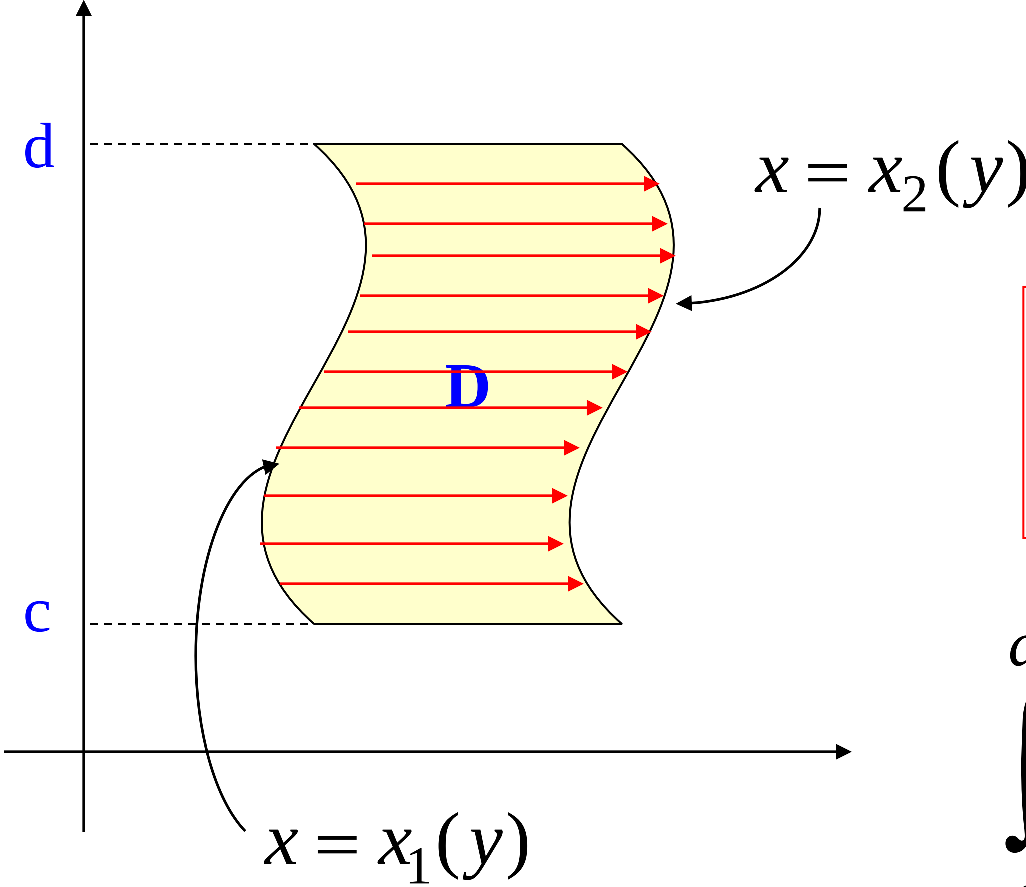
$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Cách tính

Cách viết:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



$$D:\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Cách viết:

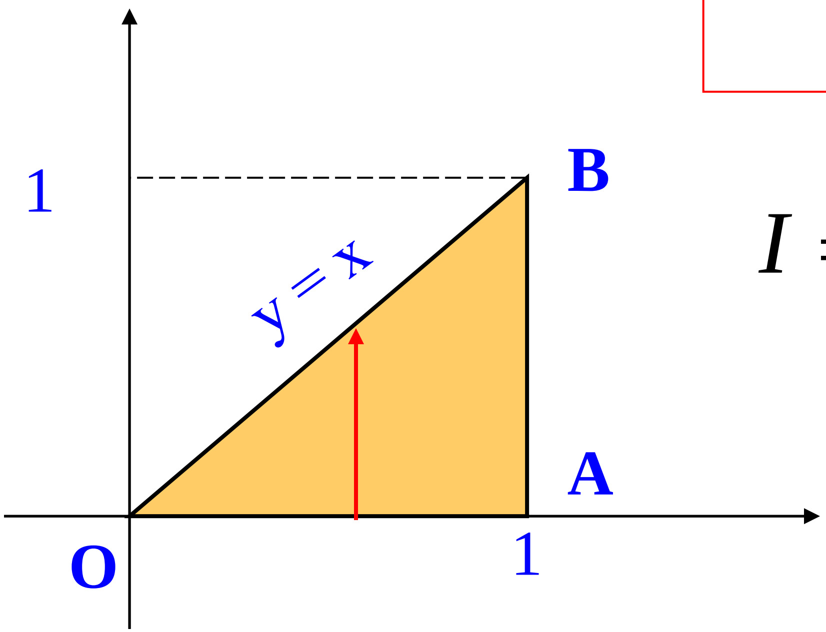
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

VÍ DỤ

1/ Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$

với D là tam giác OAB,O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)

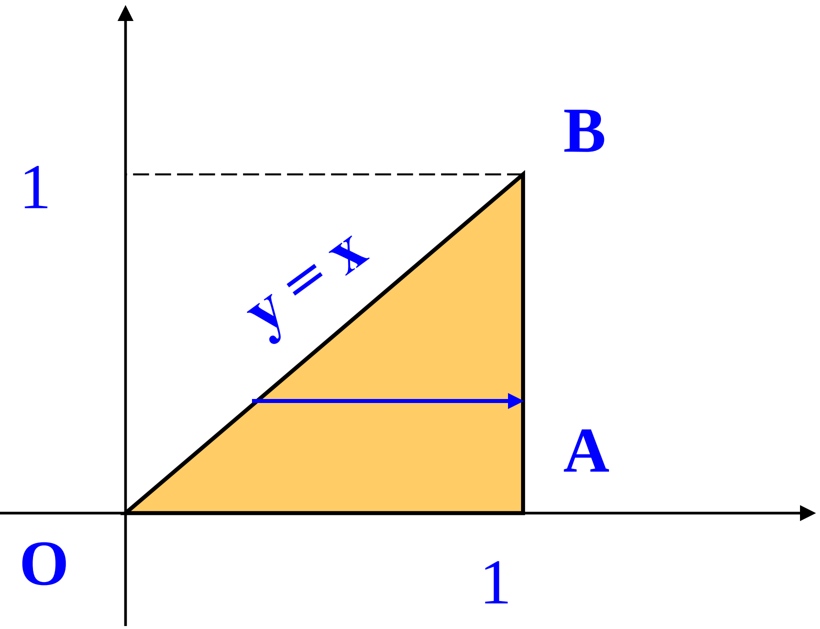
Cách 1:



$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$



$$I = \iint\limits_D xydxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^1 xydx$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 y \frac{1-y^2}{2} dy = \frac{1}{8}$$

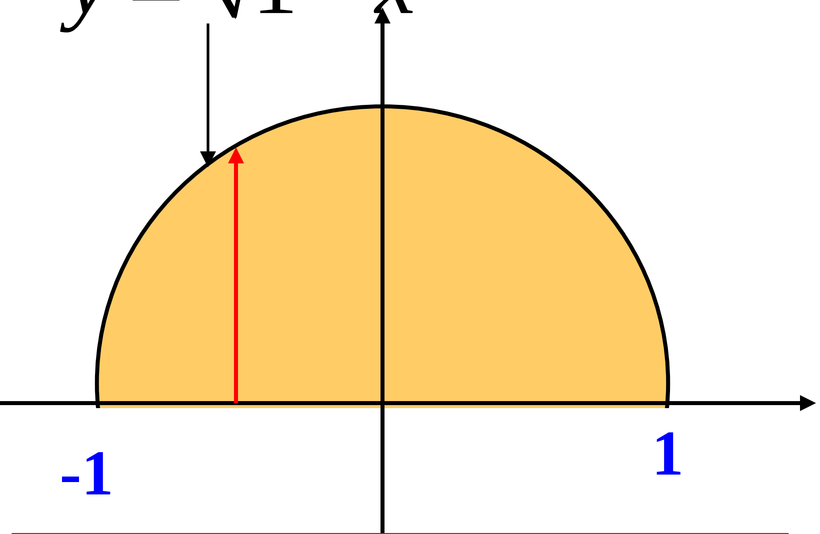
Cách 2:

$$\boxed{D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}}$$

2/ Tính $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$

với D: $x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$

$y = \sqrt{1-x^2}$

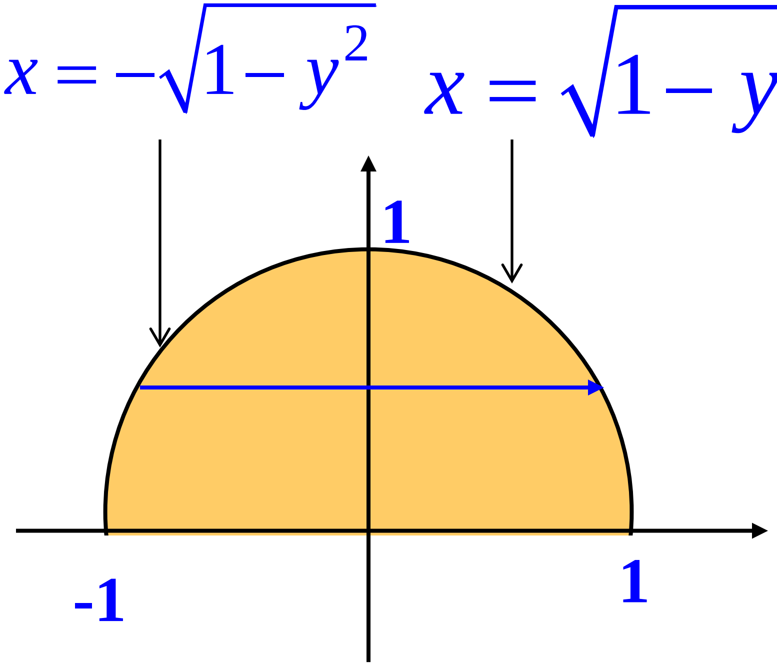


$$D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} \right] dx = \frac{2}{3}$$



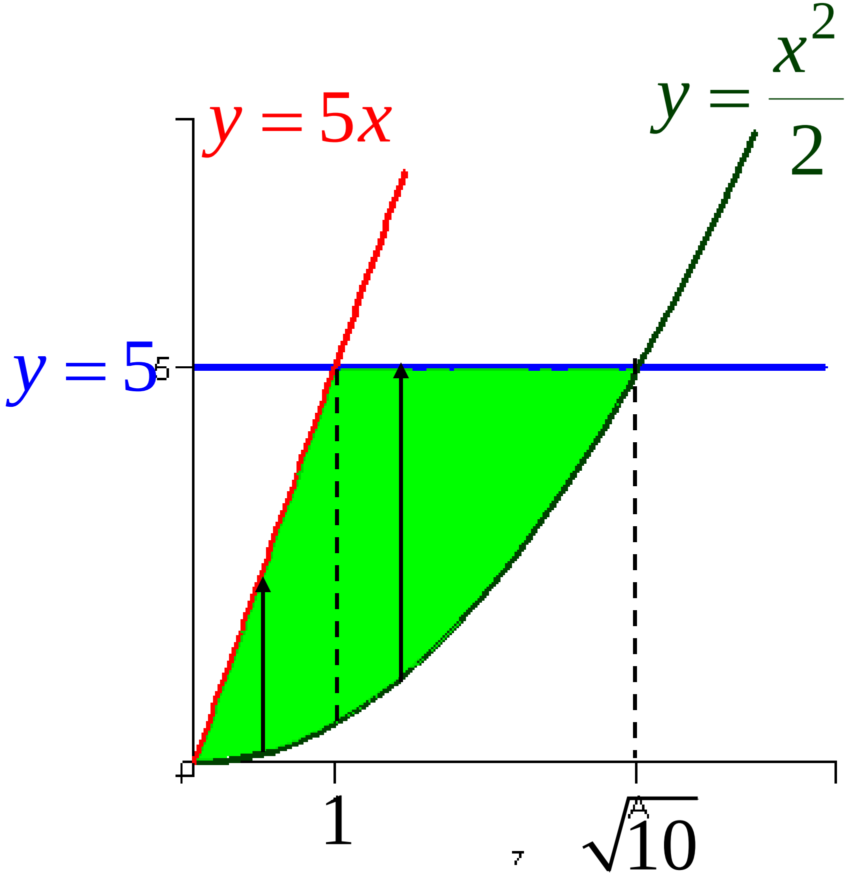
$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)dx \quad = \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}dy \quad = \frac{2}{3}$$

3/ Tính $I = \iint\limits_D (x+1)\,dxdy$

với D giới hạn bởi các đường $y \le 5x,\ y \le 5,\ y \ge \dfrac{x^2}{2}$

$$0 \le x \le \sqrt{10}$$



$$D_1 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le 5x \end{cases}$$

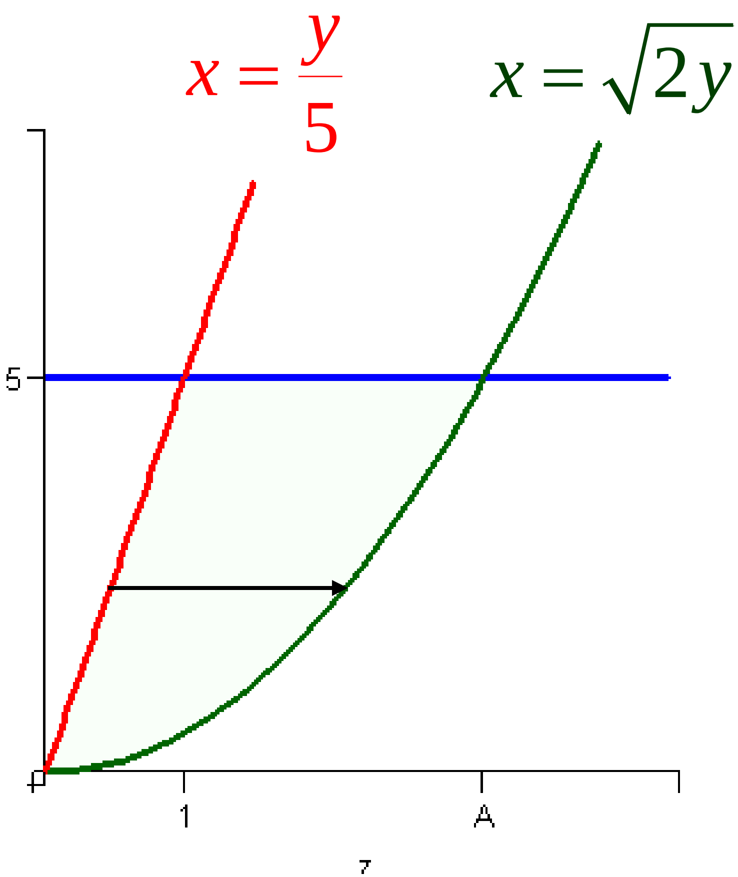
$$D_2 \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{10} \\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le 5 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D}(x+1)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x+1)dxdy$$

$$\mathrm{D}_1\ \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ \dfrac{x^2}{2}\le y\le 5x \end{cases}\qquad =\int_0^1 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{5x}(x+1)dy$$

$$\mathrm{D}_2\ \begin{cases} 1\le x\le \sqrt{10} \\ \dfrac{x^2}{2}\le y\le 5 \end{cases}\qquad +\int_1^{\sqrt{10}} dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{5}(x+1)dy$$

Đổi thứ tự tính:



$$D \begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ \frac{y}{5} \le x \le \sqrt{2y} \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D (x+1)dxdy$$

$$= \int_0^5 dy \int_{\frac{y}{5}}^{\sqrt{2y}} (x+1)dx$$

5/ Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường

$$y=(2-x)\sqrt{x},\ \ y=x^2-2x$$

Hoành độ giao điểm

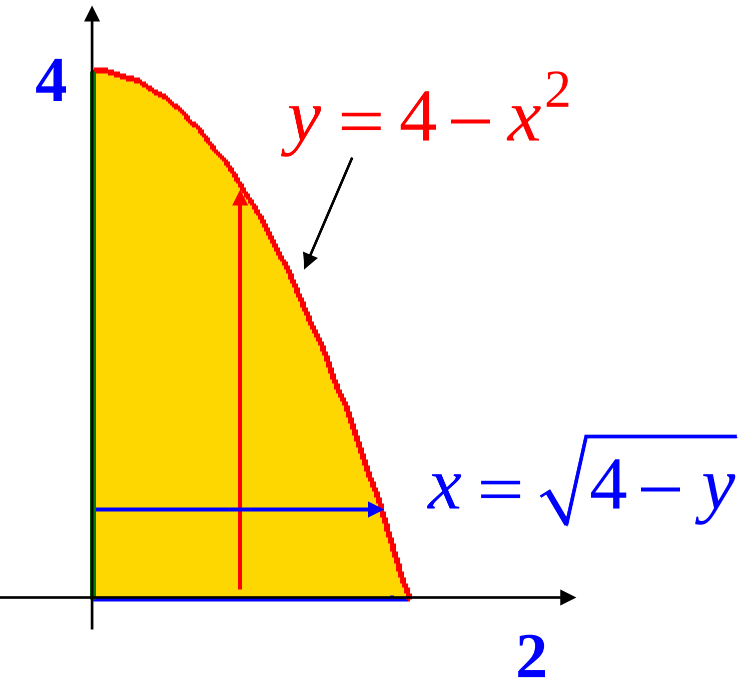
$$\begin{cases}(2-x)\sqrt{x}=x^2-2x \\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=2$$

$$\boxed{D:\begin{cases}0\leq x\leq 2 \\ x^2-2x\leq y\leq (2-x)\sqrt{x}\end{cases}}$$

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy \ =\int_0^2 dx\int_{x^2-2x}^{(2-x)\sqrt{x}} dy\approx 2.84$$

6/ Tính $\iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: y = 0, y= 4 – x², x ≥ 0.



$$I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dy$$

Khó lấy nguyên hàm

Đổi thứ tự

$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}dx$$

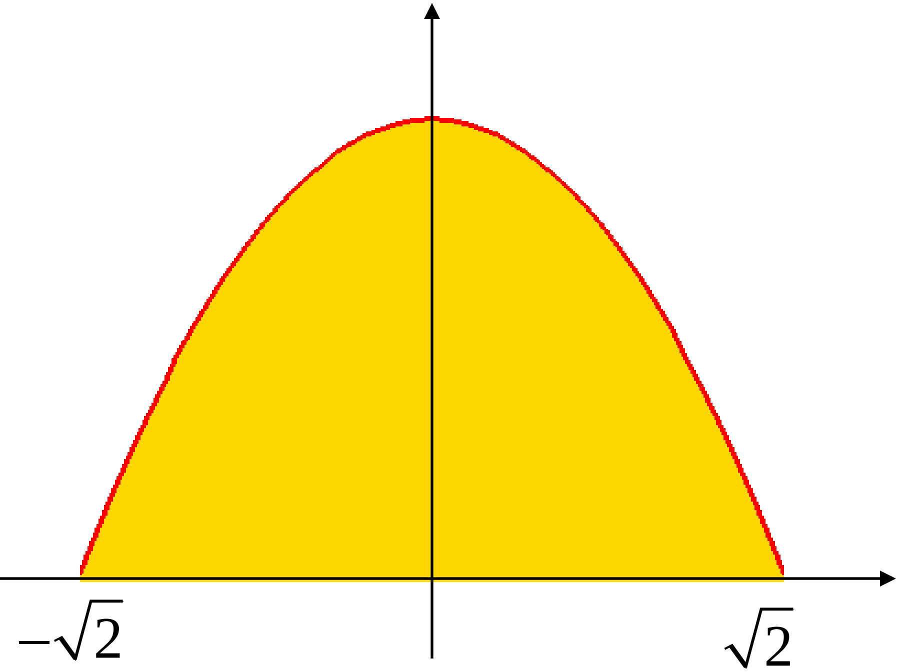
$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy \qquad = \frac{e^8}{4} - \frac{1}{4}$$

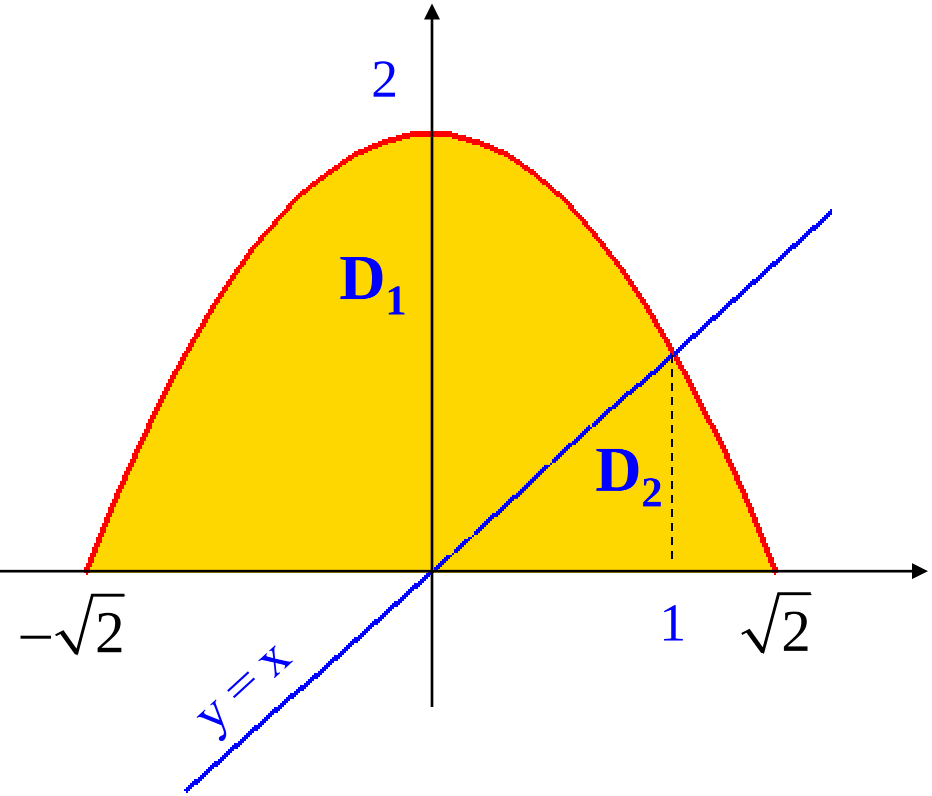
6/ Tính $\displaystyle\iint_D |x-y|\,dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: y = 0, y= 2 – x^2



6/ Tính $\iint\limits_D |x - y|\,dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: $y = 0$, $y = 2 - x^2$



$$I = \iint\limits_{D_1} (y - x)\,dxdy$$

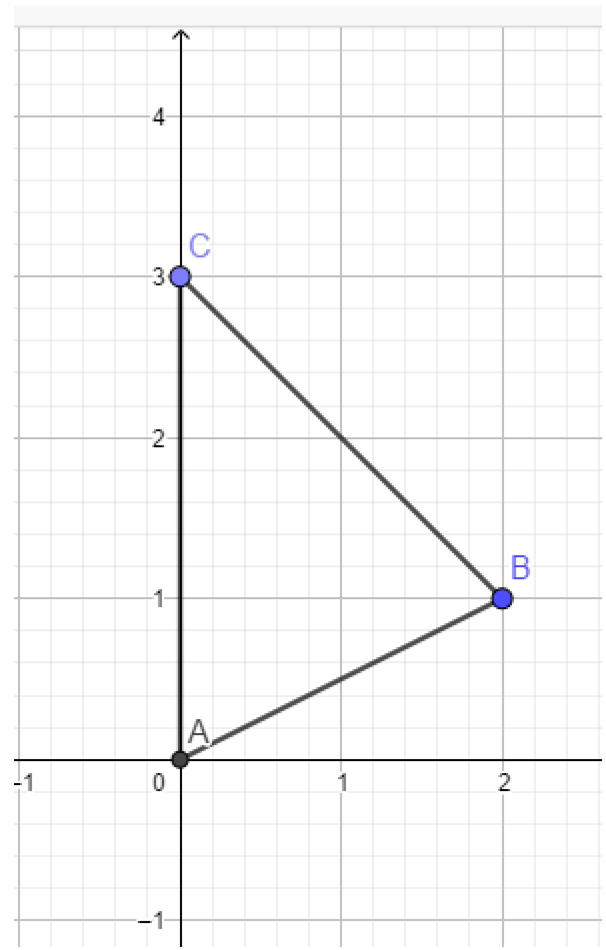
$$+ \iint\limits_{D_2} (x - y)\,dxdy$$

VD7: Tìm khối lượng của một phiến mỏng hình tam giác có các đỉnh là (0,0), (2,1), (0,3) nếu hàm mật độ là

$$\rho(x,y) = x + y$$

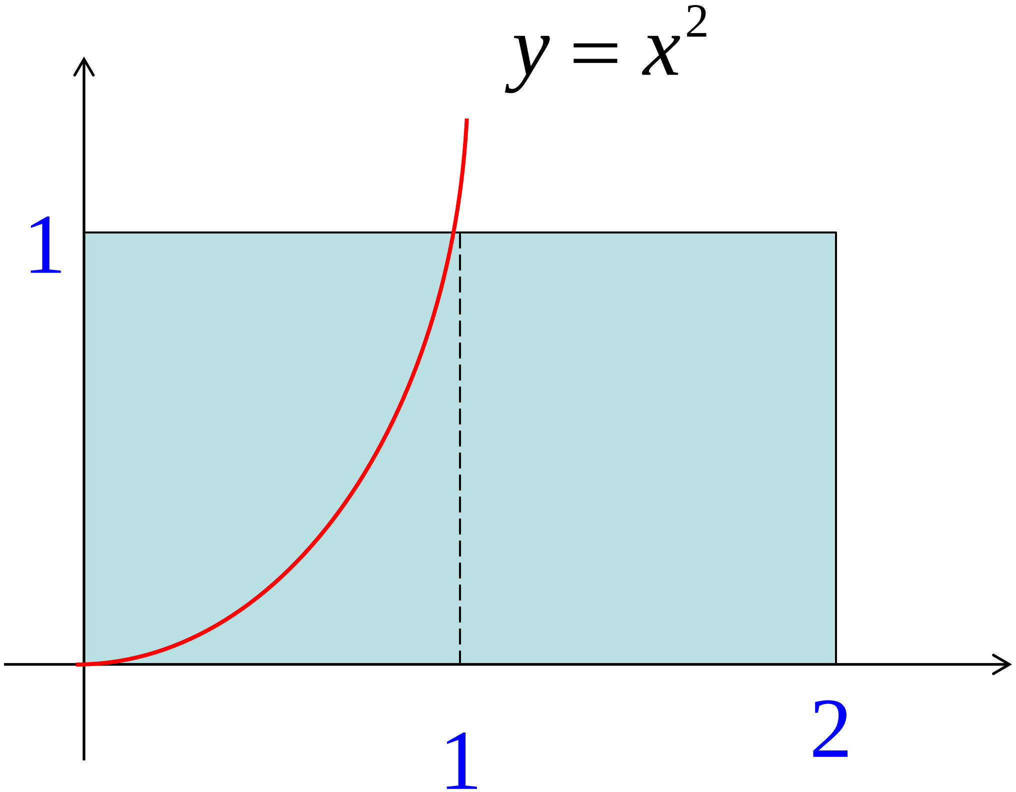
$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$$

$$m = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} (x+y)\,dy$$



7/ Tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

$$f(x,y) = \begin{cases} x, x^2 \ge y, \\ x + y, x^2 < y. \end{cases} \quad ; \quad D: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1.$$



8/ Vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự lấy tích phân:

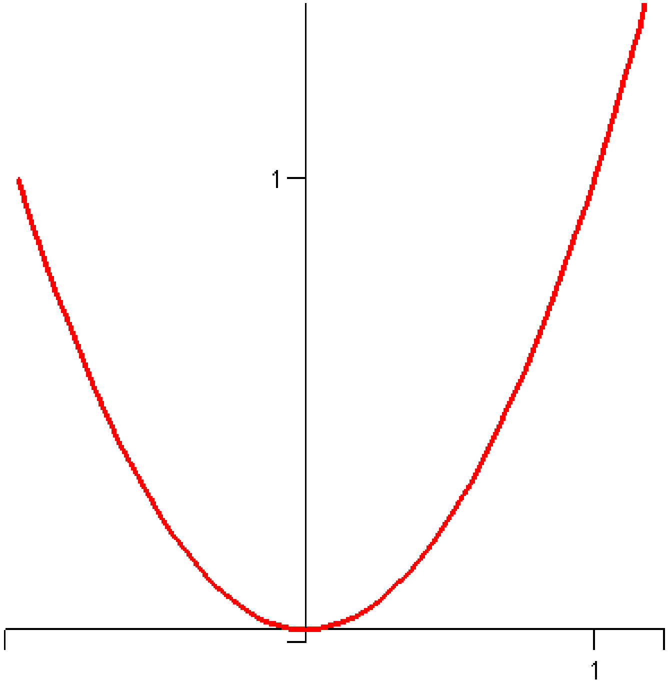
$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

$$2/\ I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$$

$$3/\ I = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

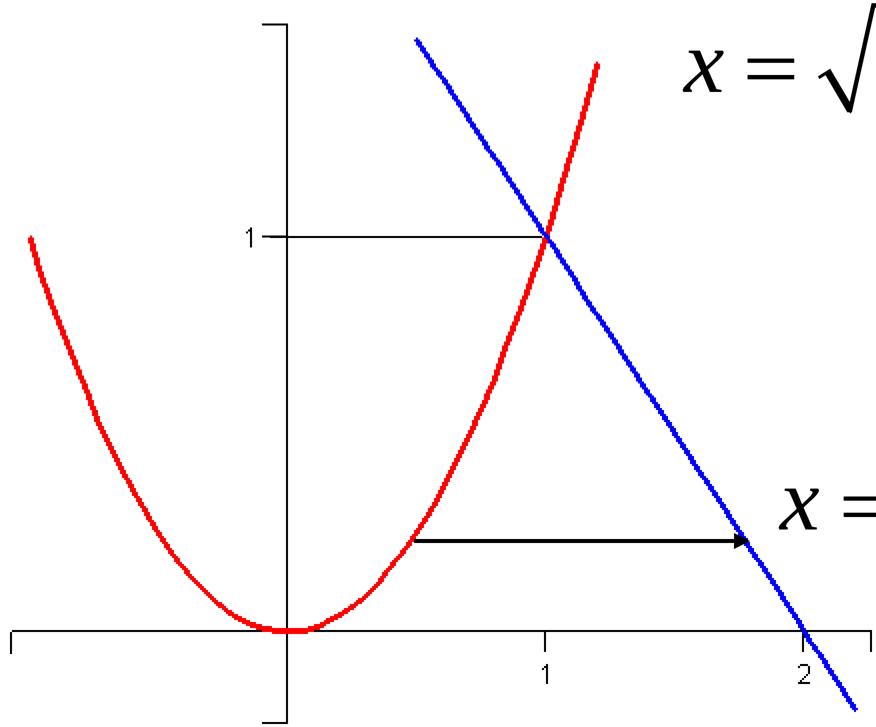
$$4/\ I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{4y}} f(x,y)dx$$

$$1/\ I = \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$



$$x = \sqrt{y}$$

$$1/\,I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$



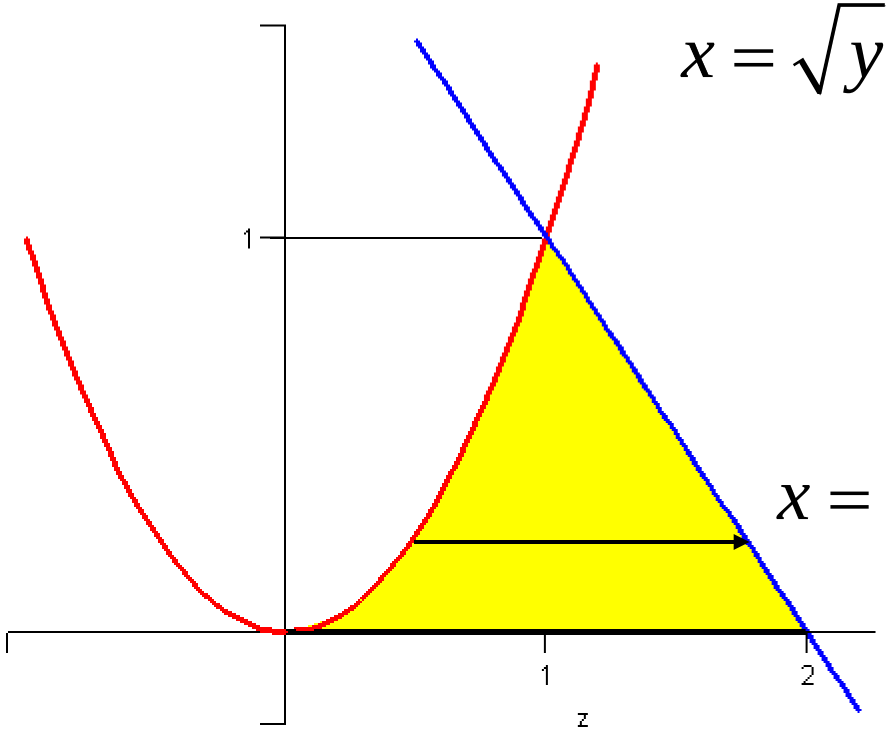
$$x = \sqrt{y}$$

$$x = 2 - y$$

$$\sqrt{y} \xrightarrow{\quad x \quad} 2 - y$$

$$0 \xrightarrow{\quad y \quad} 1$$

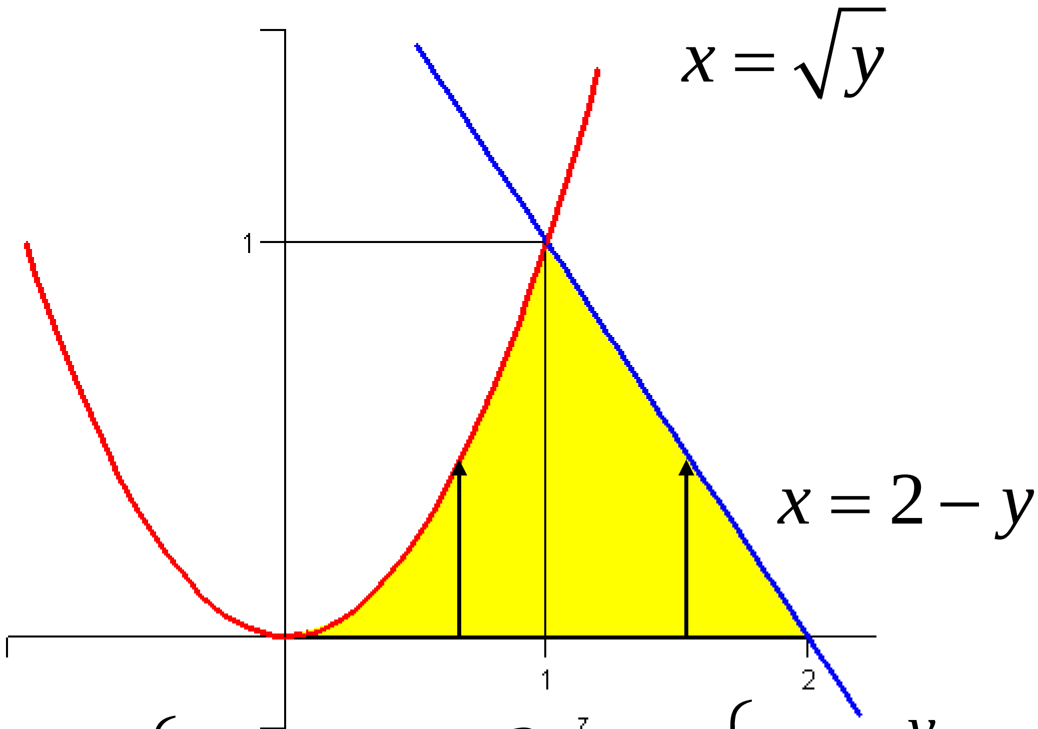
$$1/I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$



$$\sqrt{y}\xrightarrow{x}2-y$$

$$0\xrightarrow{y}1$$

$$1/\ I=\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$$



$$\begin{cases} 0\xrightarrow{y}x^2 \\ \sqrt{y}\xrightarrow{x}2-y \\ 0\xrightarrow{x}1 \end{cases}$$

$$0\xrightarrow{y}1$$

$$\begin{cases} 0\xrightarrow{y}2-x \\ 1\xrightarrow{x}2 \end{cases}$$

$$3/\, I = \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$$