Cực trị tự do hàm 2 biến f(x,y)

Các bước tìm CTTD:

B1: Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_i(x_i, y_i)$

B2: Tính các đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$

B3: Khảo sát tại các điểm dừng:

$$A = f''_{xx}(M_i), B = f''_{xy}(M_i), C = f''_{yy}(M_i), \Delta = AC - B^2$$

Kết luận:

TH1: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ Hàm số đạt cực tiểu $f_{ct} = f(M_i)$

TH2: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ Hàm số đạt cực đại $f_{cd} = f(M_i)$

TH3: $\Delta < 0$ Hàm số không đạt cực trị tại M_i

TH4: $\Delta = 0$ Xét M_i theo định nghĩa

Cực trị tự do

Ví dụ : Tìm cực trị tự do:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

B1: Tìm điểm dừng $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0\,(1) \\ y^3 - x = 0\,(2) \end{cases}$

Thế $y = x^3$ vào pt (2):

$$x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^8 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy có 3 điểm dừng: M(0,0),N(1,1),P(-1,-1)

Cực trị tự do

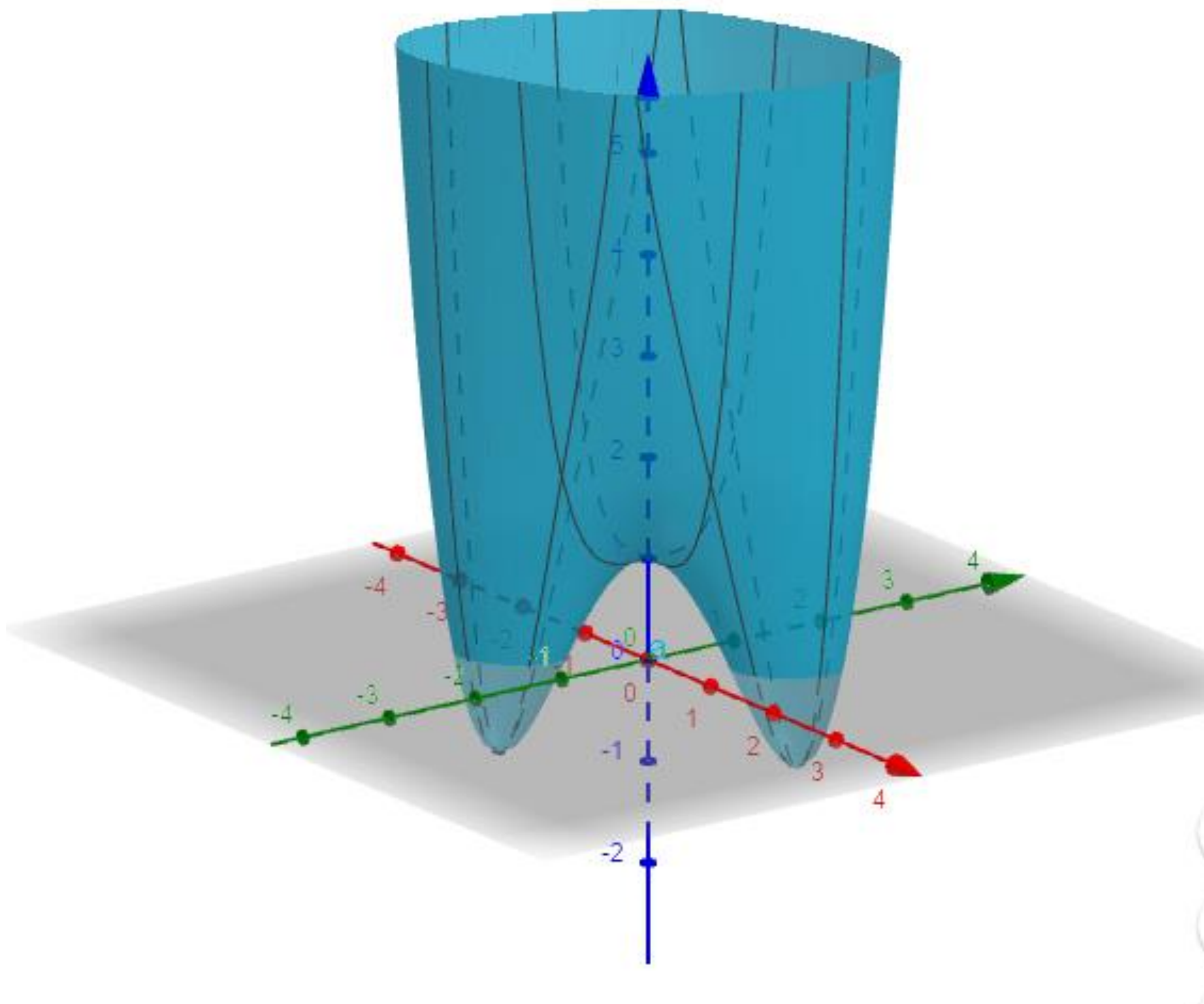
Ví dụ : Tìm cực trị tự do:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

B2: Tìm các đhr cấp 2: $f''_{xx} = 12x^2, f''_{xy} = -4, f''_{yy} = 12y^2$

B3: Khảo sát tại các điểm dừng:

	A	B	C	Δ	Kết luận
M(0,0)	0	-4	0	-16	KCT
N(1,1)	12	-4	12	128	$f_{ct}(N) = -1$
P(-1,-1)	12	-4	12	128	$f_{ct}(P) = -1$



Cực trị tự do

Ví dụ : Tìm cực trị tự do:

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

Tìm điểm dừng $\begin{cases} f'_x = 6xy - 6x = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$

4 điểm dừng: M(0,0),N(0,2),P(1,1),Q(-1,1)

$$f''_{xx} = 6y - 6,\ f''_{xy} = 6x,\ f''_{yy} = 6y - 6$$

	A	B	C	Δ	Kết luận
M(0,0)	-6	0	-6	36	$f_{cđ}(M)$
N(0,2)	6	0	6	36	$f_{ct}(N)$
P(1,1), Q(-1,1)	0 0	6 -6	0 0	-36	KCT

Ví dụ:
Điểm nào trên mặt $z^2 = xy + 1$ gần gốc tọa độ nhất?

Gọi M(x,y,z) là điểm cần tìm.

Khi đó, khoảng cách từ gốc O đến điểm M là:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ta cần tìm các điểm mà tại đó hàm số $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $z^2 = xy + 1$

Thế $z^2 = xy + 1$ vào f(x,y,z) ta được hàm số 2 biến:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

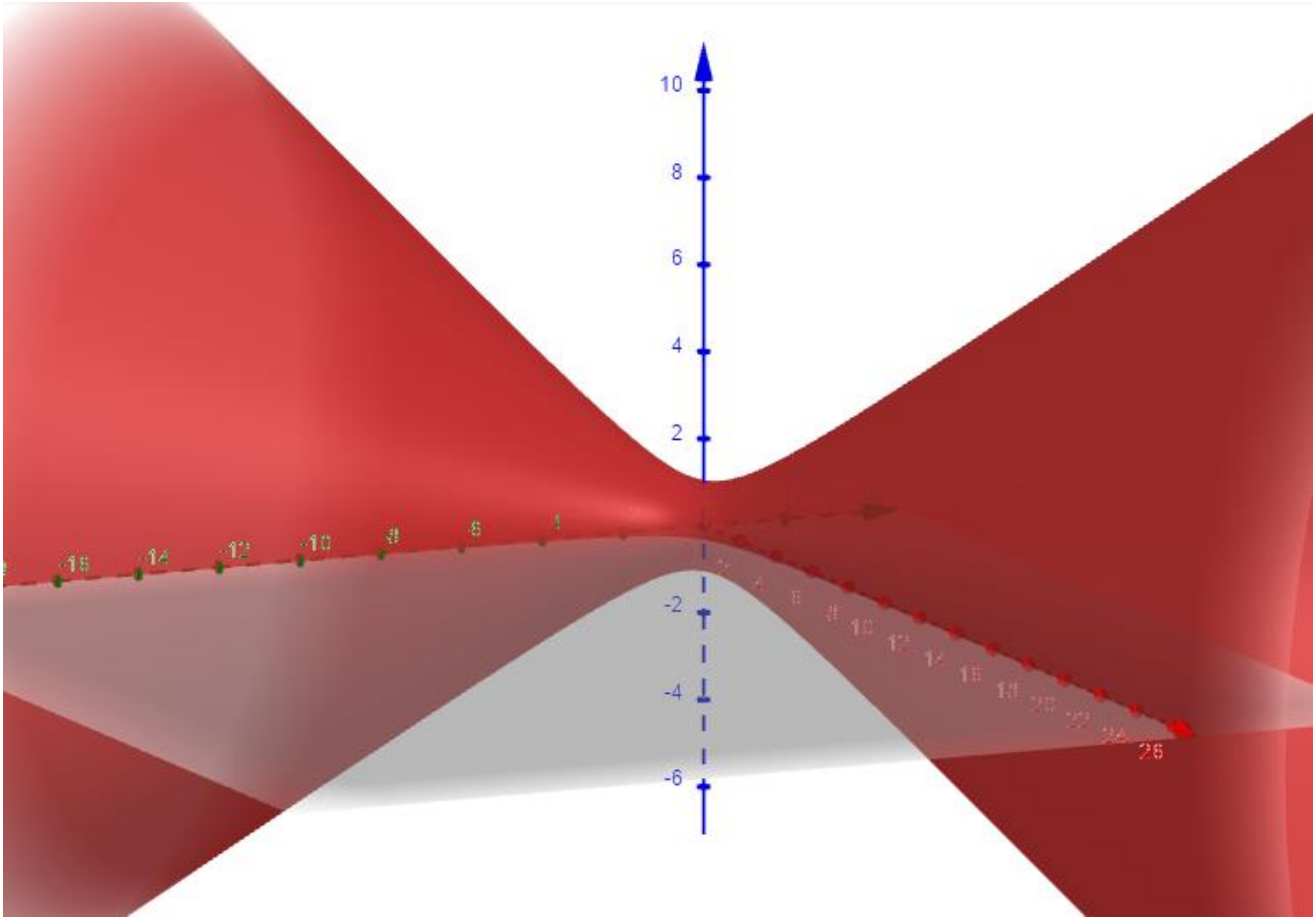
$$\begin{cases} F'_x = 2x + y = 0 \\ F'_y = 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$F''_{xx} = 2, F''_{xy} = 1; F''_{yy} = 2, \Delta = 2^2 - 1^2 = 3 > 0$$

Điểm (0,0) là điểm cực tiểu.

Với x = 0, y = 0 suy ra $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$

Vậy có 2 điểm trên mặt $z^2 = xy + 1$ gần gốc O nhất là (0,0,1) và (0,0,-1)



10
8
6
4
2
-2
-4
-6
26

Ví dụ: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử áp dụng mô hình dùng sức lao động kết hợp với tự động hóa sản xuất. Họ xác định rằng tổng chi phí cho nhân công và thiết bị mỗi năm được cho bởi hàm:

$$C(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$$ (đơn vị: triệu đôla)

Trong đó: x là chi phí thuê nhân công (triệu đô la/năm), y là chi phí cho thiết bị tự động hóa (triệu đôla/năm).

Tìm x, y để tổng chi phí thuê nhân công và thiết bị mỗi năm là ít nhất.

$$\boxed{C(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}}$$

$$\begin{cases} C'_x = y - \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ C'_y = x - \dfrac{4}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$C''_{xx} = \frac{4}{x^3}, C''_{xy} = 1; C''_{yy} = \frac{8}{y^3}$$

$$C''_{xx}(1,2) = 4, C''_{xy}(1,2) = 1; C''_{yy}(1,2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

Vậy chi phí thuê nhân công là 1 triệu đôla/năm, chi phí cho thiết bị là 2 triệu đôla/năm.

Ví dụ: Một doanh nghiệp sản xuất 2 loại mặt hàng trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo với mức giá lần lượt là $P_1 = 60, P_2 = 75$. Hàm chi phí sản xuất được cho bởi:

$$C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

Tìm các mức sản lượng Q_1, Q_2 doanh nghiệp cần sản xuất để lợi nhuận đạt cực đại.

Lợi nhuận = Doanh thu – chi phí

Doanh thu: $R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 60Q_1 + 75Q_2$

Chi phí: $C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$

Lợi nhuận: $F = R - C = 60Q_1 + 75Q_2 - Q_1^2 - Q_1 Q_2 - Q_2^2$

$$F = R - C = 60Q_1 + 75Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$\begin{cases} F'_{Q_1} = 0 \\ F'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60 - 2Q_1 - Q_2 = 0 \\ 75 - Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 15 \\ Q_2 = 30 \end{cases}$$

$$F''_{Q_1Q_1} = -2, F''_{Q_1Q_2} = -1, F''_{Q_2Q_2} = -2,$$

$$\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$$

Vậy doanh nghiệp có lợi nhuận cực đại nếu sản xuất 15 đơn vị hàng hóa thứ 1 và 30 đơn vị hàng hóa thứ 2.