CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT

<u>Định lý</u>: *f liên tục trên tập compact D thì f đạt min, max trên D.*

<u>Nhắc lại</u>: tập compact là tập đóng (lấy tất cả các biên) và bị chặn (có thể được bao bởi 1 hình tròn)

CỰC TRỊ

Tìm GTLN – GTNN hàm f(x,y) trên miền đóng, bị chặn D

Bước 1: Xét **trong miền D**: Tìm điểm dừng của hàm f trong miền D

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ x, y \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_j \\ y = y_j \qquad , j = 1, 2 \ldots \\ x_j, y_j \in D \end{cases}$$

Ta được các điểm dừng $N_j(x_j,y_j)$ trong miền D.

Bước 2: Xét **trên biên của miền D**: là 1 hay nhiều đường cong có pt $\varphi_i(x,y)=0$

Tìm điểm dừng trên từng đường cong $\varphi_i(x,y)=0$; i=1,2,… là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_{ix} = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_{iy} = 0 \\ \varphi_i(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_i \\ y = y_i, i = 1, 2, \ldots \\ \lambda = \lambda_i \end{cases}$$

Ta được các điểm dừng $M_i(x_i,y_i)$ trên đường cong $\varphi_i(x,y)=0$.

CỰC TRỊ

Tìm GTLN – GTNN hàm f(x,y) trên miền đóng, bị chặn D

Bước 3: Tìm giao điểm của các đường biên: P_k

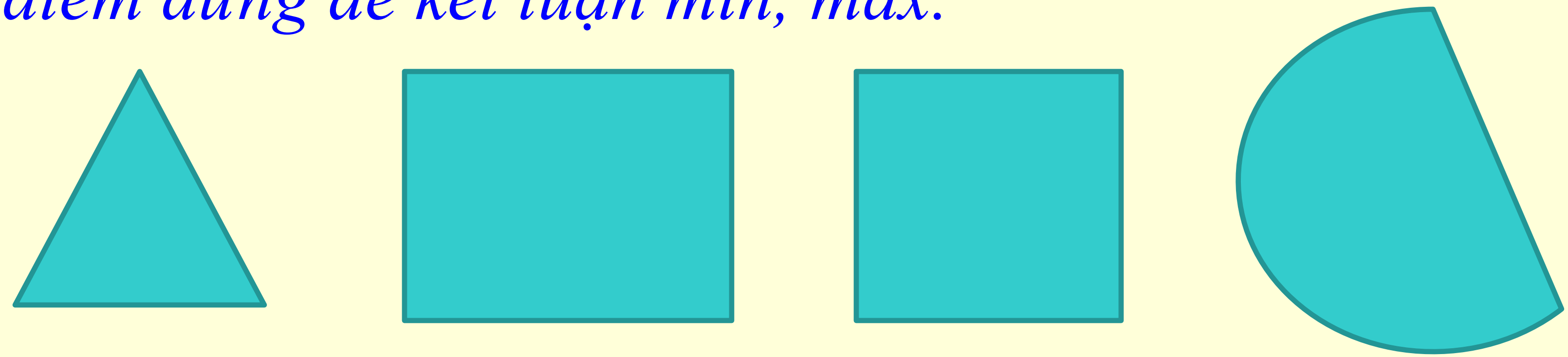
Bước 4: Tính giá trị hàm f tại từng điểm M_i, N_j, P_k và so sánh để có GTLN, GTNN của hàm f trong miền D

CỰC TRỊ

Lưu ý:

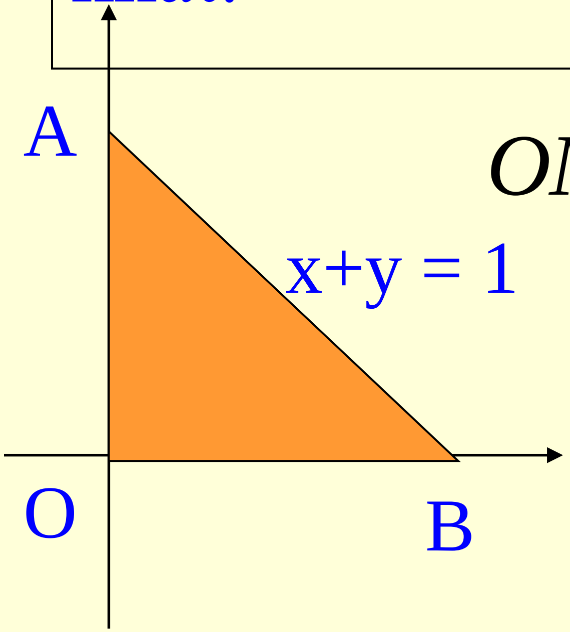
1/ Nếu biên là đoạn thẳng, chuyển f về hàm 1 biến, tìm các điểm có khả năng đạt min, max của hàm 1 biến này.

2/ Nếu biên là các đường gấp khúc thì tính giá trị của hàm f tại các đỉnh này, so sánh với giá trị của hàm f tại các điểm dừng để kết luận min, max.



VÍ DỤ

1/ Trên tam giác OAB, với O(0, 0), A(0, 1) và B(1, 0), tìm các điểm M(x, y) có tổng bình phương khoảng cách đến các đỉnh là lớn nhất, bé nhất.



$$OM^2 = x^2 + y^2,\ AM^2 = x^2 + (y-1)^2,$$
$$BM^2 = (x-1)^2 + y^2$$

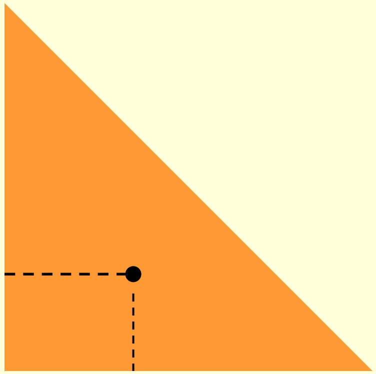
Đặt z = $OM^2 + AM^2 + BM^2$

$$\Rightarrow z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

Bài toán trở thành: tìm gtln, gtnn của z trên

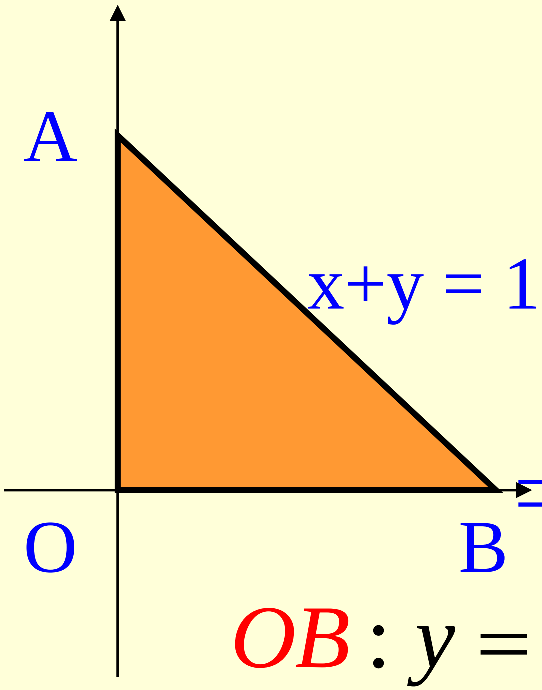
$$D: x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$$

Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D (trong miền D) là nghiệm hệ :



$$\begin{cases} f'_x = 6x - 2 = 0 \\ f'_y = 6y - 2 = 0 \\ x > 0, y > 0, x + y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Xét trên biên D $\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_{ix} = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_{iy} = 0 \\ \varphi_i(x, y) = 0 \end{cases}$



$$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

$$OA: x = 0, 0 \le y \le 1, z = 3y^2 - 2y + 2$$

$$z'_y = 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (0,0), (0,1), (0,1/3)

$$OB: y = 0, 0 \le x \le 1, z = 3x^2 - 2x + 2$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (0,0), (1,0), (1/3,0)

$$z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

$AB: y = 1 - x, 0 \le x \le 1, z = 6x^2 - 6x + 3$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (1/2,1/2), (0,1), (1,0)

Giá trị f tại các điểm đặc biệt

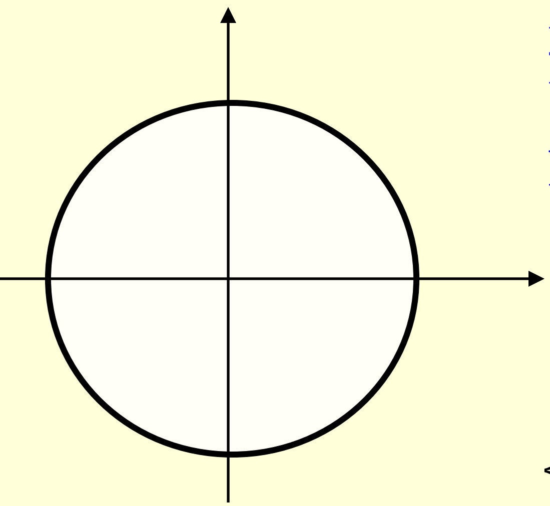
$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, f(0,0) = 2, f(0,1) = f(1,0) = 3$$

$$f\left(0,\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3},0\right) = \frac{5}{3}, f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, f_{\max} = f(1,0) = f(0,1) = 3$$

2/ Tìm gtln, gtnn trên hình tròn D: $x^2 + y^2 \leq 1$ của :

$$f\left(x, y\right) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$$



Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D là nghiệm hệ

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (3/2, -2) \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

(loại)

Điểm đặc biệt trên biên là điểm dừng của

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y, \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Giải hpt $\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_{ix} = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_{iy} = 0 \\ \varphi_i(x,y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Cách giải:

C1: Rút x từ pt (1), rút y từ pt (2) sau đó thế vào pt (3).

C2: Rút λ từ pt (1) = rút λ từ pt (2) (pt liên hệ giữa x, y), sau đó thế vào pt (3).

Điểm đặc biệt trên biên là điểm dừng của

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y, \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

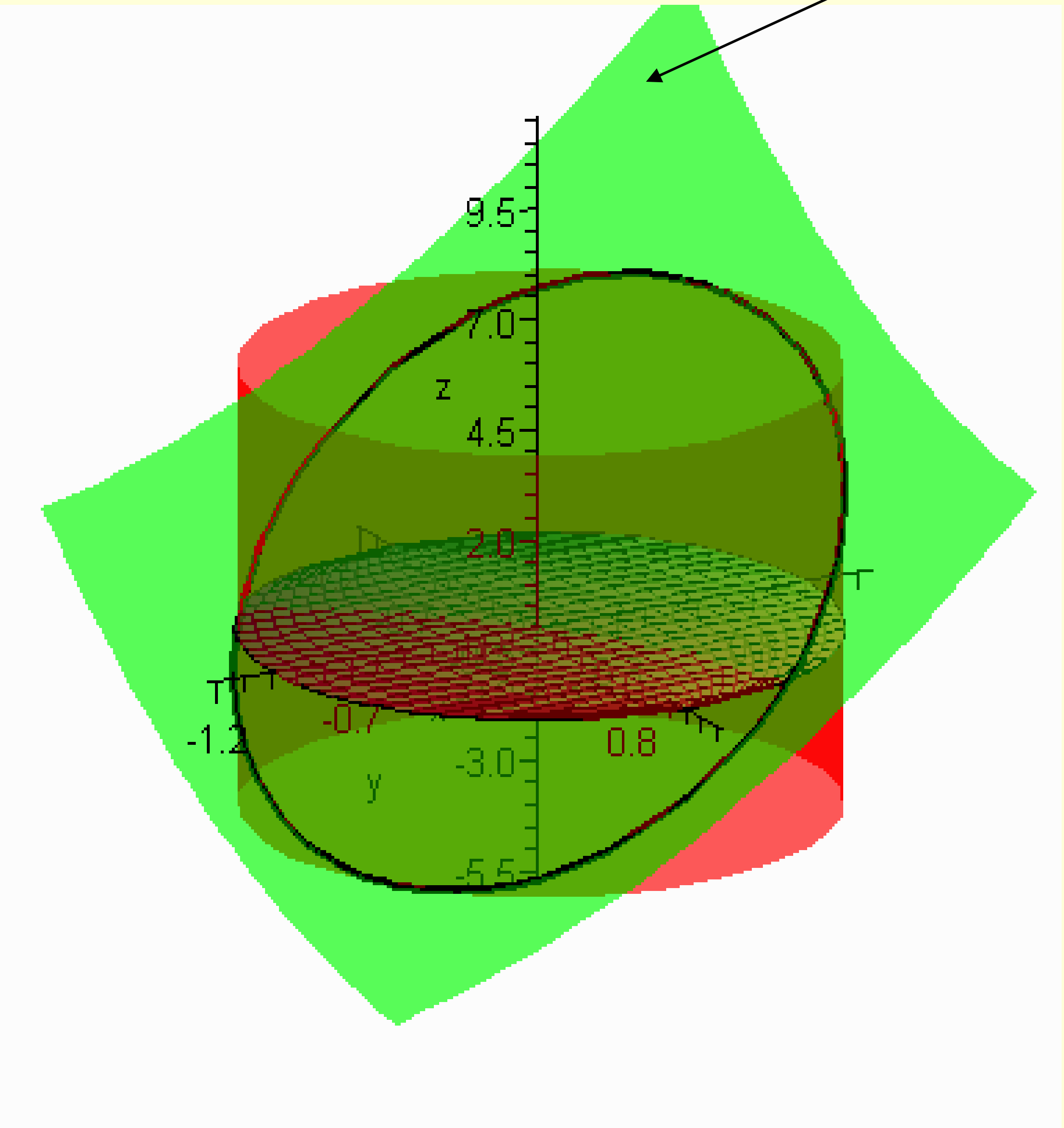
Giải hpt $\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_{ix} = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_{iy} = 0 \\ \varphi_i\ x, y\ = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

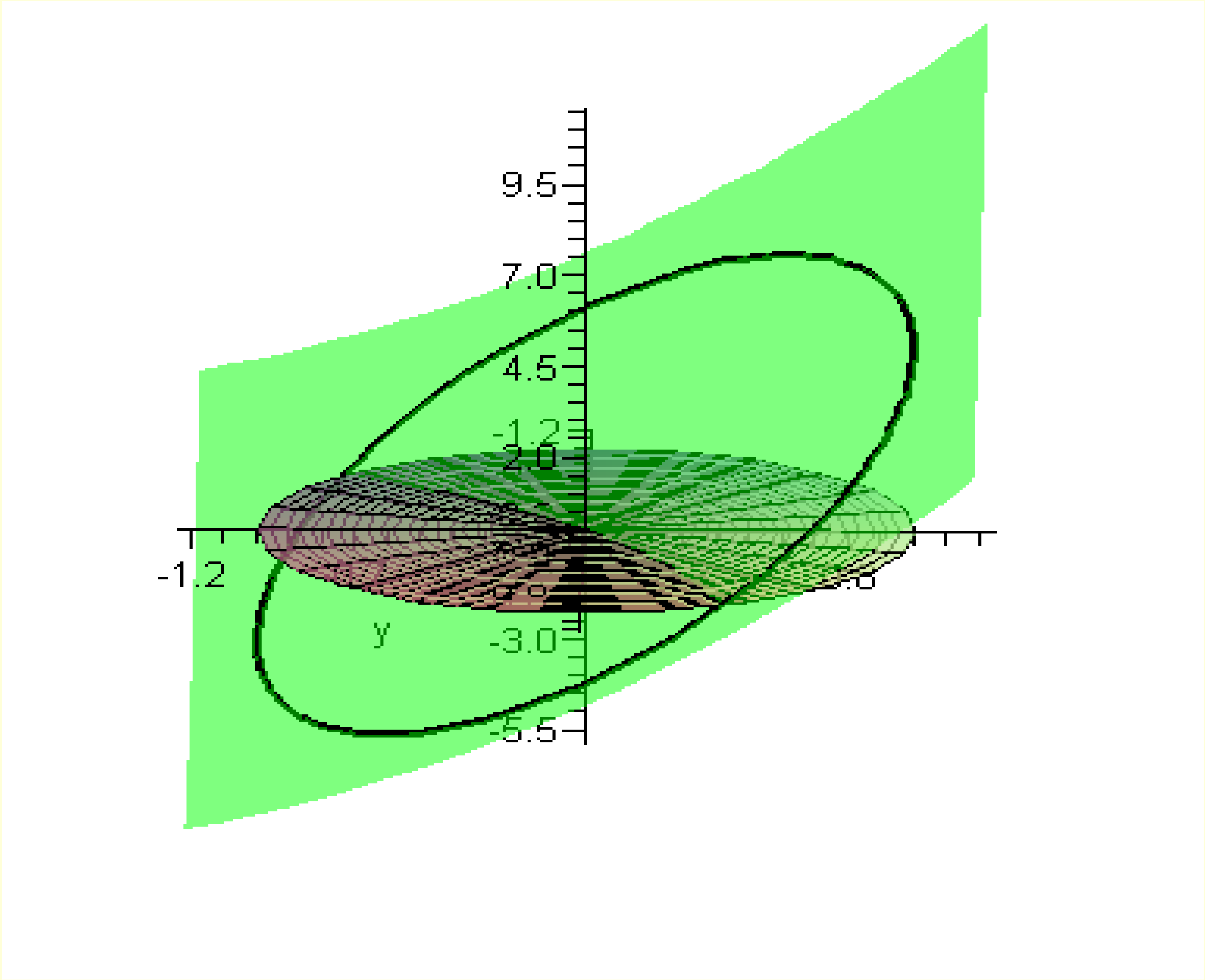
$$\Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\ hay\ (x,y) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

(Không cần chỉ ra λ.)

$$\Rightarrow f\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 6,\ \ f\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -4$$

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$$




9.5
7.0
4.5
2.0
-1.2
-3.0
-5.5
y

CỰC TRỊ

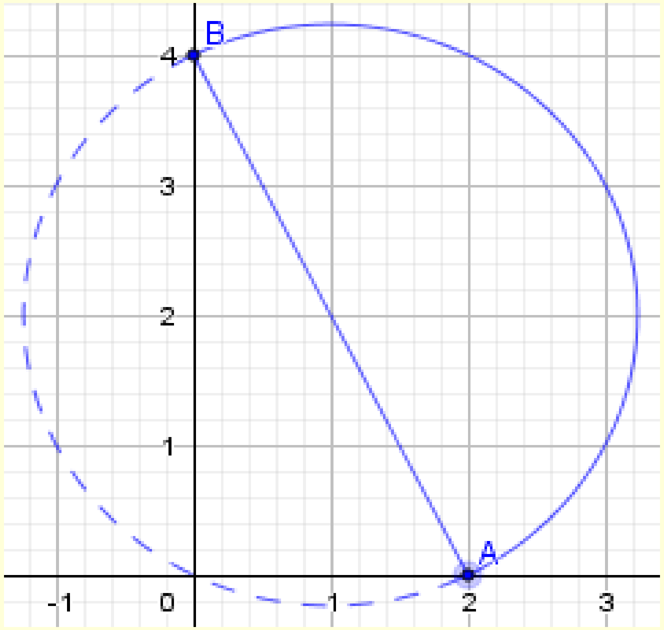
Ví dụ : Tìm GTLN, GTNN của hàm f(x,y) = x^2+y^2 trên miền:

$$D:\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2\le 5\\ 2x+y\ge 4\end{cases}$$

1/ Tìm điểm dừng trong miền D:

$$\begin{cases} f_x' = 2x = 0 \\ f_x' = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

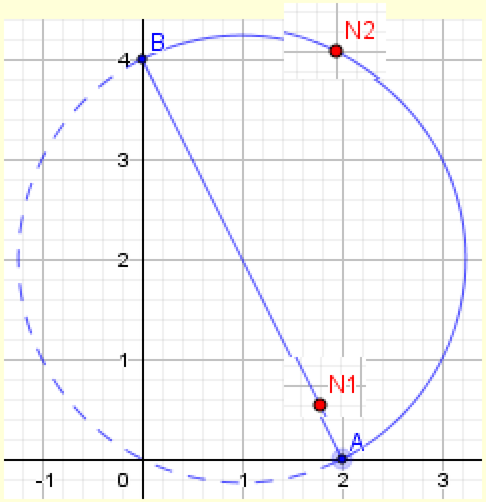
(Loại)



CỰC TRỊ

2/ Tìm điểm dừng trên biên D:

Trên đoạn thẳng AB:



$$2x+y = 4 \leftrightarrow y = -2x+4\ ,\ 0 \le x \le 2$$

$$f\ \ x,4-2x\ \ = 5x^2-16x+16, f' = 0 \leftrightarrow x = 1.6\ \ y = 0.8$$

Trên nửa đường tròn, giải hpt :

$$\begin{cases} 2x-2\lambda(x-1)=0 \\ 2y-2\lambda(y-2)=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \lambda=0 \\ x=2, y=4, \lambda=-2 \end{array}\right.$$

Ta loại điểm (0,0) vì nằm dưới đường thẳng, nhận điểm $N_2(2,4)$

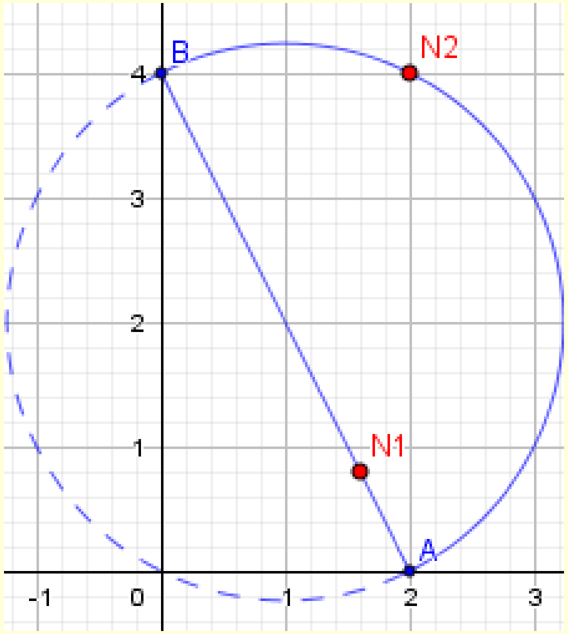
Cực trị

Ví dụ : Tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x,y) = x^2+y^2$ trong nửa hình tròn

$$D : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5 \\ 2x + y \ge 4 \end{cases}$$

3/ Tìm các giao điểm của 2 đường biên của D

A(2,0) và B(0,4) (điểm gấp khúc)



4/ Tính giá trị của hàm tại 2 điểm dừng và 2 giao điểm, so sánh để có GTLN, GTNN

$$f(N_1) = 3.2, f(N_2) = 20$$

$$f(A) = 4, f(B) = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{\max} = f(2,4) = 20 \\ f_{\min} = f(1.6, 0.8) = 3.2 \end{cases}$$