TÍCH PHÂN BỘI BA

ĐỊNH NGHĨA

Cho Ω đóng và bị chặn trong R_3. Hàm f(x,y,z) xác định trong Ω.

Phân hoạch Ω thành những miền con Ω_k với thể tích $V(\Omega_k)$, d là đường kính phân hoạch. Trên mỗi miền con, lấy điểm M_k tùy ý, gọi tổng tích phân là

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)V(\Omega_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)V(\Omega_k)$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d\to 0} S_n}$$

gọi là tp bội ba của f trên Ω.

Tính chất hàm khả tích

Cho Ω là miền đóng và bị chận

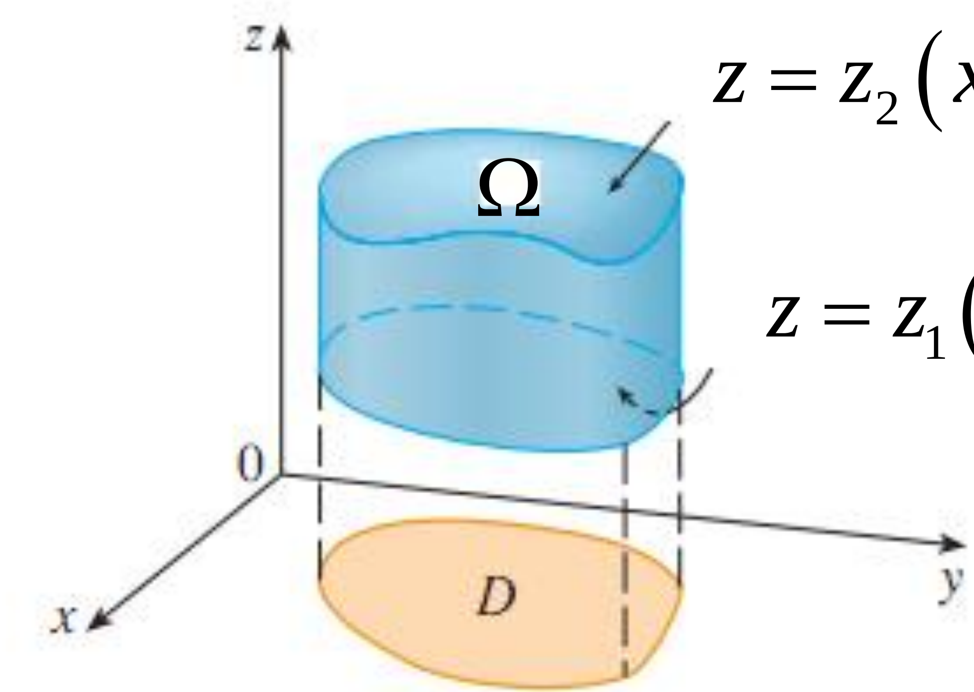
$$1/\, V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz \qquad \text{(thể tích } \Omega\text{)}$$

$$2/\, \iiint\limits_{\Omega} c.f = c.\iiint\limits_{\Omega} f, \qquad \iiint\limits_{\Omega} (f+g) = \iiint\limits_{\Omega} f + \iiint\limits_{\Omega} g$$

$$3/\, \Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$$

$$\iiint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iiint\limits_{\Omega_1} f + \iiint\limits_{\Omega_2} f$$

Cách tính tích phân bội ba



$$z = z_2(x,y)$$

$$z = z_1(x,y)$$

• Hình chiếu của Ω lên Oxy là D.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

Nhắc lại: Cận theo x, y, z

$$I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydx = \iint\limits_{D} \left(\int_{?}^{?} d\,? \right) d\,?\,d\,?$$

1. Chọn biến trong tích phân đơn tương ứng với biến chỉ xuất hiện 2 lần trong Ω $\longrightarrow$ $\begin{cases} z = f_1(x,y) \\ z = f_2(x,y) \end{cases}$

2. Tìm hình chiếu D:

a/ Tìm MXĐ của hàm chọn ở bước 1

b/ Viết các phương trình còn lại

c/ Tìm hình chiếu giao tuyến (khử biến ở bước 1)

3. Tính tích phân kép trên miền D

$$f_2(x,y) = f_1(x,y)$$

Lưu ý về cách xác định biến tính trước và miền D

1. Biến tính trước được chọn tương ứng với biến chỉ xuất hiện 2 lần trong định nghĩa Ω.

2. Hình chiếu D xác định như khi tính thể tích.

3. Tùy thuộc vào D, cận tích phân ở tầng ngoài sẽ được viết thành tích phân 2 lớp.

VÍ DỤ

1/ Tính: $I = \iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$

Ω Là miền ghạn bởi : $y = x^2, z + y = 1, z = 0$

Cách 1: z xuất hiện 2 lần, biến tính trước là z

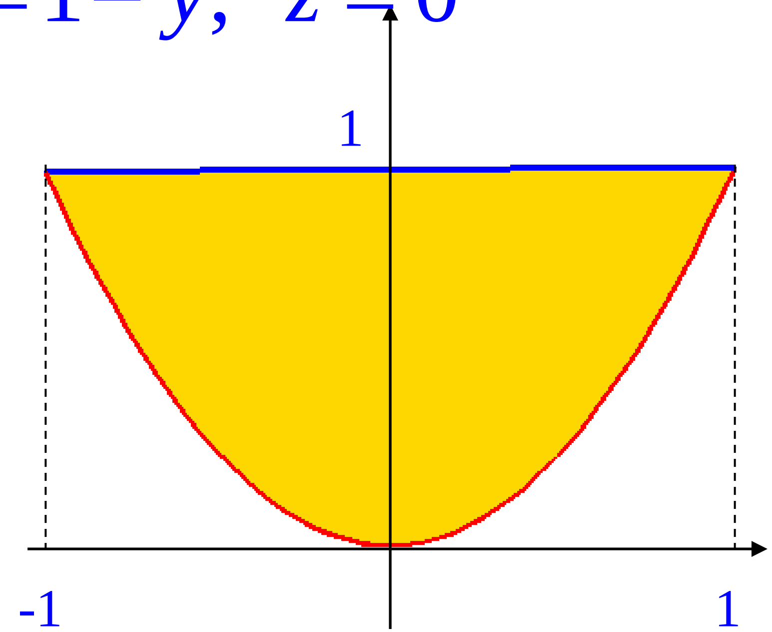
(z_1, z_2 là 1 trong 2 hàm z = 1 – y, z = 0).

$$D = hc_{Oxy}\Omega : \quad y = x^2, 1 - y = 0$$

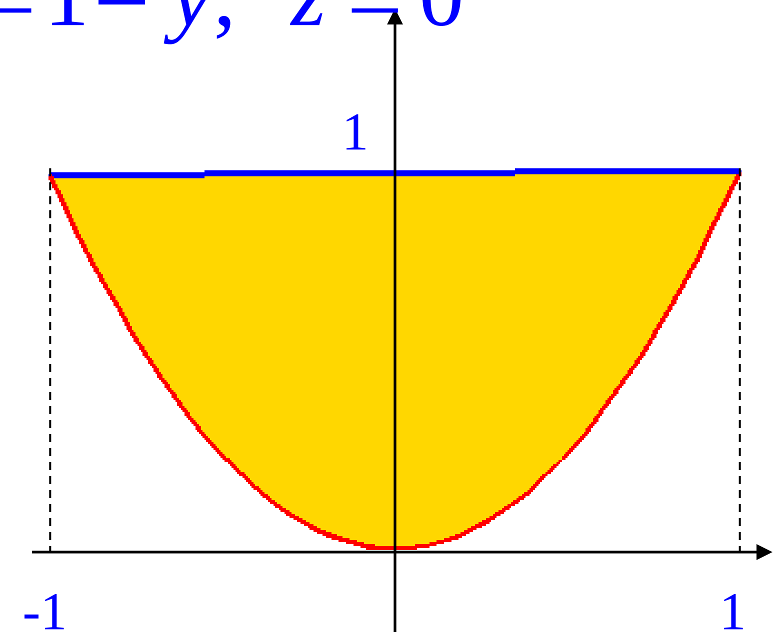
$D: y = x^2, 1 - y = 0$ $z = 1 - y,\ z = 0$

$$\iiint_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{1-y} y\,dz$$



$$D: y = x^2, 1 - y = 0 \qquad z = 1 - y, \quad z = 0$$



$$\iiint_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{D} \left(\int_{0}^{1-y} y\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{1-y} y\,dz$$

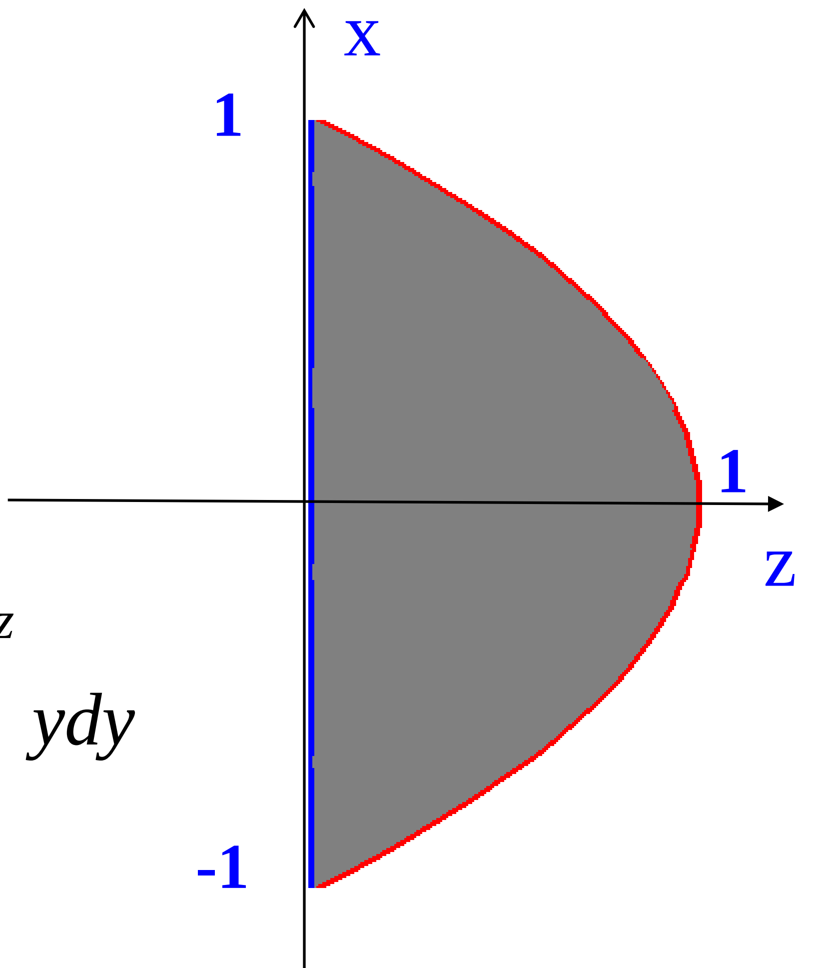
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y(1-y)\,dy \quad = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{8}{35}$$

$$\Omega: y = x^2, z + y = 1, z = 0$$

<u>Cách 2</u>: y xuất hiện 2 lần, biến tính trước là y

$$y = x^2,\ \ y = 1 - z$$

$$D = \underset{Oxz}{hc}\,\Omega: \quad z = 0, 1 - z = x^2$$



$$\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\int_{x^2}^{1-z} y\,dy \right) dxdz \ = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} dz \int_{x^2}^{1-z} y\,dy$$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} dz \int_{x^2}^{1-z} y dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} \left((1 - z)^2 - x^4 \right) dz$$

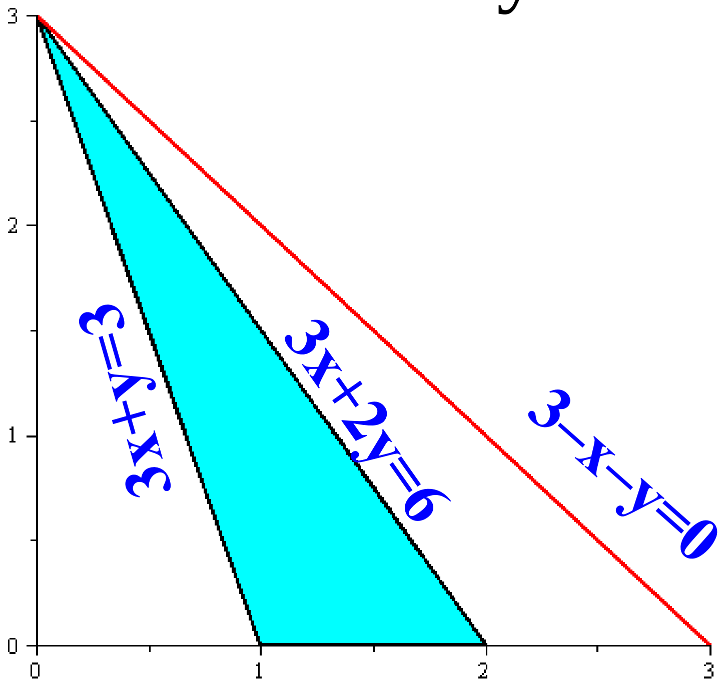
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} + \frac{2x^6}{3} - x^4 \right) dx = \frac{8}{35}$$

2/ Tính: $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y)\,dxdydz,$ Ω gh bởi:

$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$

z xuất hiện 2 lần, biến tính trước là z :

z = 3 – y – x và z = 0



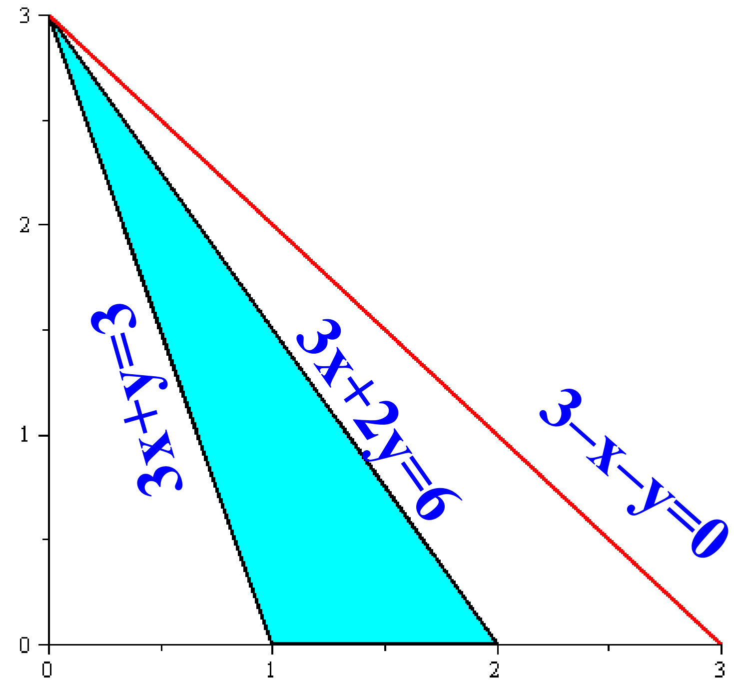
$$D = hc_{Oxy}\,\Omega:$$

$$3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0,$$

$$(3 - x - y = 0)$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y)\,dxdydz,$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\int_{0}^{3-x-y} (x+y)\,dz \right) dxdy$$

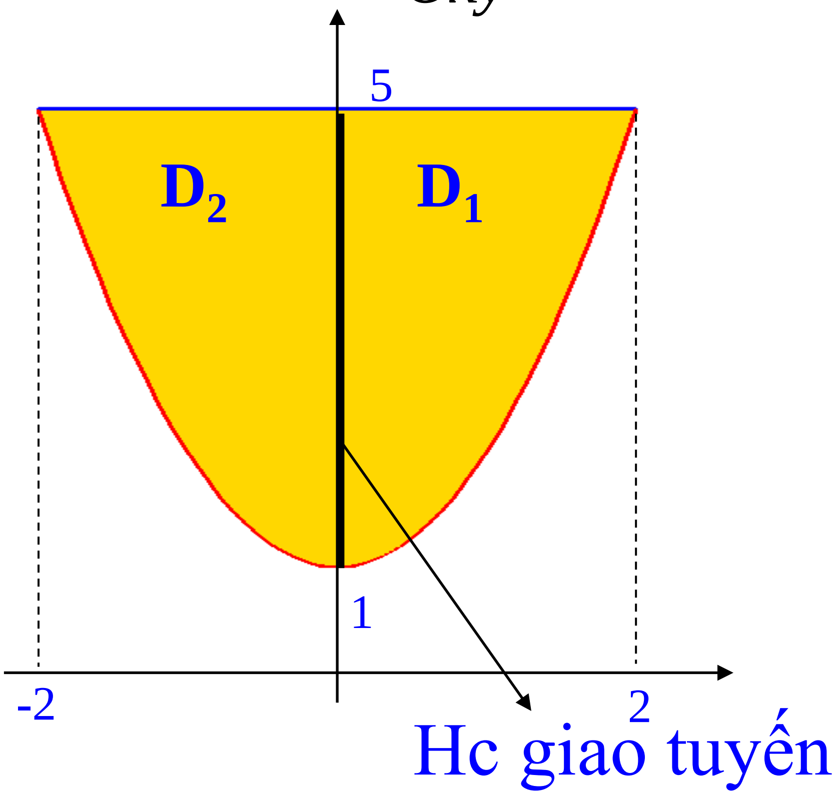


$$= \int_{0}^{3} dy \int_{1-\frac{y}{3}}^{2-\frac{2y}{3}} dx \int_{0}^{3-x-y} (x+y)\,dz = \frac{11}{4}$$

3/ Tính: $$I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$$

$$D = hc_{Oxy}\,\Omega: y = 1 + x^2, y = 5, (3x = 0)$$



$$I = \iint\limits_{D_1}\left(\int\limits_0^{3x} x\,dz\right)dxdy + \iint\limits_{D_2}\left(\int\limits_{3x}^{0} x\,dz\right)dxdy$$