ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Phần 2

Nội dung

1. Đạo hàm và vi phân hàm hợp.
2. Đạo hàm và vi phân hàm ẩn.

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM HỢP

Trường hợp cơ bản: hợp của hàm 2 biến và hàm 2 biến

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Nếu z, x, y khả vi:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

$$= f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv)$$

$$= \left(f'_x x'_u + f'_y y'_u \right) du + \left(f'_x x'_v + f'_y y'_v \right) dv$$

$$z'_u = f'_x . x'_u + f'_y . y'_u, \qquad z'_v = f'_x . x'_v + f'_y . y'_v,$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM HỢP

Trường hợp cơ bản: hợp của hàm 2 biến và hàm 2 biến

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Nếu z, x, y khả vi:

$$z'_u = f'_x . x'_u + f'_y . y'_u, \qquad z'_v = f'_x . x'_v + f'_y . y'_v,$$

C1: $dz = z'_u du + z'_v dv$ (liên kết z và các biến cuối)

C2: $dz = f'_x dx + f'_y dy$

$$= f'_x (x'_u du + x'_v dv) + f'_y (y'_u du + y'_v dv)$$

VÍ DỤ

1/ Cho: $z = f(x,y) = e^{xy}, \quad x = u^2, \quad y = u + v$

tìm z'_u, z'_v, dz tại $(u, v) = (1, 1)$.

$$z'_u = f'_x.x'_u + f'_y.y'_u \qquad z'_v = f'_x.x'_v + f'_y.y'_v$$

$(u, v) = (1, 1) \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$

$$z'_u = ye^{xy}.2u + xe^{xy}.1$$

$$z'_v = ye^{xy}.0 + xe^{xy}.1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_u(1,1) = 2.e^2.2 + 1.e^2.1 = 5e^2 \\ z'_v(1,1) = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_u(1,1) = 5e^2 \\ z'_v(1,1) = e^2 \end{cases}$$

$$dz(1,1) = z'_u(1,1)du + z'_v(1,1)dv = 5e^2du + e^2dv$$

Trường hợp riêng 1

Cho $z = f(x)$ *và* $x = x(u, v)$ (hợp của 1 biến và 2 biến)

$$\boxed{z'_u = f'(x)\,x'_u, \quad z'_v = f'(x)x'_v}$$

C1: $dz = z'_u du + z'_v dv$ (liên kết z và các biến cuối)

C2: $dz = f'(x)dx = f'(x)(x'_u du + x'_v dv)$

2/ Cho: $z = f(x) = \sin(x + x^2), x = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$

Tính z'_u, z'_v tại (0, 1)

$z'_u = f'(x).x'_u$, $z'_v = f'(x).x'_v$ $\qquad x(0, 1) = 0$

$$z'_u = (1 + 2x)\cos(x + x^2) \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

$$z'_v = (1 + 2x)\cos(x + x^2) \times \frac{-u}{v^2} \times \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

$$\begin{cases} z'_u(0,1) = 1 \\ z'_v(0,1) = 0 \end{cases}$$

Trường hợp riêng 2:

$z = f(x,y)$ và $x = x(t)$, $y = y(t)$. (hợp 2 biến và 1 biến)

$$\boxed{z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t)}$$

C1: $dz = z'(t)dt$ (liên kết z và biến cuối)

C2: $dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x.x'(t)dt + f'_y.y'(t)dt$

3/ Cho: $z = f(x,y) = \sin(xy),$

$$x = \arctan(t), y = e^t$$

Tính $dz(t)$ tại $t = 0$

Cách 1: $dz = z'(t)dt$ với $z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t)$

$$z'(t) = y\cos(xy)\frac{1}{1+t^2} + x\cos(xy)\,e^t$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow z'(0) = 1$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

$$z = f(x, y) = \sin(xy),$$

$$x = \arctan(t), y = e^t$$

Cách 2: $dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x . x'(t)dt + f'_y . y'(t)dt$

$$dz = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy$$

$$= y.\cos(xy) \cdot \frac{dt}{1+t^2} + x.\cos(xy).e^t dt$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

Trường hợp riêng 3:

$z = f(x, y)$ *và* $y = y(x)$ (hợp 2 biến và 1 biến)

$$\boxed{z'(x) = f'_x + f'_y . y'(x)}$$

$dz = z'(x)dx$ (liên kết z và các biến cuối)

4/ Cho: $z = f(x,y) = \dfrac{\ln(y^2+1)}{x^2}.$

a/ Tính z'_x tại (1,0).

b/ Nếu $y = e^x$, tính $z'(x)$ tại $x = 1$

$$a / z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} \Rightarrow z'_x(1,0) = -2\frac{\ln(1)}{1} = 0$$

$$b / z'(x) = f'_x + f'_y . y'(x)$$

$$= -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2+1)x^2} e^x$$

$$\boxed{y = e^{x}}$$

$$z'(x) = -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2+1)x^2} \cdot e^{x}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = e$$

$$\Rightarrow z'(1) = -2\ln(e^2+1) + \frac{2e^2}{e^2+1}$$

5/ Cho: $z = f(x - y, xy)$, với f là hàm khả vi

Tính z'_x, z'_y

Đặt: $u = x - y$, $v = xy \Rightarrow z = f(u, v)$

(u, v là biến chính của f)

$$z'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x \quad = f'_u.1 + f'_v y$$

$$z'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y \quad = f'_u.(-1) + f'_v x$$

6/ Cho: $z = xf\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$ với f là hàm khả vi

Chứng minh đẳng thức: $2xz'_x + yz'_y = 2z$

Đặt : $u = \dfrac{x}{y^2}$ $\Rightarrow z = x.f(u)$

$$z'_x = f(u) + x.\left[f(u)\right]'_x$$

$$= f(u) + x.f'(u).u'_x = f(u) + x.f'(u).\frac{1}{y^2}$$

$$z'_y = x.\left[f(u)\right]'_y \qquad z = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= xf'(u).u'_y = x.f'(u).\frac{-2x}{y^3}$$

$$2xz'_x + yz'_y = 2x\left(f(u) + x.f'(u).\frac{1}{y^2}\right) + yx.f'(u).\frac{-2x}{y^3}$$

$$= 2xf(u) \quad = 2z$$

7/ Cho: $z = f\left(x^2 - y, xy^2\right)$ với f là hàm khả vi

Tính *dz* theo *dx*, *dy*.

Đặt: $u = x^2 - y, v = xy^2 \Rightarrow z = f(u,v)$

•Cách 1: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ với

$$z'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x \quad = f'_u.2x + f'_v.y^2$$

$$z'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y \quad = f'_u.(-1) + f'_v.2xy$$

$$dz = \left(f'_u.2x + f'_v.y^2\right)dx + \left(-f'_u + f'_v.2xy\right)dy$$

$$z = f\left(x^2 - y, xy^2\right) \qquad u = x^2 - y, v = xy^2 \Rightarrow z = f\left(u, v\right)$$

- Cách khác:

$$dz = f'_u du + f'_v dv$$

$$= f'_u(u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy)$$

$$= f'_u(2xdx - dy) + f'_v(y^2 dx + 2xydy)$$

$$= (2xf'_u + y^2 f'_v)dx + (2xyf'_v - f'_u)dy$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm hợp

Xét trường hợp cơ bản, các trường hợp khác tương tự.

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$z''_{uu} = \left(f'_x . x'_u + f'_y . y'_u \right)'_u$$

$$= \left[\left(f'_x \right)'_u . x'_u + f'_x . x''_{uu} \right] + \left[\left(f'_y \right)'_u . y'_u + f'_y . y''_{uu} \right]$$

$$z''_{uv} = \left(f'_x . x'_u + f'_y . y'_u \right)'_v$$

$$= \left[\left(f'_x \right)'_v . x'_u + f'_x . x''_{uv} \right] + \left[\left(f'_y \right)'_v . y'_u + f'_y . y''_{uv} \right]$$

$$z''_{vv} = \left(f'_x . x'_v + f'_y . y'_v \right)'_v$$

$$= \left[\left(f'_x \right)'_v . x'_v + f'_x . x''_{vv} \right] + \left[\left(f'_y \right)'_v . y'_v + f'_y . y''_{vv} \right]$$

Các đhàm $(f'_x)'_u$, $(f'_x)'_v$, $(f'_y)'_u$, $(f'_y)'_v$ phải tính theo hàm hợp.

Vi phân cấp hai của hàm hợp:

(u, v là biến độc lập)

$$\boxed{d^2z = z''_{uu}du^2 + 2z''_{uv}dudv + z''_{vv}dv^2}$$

VÍ DỤ

1/ Cho: $z = f(x,y) = x^2 y, \quad x = u + v, y = u - v$

Tính z''_{uu}, z''_{uv} tại (u, v) =(1, 1) $(x = 2, y = 0)$

$$z'_u = 2xy \times x'_u + x^2 \times y'_u$$

$$= 2xy \times 1 + x^2 \times 1 = 2xy + x^2$$

$$z''_{uu} = \left(2xy + x^2\right)'_u \quad = 2\left(x'_u y + xy'_u\right) + 2xx'_u$$

$$= 2(y + x) + 2x = 4x + 2y$$

$\Rightarrow$ $z''_{uu}(1, 1) = 8$

$$z'_u = 2xy + x^2$$

$$x = u + v,\ y = u - v$$

$$z''_{uv} = \left(2xy + x^2\right)'_v \quad = 2\left(x'_v y + x y'_v\right) + 2x x'_v$$

$$= 2(y - x) + 2x = 2y$$

$$z''_{uv}(1, 1) = 0$$

2/ Cho: $z = f(x,y) = x^2 y$, với $x = t^2, y = \ln t$

Tính d^2z theo dt tại t = 1

$$d^2 z = z''(t)dt^2$$ (*t* là biến độc lập)

$$z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t) = 2xy.2t + x^2.\frac{1}{t}$$

$$= 4t^3.\ln t + t^3$$

$$z''(t) = 12t^2.\ln t + 4t^2 + 3t^2$$

$$d^2 z(1) = 7dt^2$$

3/ Cho: $z = f(x^2 - y)$ với f là hàm khả vi cấp 2.

Tính $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

Đặt $u = x^2 - y \Rightarrow z = f(u)$

$$z'_x = f'(u)u'_x = f'(u).2x, \qquad z'_y = f'(u).(-1)$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (f'(u).2x)'_x = 2\left[f'(u) + x(f'(u))'_x\right]$$

$$= 2[f'(u) + xf''(u).u'_x] = 2\left[f'(u) + 2x^2 f''(u)\right]$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(f'(u).2x\right)'_y$$

$$= 2x\left(f'(u)\right)'_y = 2xf''(u).u'_y = -2xf''(u)$$

$$z'_y = f'(u).(-1)$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-f'(u)\right)'_y = -f''(u)u'_y = f''(u)$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM HỢP

Ví dụ : Nhiệt độ tại một điểm (x,y) là T(x,y), tính bằng độ C. Một con rệp bò sao cho vị trí của nó sau t (giây) được cho bởi phương trình $x = \sqrt{1+t}, y = 2 + \frac{1}{3}t$, trong đó x, y: đơn vị centimet. Hàm nhiệt độ thỏa mãn

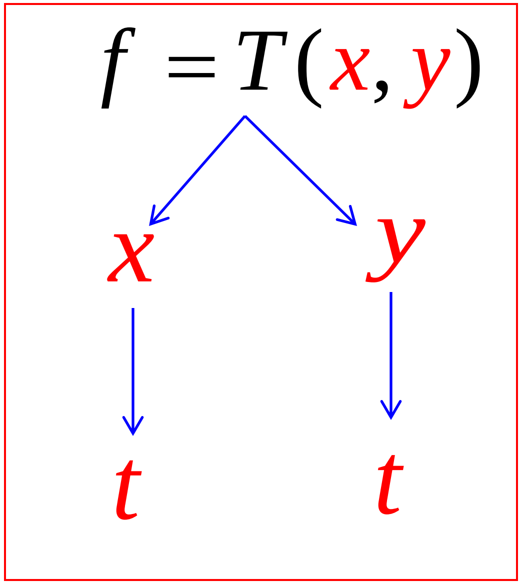
$$T'_x(2,3) = 4, T'_y(2,3) = 3$$

Hỏi nhiệt độ tăng bao nhiêu trên đường đi của con rệp sau 3 giây?

$$T'(t) = f'_x . x'(t) + f'_y . y'(t)$$

$$= f'_x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} + f'_y \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 4.\frac{1}{2.2} + 3.\frac{1}{3} = 2\left({}^0C/s\right)$$



ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM ẨN

Hàm ẩn 1 biến : Giả sử hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Để tính $y'(x)$, lấy đạo hàm phương trình $F = 0$ theo x và giải tìm $y'(x)$.

Lưu ý: Sử dụng đạo hàm hàm hợp ta có:

$G = F(x, y) = 0$, với $y = y(x)$

$\Rightarrow G'(x) = F'_x + F'_y . y'(x) = 0$

$$\boxed{y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Xem x, y là 2 biến độc lập khi lấy đh của F.

Hàm ẩn 2 biến : $z = z(x, y)$ xác định từ pt :

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1).$$

Lấy đạo hàm (1) theo x (hoặc y) rồi giải tìm các đạo hàm riêng của z.

$$G = 0 \Rightarrow G'_x = F'_x.1 + F'_y.0 + F'_z.z'_x = 0 \quad \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

<u>x, y, z là các biến độc lập khi tính</u> F'_x, F'_y, F'_z.

Cách tìm vi phân :

C1: lấy vi phân pt đã cho và giải tìm dy (dz).

C2: tính vi phân từ đạo hàm.

VÍ DỤ

Cho *y* = *y(x)* xác định từ pt: $e^y + xy - e = 0$ (1)

Tìm *y'*(0).

<u>Cách 1</u>: Lấy đạo hàm pt đã cho theo *x*:

$$y'e^y + y + xy' = 0 \quad (2)$$

$$x = 0, (1) \Rightarrow y = 1,$$

$$(2) \Rightarrow y'(0) = -e^{-1}$$

Cách 2: $F\left(x,y\right)=e^{y}+xy-e=0$

$$(1)\Leftrightarrow F(x,y)=0$$

$$y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}\quad=-\frac{y}{e^{y}+x}$$

$$\Rightarrow y'(0)=-\frac{1}{e+0}=-e^{-1}$$

2. Tìm đạo hàm cấp 2 tại $x = 1$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi pt:

$$y^3 + x^2 y - x + 1 = 0 \quad (1)$$

Lấy đạo hàm (1) theo x

$$3y^2.y' + 2xy + x^2 y' - 1 = 0 \quad (2)$$

Lấy đạo hàm (2) theo x

$$3\left[2y.(y')^2 + y^2 y''\right] + 2(y + xy') + 2xy' + x^2 y'' = 0 \quad (3)$$

$$y^3 + x^2 y - x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3y^2.y' + 2xy + x^2 y' - 1 = 0 \ (2)$$

$$6y.(y')^2 + 3y^2 y'' + 2(y + xy') + 2xy' + x^2 y'' = 0 \ (3)$$

$$x = 1 \xrightarrow{(1)} y(1) = 0 \xrightarrow{(2)} y'(1) = 1$$

Thay $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$ vào (3)

$$0 + 0 + 2(0 + 1) + 2 + y''(1) = 0$$

$$\Rightarrow y''(1) = -4$$

Cách 2: $$F(x,y) = y^3 + x^2 y - x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xy-1}{3y^2+x^2} \qquad (2)$$

$$x = 1 \xrightarrow{(1)} y(1) = 0 \xrightarrow{(2)} y'(1) = 1$$

$$y'' = \left(-\frac{2xy-1}{3y^2+x^2}\right)'_x$$

$$= -\frac{2(y+xy')\left(3y^2+x^2\right) - (2xy-1)(6yy'+2x)}{\left(3y^2+x^2\right)^2} \qquad (3)$$

$$y'' = -\frac{2\left(y + xy'\right)\left(3y^2 + x^2\right) - \left(2xy - 1\right)\left(6yy' + 2x\right)}{\left(3y^2 + x^2\right)^2} \qquad (3)$$

Thay $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$ vào (3)

$$y'' = -\frac{2\left(0+1\right)\left(0+1\right) - \left(0-1\right)\left(0+2\right)}{\left(0+1\right)^2} = -4$$

Ví dụ

3/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt:

$$F(x,y,z) = z - ye^{x/z} = 0 \quad (1)$$

Tìm z'_x, z'_y tại $(x, y) = (0, 1)$.

từ (1) ta có: $(x, y) = (0, 1) \Leftrightarrow z = 1$

Đạo hàm (1) theo x, theo y:

$$z'_x - y\frac{z - x.z'_x}{z^2}e^{x/z} = 0, \quad z'_y - \left(1 - y\frac{x.z'_y}{z^2}\right)e^{x/z} = 0$$

$$\Rightarrow z'_x(0,1) = 1, \quad z'_y(0,1) = 1$$

Cách 2 : $F(x,y,z) = z - ye^{x/z} = 0$ (1)

từ (1) ta có: $(x, y) = (0, 1) \Leftrightarrow z = 1$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\frac{y}{z}e^{x/z}}{1+\frac{yx}{z^2}e^{x/z}} \Rightarrow z'_x(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{x/z}}{1+\frac{yx}{z^2}e^{x/z}} \Rightarrow z'_y(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

Ví dụ

4/ Cho z = z(*x*, *y*), thỏa pt:

$$F(x, y, z) = xy - \sinh(x + y - z) = 0 \quad (1)$$

Tìm z''_{xx}, z''_{xy} tại $(x, y) = (1, 0)$.

$$(x, y) = (1, 0) \Rightarrow z = 1$$

Đạo hàm pt theo *x* 2 lần :

$$y - (1 - z'_x)\cosh(x + y - z) = 0 \quad (2)$$

$$z''_{xx}.\cosh(x + y - z) - (1 - z'_x)^2 \sinh(x + y - z) = 0$$

$$(x,y)=(1,0)\Rightarrow z=1$$

$$y-(1-z'_x)\cosh(x+y-z)=0 \quad (2)$$

$$z''_{xx}.\cosh(x+y-z)-(1-z'_x)^2\sinh(x+y-z)=0$$

$$\Rightarrow z'_x(1,0)=1\Rightarrow z''_{xx}(1,0)=0$$

$$x-(1-z'_y)\cosh(x+y-z)=0 \quad (3)$$

$$1+z''_{xy}.\cosh(x+y-z)-(1-z'_x)(1-z'_y)\sinh(x+y-z)=0$$

$$\Rightarrow z'_y=0\Rightarrow z''_{xy}=-1$$

Ví dụ

4/ Cho z = z(*x*, *y*), thỏa pt:

$$F(x,y,z) = xy - \sinh(x+y-z) = 0 \quad (1)$$

Tìm z''_{xx}, z''_{xy} tại $(x, y) = (1, 0)$.

$$(x,y) = (1,0) \Rightarrow z = 1$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y - \cosh(x+y-z)}{ch(x+y-z)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x - \cosh(x+y-z)}{\cosh(x+y-z)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x(1,0) = 1, \\ z'_y(1,0) = 0 \end{cases}$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y - \cosh(x+y-z)}{\cosh(x+y-z)}$$

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(-\frac{y - \cosh(x+y-z)}{\cosh(x+y-z)}\right)'_x$$

$$= -\frac{\left[y - \cosh(.)\right]'_x .\cosh(.) - \left[\cosh(.)\right]'_x .\left[y - \cosh(.)\right]}{\cosh^2(.)}$$

$$= -\frac{-(1 - z'_x)\sinh(.)\cosh(.) - \left[y - \cosh(.)\right](1 - z'_x)\sinh(.)}{\cosh^2(x+y-z)}$$

$$z''_{xx} = -\frac{-(1-z'_x)\sinh(.)\cosh(.) - \left[y-\cosh(.)\right](1-z'_x)\sinh(.)}{\cosh^2(x+y-z)}$$

$$\begin{cases} z'_x(1,0) = 1, \\ z'_y(1,0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z''_{xx}(1,0) = -\frac{-(1-1).0.1-(0-1)(1-1).0}{1} = 0$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y - \cosh(x+y-z)}{\cosh(x+y-z)} \qquad \begin{cases} z'_x(1,0) = 1, \\ z'_y(1,0) = 0 \end{cases}$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(-\frac{y - \cosh(x+y-z)}{\cosh(x+y-z)}\right)'_y$$

$$= -\frac{\left[1-(1-z'_y)\sinh(.)\right]\cosh(.) - \left[y - \cosh(.)\right](1-z'_y)\sinh(.)}{\cosh^2(x+y-z)}$$

$$\Rightarrow z''_{xy}(1,0) = -\frac{[1-(1-0).0].1-(0-1)(1-0).0}{1} = -1$$

Ví dụ

5/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt:

$$F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm $dz(1, -2)$ nếu $z(1, -2) = 2$

❖ Lấy vi phân pt (1):

$$dF = 3z^2 dz - 4z dx - 4x dz + 2y dy = 0 \qquad (2)$$

Thay $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$ vào (2):

$$12 dz(1,-2) - 8 dx - 4 dz(1,-2) - 4 dy = 0$$

$$\Rightarrow dz(1,-2) = dx + \frac{1}{2} dy$$

$$dF = 3z^2dz - 4zdx - 4xdz + 2ydy = 0 \qquad (2)$$

❖ Lấy vi phân pt (2):

$$d^2F = d\left(3z^2dz - 4zdx - 4xdz + 2ydy\right) = 0$$

(Vì x, y là biến độc lập nên dx = dy = hằng)

$$d^2F = 3\left(2zdz^2 + z^2d^2z\right) - 4dzdx$$

$$-4\left(dxdz + xd^2z\right) + 2dy^2 = 0 \quad (3)$$

$$d^2F = 3\left(2zdz^2 + z^2d^2z\right) - 4dzdx$$

$$-4\left(dxdz + xd^2z\right) + 2dy^2 = 0 \qquad (3)$$

Thay $x = 1, y = -2, z = 2, dz\left(1,-2\right) = dx + \frac{1}{2}dy$ vào (3)

$$d^2z(1,-2) = -\frac{1}{2}dx^2 - dxdy - \frac{5}{8}dy^2$$

Ví dụ

6/ Cho z = z(x, y), thỏa pt:

$F = f(x+z, y) = 0$ với f là hàm khả vi cấp 2.

Tìm z'_x, z'_y

Đặt $u = x + z, v = y \Rightarrow F(x, y, z) = f(u, v) = 0$

$$F'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x = f'_u, \quad F'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y = f'_v$$

$$F'_z = f'_u.u'_z + f'_v.v'_z = f'_u$$

$$z'_x = -\frac{f'_u}{f'_u} = -1, \qquad z'_y = -\frac{f'_v}{f'_u}, \quad z''_{xx} = 0$$

$$z'_y = -\frac{f'_v}{f'_u} \qquad u = x + z,\ v = y$$

$$z''_{yy} = -\left(\frac{f'_v}{f'_u}\right)'_y$$

$$= -\frac{\left(f''_{vu}.u'_y + f''_{vv}.v'_y\right).f'_u - \left(f''_{uu}.u'_y + f''_{uv}.v'_y\right).f'_v}{\left(f'_u\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(f''_{vu}.z'_y + f''_{vv}\right).f'_u - \left(f''_{uu}.z'_y + f''_{uv}\right).f'_v}{\left(f'_u\right)^2}$$

$$z''_{yy} = -\frac{\left(f''_{vu}.z'_y + f''_{vv} \right) \cdot f'_u - \left(f''_{uu}.z'_y + f''_{uv} \right) \cdot f'_v}{\left(f'_u \right)^2}$$

Ta có: $z'_y = -\dfrac{f'_v}{f'_u}$

$$z''_{yy} = -\frac{\left(f''_{vu} \cdot \left(-\dfrac{f'_v}{f'_u} \right) + f''_{vv} \right) \cdot f'_u - \left(f''_{uu} \cdot \left(-\dfrac{f'_v}{f'_u} \right) + f''_{uv} \right) \cdot f'_v}{\left(f'_u \right)^2}$$

Ví dụ: Bán kính của trụ tròn tăng với tốc độ 0,2(cm/s), chiều cao giảm với tốc độ 0,1 (cm/s). Tìm tốc độ biến thiên của thể tích trụ tròn theo thời gian, biết bán kính trụ tròn là 20 (cm) và chiều cao là 40 (cm).

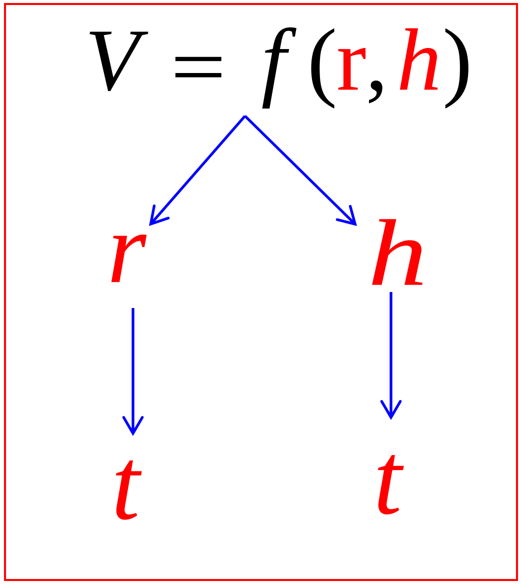
$$V = \pi r^2.h$$

$$V'(t) = V'_r.r'(t) + V'_h.h'(t)$$

$$= 2\pi rh.r'(t) + \pi r^2.h'(t)$$

$$= 2\pi.20.40.0,2 + \pi.20^2.(-0,1)$$

$$= 280\pi\left(cm^3/s\right)$$



Vậy thể tích tăng $280\pi\left(cm^3/s\right)$

Đạo hàm và vi phân cấp 2 của hàm ẩn:

$y=f(x)$:

Cách 1: lấy đạo hàm hoặc vi phân 2 lần trên phương trình và giải tìm y'' hoặc d^2y

Cách 2: tính từ y''.

$z=f(x, y)$

Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} và d^2z từ z'_x, z'_y và dz