ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

PHẦN 3

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa:

Cho hàm f xác định trong lân cận M_0 và một hướng cho bởi vector $\vec{a}$.

Đạo hàm của f theo hướng $\vec{a}$ tại M_0:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(M_0 + t.\vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t}$$

$\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}}$ chỉ tốc độ thay đổi của f theo hướng $\vec{a}$

Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Xét đường cong $L : z(t) = f\left(M_0 + t\vec{a}\right)$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(M_0 + t.\vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{z(t) - z(0)}{t} = z'(0)$$

là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong L tại M_0.

Định lý (cách tính đạo hàm theo hướng)

Nếu hàm f khả vi tại M_0, $\vec{e} = (e_1, e_2)$ là vector đơn vị, đạo hàm theo hướng $\vec{e}$ tại M_0 tồn tại, khi đó:

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} e_2}$$

Hàm 3 biến cũng được tính tương tự.

Công thức tổng quát

$\vec{a}$ là vector tùy ý:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 2 biến)

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{a_2}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 3 biến)

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm theo hướng dương của trục Ox tại điểm (-2,1) của hàm số

$$f(x,y) = xy^2 - 2x^2y$$

Vector đơn vị theo hướng dương của Ox là:

$$\vec{e} = (1,0)$$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial \vec{e}} = f'_x(-2,1).1 + f'_y(-2,1).0$$

$$= \quad 9.1 \quad -12.0 \quad = 9$$

2. Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{a} = (1,1,-1)$ tại

$M = (2,1,2)$ của $\quad f(x,y,z) = x^2 + 2xz - 3y^2z^3$

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{a}} = f'_x(M).e_1 + f'_y(M).e_2 + f'_z(M).e_3$$

$$= 0.\frac{1}{\sqrt{3}} + 6.\frac{1}{\sqrt{3}} + (-9).\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

Vector Gradient

Gọi $\vec{i}, \vec{j}\left(, \vec{k}\right)$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ, f có các đạo hàm riêng tại $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Gradient của f tại M_0 là:

$$\nabla f\left(M_0\right) = grad\left(M_0\right) = \left(f'_x\left(M_0\right), f'_y\left(M_0\right)\right)$$

$$= f'_x\left(M_0\right).\vec{i} + f'_y\left(M_0\right).\vec{j}$$

Liên hệ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} e_2 = \left(\nabla f(M_0), \vec{e}\right)$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \left\|\vec{e}\right\| . \cos\varphi = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \cos\varphi$$

φ là góc giữa $\quad grad f(M_0)$ & $\vec{e}$

$\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

Tổng quát

Hướng của vector gradient là hướng mà hàm f tăng nhanh nhất.

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \left(\nabla f\left(M_0\right), \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}\right)$$

Ví dụ

1/ Tìm $\quad grad\, f(2,-3,0),\ \dfrac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}}$

Với: $f\left(x,y,z\right)=x.e^{yz},\ \vec{a}=(2,-3,0)$

$$\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(f'_x,f'_y,f'_z\right)=\left(e^{yz},xze^{yz},xye^{yz}\right)$$

$$\nabla f(2,-3,0)=\left(1,0,-6\right)$$

$$\frac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}}=\nabla f(2,-3,0).\frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}=\left(1,0,-6\right).\frac{\left(2,-3,0\right)}{\sqrt{13}}$$

2/ Cho $f(x,y)=x^2y+\arctan(x+y), \vec{a}=(1,-1)$

a/ Tìm $\nabla f(1,1)$

b/ Tìm $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,1)$

a/ $\nabla f(x,y)=(f'_x, f'_y)=\left(2xy+\dfrac{1}{1+(x+y)^2}, x^2+\dfrac{1}{1+(x+y)^2}\right)$

$$\Rightarrow \nabla f(1,1)=\left(\frac{11}{5},\frac{6}{5}\right)$$

b/

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,1) = \left\langle \nabla f(1,1), \vec{e} \right\rangle$$

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{11}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

$$\vec{a} = (1,-1) \Rightarrow \vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,1) = \left\langle \nabla f(1,1), \vec{e} \right\rangle = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3/ Cho $f(x,y) = x^3 - xy - y^4, M_0(1,-1)$

a/ Tính vận tốc biến thiên của hàm số đó theo hướng từ M_0 đến $M_1(5,4)$

b/Giá trị f(x,y) giảm nhanh nhất khi đi qua điểm M_0 theo hướng vector đơn vị nào? Tính giá trị đó.

a/ $$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{M_0M_1}}(M_0) = \left\langle \nabla f(M_0), \vec{e} \right\rangle$$

$$\nabla f = \left(3x^2 - y, -x - 4y^3\right) \Rightarrow \nabla f(1,-1) = (4,3)$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (4,5) \Rightarrow \vec{e} = \left(\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{M_0M_1}}(M_0) = \left\langle (4,3), \left(\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}}\right) \right\rangle = 4.\frac{4}{\sqrt{41}} + 3.\frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{31}{\sqrt{41}}$$

b/ $\nabla f(1,-1) \uparrow\downarrow \vec{e}$

$$M_0 = (1,-1) \Rightarrow \vec{u} = (x-1, y+1)$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}, \frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} \right)$$

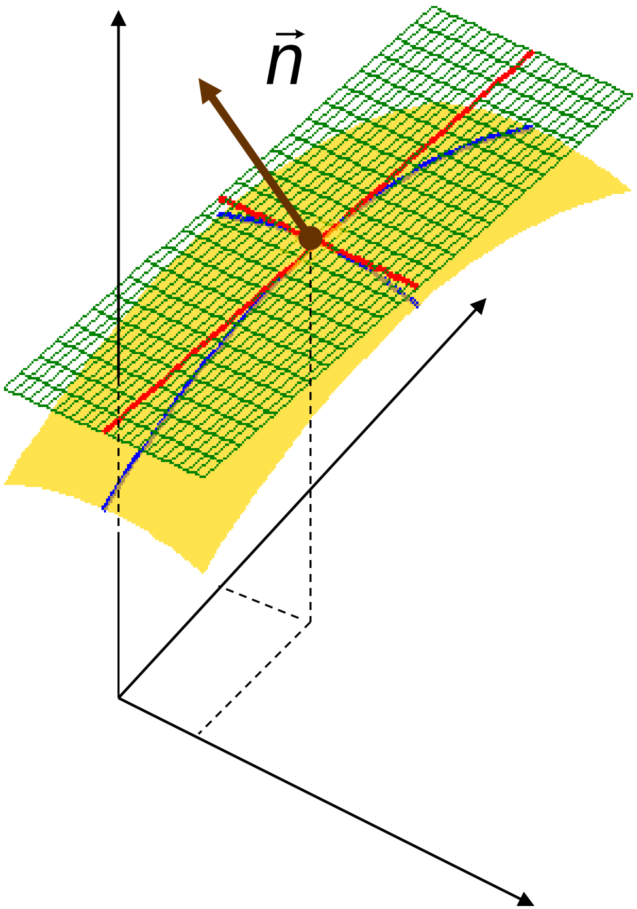
$$\nabla f(1,-1) \uparrow\downarrow \vec{e} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}, \frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} \right) = k(4,3), (k<0)$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5} \right), M_1 = (-3,-4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,-1) = -\left|\nabla f(1,-1)\right| = -5$$

PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG.

Cho mặt cong S: $F(x, y, z) = 0$, $M(x_0,y_0,z_0) \in S$



- L là đường cong trong S đi qua M. Tiếp tuyến của L tại M gọi là tiếp tuyến của S tại M.

- Các tiếp tuyến này cùng thuộc 1 mặt phẳng gọi là tiếp diện của S tại M.

PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG

Giả sử $L \subset S$ có pt: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$M = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$

Vector chỉ phương của tiếp tuyến tại M là :

$$\vec{u} = \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \right)$$

$M \in S$: $F(x,y,z) = 0$, ta có:

$$F'_x(M)x'(t_0) + F'_y(M)y'(t_0) + F'_z(M)z'(t_0) = 0$$

$$F'_x(M)x'(t_0) + F'_y(M)y'(t_0) + F'_z(M)z'(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right) \perp \left(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\right)$$

$\Rightarrow \vec{u} \perp gradF\left(M\right)$ (với mọi đường cong trong S và qua M)

grad F(*M*) là pháp vector của tiếp diện của *S* tại *M*.

- Pháp vector của tiếp diện còn gọi là pháp vector của mặt cong *S*.

Phương trình pháp tuyến

$$S : F(x, y, z) = 0,\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$\boxed{\frac{x - x_M}{F'_x(M)} = \frac{y - y_M}{F'_y(M)} = \frac{z - z_M}{F'_z(M)}}$$

$$S : z = f(x, y),\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$\boxed{\frac{x - x_M}{f'_x(M)} = \frac{y - y_M}{f'_y(M)} = \frac{z - z_M}{-1}}$$

Phương trình tiếp diện

$$S : F(x, y, z) = 0,\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$F'_x(M)(x - x_M) + F'_y(M)(y - y_M) + F'_z(M)(z - z_M) = 0$$

$$S : z = f(x, y),\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$z - z_M = f'_x(M)(x - x_M) + f'_y(M)(y - y_M)$$

Ví dụ

1/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$a.\ M=\left(0,0,2\right)$$

$$b.\ M=\left(1,\sqrt{3},0\right)$$

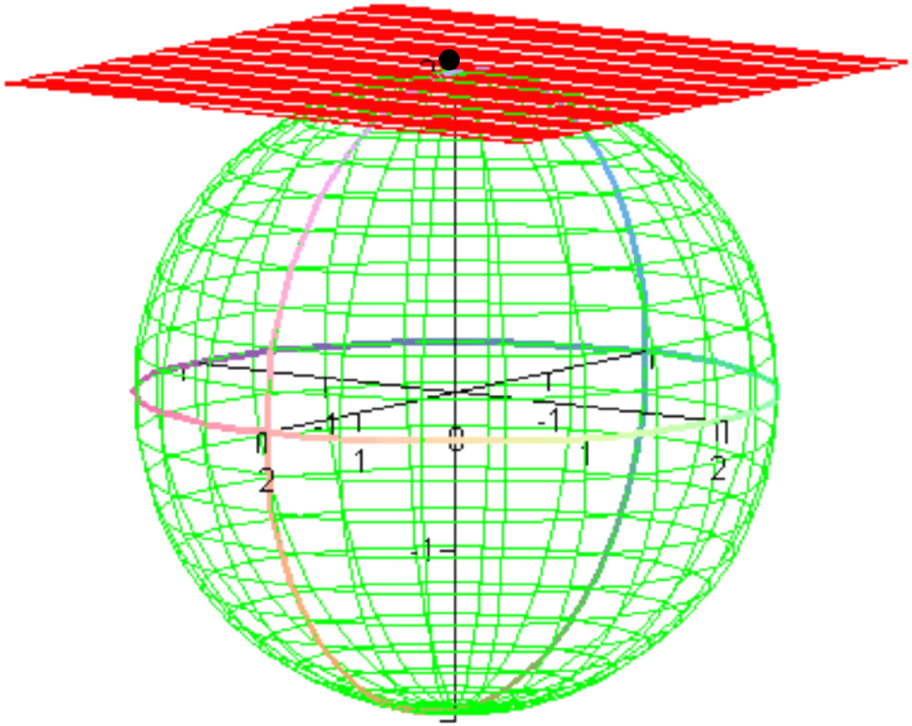
$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-4=0$$

$$gradF\left(x,y,z\right)=\left(2x,2y,2z\right)$$

$$a.\ gradF(0,0,2)=(0,0,4)$$

$$(T):(x-0).0+(y-0).0+(z-2).4=0$$

$$\Leftrightarrow z=2$$



$$a.\ gradF\left(1,\sqrt{3},0\right)=\left(2,2\sqrt{3},0\right)$$

$$\left(T\right):\left(x-1\right).2+\left(y-\sqrt{3}\right).2\sqrt{3}+\left(z-0\right).0=0$$

$$\Leftrightarrow x+y\sqrt{3}-4=0$$