ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 1: Cho mặt cong S có phương trình

$$z = \cosh\left(2xy^2 - x^3 + y^2 + x\right) - xy - 1$$

Và điểm $M\left(-2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \in S$

1/ Viết vecto pháp của mặt cong tại M

2/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt S tại M

$$F'_x(M)x'(t_0)+F'_y(M)y'(t_0)+F'_z(M)z'(t_0)=0$$

$$\Rightarrow\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)\perp\left(F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M)\right)$$

$\Rightarrow \vec{u}\perp gradF\left(M\right)$ (với mọi đường cong trong S và qua M)

grad F(*M*) là pháp vector của tiếp diện của *S* tại *M*.

- Pháp vector của tiếp diện còn gọi là pháp vector của mặt cong *S*.

Phương trình tiếp diện

$$S : F(x, y, z) = 0,\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$F'_x(M)(x - x_M) + F'_y(M)(y - y_M) + F'_z(M)(z - z_M) = 0$$

$$S : z = f(x, y),\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$z - z_M = f'_x(M)(x - x_M) + f'_y(M)(y - y_M)$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

<u>Ví dụ 1:</u> Cho mặt cong S có phương trình

$$z = \cosh\left(2xy^2 - x^3 + y^2 + x\right) - xy - 1$$

Và điểm $M\left(-2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \in S$

1/ Viết vecto pháp của mặt cong tại M

2/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt S tại M

$1/\ \vec{n} = \ -\sqrt{2}; 2; -1$

$2/\ -\sqrt{2}\ \ x+2\ \ +2\ \ y-\sqrt{2}\ \ -\ \ z-2\sqrt{2}\ \ =0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}x + 2y - z - 2\sqrt{2} = 0$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 2: Cho mặt cong S có phương trình z=f(x,y) (hàm f có các đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm thuộc miền xác định), điểm $M(1,-2,2) \in S$ và 2 vecto $\vec{u}(3,4), \vec{v}(4,-3)$

Biết $f'_{\vec{u}}(1,-2) = 2,\ f'_{\vec{v}}(1,-2) = 1$

1/ Viết công thức tính đạo hàm theo hướng

2/ Tính $f'_x(1,-2),\ f'_y(1,-2)$

3/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt S tại M

1/ Công thức tính đạo hàm theo hướng:

$$f'_{\vec{a}}(x_0, y_0) = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right\rangle = f'_x(x_0, y_0)\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + f'_y(x_0, y_0)\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

2/ Tính $f'_x(1, -2), f'_y(1, -2)$

$$f'_x(1, -2) = 2,\ f'_y(1, -2) = 1$$

3/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt S tại M

$$2(x-1) + (y+2) - (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 3: Đạo hàm của hàm f(x,y,z) tại một điểm P đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{3}$ theo hướng vecto $\vec{v} = (1,1,-1)$. Tìm $\nabla f(P)$.

A. $\nabla f(P) = (1,1,-1)$

B. $\nabla f(P) = -2(1,1,-1)$

C. $\nabla f(P) = -(1,1,-1)$

D. $\nabla f(P) = 2(1,1,-1)$

Chọn D

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 4: Đặt một đĩa phẳng kim loại trong một hệ trục tọa độ Oxy. Nhiệt độ tại mỗi điểm trên đĩa được cho bởi công thức $T(x,y) = x^2 + xy^2$. Trên đĩa có một hạt tìm nhiệt được thiết kế để luôn di chuyển theo hướng nhiệt tăng nhanh nhất. Khi đặt hạt tại điểm M(1,2) nó sẽ di chuyển theo hướng nào?

A. $\vec{i} + 2\vec{j}$ B. $\vec{i} - \vec{j}$ C. $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ D. $3\vec{i} + 2\vec{j}$

Chọn D

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 5: Cho hàm z=f(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục và các điểm A(1,1), B(4,1), C(1,0), D(4,5). Cho biết tại điểm A, đạo hàm của hàm f theo hướng vecto $\overrightarrow{AB}$ là 4 và theo hướng vecto $\overrightarrow{AC}$ là 7. Tính đạo hàm tại A của hàm f theo hướng vecto $\overrightarrow{AD}$.

A. $-\dfrac{16}{5}$ B. 8 C. -16 D. 40

Chọn A

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 6: Biết tiếp diện của mặt (S) $z = x^2 + y^2$ tại điểm M có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (2,4,-1)$. Tìm tọa độ điểm M?

A. $M(1,2,5)$

C. $M(1,-2,5)$

B. $M(-1,-2,5)$

D. $M(-1,2,5)$

Chọn A

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 7: Cho hàm số

$$f(x,y) = 6x^2y^2 - 2mx^3 + m^2xy^2 - 6y^3$$

Tìm tất cả các giá trị thực m để $\nabla f(3,-2)$ vuông góc với vecto (2,1).

$$\nabla f(3,-2) = (4m^2 - 54m + 144, -12m^2 - 288)$$

$$\nabla(3,-2) \perp (2,1) \Leftrightarrow 4m^2 + 108m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = -27$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Ví dụ 8: Cho hàm số

$$f(x,y,z) = xz^3 - 3x^2 + 4xy - 4y - 12z + 3$$

Tìm tất cả các điểm M(x,y,z) mà tại đó hướng tăng nhanh nhất của f là $\vec{u} = (1,0,0)$

ĐS: $M\left(1, 2, \frac{k-2}{4}\right)$ hay $M\left(1, -2, \frac{k+14}{4}\right), k \in \mathbf{R}$