Chương 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Phần 1: Đạo hàm riêng cấp 1 và cấp cao

Dạng. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ví dụ 1.1: Cho $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Tính $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.

Ví dụ 1.1: Cho $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Tính $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.

Hàm f xác định tại mọi (x,y)

$$f'_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+y^3\right)^2}}, f'_y(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+y^3\right)^2}}, \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Công thức trên không đúng cho (x, y) = (0, 0)

Ví dụ 1.1: Cho $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Tính $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.

Đưa về hàm 1 biến

- Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$f(x,0) = \sqrt[3]{x^3 + 0^3} = x = g(x), g'(x) = 1 \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$f(0,y) = \sqrt[3]{0^3 + y^3} = y = g(y), g'(y) = 1 \Rightarrow g'(0) = 1$$

Vậy $f'_x(0,0) = 1$

Tương tự: $f'_y(0,0) = 1$

Ví dụ 1.2: Cho

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tính $f'_x(0,0)$

$f'_y(0,0)$

$$f(x,0)=\frac{x^3}{x^2}=x=g(x), g'(x)=1\Rightarrow g'(0)=1$$

$$f(0,y)=\frac{-y^3}{y^2}=-y=g(y), g'(y)=-1\Rightarrow g'(0)=-1$$

Vậy $f'_x(0,0)=1, f'_y(0,0)=-1,$

Dạng . Tính đạo hàm bằng công thức

Ví dụ 2.1: Cho $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{1+x^2}$. Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$.

$$f'_x(x,y)=\frac{\dfrac{-2xy}{\left(1+x^2\right)^2}}{1+\dfrac{y^2}{\left(1+x^2\right)^2}}=\frac{-2xy}{\left(1+x^2\right)^2+y^2}$$

$$f(x,1)=\arctan\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2+y^2}$$

$$f(1,y)=\arctan\frac{y}{2}$$

Vậy $f'_x(1,1)=\dfrac{-2}{5}, f'_y(1,1)=\dfrac{2}{5}$

Ví dụ 2.2: Cho $f(x,y,z) = xe^{y} + ye^{z} + ze^{-x}$

Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,1,0)$

$$f'_x = e^{y} - ze^{-x}$$

$$f'_y = xe^{y} + e^{z}$$

$$f'_z = ye^{z} + e^{-x}$$

Vậy $f'_x(0,1,0) = e$

$$f'_y(0,1,0) = 1$$

$$f'_z(0,1,0) = 2$$

Ví dụ 2.3: Cho $f(x,y)=\sin(x-y)+\cos(x+y)$

Chọn đáp án đúng

A. $f''_{xx}-f''_{yy}=0$

B. $f''_{xx}+f''_{yy}=0$

C. $f''_{xx}-f''_{yy}=-2\cos(x+y)$

D. $f''_{xx}-f''_{yy}=-2\sin(x+y)$

$$f'_x=\cos(x-y)-\sin(x+y);\ f'_y=-\cos(x-y)-\sin(x+y)$$

$$f''_{xx}=-\sin(x-y)-\cos(x+y)$$

$$f''_{yy}=-\sin(x-y)-\cos(x+y)$$

$\Rightarrow$ A. $f''_{xx}-f''_{yy}=0$

Dạng: Bài toán thực tế

Ví dụ 4.1:

Chỉ số lạnh do gió W được mô hình hóa bởi hàm số:

$$W(T,v)=13.12+0.6215T-11.37v^{0.16}+0.3965Tv^{0.16}$$

Trong đó, T là nhiệt độ môi trường $({}^{0}C)$ và v là tốc độ gió (km/h). Tại $T=30\,{}^{0}C, v=20(km/h)$, tìm tốc độ biến thiên của chỉ số lạnh do gió W khi nhiệt độ môi trường tăng $1\,{}^{0}C$

$$W_T'=0.6215+0.3965v^{0.16}$$

$$\Rightarrow W_T'(30,20)\approx 1.26$$

Tăng 1.26 $({}^{0}C)$

Dạng: Bài toán thực tế

Ví dụ 4.2:
Giả sử rằng trọng lượng w (pound) của một người là hàm w = f(c,n), trong đó c là số calo tiêu thụ và n là số phút tập thể dục của người đó hàng ngày. Hỏi với mức tiêu thụ 2000 calo và 15 phút tập thể dục mỗi ngày thì trọng lượng của người này thay đổi thế nào, biết $f_c'(2000,15) = 0.02$

A. Sẽ nặng thêm khoảng 0.02 pound cho một calo tiêu thụ hàng ngày. ⟶ Chọn A

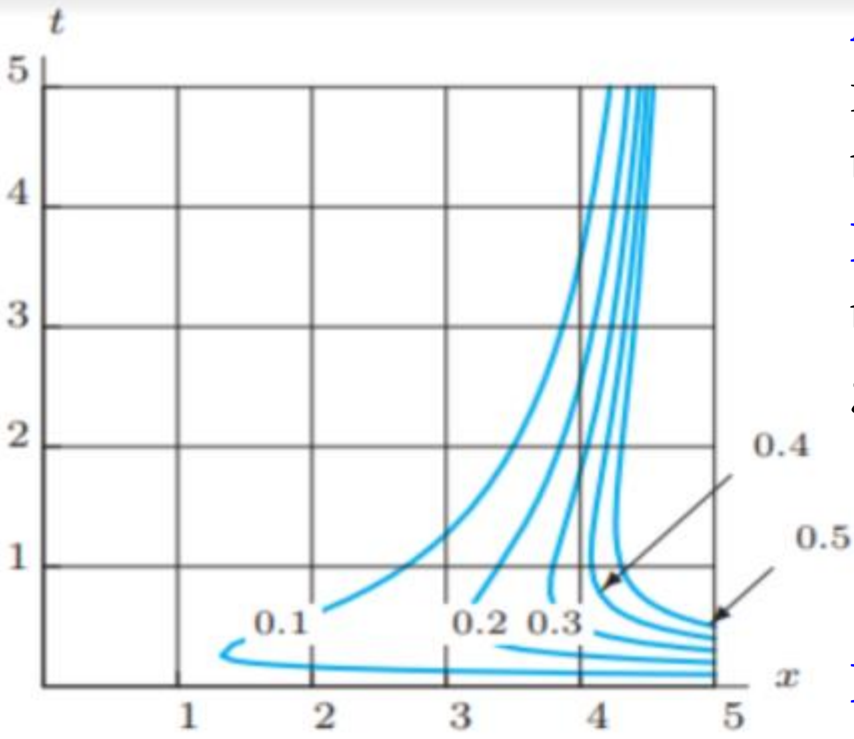
B. Sẽ nặng thêm khoảng 0.02 pound mỗi ngày.

C. Sẽ nặng thêm khoảng 0.02 pound cho một phút tập thể dục hàng ngày.

D. Sẽ giảm được khoảng 0.02 pound mỗi ngày.

Ví dụ 4.3:

Nồng độ C của một loại thuốc trong máu bệnh nhân được cho bởi hàm C = f(x,t) có bản đồ mức được cho trong hình, trong đó x là lượng thuốc được tiêm (mg) và t là số giờ kể từ khi tiêm. Tìm câu trả lời đúng.



A. $f(3,1) \approx 0.15$, tức là lượng thuốc trong máu bệnh nhân là khoảng 0.15mg sau 1 giờ tiêm 3mg thuốc.

B. $f(3,1) \approx 0.15$, tức là nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân là khoảng 0.15 sau 3 giờ tiêm 1mg thuốc.

C. $f(3,1) \approx 0.15$, tức là nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân là khoảng 0.15 sau 1 giờ tiêm 3mg thuốc.

D. Các câu kia đều sai.

Chọn C

Ví dụ 4.4:

Sử dụng bảng các giá trị của f(x,y) để ước tính giá trị của

$$f'_x(3,2);\ f'_x(3,2.2);\ f''_{xy}(3,2)$$

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

$$f'_x(3,2) \approx 12.2;\ f'_x(3,2.2) \approx 16.8;\ f''_{xy}(3,2) \approx 23.25$$

Ví dụ 4.5:

Chỉ số lạnh do gió W là nhiệt độ cảm nhận khi nhiệt độ thật là T (^0C)và tốc độ gió là v (km/h) cho bởi W=f(T,v)

a/ Tìm $f'_T(-15,30)$ và nêu ý nghĩa

b/ Tìm $f'_v(-15,30)$ và nêu ý nghĩa

T \ v	20	30	40	50	60
-10	-18	-20	-21	-22	-23
-15	-24	-26	-27	-29	-30
-20	-30	-33	-34	-35	-36
-25	-37	-39	-41	-42	-43

Ví dụ 4.5:

$$f'_T(-15,30) \approx 1.3$$

Với nhiệt độ là -15^0C và vận tốc gió là 30 km/h thì chỉ số lạnh do gió tăng 1.3 cứ mỗi độ tăng lên của nhiệt độ.

$$f'_v(-15,30) \approx -0.15$$

Với nhiệt độ là -15^0C và vận tốc gió là 30 km/h thì chỉ số lạnh do gió giảm 0.15 cứ mỗi km/h tăng lên của vận tốc gió.

Miền xác định hàm 2 biến $f(x,y)$

Miền xác định D: tập hợp các điểm $(x,y) \in R^2$ sao cho $f(x,y)$ có nghĩa.

Ví dụ: Tìm MXĐ $f(x,y) = x^2 \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$

$$4 - x^2 - 4y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 < 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 < 1$$

Tập hợp những điểm nằm trong elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1$

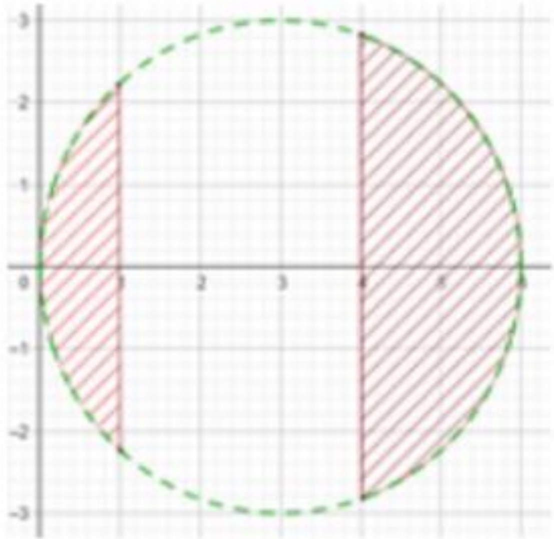
Bài tập

Tìm MXĐ $$f\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x+y}$$

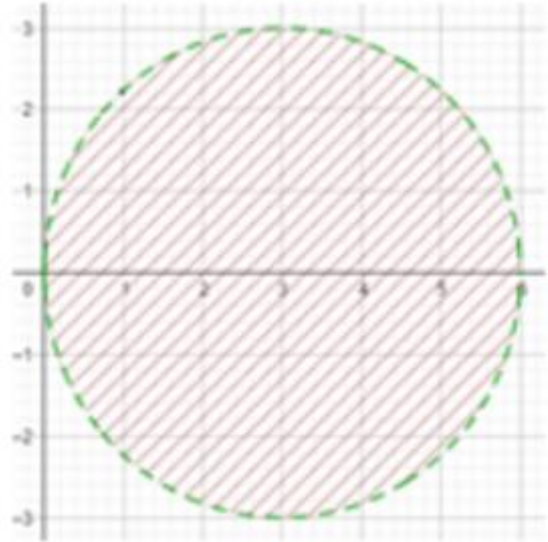
$$D=\left\{\left(x,y\right)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 9, y\ne -x\right\}$$

Bài tập

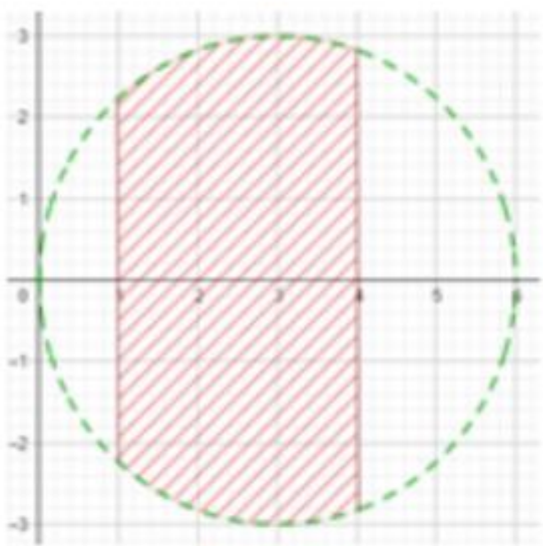
Tìm MXĐ $f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}+\ln\left(6x-x^2-y^2\right)$



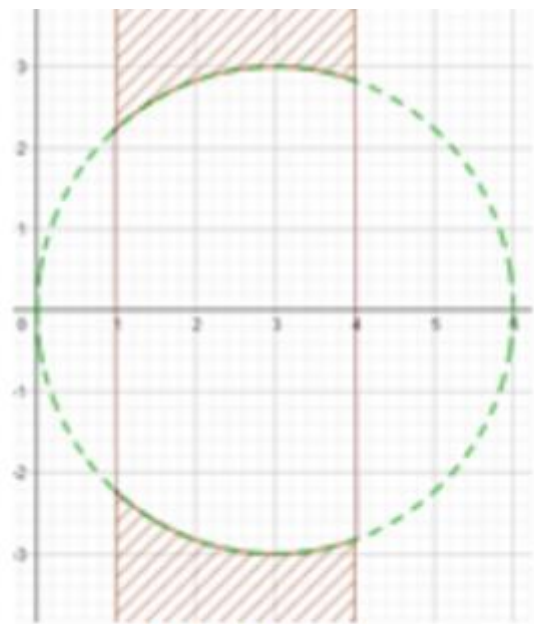
Hình 1



Hình 2



Hình 3

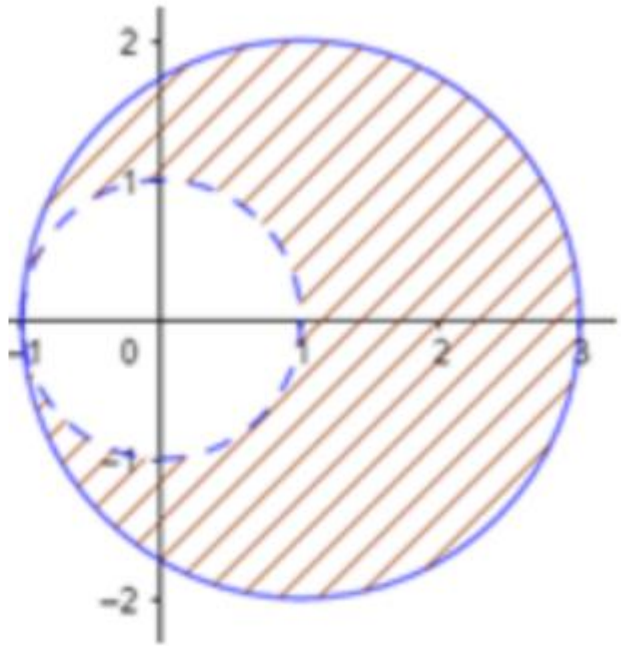


Hình 4

Bài tập

Tìm MXĐ

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{4-(x-1)^2-y^2}{\ln(x^2+y^2)}}$$



Hình 3