# Д/З к уроку № 7

**①** Найти интервалы возр. и убыв. ф-и.

1) $f(x) = x + e^{-x}$

$f'(x) = 1 - e^{x}$

$f'(x) = 0$ в т. $x = 0$ – стац. точки

$$\underset{\quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad\quad\quad}{+ \quad\quad\quad\quad -} \quad f'(x)$$

$(-\infty; 0)$ – ф-я ↘

$(0; +\infty)$ – ф-я ↗

$f'(-1) > 0$ , $f'(1) < 0$

2) $f(x) = x \cdot \ln x$ $\quad D(f) = (0; \infty)$

$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0$ в т. $x = 1/e$

$$\underset{\quad\quad\quad\quad 1/e \quad\quad\quad\quad}{- \quad\quad\quad\quad +} \quad f'(x)$$

$f'(0,1) \approx -1,302 < 0$

$f'(2) \approx 0,69 > 0$

3) $y = \frac{1}{1-x^2}$

$y' = + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ ; $y' = 0$ при $x = 0$ , т. $x = \pm 1$ – асимптота

$$\underset{\quad\quad -1 \quad\quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad}{- \quad\quad - \quad\quad + \quad\quad +}$$

$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ – ф-я ↘

$(0; 1) \cup (1; +\infty)$ – ф-я ↗

$y'(-2) = -\frac{4}{9} < 0$ , $y'(-0,5) = -0,64 < 0$

$y'(0,5) = 1,7 > 0$ , $y'(2) = \frac{4}{9} > 0$

**②** Найти экстремумы функции

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$ , $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$f''(\pm 1) = \pm 6$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$, $f''(-1) < 0 \Rightarrow x = -1$ – т. лок. максимума

$f'(x) = 0$, $f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ – т. лок. минимума

2) $y = e^{x^2-4x+5}$

$y' = e^{x^2-4x+3}\cdot(x^2-4x+5)' = e^{x^2-4x+5}(2x-4)$

$y'(x)=0$ в т. $x=2$

$y''(x) = (e^{x^2-4x+5})'(2x-4) + e^{x^2-4x+5}\cdot(2x-4)' = e^{x^2-4x+5}\cdot((2x-4)^2+2)$

$y''(2) = e\cdot 2 = 2e$

$y'(2)=0$, $y''(2)>0$ $\Rightarrow$ $x=2$ – т. локального мінімума

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$

$y' = 1-\frac{1}{1+x^2}$, $y'(0)$ – не существует $\Rightarrow$ нет лок. мин. и макс.

$x=0$ – является критической точкой.

③ Найти интервалы выпуклости и т. перегиба.

1) $f(x)=e^{-x^2}$

$f'(x) = (-x^2)'\cdot e^{-x^2} = -2x\cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = (-2x)'\cdot e^{-x^2} + (-2x)\cdot(e^{-x^2})' = -2\cdot e^{-x^2} + 4x^2\cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\cdot(2x^2-1)$

$f''(x)=0$ в т. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cup$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad$ $\cap$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad$ $\cup$ $\quad f''(x)$

$f''(-2) = 7 \geq 0$

$f''(0) = -1 \leq 0$ $\Rightarrow$ $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$ – ф-я $\cup$

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ – ф-я $\cap$

$f''(2) = 7 \geq 0$

2) $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$, $y''(x)=0$ в т. $x_1 = \frac{\pi}{2}+2\pi n$

$x_2 = \frac{3\pi}{2}+2\pi n$

$\cap$ $\quad \frac{\pi}{2} \quad$ $\cup$ $\quad \frac{3\pi}{2} \quad$ $\cap$ $\quad f''(x)$

$y''(0) = -1 \leq 0$, $y''(\pi) = 1 \geq 0$, $y''(2\pi) = -1 \leq 0$

$(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n)$ – ф-я $\cap$

$(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$ – ф-я $\cup$

3) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$

$y' = 5x^4 - 20x + 7$

$y'' = 20x^3 - 20$

$y''(x) = 0$ в т. $x = 1$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \cup \\ \hline & 1 & \end{array} \; y''(x)$$

$y''(0) = -20 \le 0$

$y''(2) = 140 \ge 0$

$\Rightarrow$ $(-\infty; 1)$ – ф-я $\cap$

$(1; +\infty)$ – ф-я $\cup$

④ Найти асимптоты графиков

1) $y = \dfrac{3x}{x+2}$ $\Rightarrow$ $x = -2$ т. разрыва II рода

$x = -2$ – вертик. асимптота

$\lim\limits_{x \to -2 \pm 0} \dfrac{3x}{x+2} = \pm\infty$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{x+2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x+2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 3 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} = 3$

$y = 3$ – горизонтальная асимптота.

2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$, $D(f): (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)} = \left[\lim\limits_{x \to 0+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty\right] = \dfrac{1}{e^{-\infty}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$ $\Rightarrow$ $x = 0$ – т. разрыва II рода

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}} = 1$

$y = 1$ – горизонтальная асимптота

⑤ Исследование функций

1) $y = \ln(1 - x^2)$

а) $D(f): (-1; 1)$

б) ф-я непериодическая, четная

c) $\lim\limits_{x\to -1+0} \ln(1-x^2) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1+0} (1-\overset{+0}{x^2})\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1-0} \ln(1-x^2)$ – не существует.

$\lim\limits_{x\to 1+0} \ln(1-x^2)$ – не сущ., $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln(1-x^2) = +\infty$

$\Rightarrow$ т. $x=-1$ и $x=1$ – т. разрыва II рода

d) $Ox$: $y=0 \Rightarrow \ln(1-x^2)=0 \Rightarrow x=0$

$Oy$: $x=0 \Rightarrow y=0$

e) $f(x)<0$ $(-1;0)\cup(0;1)$

f) Асимптоты $y=-1$, $y=1$

g) $y' = (\ln(1-x^2)) = \dfrac{(1-x^2)'}{1-x^2} = -\dfrac{2x}{1-x^2}$

$y'=0 \Rightarrow x=0$

$+ \nearrow$ 0 $- \searrow$ $y'$

$y'(-0{,}5) = \dfrac{1}{1-(-0{,}5)^2} > 0$

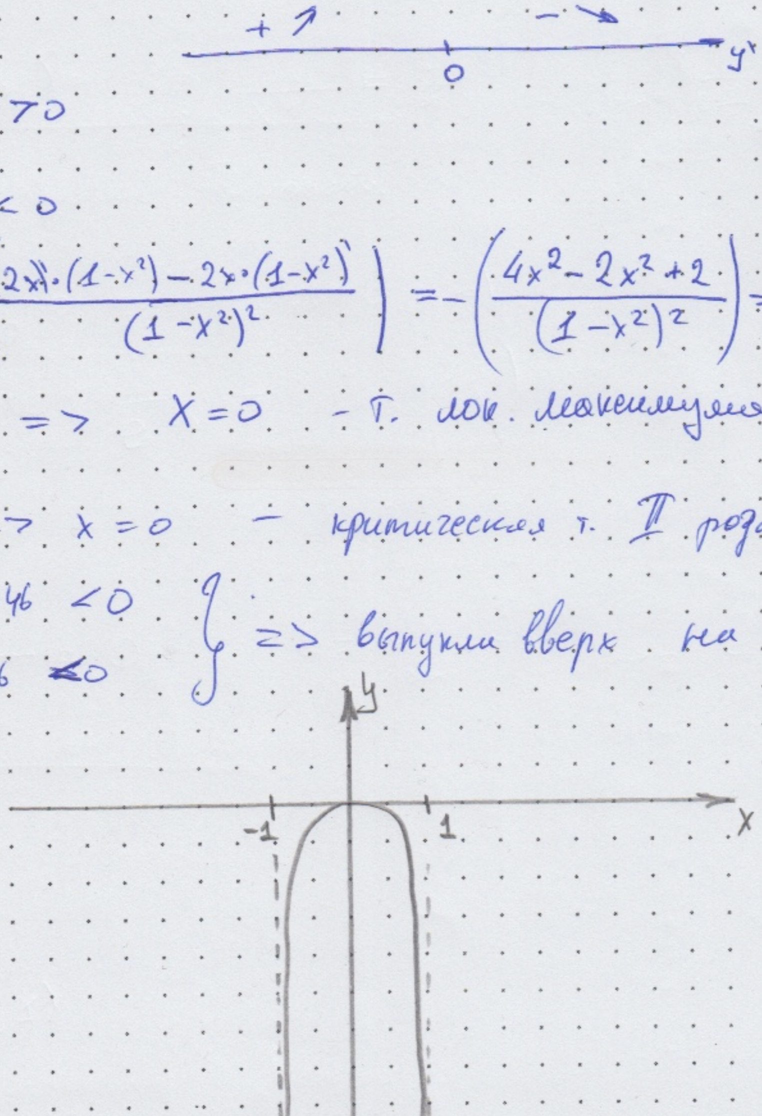
$y'(0{,}5) = \dfrac{-1}{1-0{,}5^2} < 0$

$y'' = \left(-\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = -\left(\dfrac{(2x)'\cdot(1-x^2)-2x\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}\right) = -\left(\dfrac{4x^2-2x^2+2}{(1-x^2)^2}\right) = -\left(\dfrac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}\right)$

$y''(0) = -2 \Rightarrow x=0$ – т. лок. максимума

h) $y''=0 \Rightarrow x=0$ – критическая т. II рода

$$\left.\begin{array}{l} y''(-0{,}5) \approx -4{,}46 < 0 \\ y''(0{,}5) \approx -4{,}46 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{выпуклая вверх на } D(f)$$



2) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

a) $D(f): (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

в) ф-я непериодическая, четная

c) $\lim\limits_{x \to -1+} \left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1-} \left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1+} \left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1-} \left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \quad x = \pm 1$ – т. разрыва II рода

d) $Ox: y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$Oy: y(0) = 0 \qquad O(0,0)$

e) $y(-2) = -\dfrac{4}{3}$, $y(2) = -\dfrac{4}{3}$

$y(-0{,}5) = 0(3)$

$\Rightarrow$ $f(x) < 0 \ (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $f(x) > 0 \ (-1; 1)$

f) Вертикальные асимптоты $x = 1$, $x = -1$

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1-x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^3}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = -1$

$y = -1$ – горизонтальная асимптота

g) $y' = \left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)' = \dfrac{(x^2)' \cdot (1-x^2) - x^2 \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^3}}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

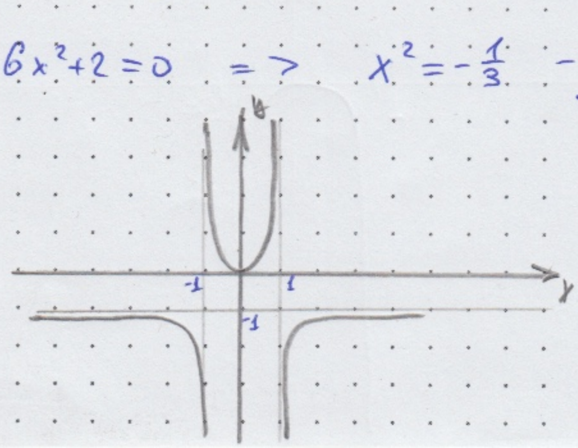
$y'(-2) = -\dfrac{4}{9} < 0$

$y'(2) = \dfrac{4}{9} > 0$

$-\searrow \quad 0 \quad + \nearrow \quad y'(x)$

$y'' = \left(\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}\right)' = \dfrac{(2x)' \cdot (1-x^2)^2 - 2x((1-x^2)^2)'}{(1-x^2)^4} = \dfrac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{1}{3}$ – не имеет решений, т. экстремума нет.




5

3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

a) $D(f): (-\infty; \infty)$

в) ф-я непериодич., ни чётная, ни нечётная

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} =$

$= 2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

ф-я не имеет точек разрыва

d) $Ox$, $Oy$ : $O(0;0)$

e) $y(1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad (-\infty; +\infty)$

f) Асимптоты $k = 0$, $b = 0 \Rightarrow y = 0$

g) $y' = (x^2 \cdot e^{-x}) = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 2$

$- \searrow \quad 0 \quad + \nearrow \quad 2 \quad - \searrow \quad y'(x)$

$y'(-1) = -3e < 0$

$y'(1) = \frac{1}{e} > 0$

$y'(3) = \frac{-3}{e^3} < 0$

$y'' = x \cdot e^{-x} \cdot (2-x) = x^2 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = 8 \quad x_1 \approx 3{,}41 \quad x_2 \approx 0{,}59$

$\cup \quad 0{,}59 \quad \cap \quad 3{,}41 \quad \cup \quad y''(x)$

$y''(0) = 2 > 0$

$y''(1) = -\frac{4}{e} < 0$

$y''(4) = \frac{2}{e^4} > 0$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $4e^2$ | $e$ | 0 | $1/e$ | $4/e^2$ |