Урок 11 Д/З

① Решить ур-я

1) $y' - y = 2x - 3$

$y' = y + 2x - 3$, $(y' = z)$

$z = y + 2x - 3$

$y = z - 2x + 3$

$y' = z' - 2$

$z = z' - 2$

$\frac{dz}{dx} = z + 2 \quad | \cdot dx$

$dz = (z+2)\,dx$

$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx$

$\int \frac{dz}{z+2} = \left| \begin{matrix} z+2 = t \\ dt = dz \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|z| + C$

$\ln|z| = x + c$

$\ln|y + 2x - 3| - x = c$

2) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

$\underbrace{x^2 y' + xy} = -1$

$x^2 y' + xy = 0$

$xy' = -y$

$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$y = \frac{c}{x}$, $y(x) \to C(x)$

$y' = \frac{C'(x) \cdot x}{x^2} - \frac{C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$

$x^2 \left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} \right) + x \cdot \frac{C}{x} = -1$

$x \cdot C'(x) = -1 \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$y = \frac{\ln\left|\frac{c}{x}\right|}{x}$

② Исследовать ряд на сходимость

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$ => ряд сходится

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ Применим правило Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n} > 1$ => ряд расходится

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, радикальный признак Коши

$\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}_{=\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} < 1$ => ряд сходится

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$ — знакочередующ. ряд

~~По~~ II-у ~~зак~~ признаку Лейбница $\lim \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\underbrace{2n-\ln(n)}_{\to\infty}} = \frac{-1}{\infty} = 0$ => ряд сходится

Исследуем при помощи инт. признака Коши, упростим $\lim\limits_{n\to\infty} 2n-\ln(n) = 2n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{2n}$

$\int_1^{\infty} \frac{-1}{2n}\,dn = \left(-\frac{\ln(n)}{2}\right)\Big|_1^{\infty} = -\infty - 0 = -\infty$ => ряд сходится условно

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$ Исп. пр. Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\overset{①}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(x-2)^{n+1}}}}{\underset{②}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n}} \cdot \underset{③}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+2)}}}$ (=)

① $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(x-2)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (x-2)^{\frac{n+1}{n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (x-2)$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$; ③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+2)^{\overset{\to 0}{\left(\frac{1}{n}\right)}} = 1$

(=) $\frac{x-2}{3\cdot 1} = \frac{x-2}{3}$ => при $x \neq 2$ — ряд сходится