# Д/З к уроку № 5

① Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+3)-\ln x]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)=\ln(1)=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{2x+O(x)}{3x+O(x)}=\frac{2}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x\ln 7+O(x)-\cancel{1}}{\cancel{1}+x\ln 3+O(x)-\cancel{1}}=\frac{\ln 7}{\ln 3}$

4) $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2a+3xa^2+a^3-\cancel{x^3}}{a}=$

$=\lim\limits_{a\to 0}\frac{\cancel{a}(3x^2+\underset{\to 0}{3xa}+\underset{\to 0}{a^2})}{\cancel{a}}=3x^2$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(5x-3)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{5x^4}-3x^3-\cancel{5x^4}-x^2}{25x^3-15x^2+5x-3}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}}{\frac{25x^3}{x^3}-\frac{15x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-3/x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{25-\underset{\to 0}{\frac{15}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}-\underset{\to 0}{\frac{3}{x^3}}}\right)=-\frac{3}{25}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot \mathrm{tg}\,2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{\overset{8}{\cancel{16}}x^2}{\cancel{2}}+O(x^2)}{2x\cdot(2x+O(x))}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2}{2x^2}=4$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{Пусть } \frac{2}{x}\to t\\ (\text{при } x\to\infty\ \ t\to 0)\\ x=\frac{2}{t}\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2}{t}\cdot\sin t=$

$=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}^{=1}=2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}\right)^{\mathrm{ctg}\,x}=e$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\left|\ln(y)=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln(\cos 2x)\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot 2\cancel{(-\sin 2x)}}{\cancel{(2\sin x\cdot\cos x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2}{\underset{\to 1}{\cos 2x}}\right)=-2\Rightarrow \ln(y)=-2\Rightarrow y=e^{-2}$

1

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-1}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+\frac{1}{2}\ln(1+x\cdot\sin x)+o(x)\cancel{-1}}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\sin x)+o(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$

2) Установить х-р разрыва ф-и в т. $x_0$

1) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4$

$\lim\limits_{x\to -4\pm 0} \dfrac{x^2-16}{x+4} = \pm\infty$, $f(x_0)$ – неопределено $\Rightarrow$ $x_0 = -4$ – точка разр. 2го рода

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $f(x_0)$ – неопределено $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ – точка устр. разрыва

3) Исследовать ф-ю на непрерывность в т. $x_0$

1) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-1}$, $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-1} = \pm\infty$ и $f(x_0)$ – неопр. $\Rightarrow$ $f(x)$ – не является непрерывной и имеет разр. 2го рода в т. $x_0$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0 = 3$

$\lim\limits_{x\to 3\pm 0} \dfrac{1}{2^{x-3}-1} = \pm\infty$ и $f(x_0)$ – неопр. $\Rightarrow$ $f(x)$ – не является непрерывной и имеет разрыв 2го рода в т. $x_0$.

4) Исследовать ф-ю на непрерывность и построить график.

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & \text{при } |x| \le 1 \\ |x-1|, & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Функции $y = \cos\frac{\pi x}{2}$, $y = |x-1|$ явл. непрерывными на всей числ. прямой

исследуем т. $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$

1) $\lim\limits_{x\to -1-0} |x-1| = 2$ , $\lim\limits_{x\to -1+0} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ , $f(x_1) = |-1-1| = 2$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x_1) = f(x_1) \neq \lim\limits_{x\to -1+0} f(x_1)$ => ф-я непрерывна слева и имеет разрыв 1го рода в т. $X_1$.

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ , $\lim\limits_{x\to 1+0} |x-1| = 0$ , $f(x_2) = |1-1| = 0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} = \lim\limits_{x\to 1+0} = f(x)$ => в т. $X_2$ ф-я непрерывна.