



Лекция 5: Байесовский классификатор

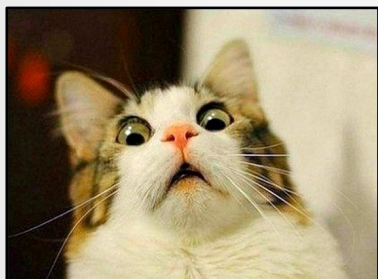
Евгений Борисов

Классификатор: с чего все начинается?

хорошие и плохие коты

извлекаем признаки

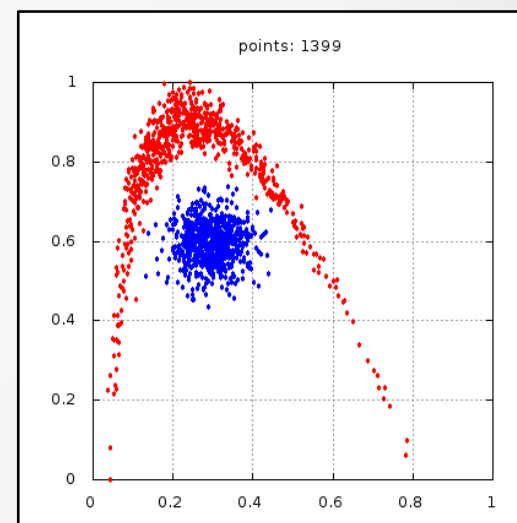
один КОТ — одна точка



→ [0.14, 12, ..., 345]



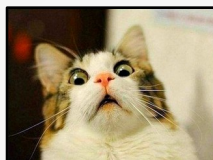
→ [78.0, 20, ..., 177]



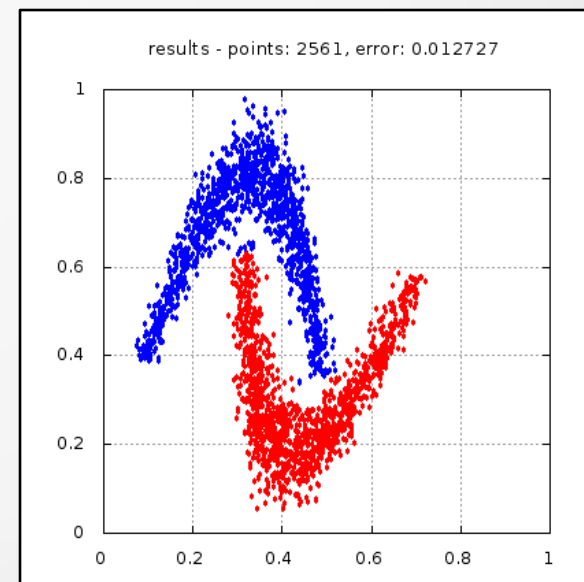
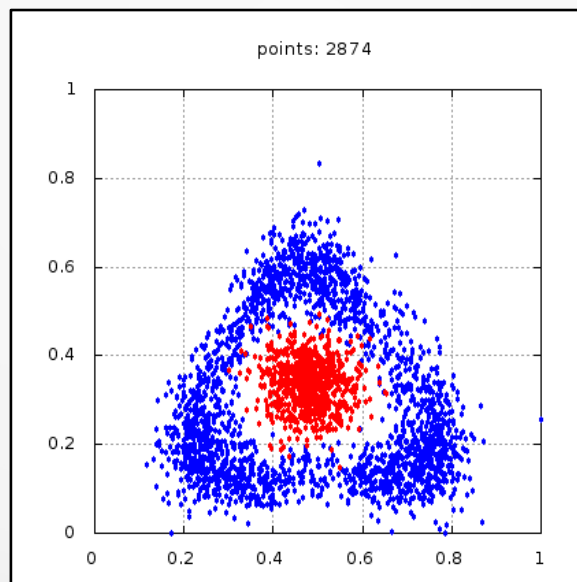
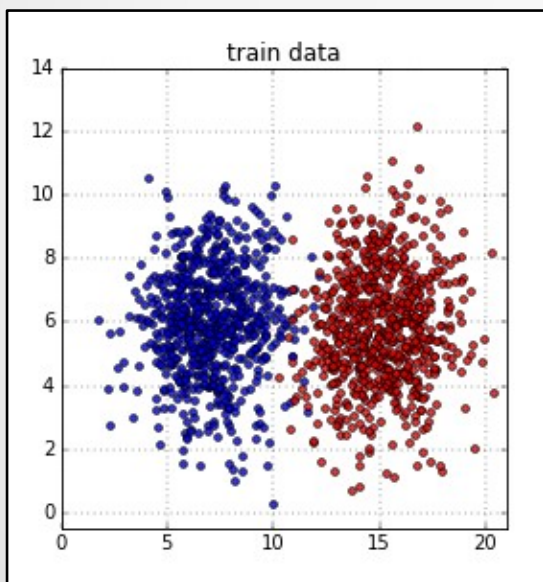
Классификатор

разделения объектов на классы

Детектор котов:



→ вектор-признак → есть/нет



Классификатор: о задаче

разделение данных на части (классы)
обучение «с учителем»

Учебный набор: [объект, ответ]

Задача: классификатор

объект \rightarrow вектор-признак \rightarrow результат

Обучение: минимизация ошибки

ошибка = результат - правильный ответ

Критерий остановки:

достигнут порог значения ошибки,
и/или порог количества циклов

Классификатор: данные

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & y^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & y^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} & y^{(m)} \end{bmatrix}$$

x - вектор-признак

y - метка класса

n - размер пространства признаков

m - количество примеров

Байесовский классификатор

X - объекты

Y - ответы

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x,y)$

(x_i, y_i) - выборка

Задача:

найти ф-цию (классификатор)

$a: X \rightarrow Y$ с минимальной ошибкой

Байесовский классификатор

X - объекты

Y - ответы

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x,y)$

(x_i, y_i) - выборка

Задача:

найти ф-цию (классификатор)

$a: X \rightarrow Y$ с минимальной ошибкой

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x)$$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y) p(x|y)$$

$P(y)$ - априорная вероятность класса y

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y

$P(y|x)$ - апостериорная вероятность класса y

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска:

$a: X \rightarrow Y$ - классификатор

$A_y = \{ x \in X \mid a(x) = y \}$, $y \in Y$ - разбиение **X** на части

Ошибка: объект **x** класса **y** попал в класс **s**
 A_s , $s \neq y$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска:

$\mathbf{a}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ - классификатор

$\mathbf{A}_y = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ - разбиение \mathbf{X} на части

Ошибка: объект \mathbf{x} класса \mathbf{y} попал в класс \mathbf{s}
 $\mathbf{A}_s, \mathbf{s} \neq \mathbf{y}$

Вероятность ошибки:
$$P(\mathbf{A}_s, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{A}_s} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

Байесовский классификатор

про функционал среднего риска:

Потеря от ошибки: зададим $\lambda_{ys} \geq 0$ для всех пар $(y,s) \in Y \times Y$

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$,
- плотности их распределений $p(x|y)$
- $\lambda_{ys} \geq 0$ потери от ошибки

тогда минимум среднего риска **$R(\mathbf{a})$** достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$,
- плотности их распределений $p(x|y)$
- $\lambda_{ys} \geq 0$ потери от ошибки

тогда минимум среднего риска $R(a)$ достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Дополнение:

если $\lambda_{yy} = 0$ и $\lambda_{ys} = \lambda_y$ для всех $y, s \in Y$ то

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - априорная вероятность класса y
(доля примеров класса y ,
пропорция классов должна соответствовать)

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y (плотность)

Байесовский классификатор

подходы к оценке плотности распределения:

- непараметрический
- параметрический
- смеси распределений

Байесовский классификатор

параметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Байесовский классификатор

параметрический подход к оценке плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

смеси распределений

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Байесовский классификатор

параметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

смеси распределений

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Непараметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{m V(h)} K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

Байесовский классификатор

«наивный Байес»

допущение: признаки X - независимы друг от друга

тогда многомерную плотность
можно представить как произведение одномерных плотностей

$$p(x|y) = p_1(x_1|y) \dots p_n(x_n|y)$$

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

дискретный случай (гистограмма) :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x = x_i]$$

пример: распределение повторов слов в тексте

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

непрерывный случай: эмпирическая оценка, окно ширины h
(доля объектов попавших в отрезок)

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2hm} \sum_{i=1}^m \left[|x - x_i| < h \right]$$

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

непрерывный случай: эмпирическая оценка, окно ширины h
(доля объектов попавших в отрезок)

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2hm} \sum_{i=1}^m [|x - x_i| < h]$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

Байесовский классификатор

оценка плотности Парзена-Розенблата

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

чётная ф-ция $K(r) = K(-r)$

нормированная $\int K(r) dr = 1$

невозрастающая при $r > 0$, неотрицательная ф-ция

Байесовский классификатор

оценка Парзена-Розенблата для класса y

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

$$\hat{p}(x|y) = \frac{1}{l_y V(h)} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

l_y - количество объектов y

$\rho()$ - мера на X

$V(h)$ - нормирующий множитель

Байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

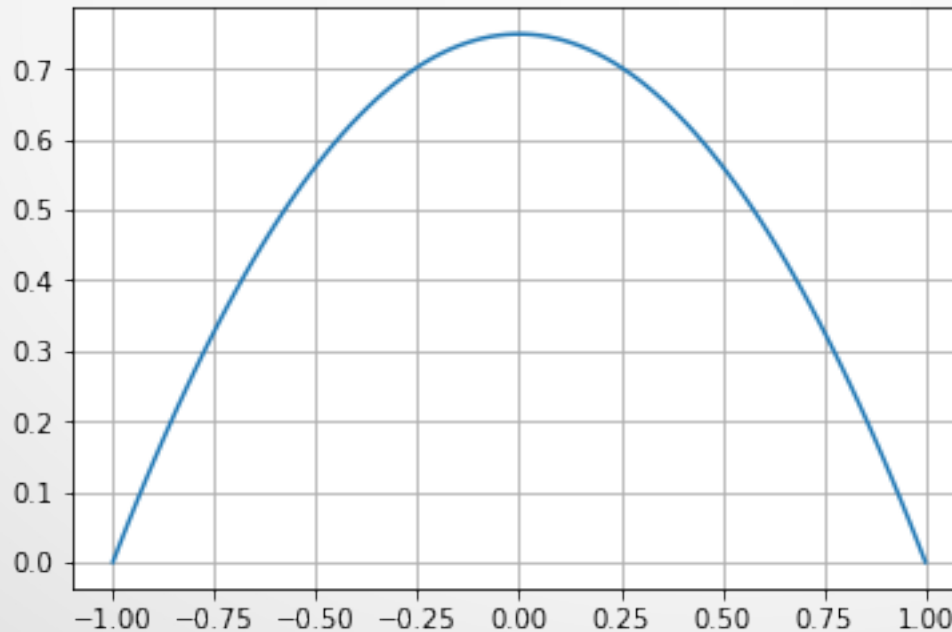
метод Парзенковского окна

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Байесовский классификатор

ядро Епанечникова

$$K(r) = \frac{3}{4}(1 - r^2); |r| \leq 1$$



Байесовский классификатор

выбор оптимального размера окна h

метод скользящего контроля (Leave One Out, LOO)

параметр h выбираем перебором

проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

из учебного набора удаляется текущий (проверяемый) пример.

$$LOO(h, X) = \sum_{i=1}^l [a(x_i, \{X \setminus x_i\}, h) \neq y_i] \rightarrow \min_h$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

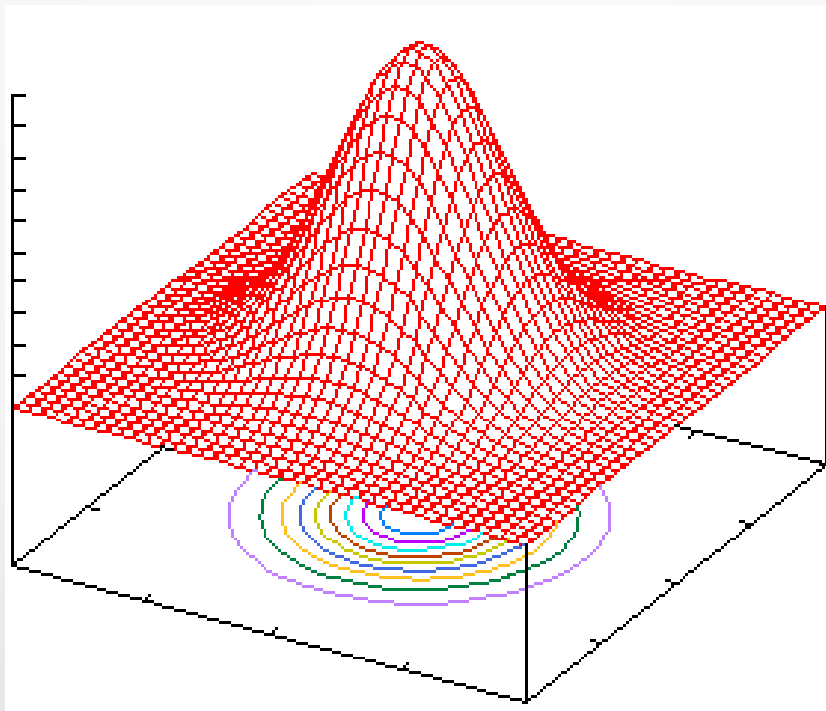
условие оптимума

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x_i, \theta) = 0$$

Байесовский классификатор

допущение: классы имеют n-мерную нормальную плотность

$$p(x|y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_y)^T \Sigma_y^{-1}(x-\mu_y)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma_y}}; y \in Y$$



Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n -мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n -мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(\det \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Байесовский классификатор

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

Байесовский классификатор

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Классификатор: оценка результата 1

разделяем набор данных

- учебный
- тестовый

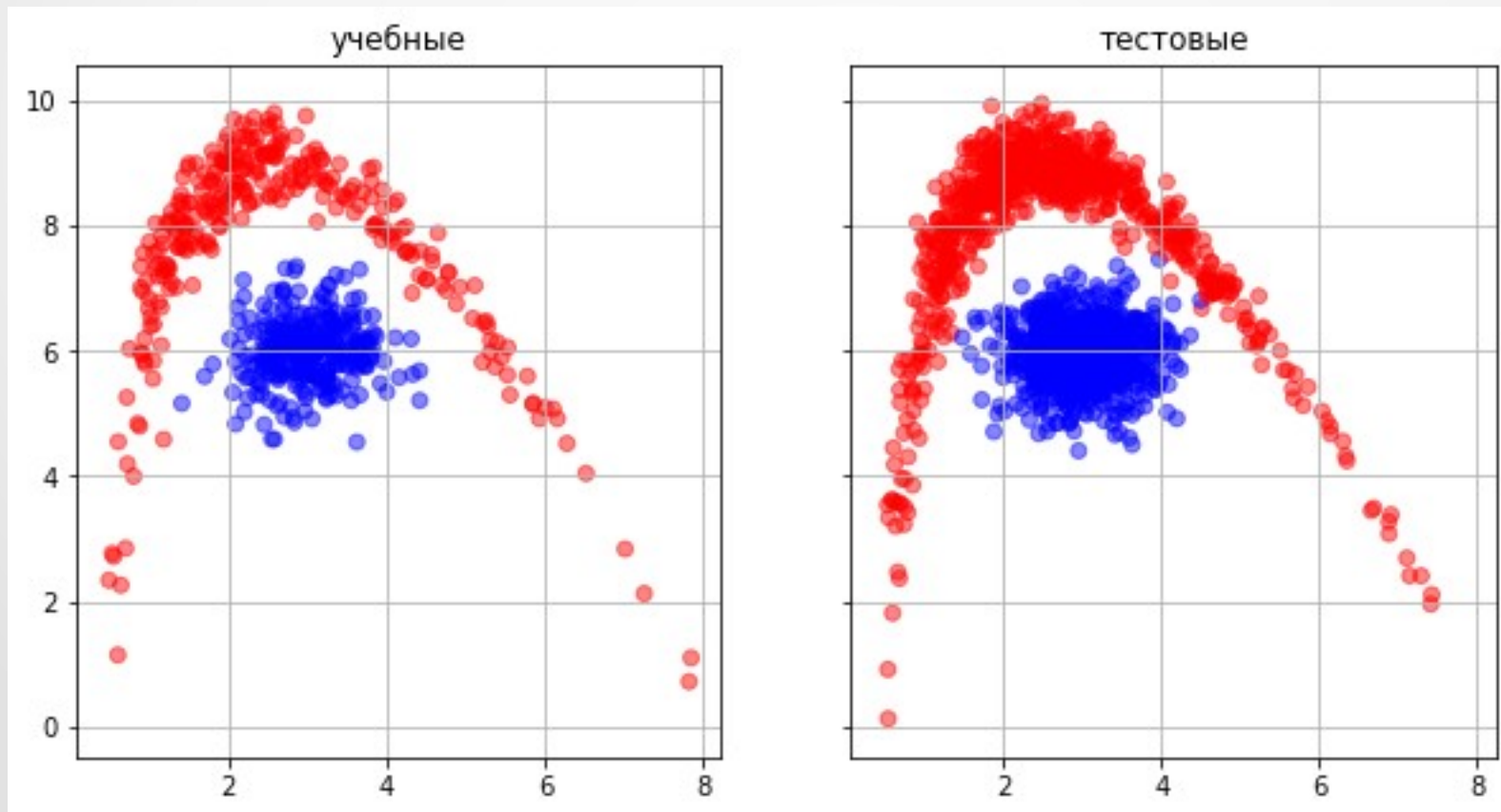
недообучение (underfitting)

большая ошибка на учебном наборе

переобучение (overfitting)

малая ошибка на учебном наборе

большая ошибка на тестовом наборе



Классификатор: оценка результата 2

метрики качества на тестовом наборе

- погрешность (accuracy)
- матрица ошибок (confusion matrix)
- точность (precision)
- полнота (recall)
- F-мера
- ROC/AUC

Классификатор: оценка результата 3

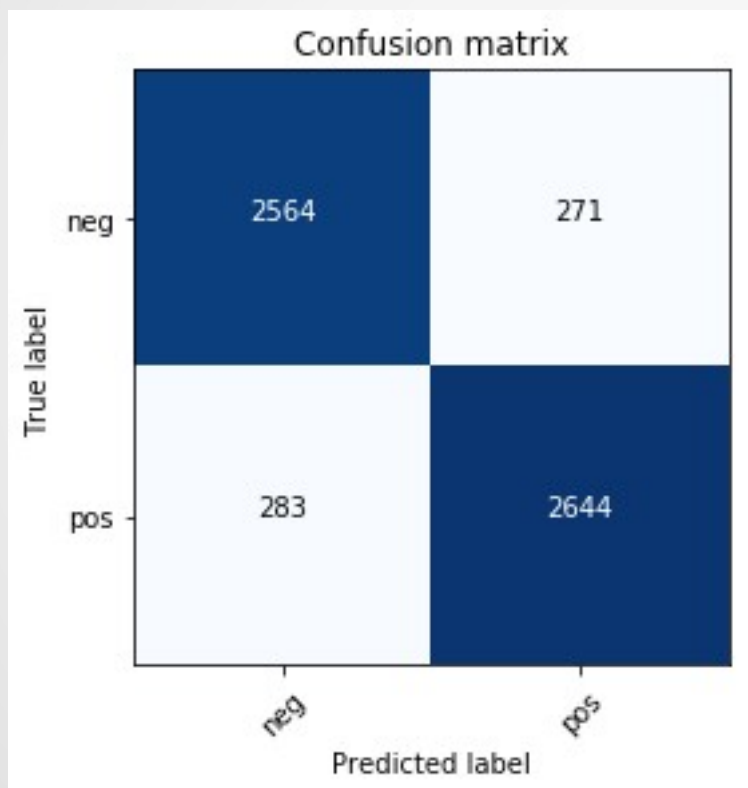
погрешность (accuracy)

правильные ответы / всего примеров

оценка для сбалансированного набора, т.е.
количество примеров в классах +- одинаковое

Классификатор: оценка результата 8

матрица ошибок (confusion matrix)



два класса — четыре группы

- TP истинно положительные
- TN истинно отрицательные
- FP ложно положительные
- FN ложно отрицательные

Классификатор: оценка результата 9

точность (precision)

$$TP / (TP + FP)$$

(метрики для отдельного класса)

доля объектов действительно принадлежащих данному классу относительно всех объектов, которые классификатор отнес к этому классу

полнота (recall)

$$TP / (TP + FN)$$

доля объектов, найденных классификатором, относительно всех объектов этого класса

F-мера

$$(precision * recall) / (precision + recall)$$

усреднение точности и полноты

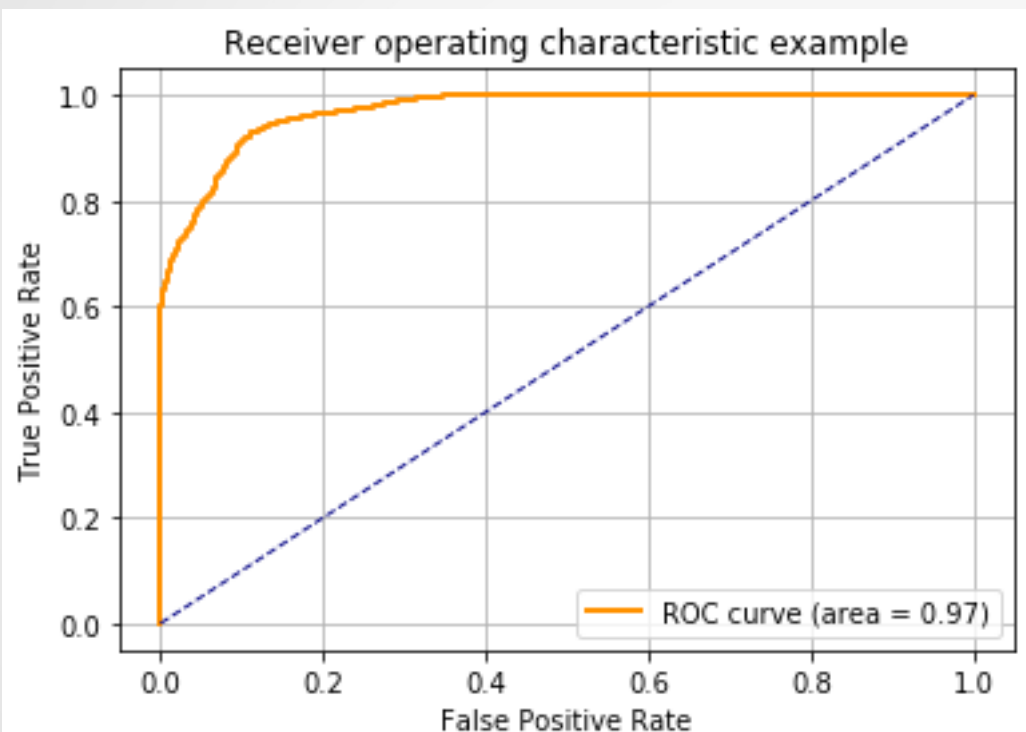
Классификатор: оценка результата 10

Пример *classification_report*

	precision	recall	f1-score	support
0	0.90	0.90	0.90	2835
1	0.91	0.90	0.91	2927
avg / total	0.90	0.90	0.90	5762

Классификатор: оценка результата 11

*ROC - receiver operating characteristic,
рабочая характеристика приёмника*



$$\text{TPR} = \text{TP} / (\text{TP} + \text{FN})$$

полнота(recall), доля объектов, найденных классификатором, относительно всех объектов этого класса

$$\text{FPR} = \text{FP} / (\text{FP} + \text{TN})$$

доля объектов negative класса алгоритм предсказал неверно

ROC - показывает зависимость полноты **TPR**

от доли ложно-негативных **FPR** при изменении порога сора

*AUC - area under ROC curve,
площадь под ROC-кривой
характеристика качества классификации*

Классификатор: литература

К.В. Воронцов Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С. Байесовский классификатор.
<http://mechanoid.kiev.ua/ml-bayes.html>

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

Классификатор: почти последний слайд...



Вопросы ?

Классификатор: практика

источники данных для экспериментов



`sklearn.datasets`

UCI Repository

kaggle

