

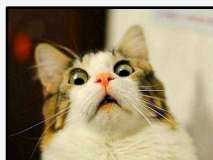
# **Лекция 6: методы восстановления плотности распределения**

Евгений Борисов

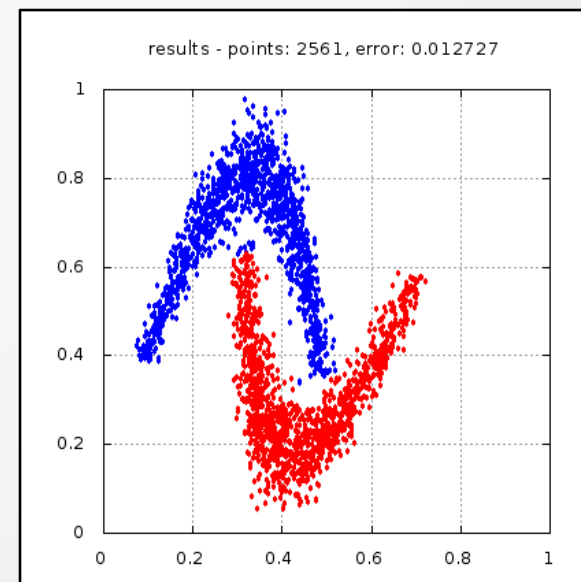
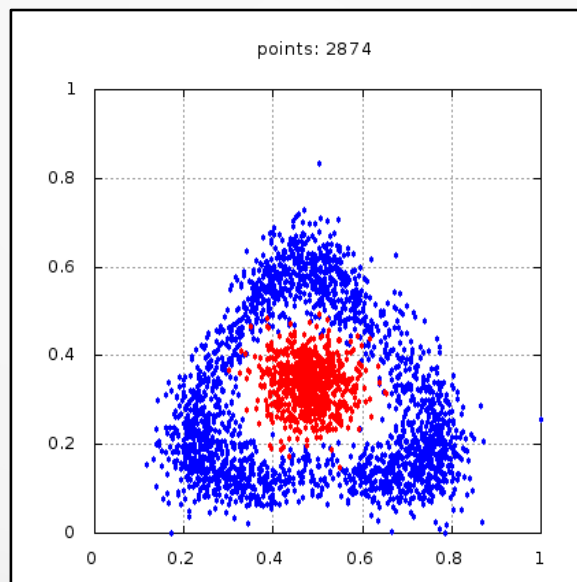
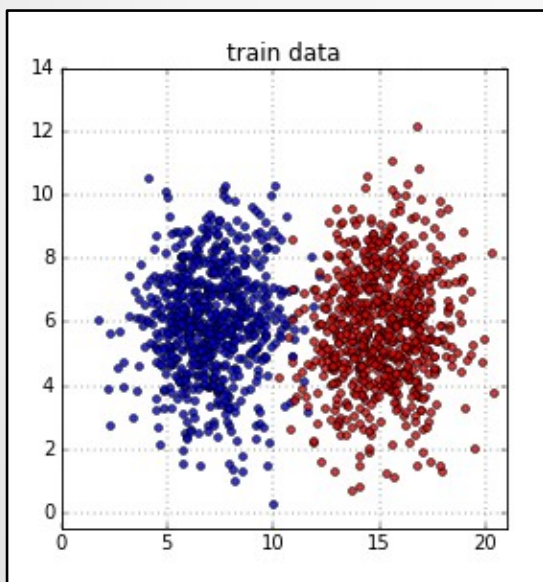
# Классификатор

разделения объектов на классы

Детектор котов:



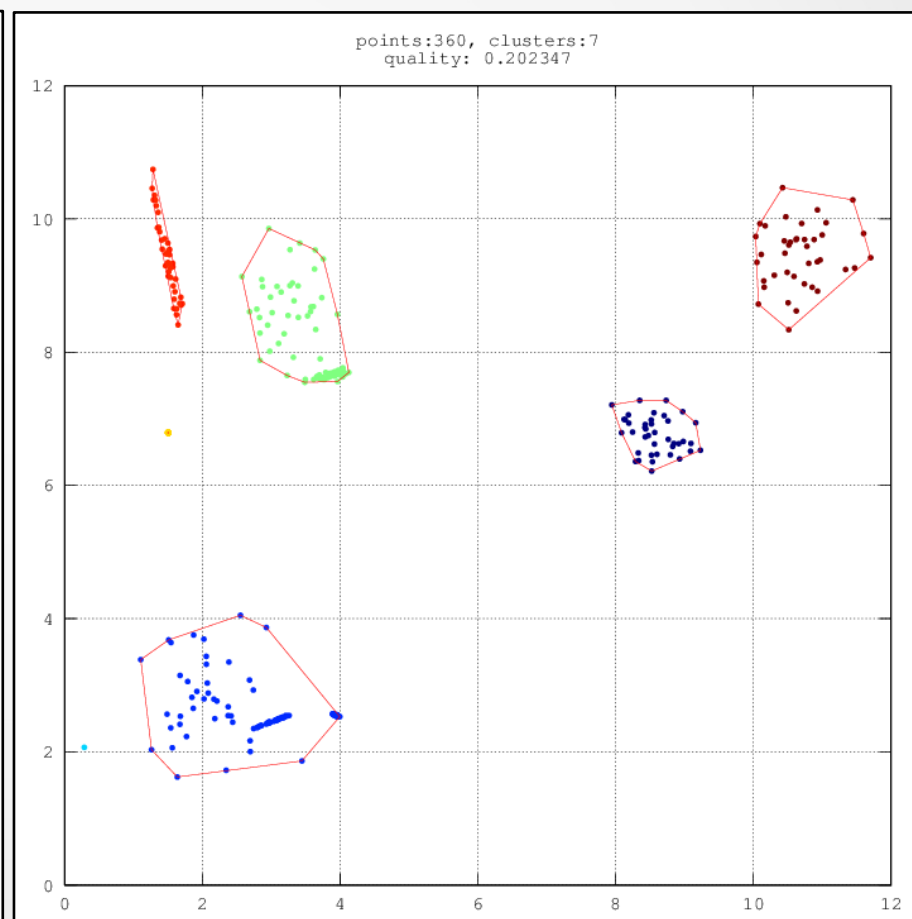
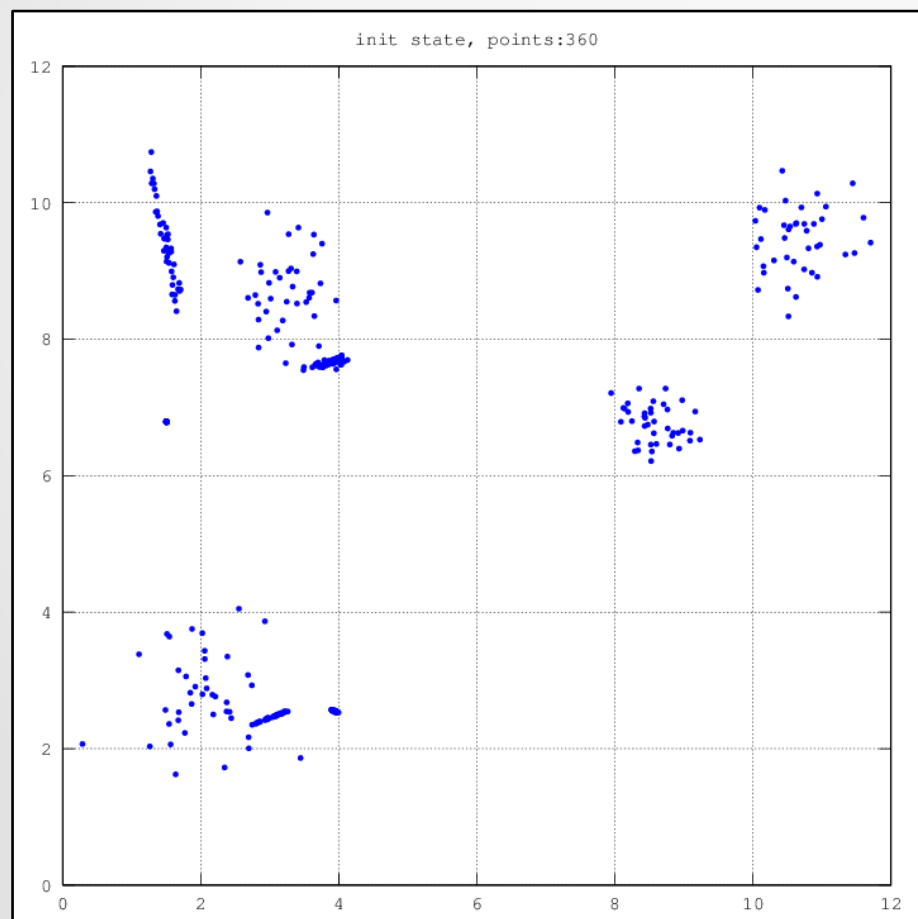
→ вектор-признак → есть/нет



# Кластеризатор

объединение схожих объектов в группы

**Поиск похожих текстов:** текст → признаки → группа



# Восстановление плотности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

## Байесовский классификатор

$\lambda_y$  - потеря для объектов  $y$

$P(y)$  - априорная вероятность класса  $y$   
(доля примеров класса  $y$ ,  
пропорция классов должна соответствовать)

$p(x|y)$  - ф-ция правдоподобия класса  $y$  (плотность)

# Восстановление плотности

**подходы к оценке плотности распределения:**

- параметрический
- непараметрический
- смеси распределений

# Восстановление плотности

**подходы к оценке плотности распределения:**

параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Непараметрический подход

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{j=1}^m K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

смеси распределений

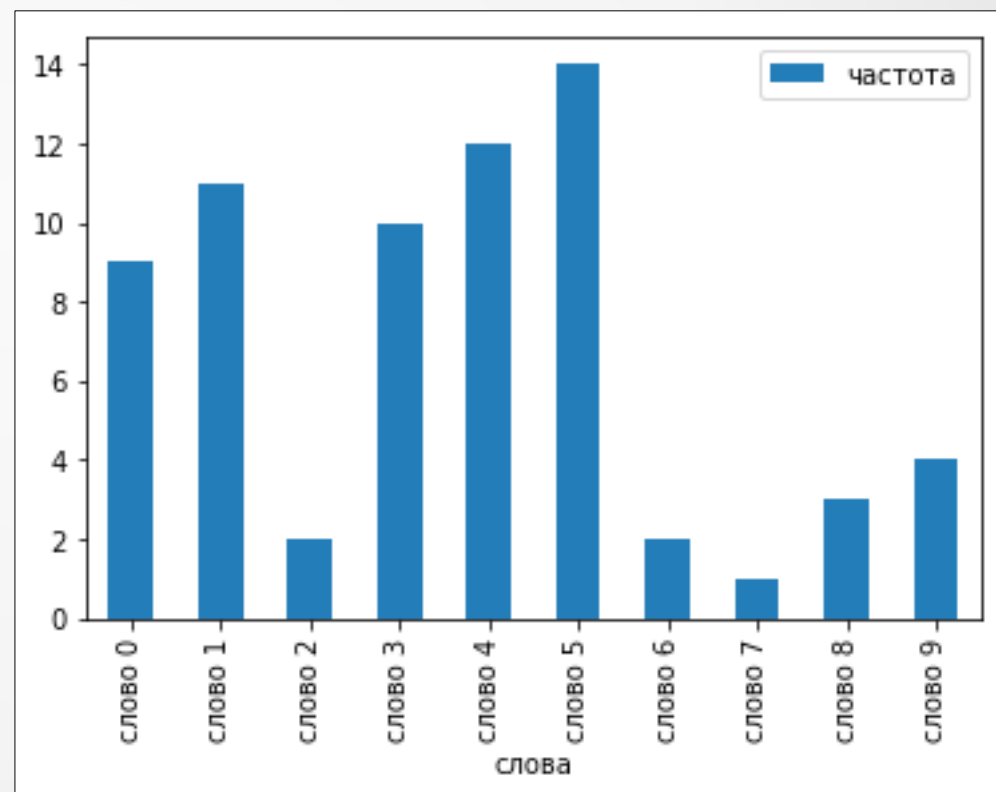
$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

# Восстановление плотности

## Непараметрический подход

дискретный случай: гистограмма

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x = x_i]$$



**пример:** распределение повторов слов в тексте

# Восстановление плотности

## **непараметрические методы**

непрерывный случай: доля объектов попавших в окно ширины  $h$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[ \frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$



# Восстановление плотности

## **непараметрические методы:**

оценка плотности Парзена-Розенблата

ядерное сглаживание (гистограммы)

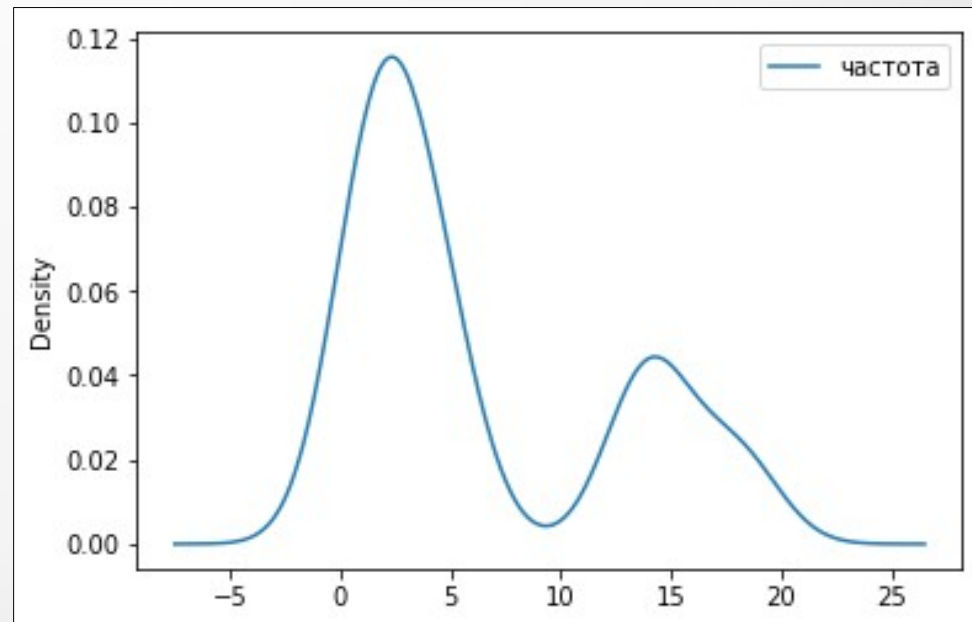
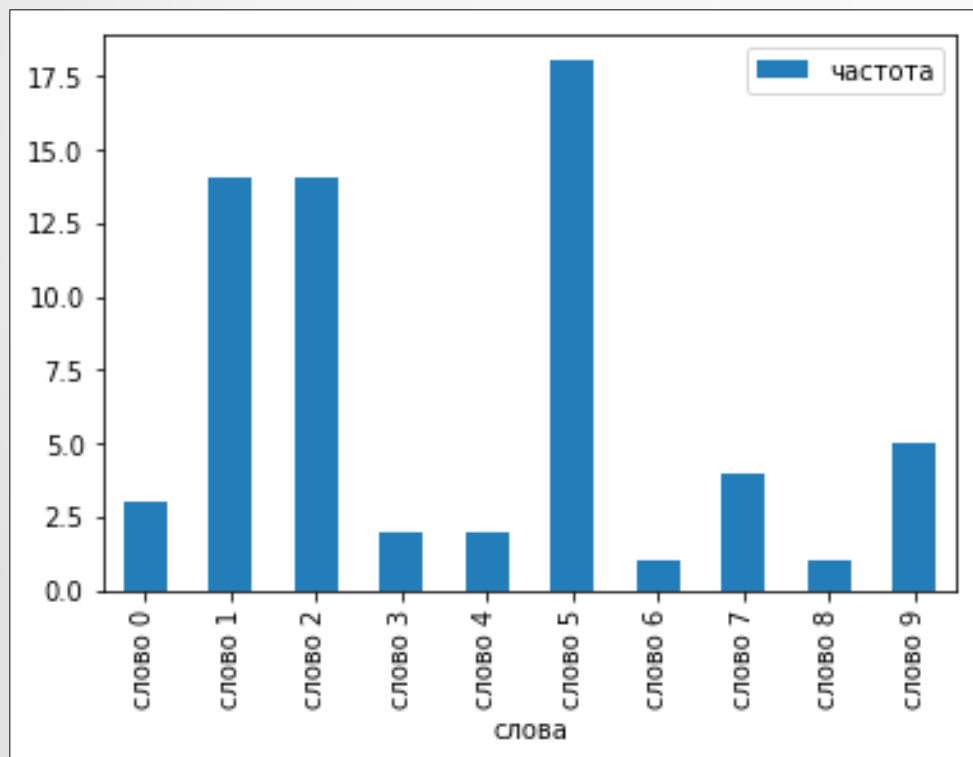
KDE, Kernel Density Estimation

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

$K(r)$  - ядро

$\rho(x_1, x_2)$  - мера на  $X$

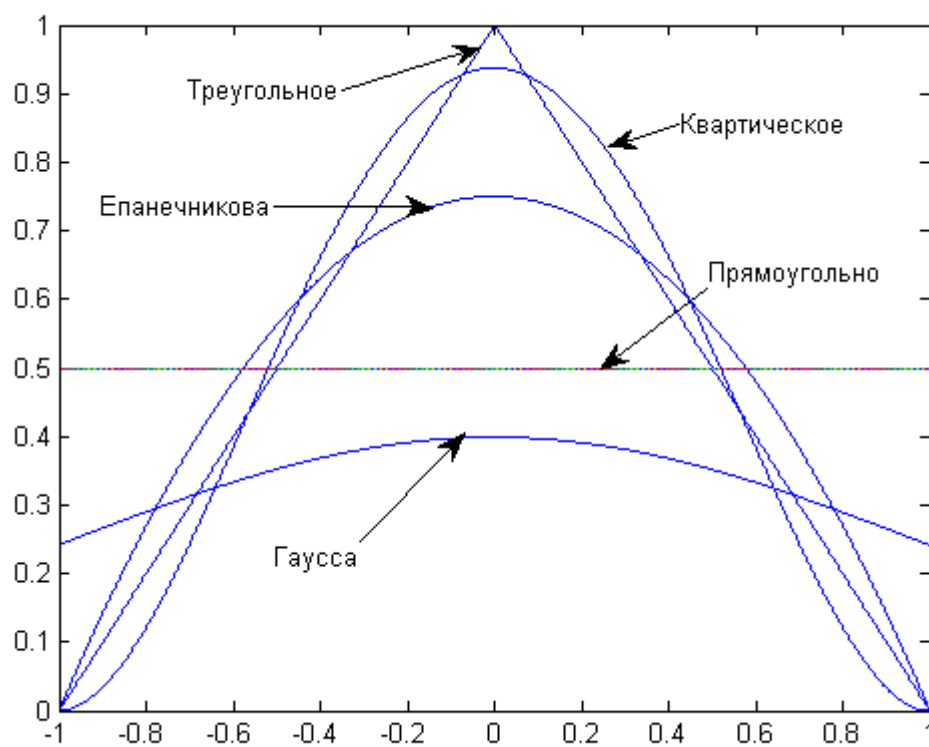
$V(h)$  - нормирующий множитель



# Восстановление плотности

**непараметрические методы:**  
функции ядра для сглаживания гистограммы

KDE, Kernel Density Estimation



*ядро Епанечникова:*

$$K(r) = \frac{3}{4}(1 - r^2); |r| \leq 1$$

# Восстановление плотности

Байесовский классификатор: метод парзеновского окна

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

# Восстановление плотности

**непараметрические методы:**

*выбор оптимального размера парзеновского окна **h***

**методом скользящего контроля (Leave One Out, LOO)**

$$LOO(h, X) = \sum_{i=1}^l \left[ a(x_i, \{X \setminus x_i\}, h) \neq y_i \right] \rightarrow \min_h$$

параметр **h** выбираем перебором

для разных значений **h**

проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

при этом

из учебного набора **X** удаляется текущий (проверяемый) пример

# Восстановление плотности

## параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

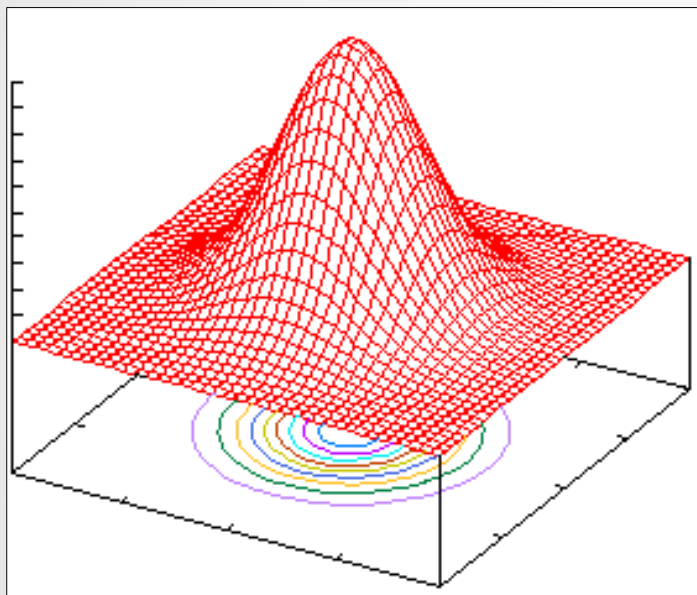
принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

# Восстановление плотности

**параметрический подход:**

допустим -  $p(x)$  это нормальная  $n$ -мерная плотность



$$p(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

# Восстановление плотности

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x) = N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия  
имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

# Восстановление плотности

**Теорема:** параметры оценки максимального правдоподобия для  $n$ -мерных гауссовских плотностей классов  $y$  имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

**Байесовский классификатор:** квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left( \ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(\det \hat{\Sigma}_y) \right)$$



# Восстановление плотности

## Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны  
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

**Байесовский классификатор:** линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left( \ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

# Восстановление плотности

## **смеси распределений**

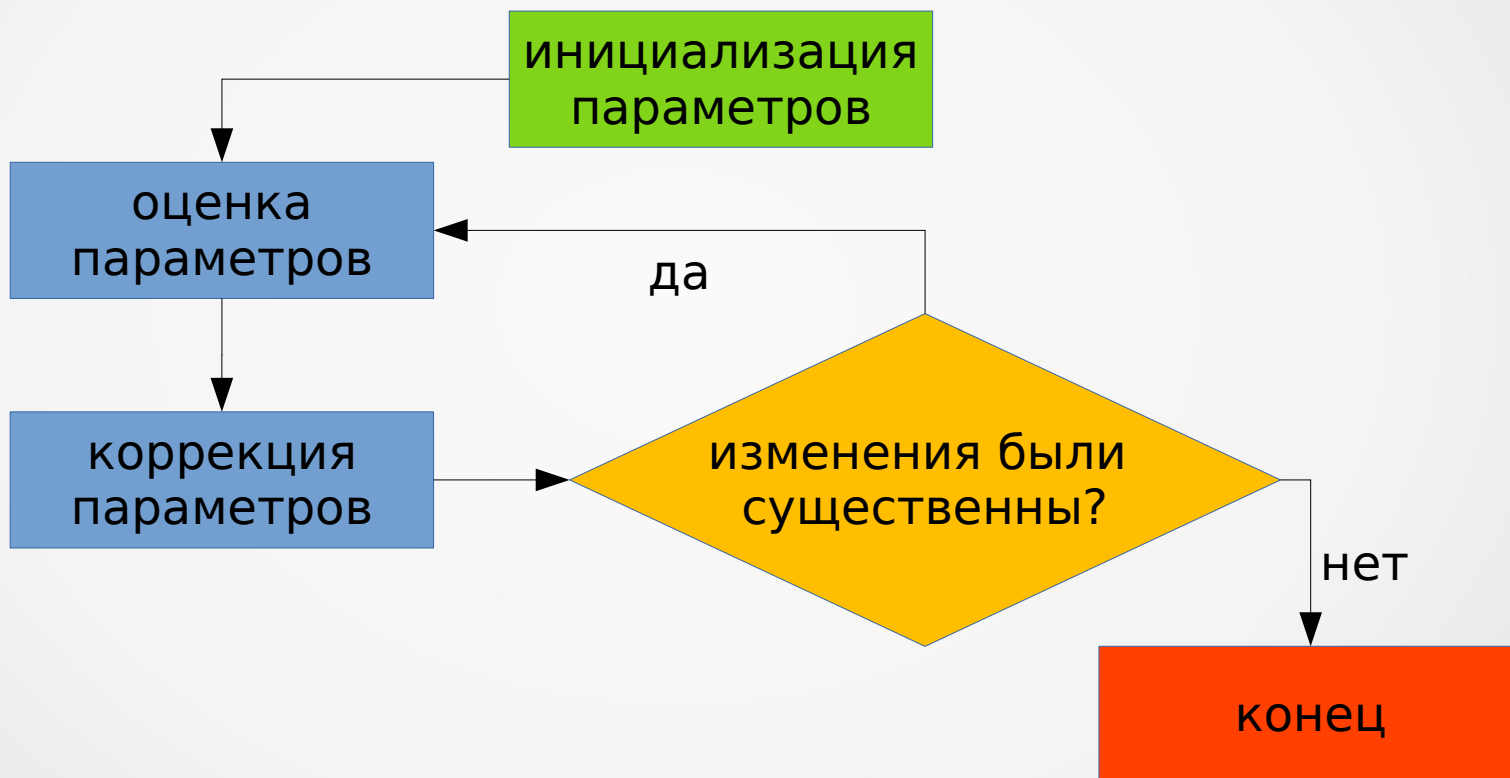
$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j);$$

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1; \quad w_j \geq 0$$

# Восстановление плотности

## ЕМ (expectation-maximization algorithm):

базовый вариант алгоритма



# Восстановление плотности

**ЕМ (expectation-maximization algorithm)**

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

$m$  - количество примеров  $X$

$s$  - количество компонент смеси

# Восстановление плотности

## ЕМ (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

$m$  - количество примеров  $X$

$s$  - количество компонент смеси

коррекция

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{argmax} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

# Восстановление плотности

## ЕМ (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

$m$  - количество примеров  $X$

$s$  - количество компонент смеси

коррекция

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{argmax} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

условие остановки: параметры не изменились

$$|g_{ij}(t-1) - g_{ij}(t)| < \delta ; 0 < \delta < 1$$

# Восстановление плотности

**ЕМ** для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x) = N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия  
имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

# Восстановление плотности

**ЕМ** для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка: 
$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$



# Восстановление плотности

**ЕМ** для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:

$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

ВЕС КОМПОНЕНТЫ

# Восстановление плотности

**ЕМ** для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка: 
$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача: 
$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

вес компоненты

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

мат.ожидание компоненты

# Восстановление плотности

**ЕМ** для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:

$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

вес компоненты

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

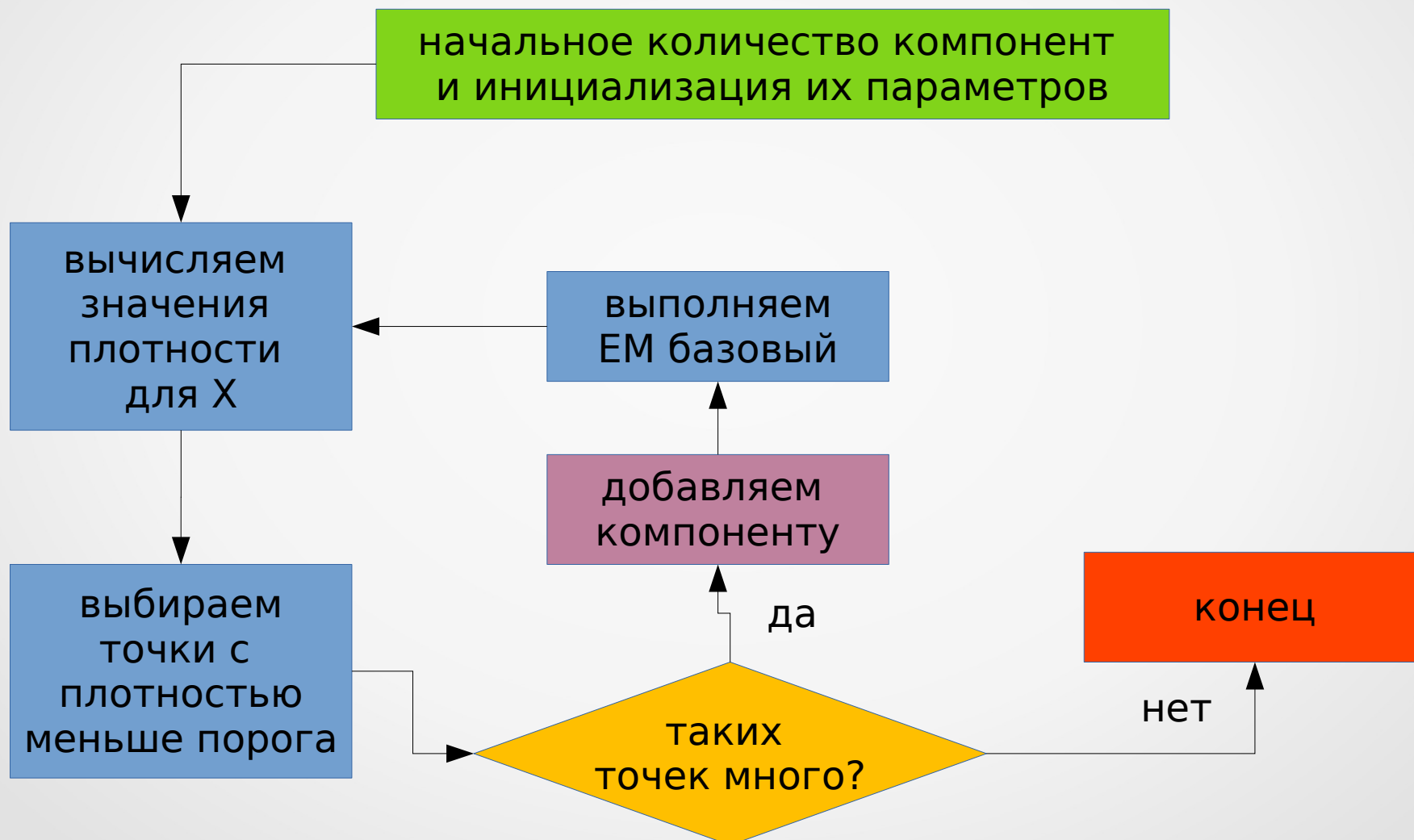
мат.ожидание компоненты

$$\Sigma_j = \frac{1}{c N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} (x_i - \mu_j)^T (x_i - \mu_j); 0 < c \leq 1$$

матрица ковариаций компоненты

# Восстановление плотности

## ЕМ с последовательным добавлением компонент



# Восстановление плотности

**ЕМ** последовательное добавление компонент  
(для нормальной плотности)

начальные значения параметров первой компоненты смеси

$$w_1 = 1$$

вес компоненты

$$\Sigma_1 = \text{cov}(X)$$

матрица ковариаций  
компоненты

$$\mu_1 = \frac{1}{|X|} \sum X$$

мат.ожидание  
компоненты

# Восстановление плотности

**ЕМ** последовательное добавление компонент  
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$  - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций  
компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание  
компоненты

# Восстановление плотности

**ЕМ** последовательное добавление компонент  
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$  - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций  
компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание  
компоненты

коррекция весов старых компонент смеси

$$w_i := w_i (1 - w_{k+1})$$

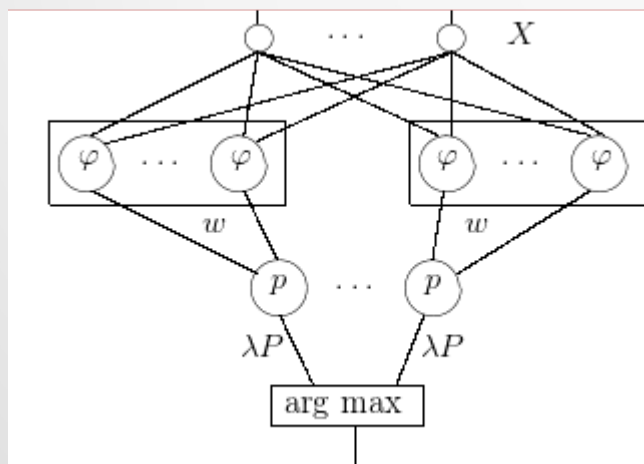
после определения новых параметров смеси запускаем ЕМ

# Восстановление плотности

**RBF** - сеть радиальных базисных функций

Байесовский классификатор

плотности классов - смеси нормальных распределений



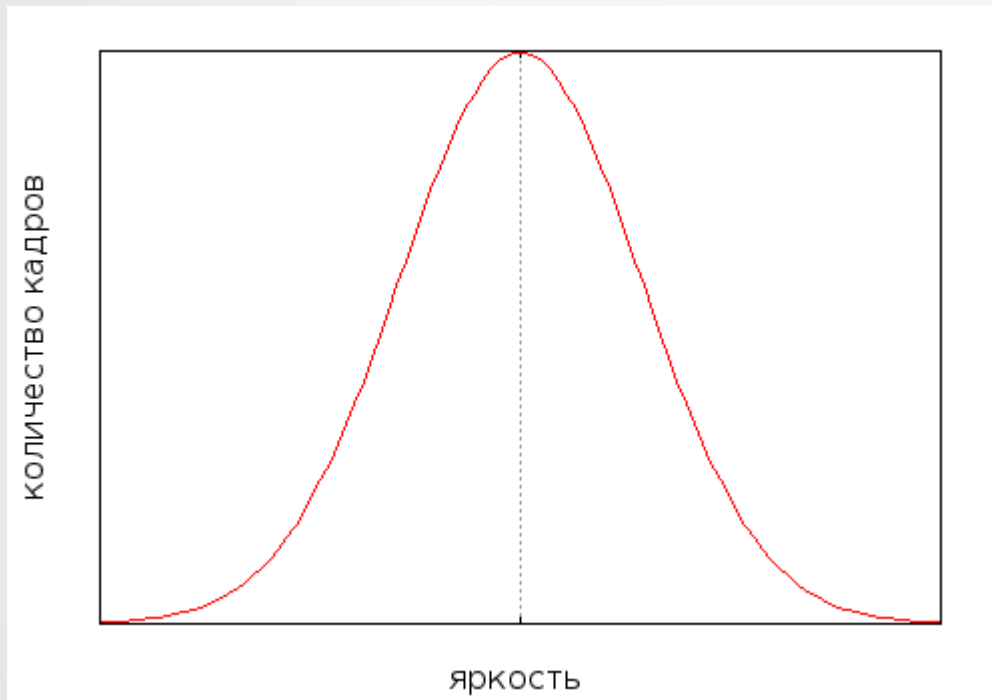
$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$$p(x|y) = \sum_k w_k^y \varphi_k^y(x; \theta_k^y) = \sum_k w_k^y N(x; \Sigma_k^y, \mu_k^y)$$



# Восстановление плотности

**Пример:** детектор новых объектов для неподвижных камер



# Восстановление плотности: литература

git clone [https://github.com/mechanoid5/ml\\_lectorium.git](https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git)

- К.В. Воронцов Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014
- Борисов Е.С. Байесовский классификатор.  
<http://mechanoid.kiev.ua/ml-bayes.html>
- Борисов Е.С. Восстановление смеси плотностей распределений с помощью EM-алгоритма. <http://mechanoid.kiev.ua/ml-em-base.html>
- Борисов Е.С. Классификатор на основе RBF.  
<http://mechanoid.kiev.ua/ml-rbf.html>
- Борисов Е.С. Детектор объектов для неподвижных камер.  
<http://mechanoid.kiev.ua/cv-backgr.html>

# Восстановление плотности



**Вопросы ?**

# Восстановление плотности: практика



OpenCV MOG

**источники данных для экспериментов**



sklearn.datasets

UCI Repository

kaggle

