Лекция 9:
логические методы

Евгений Борисов

логические методы

моделируем логику человеческих решений

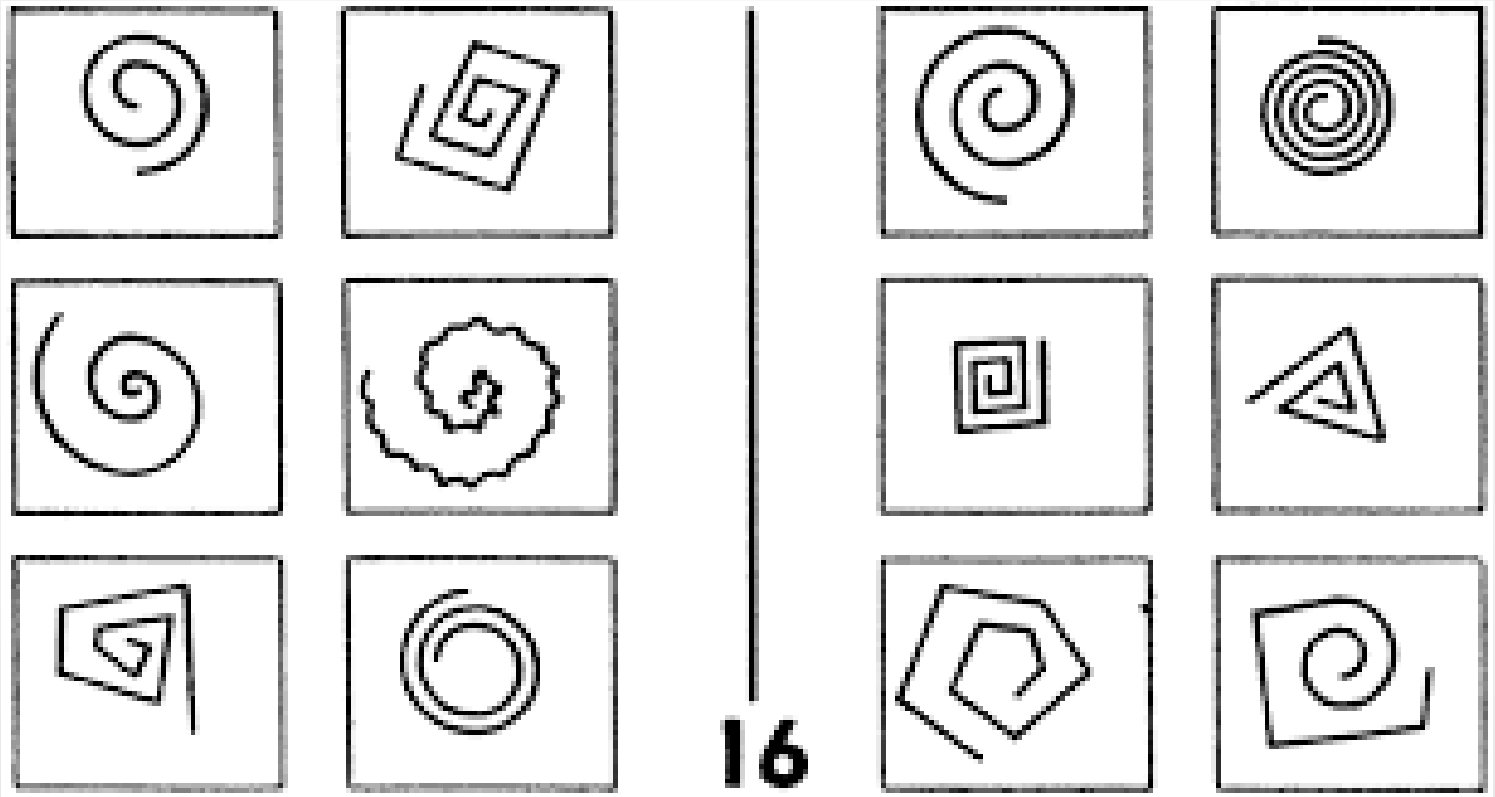
интерпретируемость (для некоторых приложений это критично)

логические методы

о интуитивном понятии закономерности

тесты Бонгарда

Бонгард М. М. Проблема узнавания.— М.: Физматгиз, 1967.

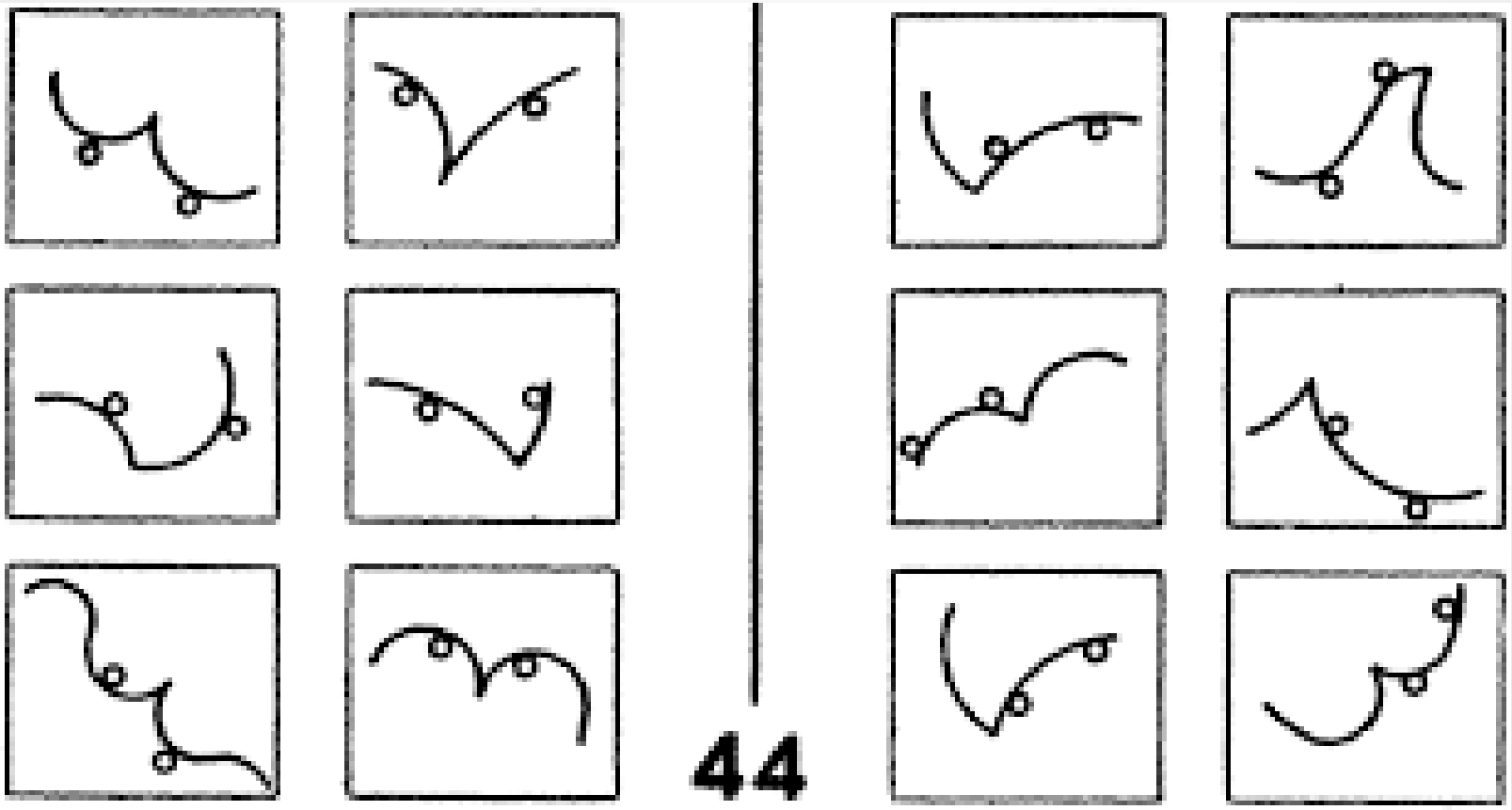


логические методы

о интуитивном понятии закономерности

тесты Бонгарда

Бонгард М. М. Проблема узнавания.— М.: Физматгиз, 1967.



логические методы

логическая закономерность - предикат

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

логические методы

логическая закономерность - предикат

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

[длинна > 10 **]** ***и*** **[** ширина < 5 **]** ***или*** **[** форма = квадрат **]**

логические методы

логическая закономерность - предикат

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

[длинна > 10 **]** ***и*** **[** ширина < 5 **]** ***или*** **[** форма = квадрат **]**

- должен быть информативен

логические методы

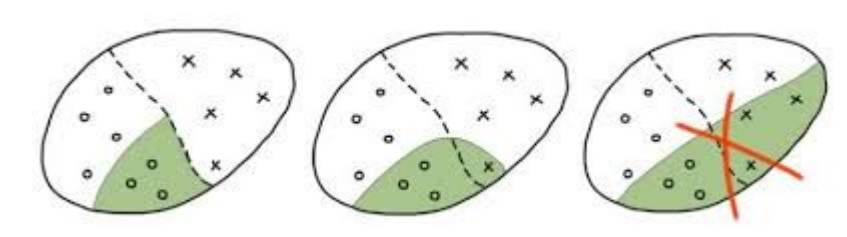
логическая закономерность - предикат

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

[длинна > 10 **]** ***и*** **[** ширина < 5 **]** ***или*** **[** форма = квадрат **]**

- должен быть информативен

  выделяет некоторое количество объектов одного класса



логические методы

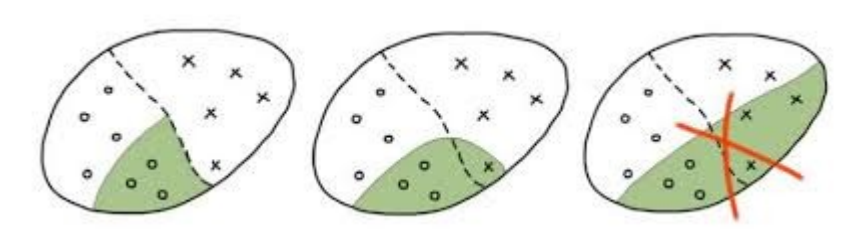
логическая закономерность - предикат

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

[длинна > 10 **]** ***и*** **[** ширина < 5 **]** ***или*** **[** форма = квадрат **]**

- должен быть информативен

  выделяет некоторое количество объектов одного класса



одна закономерность - маловато, нужно много закономерностей

логические методы

примеры применения пороговых правил

если [возраст>60] **или** [ранее был инфаркт]
то операцию не делаем, риск неудачи > 60%

если [сумма<5000] **и** [зарплата>20000]
то кредит выдать, риск невозврата 5%

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки

- какого вида закономерности нужны

- как определить информативность

- как искать закономерности

- как объединить закономерности в алгоритм

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки
  не наука, но творчество

- какого вида закономерности нужны

- как определить информативность

- как искать закономерности

- как объединить закономерности в алгоритм

логические методы

вид закономерностей

- пороговое правило(decision stump) $R(x)=[a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$

логические методы

вид закономерностей

- пороговое правило(decision stump) $R(x)=[a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$

- конъюнкция $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$

логические методы

вид закономерностей

- пороговое правило(decision stump) $R(x)=[a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x)=\left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d\right]$

логические методы

вид закономерностей

- пороговое правило(decision stump) $R(x)=[a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x)=\left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d\right]$
- полуплоскость $R(x)=\left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geqslant w_0\right]$

логические методы

вид закономерностей

- пороговое правило(decision stump) $R(x)=[a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x)=\left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d\right]$
- полуплоскость $R(x)=\left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geqslant w_0\right]$
- шар $R(x)=\left[\rho(x_0, x) \leqslant w_0\right]$

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки
  не наука, но творчество

- какого вида закономерности нужны
  простые, малое количество признаков

- как определить информативность

- как искать закономерности

- как объединить закономерности в алгоритм

логические методы

как определить информативность

предикат выделил объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

логические методы

как определить информативность

предикат выделил объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

простое определение: p-n

логические методы

как определить информативность

предикат выделил объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

простое определение: p-n

контрпример:

p	n	p-n
50	0	50
100	50	50

логические методы

как определить информативность
- энтропийный критерий

два исхода с вероятностями q и $1-q$

логические методы

как определить информативность
- энтропийный критерий

два исхода с вероятностями q и 1−q

количество информации:

$$I_0 = -\log_2(q)$$

$$I_1 = -\log_2(1-q)$$

логические методы

как определить информативность
- энтропийный критерий

два исхода с вероятностями q и 1−q

количество информации:

$$I_0 = -\log_2(q)$$

$$I_1 = -\log_2(1-q)$$

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

логические методы

как определить информативность

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

энтропия выборки **X**, исходы это принадлежность к классу **y**

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

S - количество объектов в выборке
P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке

логические методы

как определить информативность

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

энтропия выборки **X**, исходы это принадлежность к классу **y**

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

S - количество объектов в выборке
P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке

предикат **R** выделил в **X** объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

логические методы

как определить информативность

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q)=-q\cdot\log_2(q)-(1-q)\cdot\log_2(1-q)$$

энтропия выборки **X**, исходы это принадлежность к классу **y**

$$H(y)=h\left(\frac{P}{S}\right)$$

S - количество объектов в выборке
P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке

предикат **R** выделил в **X** объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

Энтропия выборки **X** после получения информации **R**

$$H(y|R)=\frac{(p+n)}{S}\cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right)+\frac{s-p-n}{S}\cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

логические методы

как определить информативность

Информационный выигрыш (Information gain)

$$iGain(y,R)=H(y)-H(y|R)$$

$$H(y)=h\left(\frac{P}{S}\right)$$

$$H(y|R)=\frac{(p+n)}{S}\cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right)+\frac{s-p-n}{S}\cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

S - количество объектов в выборке
P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке

предикат **R** выделил в **X** объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

логические методы

как определить информативность

точный статистический тест Фишера

$$iStat(y,R)=\frac{-1}{S}\log_2\left(\frac{C_P^p \cdot C_N^n}{C_S^{p+n}}\right)$$

P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке
N - количество объектов класса не **y** (негативных) в выборке
S - количество объектов в выборке (S = P+N)

предикат **R** выделил в **X** объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

логические методы

как определить информативность

неопределенность Джини (Gini impurity)

$$Gini(y, R) = \sum_c q_c \cdot (1 - q_c) = \frac{p}{p+n} \cdot \left(1 - \frac{p}{p+n}\right) + \frac{n}{p+n} \cdot \left(1 - \frac{n}{p+n}\right)$$

предикат **R** выделил в **X** объекты
p - количество позитивных
n - количество негативных

q_c - априорная вероятность класса c, выделеного предикатом R

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки
  не наука, но творчество

- какого вида закономерности нужны
  простые, малое количество признаков

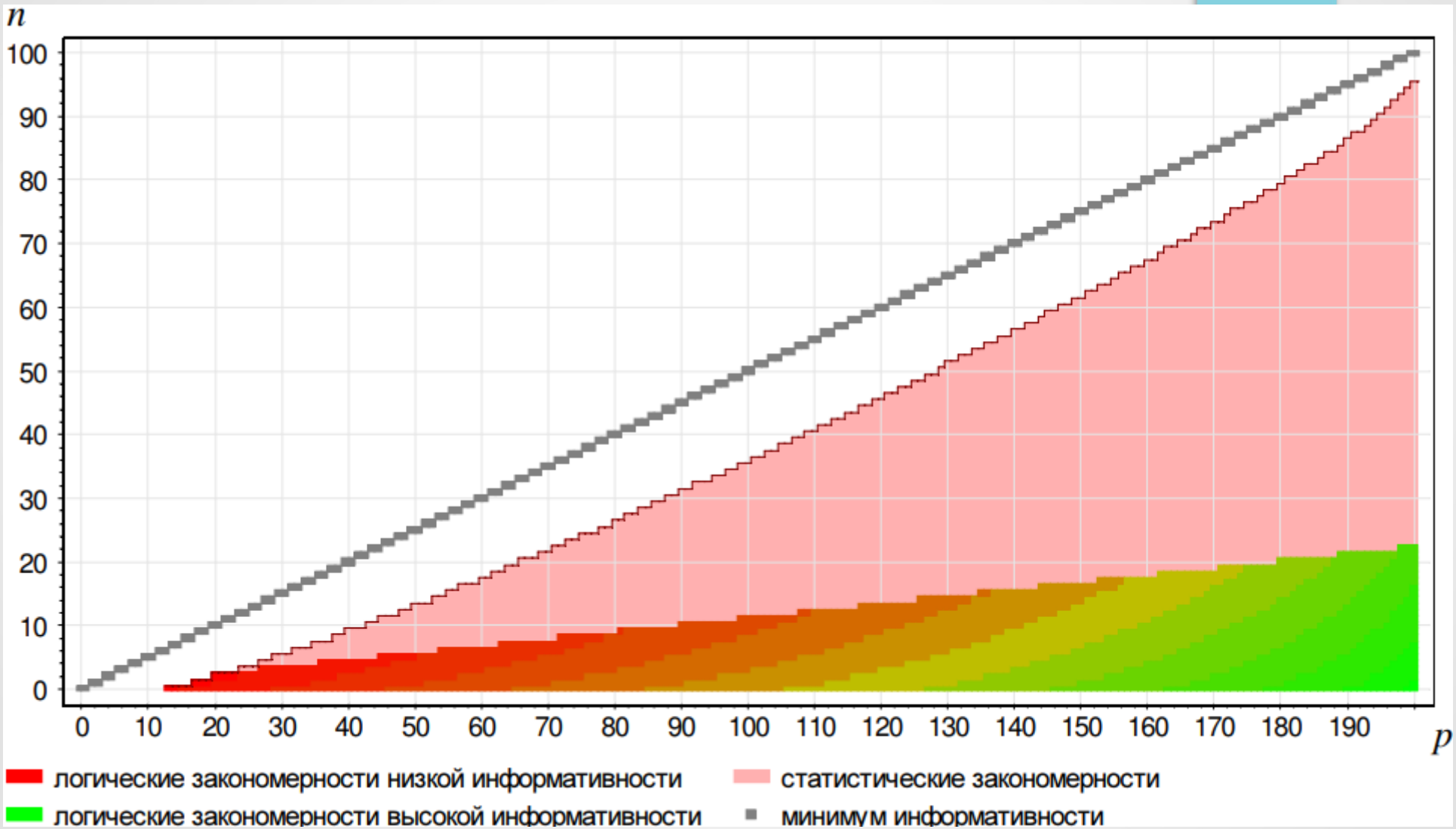
- как определить информативность
  iGain

- как искать закономерности

- как объединить закономерности в алгоритм

логические методы

где искать закономерности P=200 N=100



неслучайность это ещё не закономерность

логические методы

как искать закономерности

поиск закономерностей ограниченным перебором (rule induction)

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки
  не наука, но творчество

- какого вида закономерности нужны
  простые, малое количество признаков

- как определить информативность
  iGain

- как искать закономерности
  ограниченный перебор

- как объединить закономерности в алгоритм

логические методы

как объединить закономерности в алгоритм:

<u>решающее дерево</u>

рекурсивное разделение данных на две части

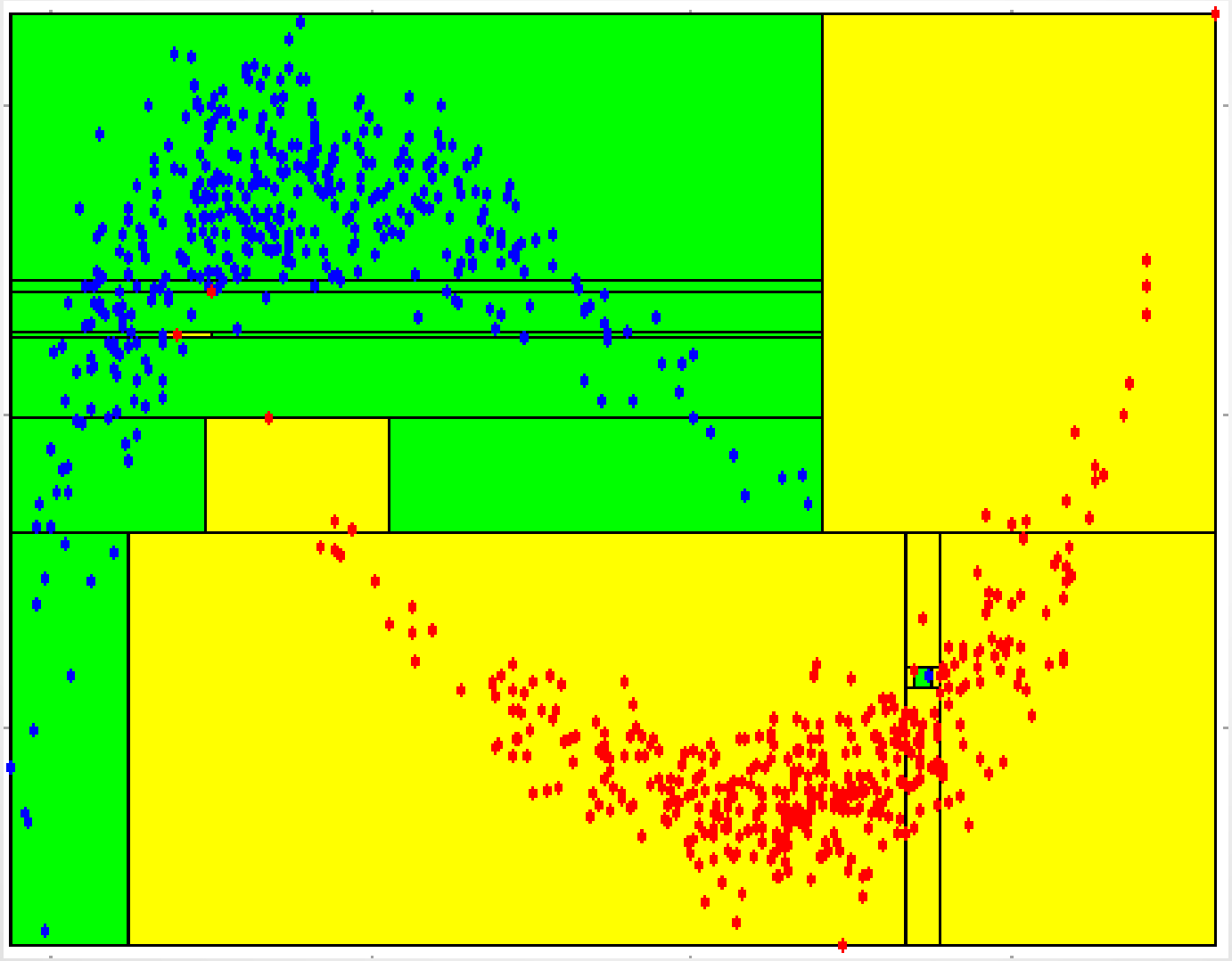
строим простой предикат -
ищем признак **i** и порог **b** для него

максимизируем информативность

$$\max_{i,b}\left(iGain\left(y,[X_i>b]\right)\right) \qquad \min(X_i)<b<\max(X_i)$$

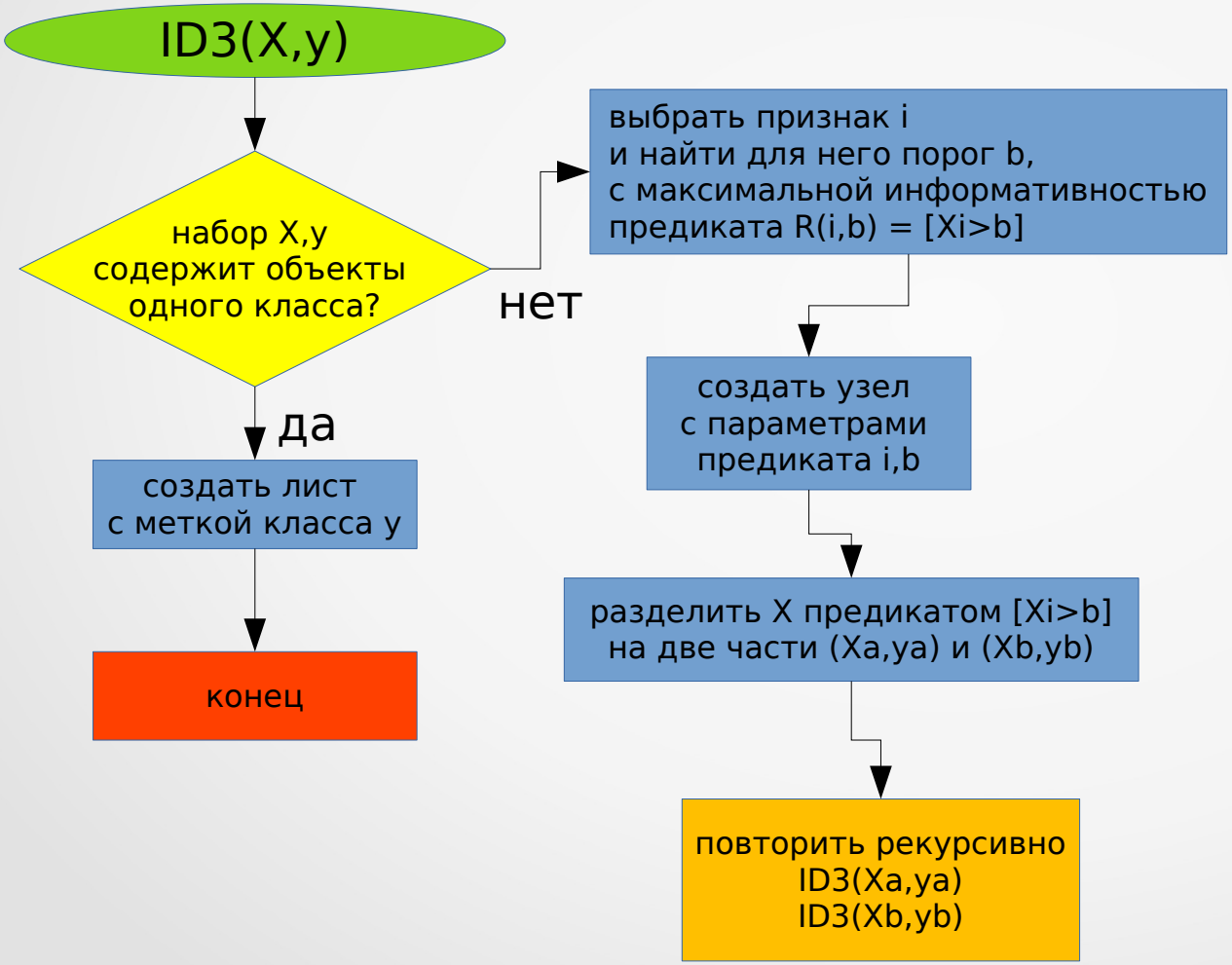
логические методы

разделение набора объектов решающим деревом



логические методы

как объединить закономерности в алгоритм:
решающее дерево, алгоритм ID3



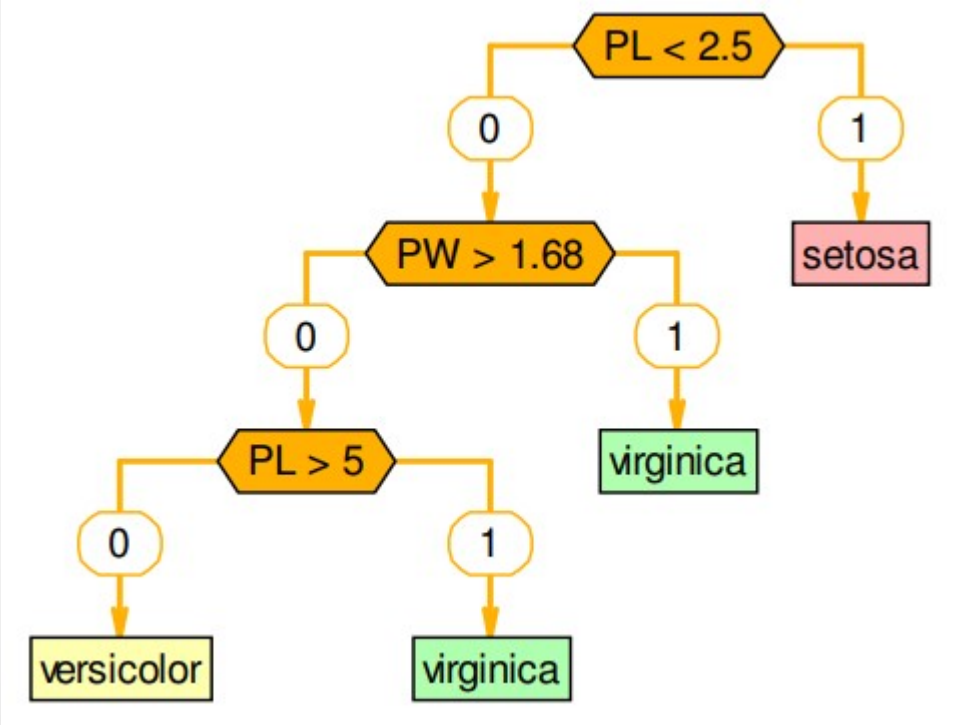
$$\max_{i,b}\left(iGain\left(y,[X_i>b]\right)\right)$$

$$min(X_i)<b<max(X_i)$$

рекурсивное разделение данных на две части

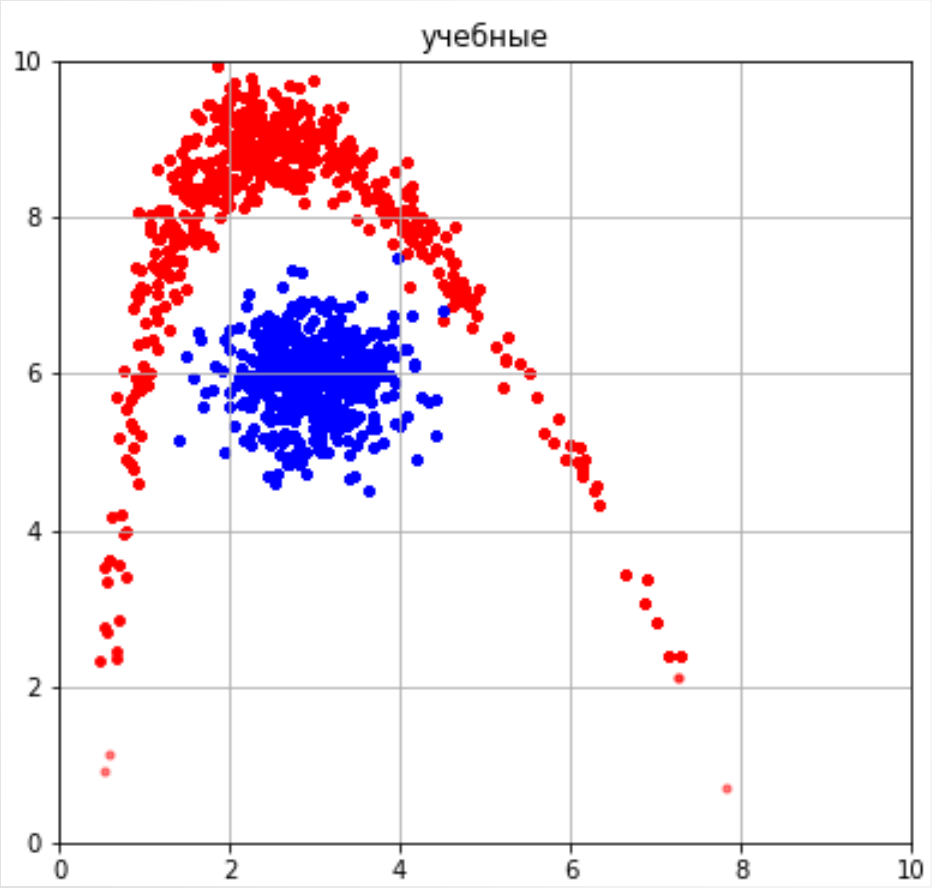
логические методы

пример дерева для набора iris



логические методы

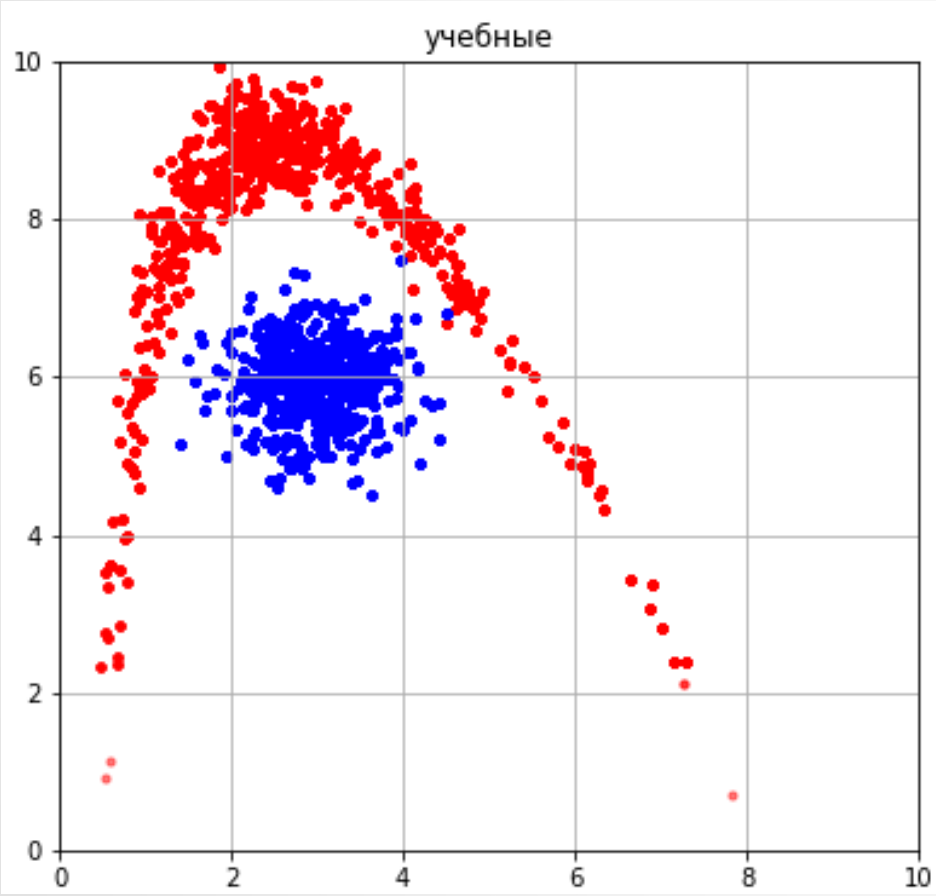
результат работы решающего дерева

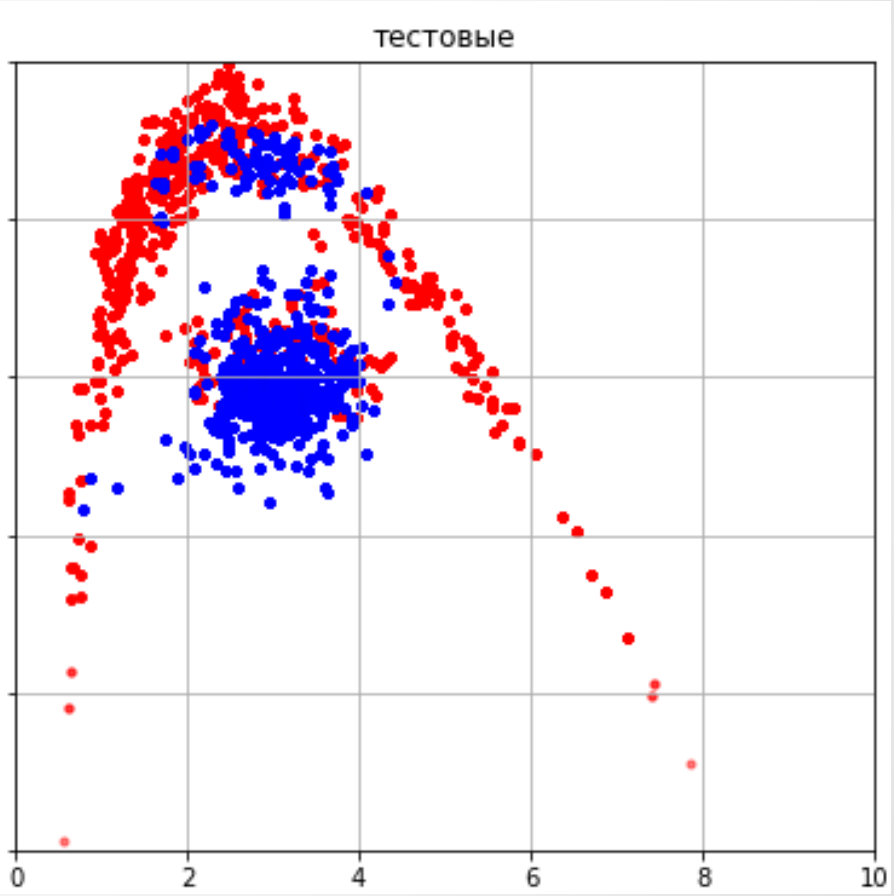


на учебном наборе - 100% точность

логические методы

результат работы решающего дерева





на учебном наборе - 100% точность

на тесте - переобучение

логические методы

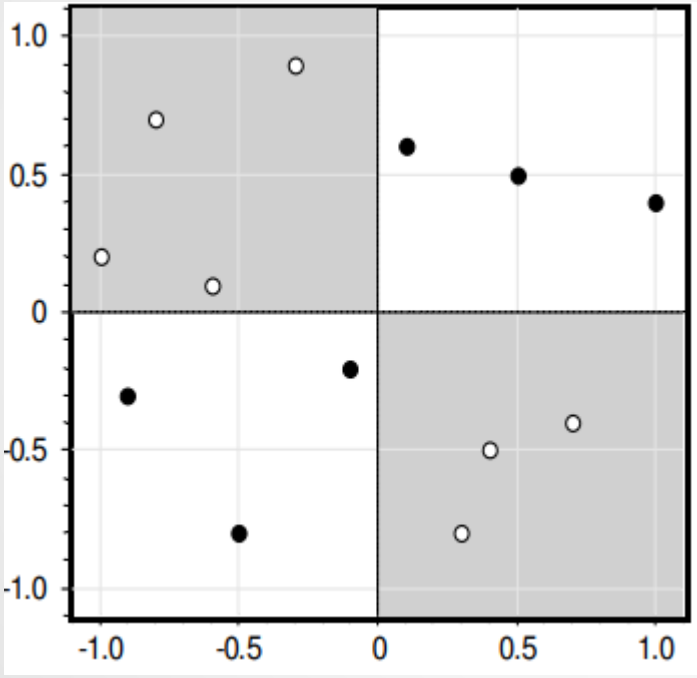
решающее дерево

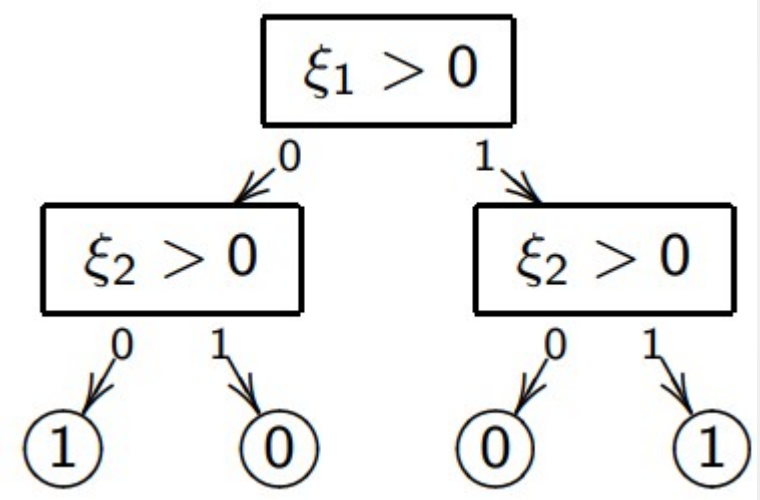
достоинство: интерпретируемость результата

недостаток: переобучение, неустойчивы к шуму

логические методы

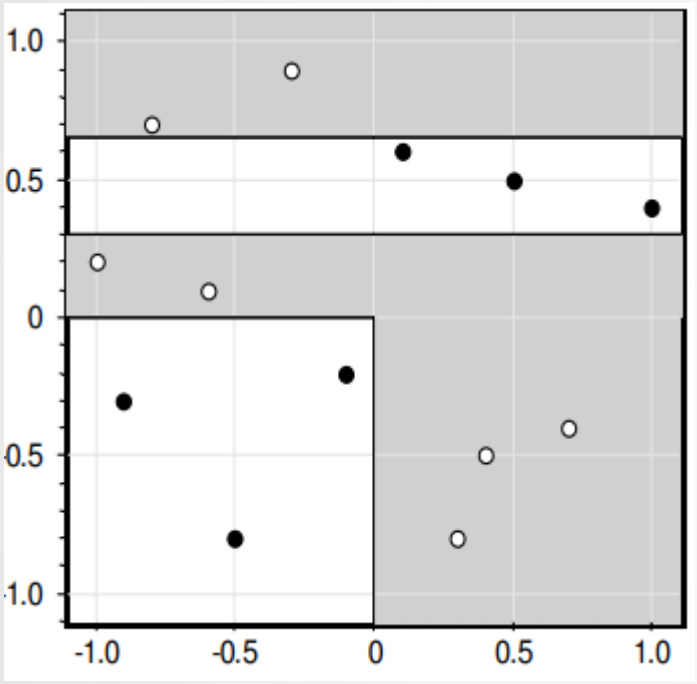
задача XOR : оптимальное дерево

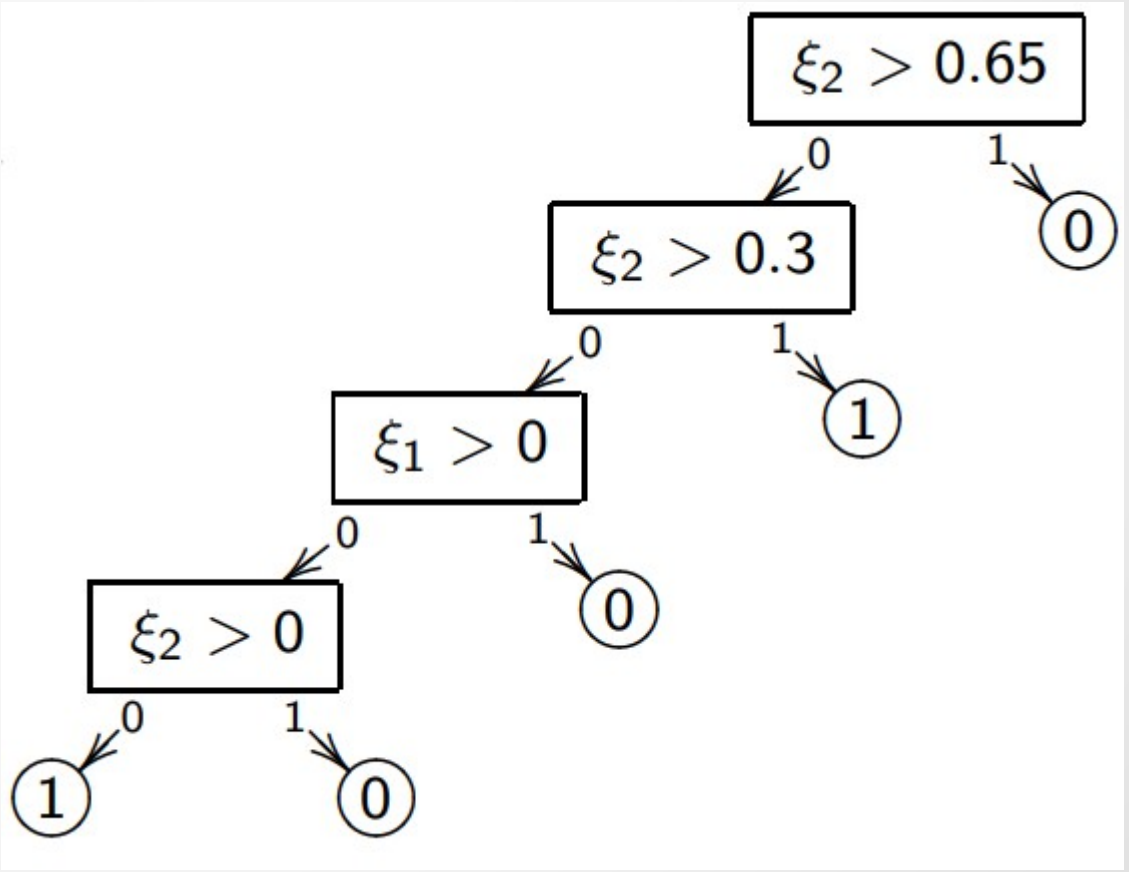




логические методы

задача XOR : результат «жадной» стратегии для дерева





логические методы

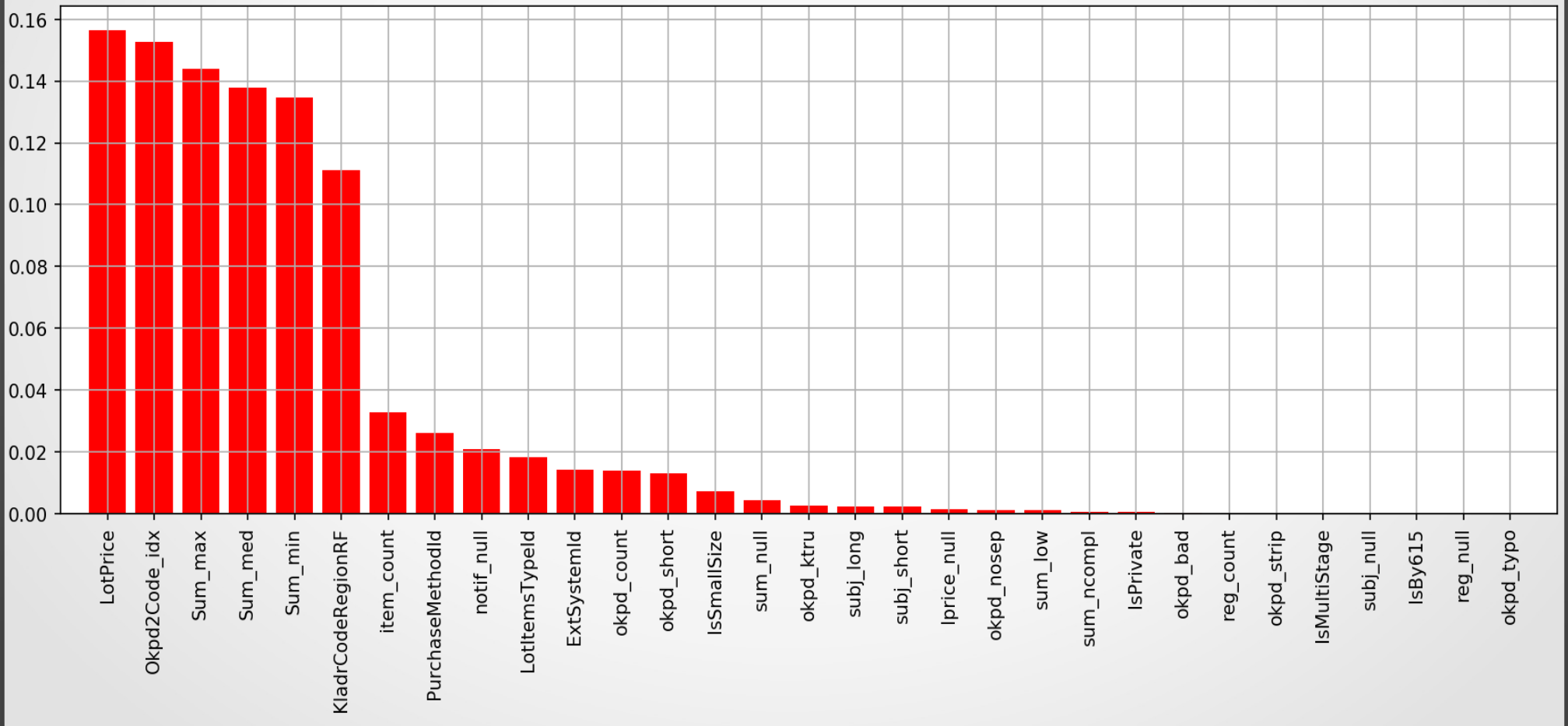
pruning - обрезка решающего дерева

pre-pruning – критерий раннего останова.
если информативность меньше порога или глубина велика
то прекращаем ветвление

post-pruning – пост-редукция.
простматриваем все внутренние вершины дерева
проверяем их качество на тестовой выборке,
заменяем листом, где качество после разделения ухудшается

логические методы

Оценка важности признаков (feature importances)



логические методы

Оценка важности признаков (feature importances)

$$I_t = \frac{N_t}{N} \cdot \left(G_t - \frac{N_{tR}}{N_t} \cdot G_R - \frac{N_{tL}}{N_t} \cdot G_L \right)$$

G_t - неопределенность Джини (Gini impurity) в узле t
N - всего объектов учебной выборки,
N_t - количество объектов в узле t,
G_L - неопределенность Джини для левой ветки
N_{tL} - количество объектов после разделения в узле t слева,
G_R - неопределенность Джини для правой ветки
N_{tR} - количество объектов после разделения в узле t справа,

логические методы: литература

git clone *https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git*

- К.В. Воронцов Логические алгоритмы классификации. - курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014
- Е.С.Борисов Классификатор на основе решающего дерева. http://mechanoid.kiev.ua/ml-dtree.html

логические методы

Вопросы ?

логические методы: практика

источники данных для экспериментов

sklearn.datasets
UCI Repository
kaggle

задание

- посчитать число узлов и листьев
- pre-pruning (ограничить глубину дерева)