



# **Логические методы**

Евгений Борисов

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

моделируем логику человеческих решений

интерпретируемость (для некоторых приложений это критично)

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**предикат - «простое» правило для выделения объектов**

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## примеры применения пороговых правил

**если** [возраст>60] **или** [ранее был инфаркт]  
**то** операцию не делаем, риск неудачи > 60%

**если** [сумма<5000] **и** [зарплата>20000]  
**то** кредит выдать, риск невозврата 5%

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**предикат - «простое» правило для выделения объектов**

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

**[ длина > 10 ] и [ ширина < 5 ] или [ форма = квадрат ]**

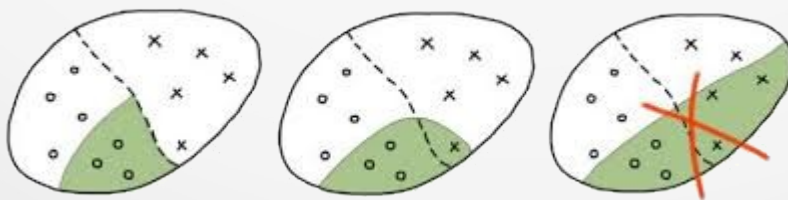
# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**предикат - «простое» правило для выделения объектов**

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

**[ длина  $> 10$  ] и [ ширина  $< 5$  ] или [ форма = квадрат ]**

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса



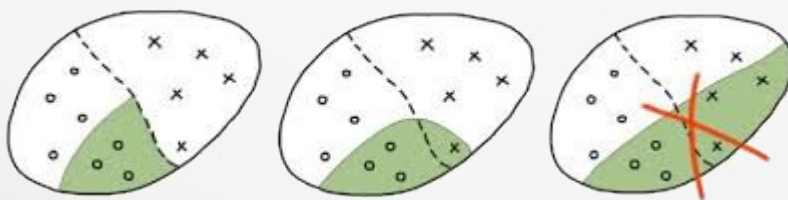
# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**предикат - «простое» правило для выделения объектов**

- предикат может быть описан естественным языком
- достаточно простая формула
- зависит от небольшого числа признаков

**[ длина  $> 10$  ] и [ ширина  $< 5$  ] или [ форма = квадрат ]**

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса

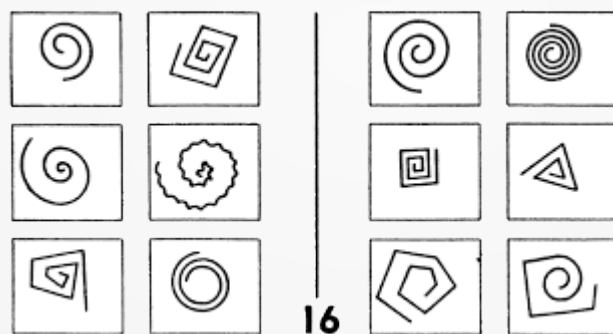


**один предикат это маловато....**

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## О ИНТУИТИВНОМ ПОНЯТИИ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

тесты Бонгарда



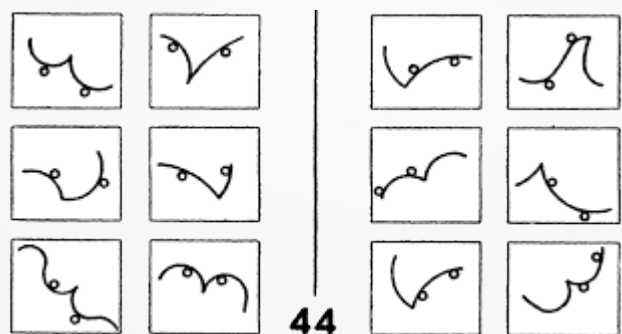
Бонгард М. М. Проблема узнавания.— М.: Физматгиз, 1967.



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## О ИНТУИТИВНОМ ПОНЯТИИ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

тесты Бонгарда



Бонгард М. М. Проблема узнавания.— М.: Физматгиз, 1967.

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**закономерность - набор правил (предикатов)**

- пороговое правило(decision stump)  $R(x)=[a_i \leq f_i(x) < b_i]$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## закономерность - набор правил (предикатов)

- пороговое правило(decision stump)  $R(x)=[a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- КОНЪЮНКЦИЯ  $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## закономерность - набор правил (предикатов)

- пороговое правило(decision stump)  $R(x)=[a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция  $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром  $R(x)=\left[ \sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d \right]$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## закономерность - набор правил (предикатов)

- пороговое правило(decision stump)  $R(x)=[a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция  $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром  $R(x)=\left[ \sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d \right]$
- полуплоскость  $R(x)=\left[ \sum_i w_i \cdot f_i(x) \geq w_0 \right]$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## закономерность - набор правил (предикатов)

- пороговое правило(decision stump)  $R(x)=[a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- конъюнкция  $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром  $R(x)=\left[\sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d\right]$
- полуплоскость  $R(x)=\left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geq w_0\right]$
- шар  $R(x)=\left[\rho(x_0, x) \leq w_0\right]$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**задача:** нужно отбирать «хорошие» закономерности

**вопрос:** как их оценивать

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## **введём понятие информативности**

как определить информативность предиката ?

предикат выделил объекты

$r$  - количество позитивных

$n$  - количество негативных



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## введём понятие информативности

как определить информативность предиката ?

предикат выделил объекты

$p$  - количество позитивных

$n$  - количество негативных

«простые» эвристики

$p$	$n$	$p-n$	$p-5n$	$\frac{p}{p}-\frac{n}{N}$	$\frac{p}{n+1}$
50	0	<b>50</b>	50	0.25	50
100	50	<b>50</b>	-150	0	1.96
50	9	41	<b>5</b>	0.16	<b>5</b>
5	0	5	<b>5</b>	0.03	<b>5</b>
100	0	<b>100</b>	100	<b>0.5</b>	100
140	20	<b>120</b>	40	<b>0.5</b>	6.67

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## информативность - энтропийный критерий

два исхода с вероятностями  $q$  и  $1-q$

количество информации:  $I_0 = -\log_2(q)$      $I_1 = -\log_2(1-q)$

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

энтропия выборки **S** :

исходы  $q$  это принадлежность к классу **y**

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

$S$  - количество объектов в выборке  
 $P$  - количество объектов класса **y**  
(позитивных) в выборке

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## информативность - энтропийный критерий

$S$  - количество объектов в выборке

$P$  - количество объектов класса  $y$  (позитивных) в выборке

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right) \quad \text{энтропия выборки } S$$

предикат  $R$  выделил в  $S$  объекты

$p$  - количество позитивных

$n$  - количество негативных

$$H(y|R) = \frac{(p+n)}{S} \cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right) + \frac{s-p-n}{S} \cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right) \quad \text{энтропия выборки } S \text{ после получения информации } R$$

## информационный выигрыш (Information gain)

$$iGain(y, R) = H(y) - H(y|R)$$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

P - количество объектов класса **y** (позитивных) в выборке

N - количество объектов класса не **y** (негативных) в выборке

S - количество объектов в выборке ( $S = P+N$ )

предикат **R** выделил в S объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

## информативность

точный статистический тест Фишера

$$iStat(y, R) = \frac{-1}{S} \log_2 \left( \frac{C_P^p \cdot C_N^n}{C_S^{p+n}} \right)$$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

предикат **R** выделил в **S** объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

$q_c$  - априорная вероятность класса c, выделенного предикатом R

## информативность

неопределенность Джини (Gini impurity)

$$Gini(y, R) = \sum_c q_c \cdot (1 - q_c) = \frac{p}{p+n} \cdot \left(1 - \frac{p}{p+n}\right) + \frac{n}{p+n} \cdot \left(1 - \frac{n}{p+n}\right)$$

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## основные вопросы построения логического классификатора

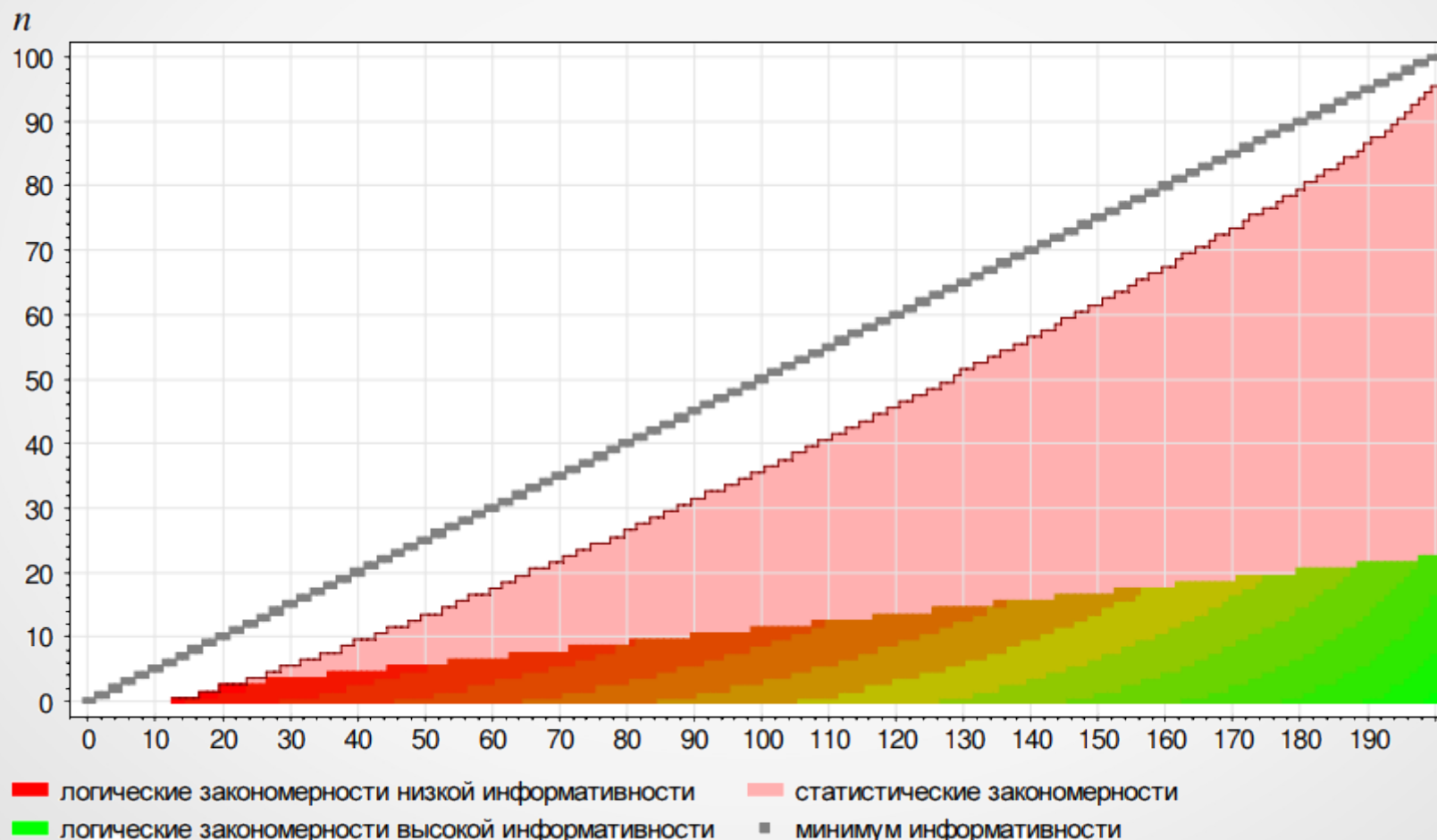
- как извлекать признаки  
не наука, но творчество
- какого вида закономерности нужны  
простые, малое количество признаков
- как определить информативность  
iGain, Gini ...
- как искать закономерности  
ограниченный перебор (rule induction)
- как объединить закономерности в алгоритм

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

как искать закономерности

P=200

N=100



неслучайность это ещё не закономерность

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**как объединить закономерности в алгоритм:**

решающее дерево

рекурсивное разделение данных на две части

строим простой предикат -  
ищем признак **i** и порог **b** для него

максимизируем информативность

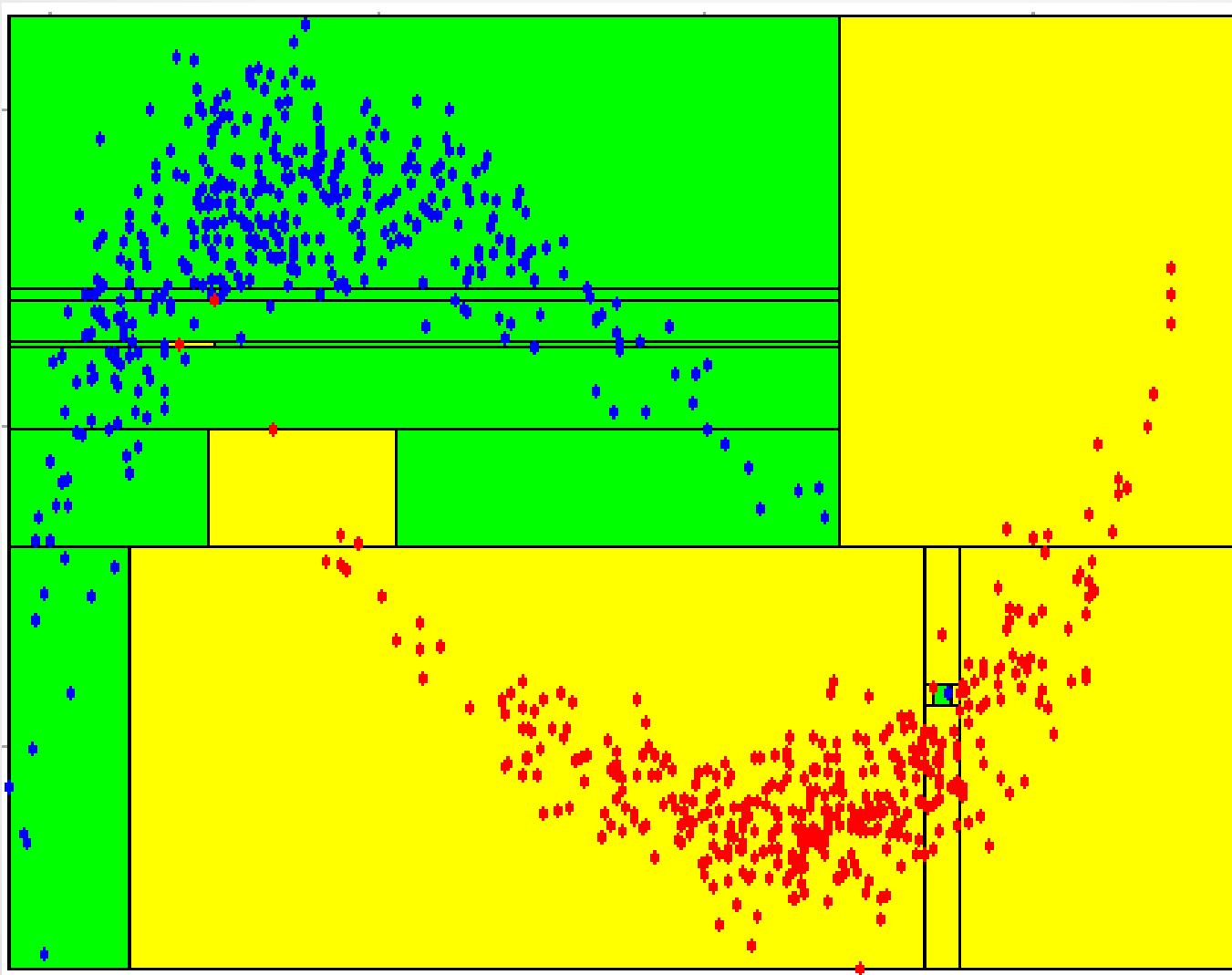
$$\max_{i,b} (iGain(y, [X_i > b]))$$

$$\min(X_i) < b < \max(X_i)$$



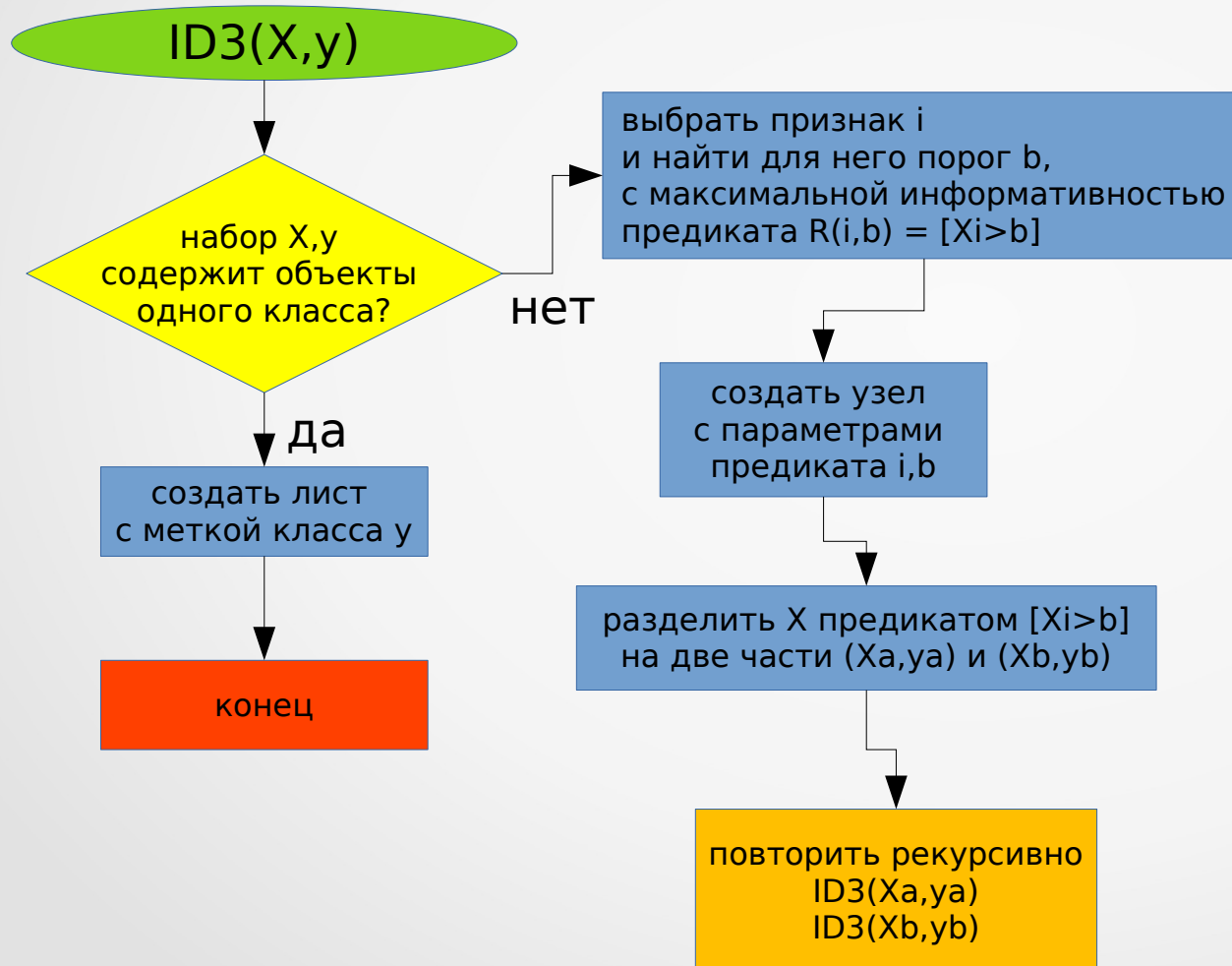
# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

разделение набора объектов решающим деревом



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

как объединить закономерности в алгоритм:  
решающее дерево, алгоритм ID3



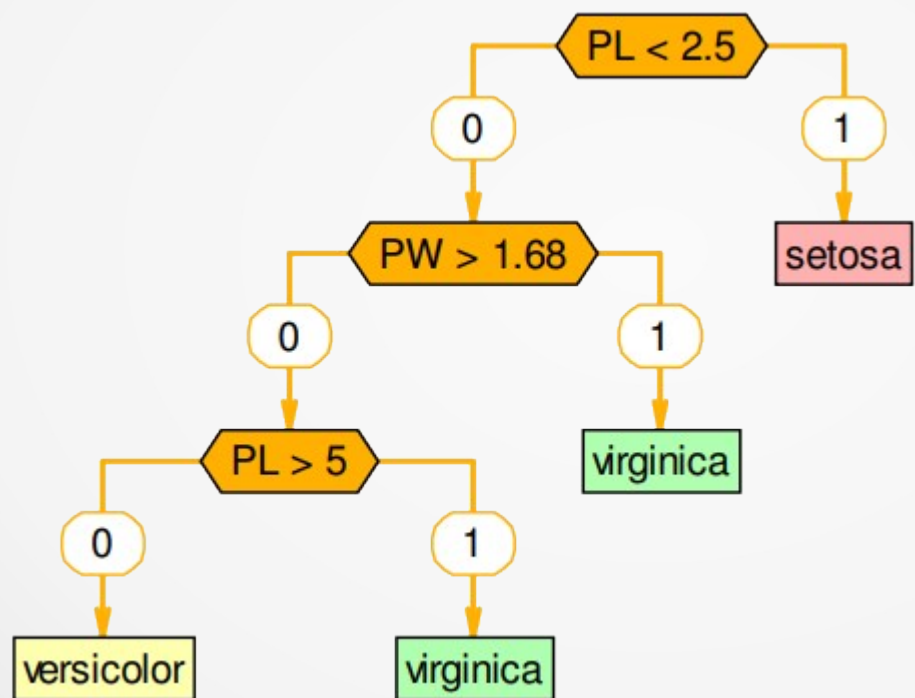
$$\max_{i,b} (iGain(y, [X_i > b]))$$

$$\min(X_i) < b < \max(X_i)$$

рекурсивное  
разделение  
данных на две  
части

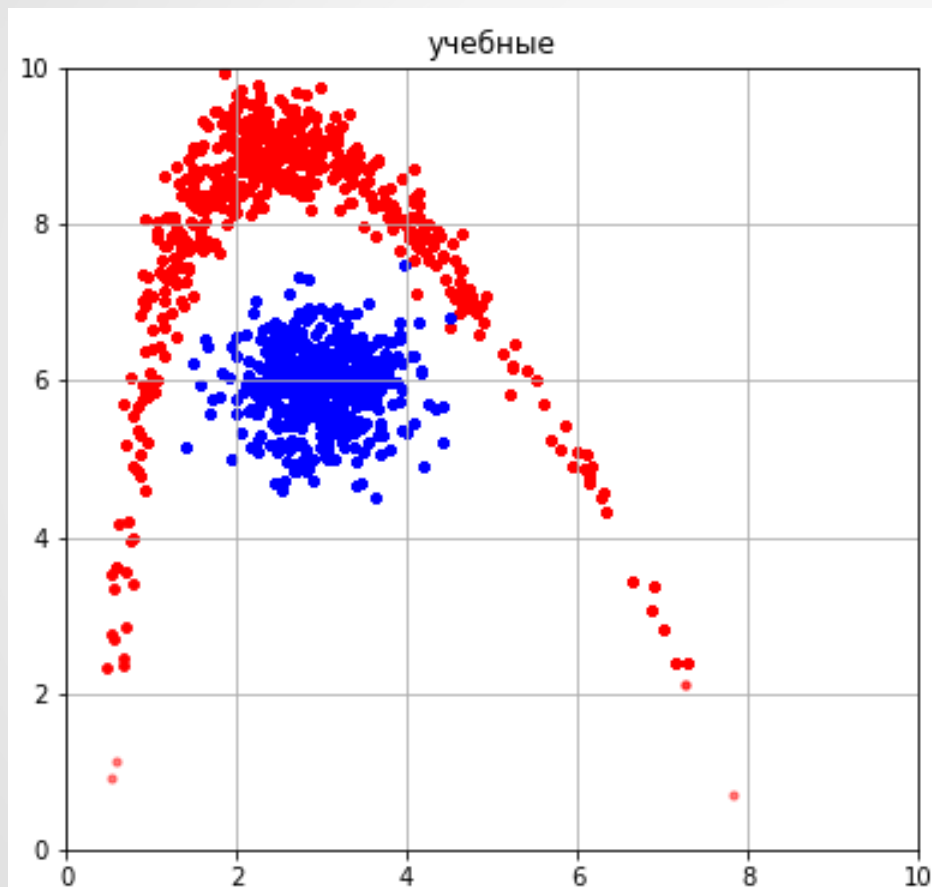
# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

пример дерева для набора iris



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

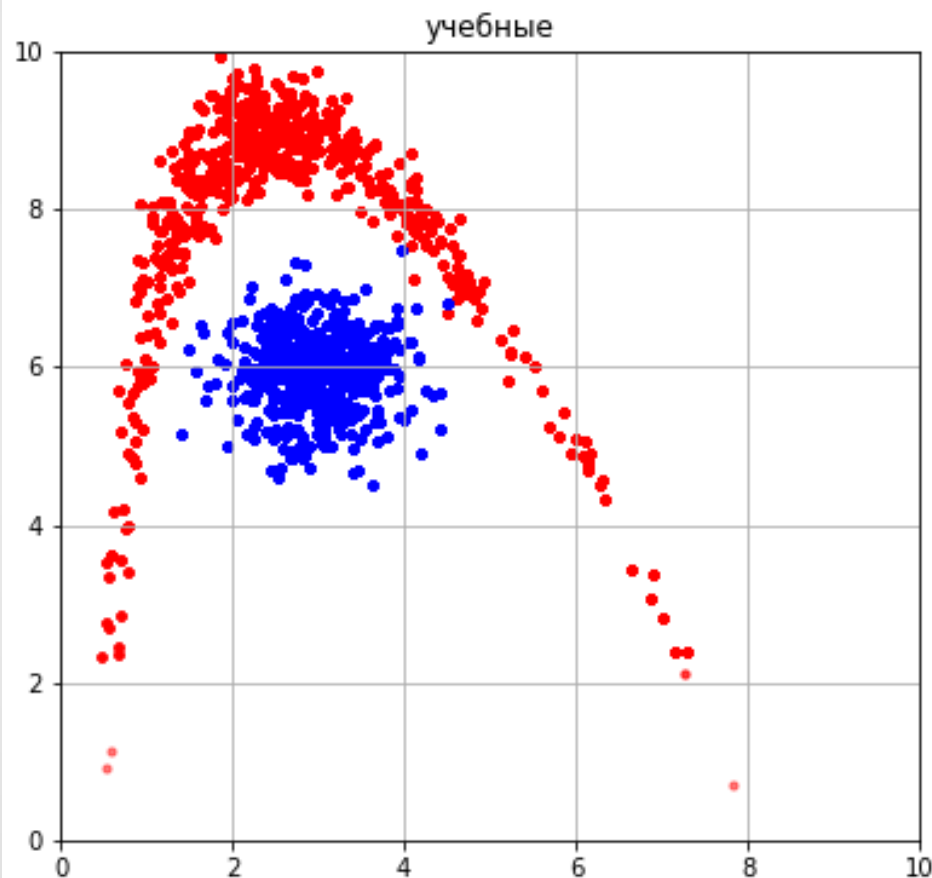
результат работы решающего дерева



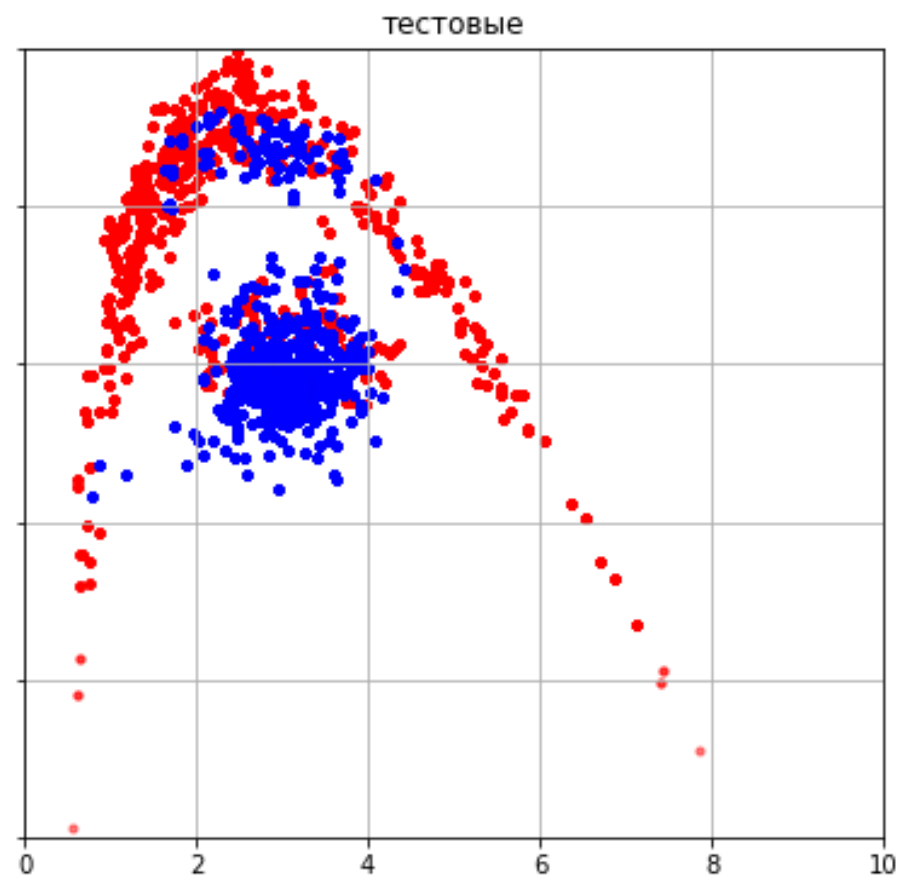
на учебном наборе - 100% точность

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

результат работы решающего дерева



на учебном наборе - 100% точность



на тесте - переобучение

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

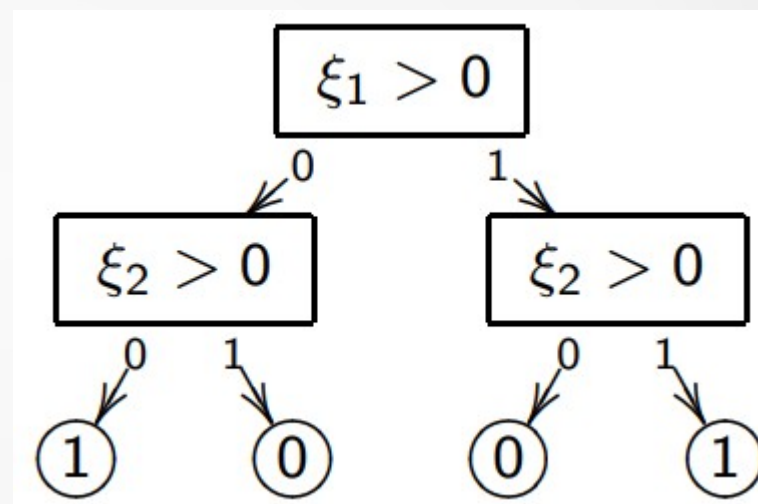
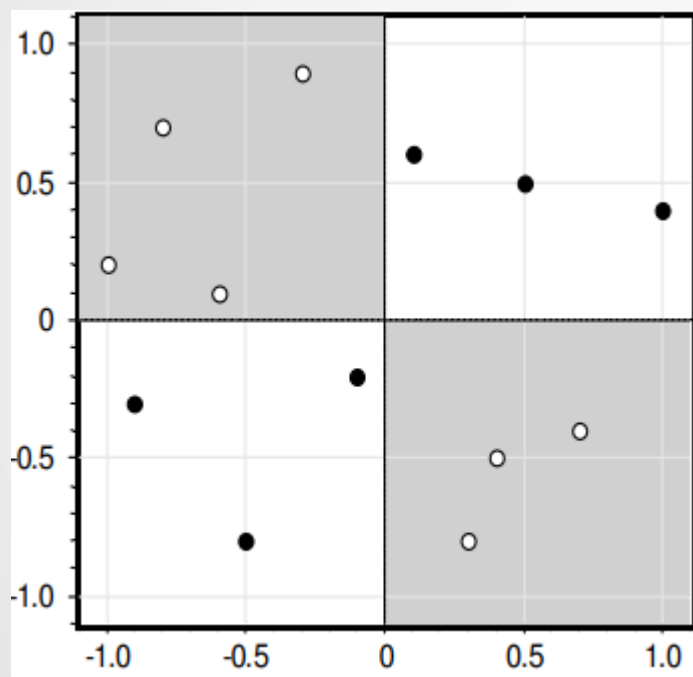
## **решающее дерево**

достоинство: интерпретируемость результата

недостаток: переобучение, неустойчивы к шуму

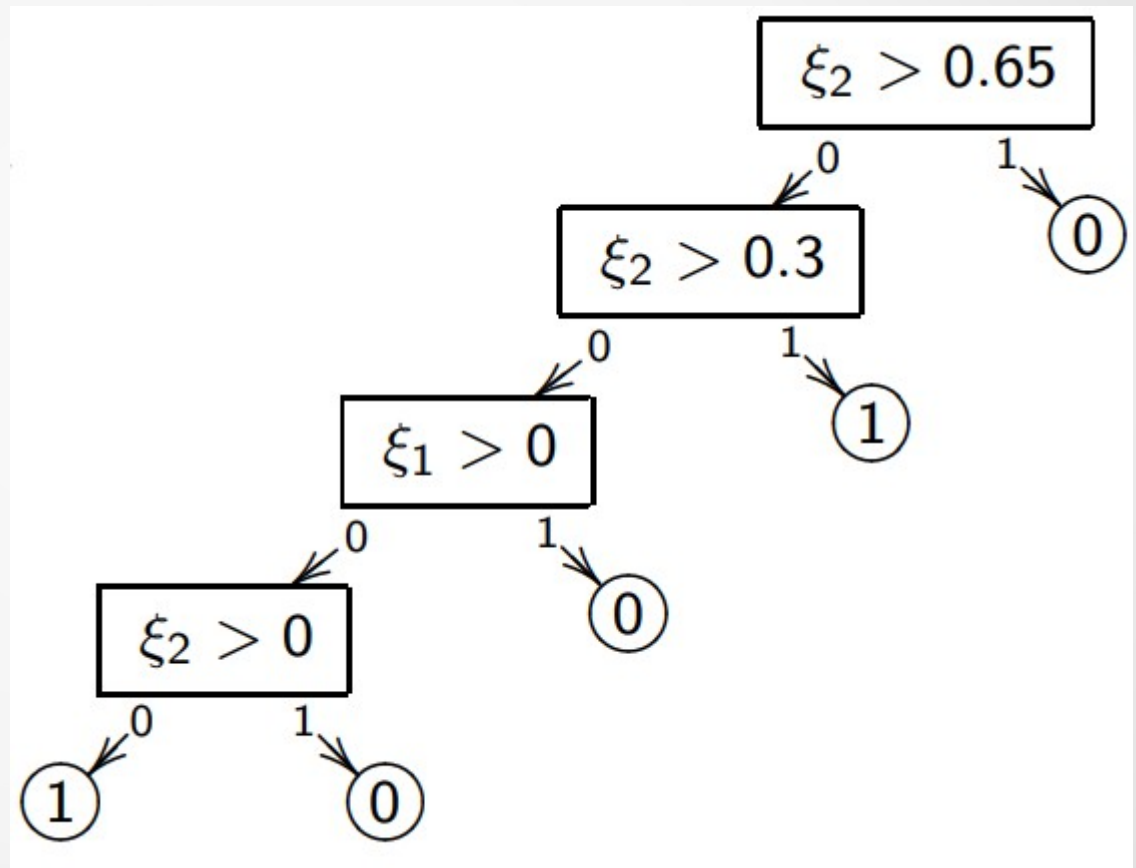
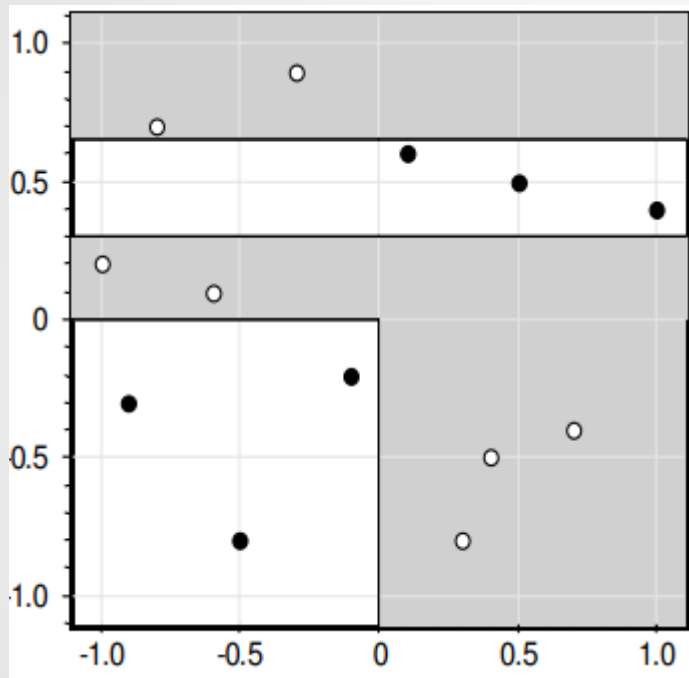
# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

задача XOR : оптимальное дерево



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

задача XOR : результат «жадной» стратегии для дерева





# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## **pruning - обрезка решающего дерева**

pre-pruning - критерий раннего останова.

если информативность меньше порога или глубина велика  
то прекращаем ветвление

post-pruning - пост-редукция.

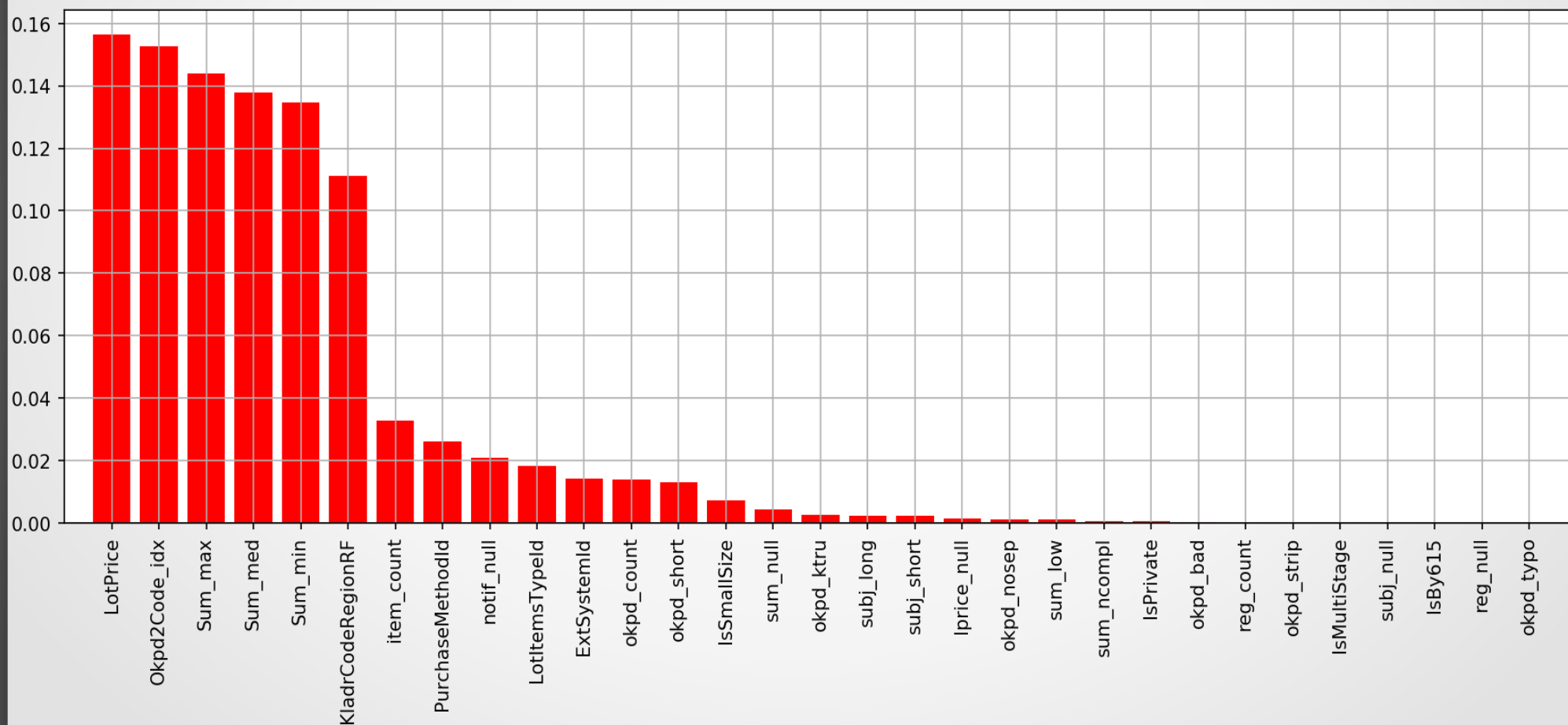
простматриваем все внутренние вершины дерева

проверяем их качество на тестовой выборке,

заменяем листом, где качество после разделения ухудшается

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## Оценка важности признаков (feature importances)



# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

## Оценка важности признаков (feature importances)

$$I_t = \frac{N_t}{N} \cdot \left( G_t - \frac{N_{tR}}{N_t} \cdot G_R - \frac{N_{tL}}{N_t} \cdot G_L \right)$$

$G_t$  - неопределенность Джини (Gini impurity) в узле  $t$

$N$  - всего объектов учебной выборки,

$N_t$  - количество объектов в узле  $t$ ,

$G_L$  - неопределенность Джини для левой ветки

$N_{tL}$  - количество объектов после разделения в узле  $t$  слева,

$G_R$  - неопределенность Джини для правой ветки

$N_{tR}$  - количество объектов после разделения в узле  $t$  справа,

# логические методы: литература

git clone [https://github.com/mechanoid5/ml\\_lectorium.git](https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git)

- К.В. Воронцов Логические алгоритмы классификации. - курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014
- Е.С.Борисов Классификатор на основе решающего дерева.  
<http://mechanoid.su/ml-dtree.html>

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ



**Вопросы ?**

# ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ: практика

## источники данных для экспериментов



sklearn.datasets  
UCI Repository  
kaggle



## задание

- посчитать число узлов и листьев
- pre-pruning (ограничить глубину дерева)