Методы восстановления плотности распределения

Евгений Борисов

Восстановление плотности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

Байесовский классификатор

λ_y - потеря для объектов y

P(y) - априорная вероятность класса y
(доля примеров класса y,
пропорция классов должна соответствовать)

p(x|y) - ф-ция правдоподобия класса y (плотность)

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

- параметрический
- непараметрический
- смеси распределений

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

параметрический подход

$$\hat{p}(x)=\varphi(x,\theta)$$

НЕпараметрический подход

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{mV(h)}\sum_{j=1}^{m}K\left(\frac{\rho(x,x_j)}{h}\right)$$

смеси распределений

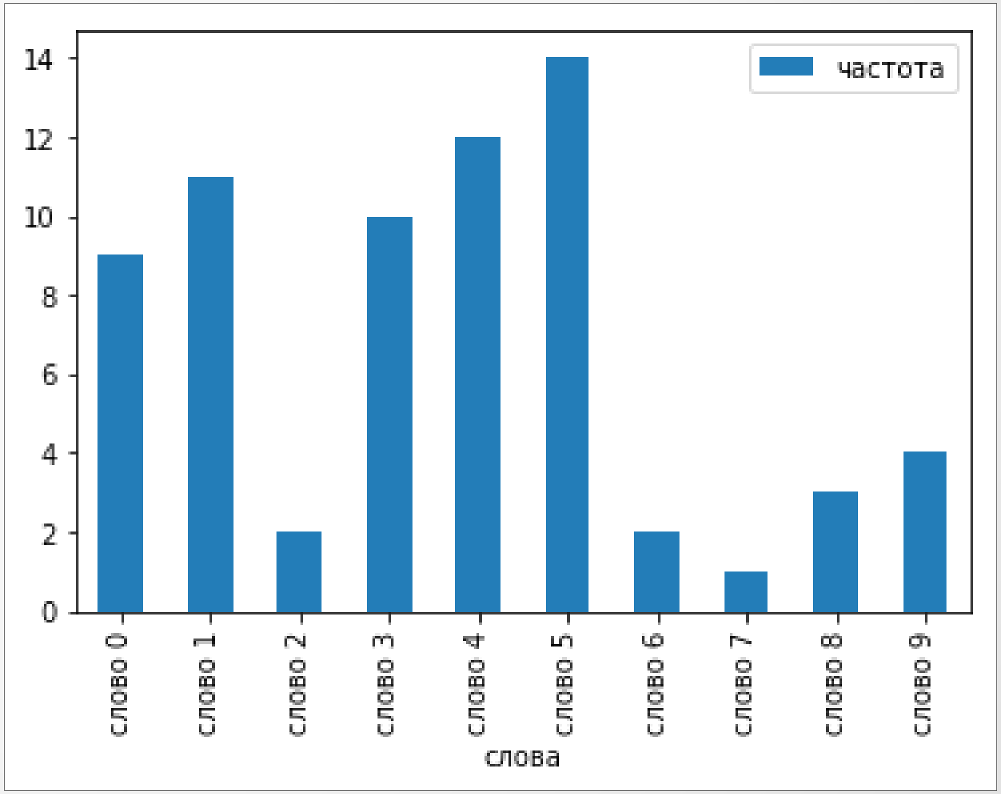
$$\hat{p}(x)=\sum_{j=1}^{k}w_j\varphi_j(x,\theta_j)$$

Восстановление плотности

НЕпараметрический подход

дискретный случай: гистограмма

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[x=x_i]$$



пример: распределение повторов слов в тексте

Восстановление плотности

непараметрические методы

непрерывный случай: доля объектов попавших в окно ширины h

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{mh}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\frac{|x-x_i|}{h}<1\right]$$

Восстановление плотности

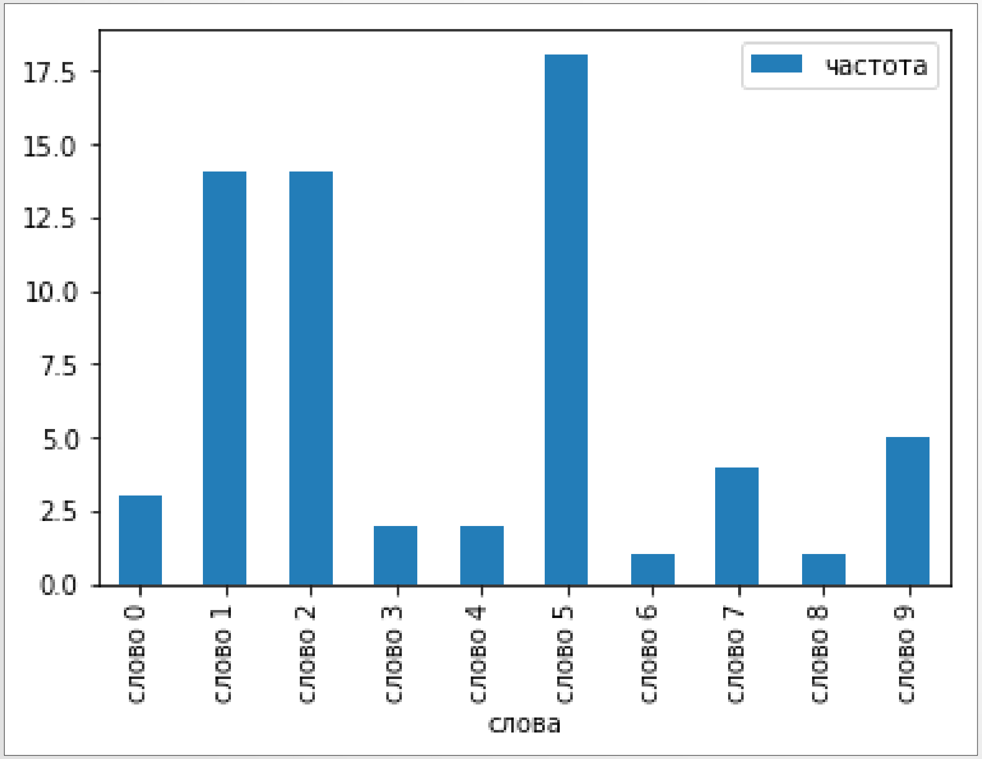
непараметрические методы:
оценка плотности Парзена-Розенблата

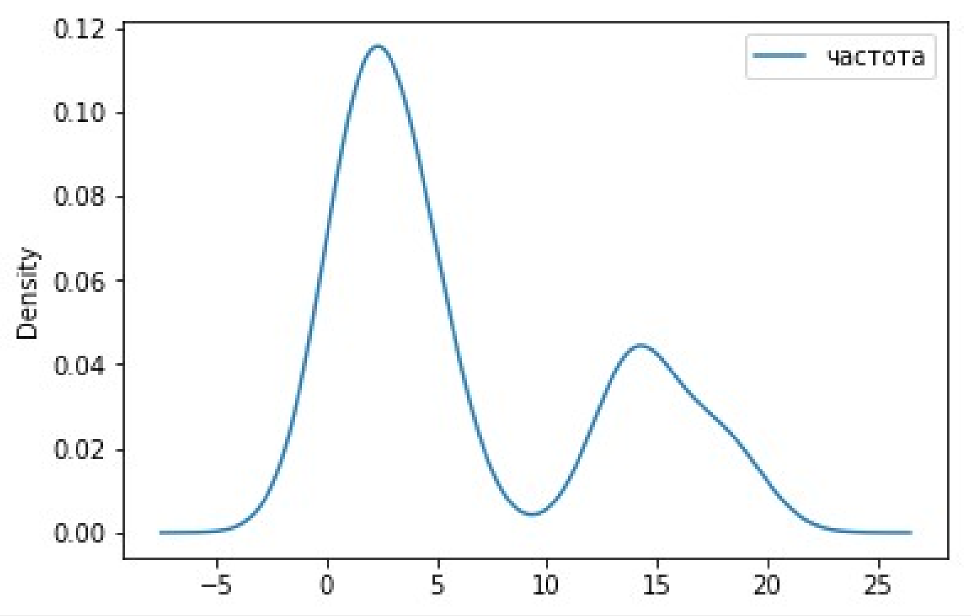
$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m\,V(h)} \sum_{i=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h} \right)$$

ядерное сглаживание (гистограммы)

KDE, Kernel Density Estimation

K(r) - ядро
$\rho(x_1,x_2)$ - мера на X
V(h) - нормирующий множитель

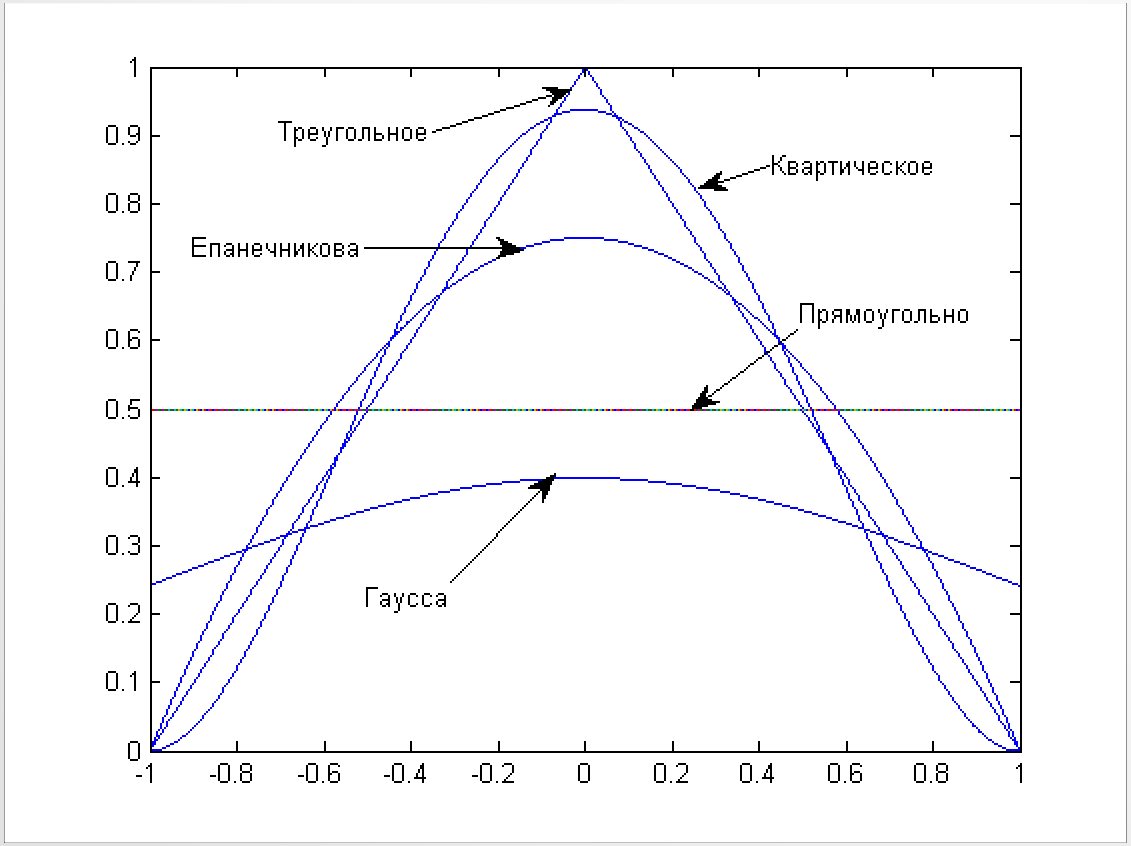




Восстановление плотности

непараметрические методы:
функции ядра для сглаживания гистограммы

KDE, Kernel Density Estimation



ядро Епанечникова:

$$K(r)=\frac{3}{4}(1-r^2);|r|\leq 1$$

Восстановление плотности

Байесовский классификатор: метод парзеновского окна

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y = y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Восстановление плотности

непараметрические методы:

выбор оптимального размера парзеновского окна ***h***

методом скользящего контроля (Leave One Out, LOO)

$$LOO(h,X)=\sum_{i=1}^{l}\left[a\left(x_i,\{X\setminus x_i\},h\right)\neq y_i\right]\rightarrow \min_h$$

параметр **h** выбираем перебором

для разных значений **h**
проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

при этом
из учебного набора **X** удаляется текущий (проверяемый) пример

Восстановление плотности

<u>параметрический подход</u>

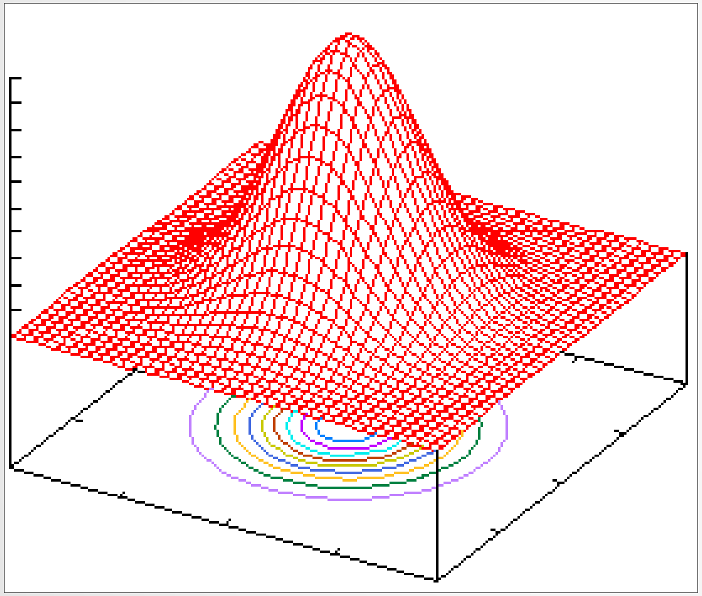
$$\hat{p}(x)=\varphi(x,\theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta,X)=\sum_{i=1}^{m}\ln\varphi(x_i,\theta)\rightarrow\max_{\theta}$$

Восстановление плотности

параметрический подход:
допустим - **p(x)** это нормальная *n-мерная* плотность



$$p(x)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\,\Sigma}}$$

Восстановление плотности

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x)=N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{\mu})(x_i-\hat{\mu})^T$$

Восстановление плотности

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n-мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y = y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y = y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(det\, \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Восстановление плотности

Дополнение:
если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:y=y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} (x_i - \hat{\mu}_{yi})(x_i - \hat{\mu}_{yi})^T$$

Байесовский классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Восстановление плотности

<u>смеси распределений</u>

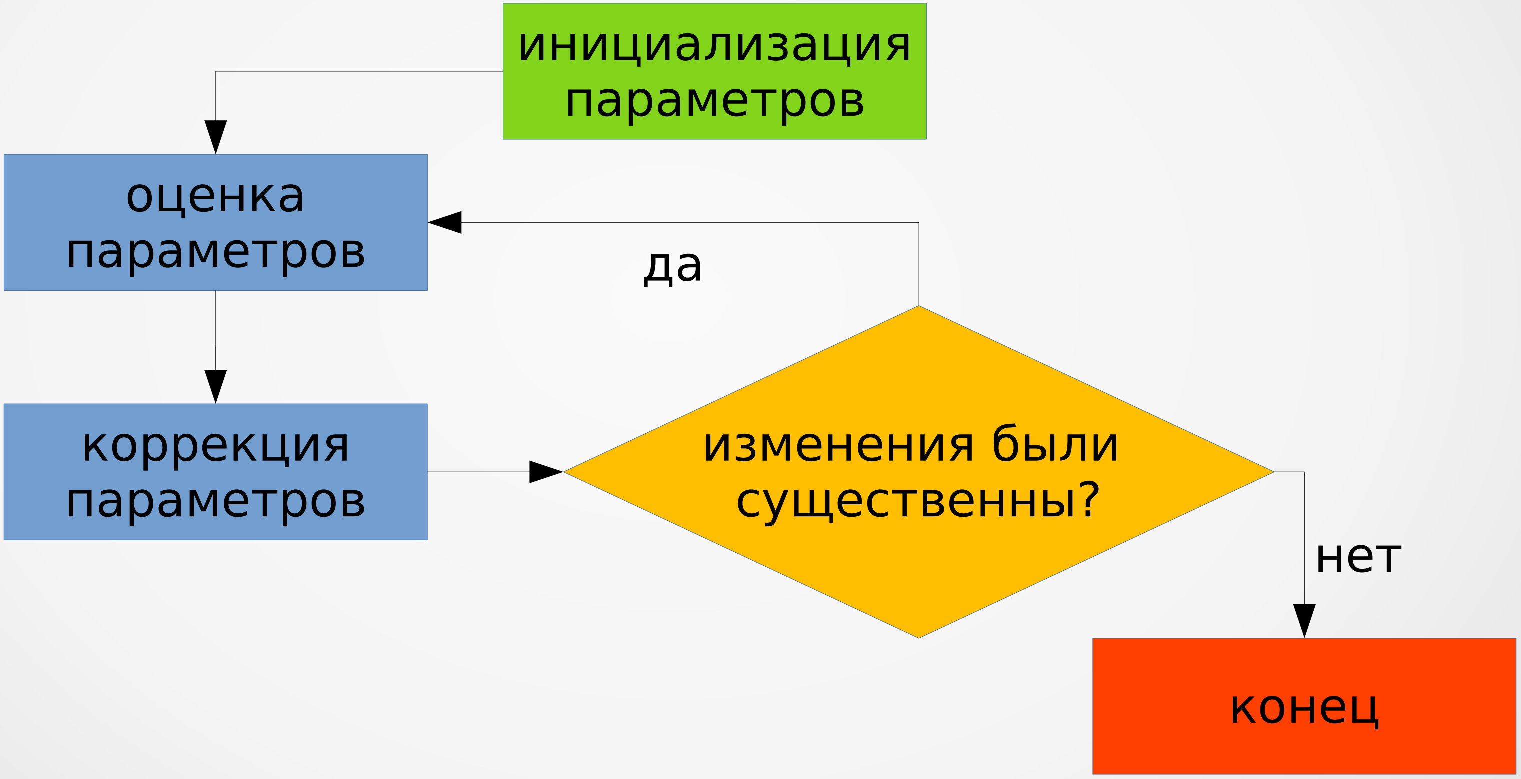
$$\hat{p}(x)=\sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x,\theta_j);$$

$$\sum_{j=1}^{k} w_j=1; \qquad w_j \geq 0$$

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm):

базовый вариант алгоритма



инициализация параметров

оценка параметров

коррекция параметров

изменения были существенны?

да

нет

конец

Восстановление плотности

EM (expectation–maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij}=\frac{w_j\varphi_j(x_i,\theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\varphi_k(x_i,\theta_k)}$$

коррекция

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j=\underset{\theta}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln\varphi_j(x_i,\theta)$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij}=\frac{w_j\,\varphi_j(x_i,\theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\,\varphi_k(x_i,\theta_k)}$$

коррекция

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j=\underset{\theta}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln\varphi_j(x_i,\theta)$$

i=1...m

m - количество примеров X

s - количество компонент смеси

условие остановки: параметры не изменились

$$|g_{ij}(t-1)-g_{ij}(t)|<\delta\,;0<\delta<1$$

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности

$$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x)=N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\,\Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{\mu})(x_i-\hat{\mu})^T$$

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности
$$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

оценка:
$$g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\Sigma}}$$

задача:
$$\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$$

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности $p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

оценка: $$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

задача: $$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{argmax} \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} N_j \qquad N_j = \sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

вес компоненты

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности $p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$

оценка: $g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\Sigma}}$$

задача: $\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^m g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$

коррекция:

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m N_j$$

$$N_j=\sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j=\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^m g_{ij}x_i$$

вес компоненты

мат.ожидание компоненты

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности

$$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

оценка:

$$g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n det\Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^m g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$$

коррекция:

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m N_j$$

вес компоненты

$$N_j=\sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j=\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^m g_{ij}x_i$$

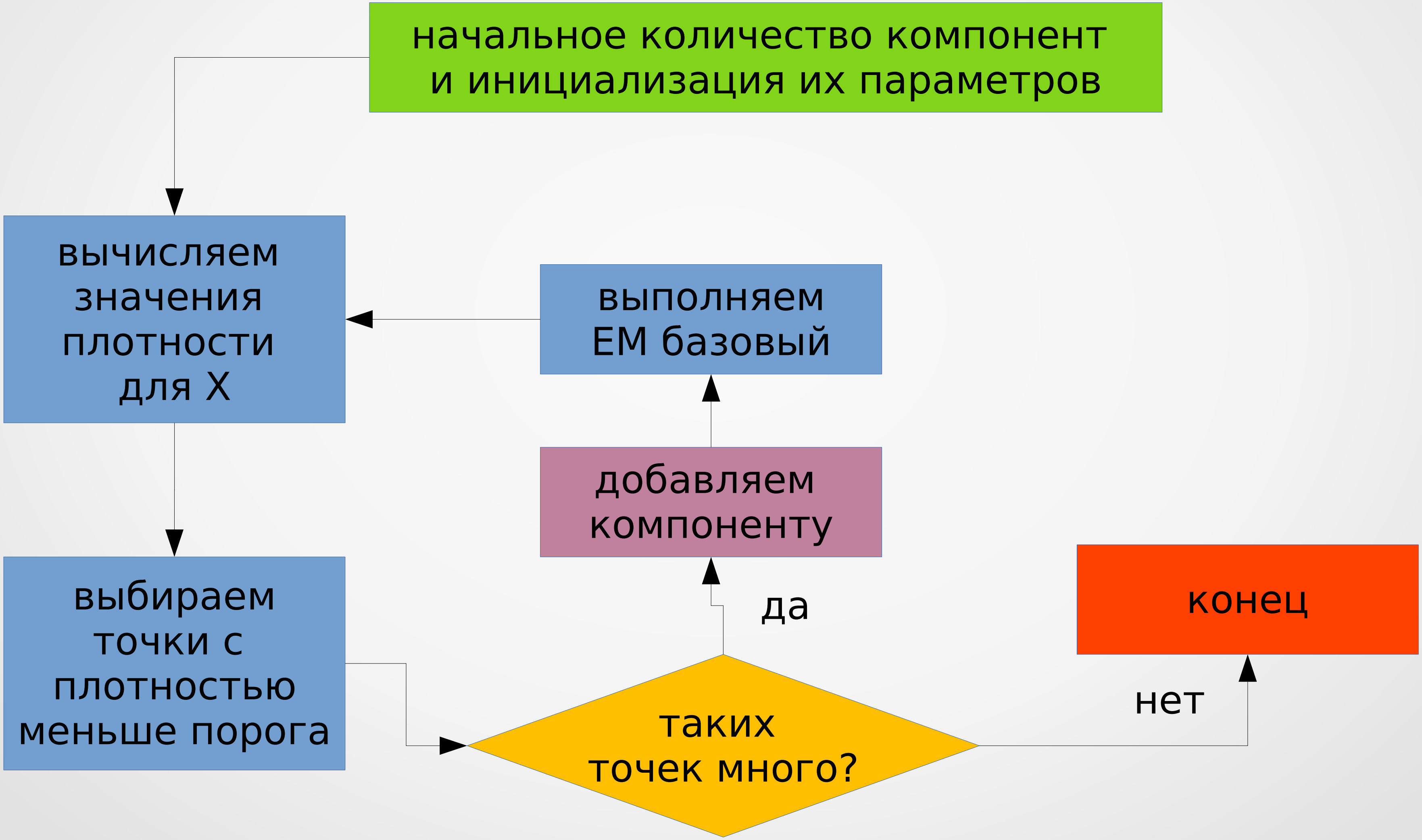
мат.ожидание компоненты

$$\Sigma_j=\frac{1}{cN_j}\sum_{i=1}^m g_{ij}(x_i-\mu_j)^T(x_i-\mu_j);0<c\leq 1$$

матрица ковариаций компоненты

Восстановление плотности

ЕМ с последовательным добавлением компонент



начальное количество компонент и инициализация их параметров

вычисляем значения плотности для X

выполняем ЕМ базовый

добавляем компоненту

выбираем точки с плотностью меньше порога

да

таких точек много?

нет

конец

Восстановление плотности

EM последовательное добавление компонент (для нормальной плотности)

начальные значения параметров первой компоненты смеси

$$w_1 = 1$$

вес компоненты

$$\Sigma_1 = cov(X)$$

матрица ковариаций компоненты

$$\mu_1 = \frac{1}{|X|} \sum X$$

мат.ожидание компоненты

Восстановление плотности

EM последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание компоненты

Восстановление плотности

ЕМ последовательное добавление компонент (для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov\left(X_{low}\right)$$

матрица ковариаций компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание компоненты

коррекция весов старых компонент смеси

$$w_i := w_i \left(1 - w_{k+1}\right)$$

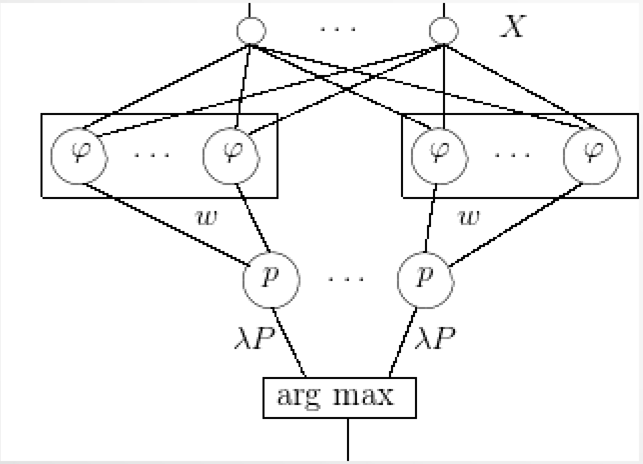
после определения новых параметров смеси запускаем ЕМ

Восстановление плотности

RBF - сеть радиальных базисных функций

Байесовский классификатор

плотности классов - смеси нормальных распределений

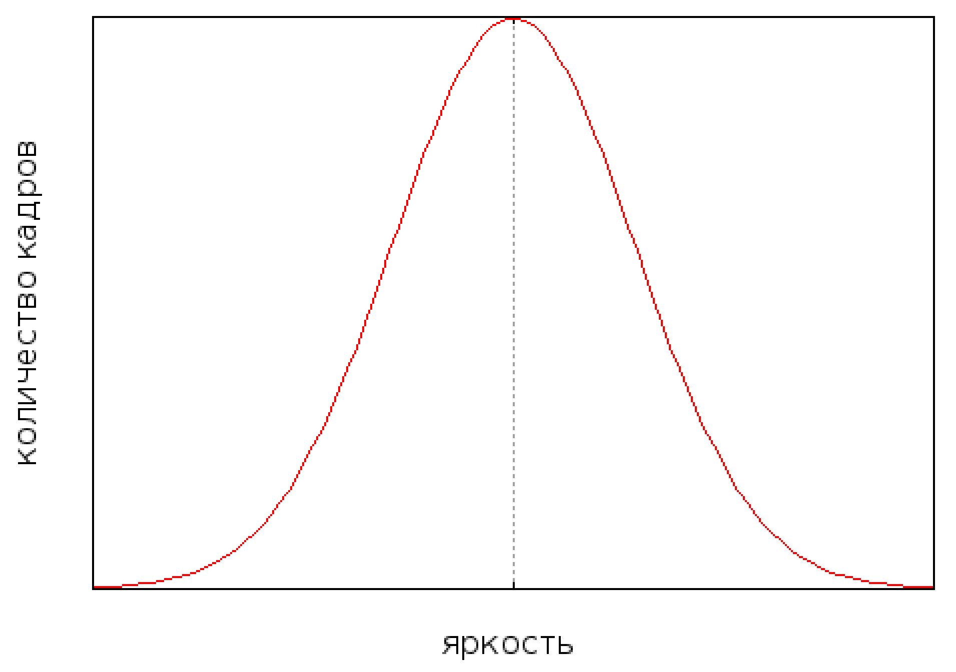


$$a(x)=\underset{y\in Y}{argmax}\,\lambda_y P(y)\,p(x|y)$$

$$p(x|y)=\sum_k w_k^y \varphi_k^y(x;\theta_k^y)=\sum_k w_k^y N(x;\Sigma_k^y,\mu_k^y)$$

Восстановление плотности

Пример: детектор новых объектов для неподвижных камер



Восстановление плотности: литература

git clone *https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git*

- К.В. Воронцов   Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014
- Борисов Е.С. Байесовский классификатор. *http://mechanoid.su/ml-bayes.html*
- Борисов Е.С. Восстановление смеси плотностей распределений с помощью ЕМ-алгоритма. *http://mechanoid.su/ml-em-base.html*
- Борисов Е.С. Классификатор на основе RBF. *http://mechanoid.su/ml-rbf.html*
- Борисов Е.С. Детектор объектов для неподвижных камер. *http://mechanoid.su/cv-backgr.html*

Восстановление плотности

Вопросы ?

Восстановление плотности: практика

OpenCV MOG

источники данных для экспериментов
sklearn.datasets
UCI Repository
kaggle

задание

реализовать RBF

посчитать оценки качества классификации