Лекция 5:
методы восстановления плотности распределения

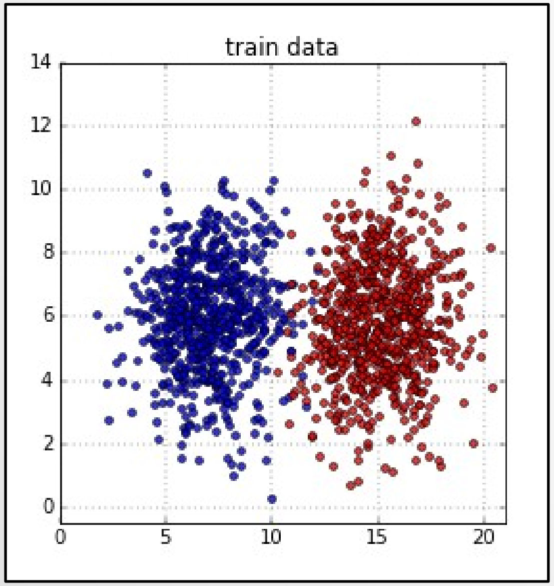
Евгений Борисов

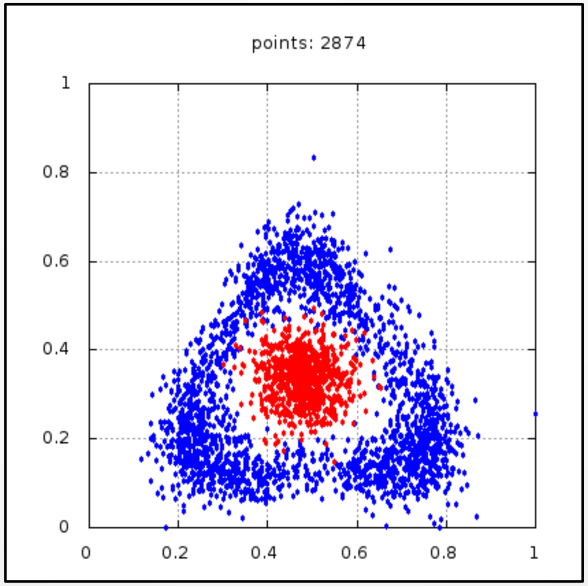
четверг, 18 октября 2018 г.

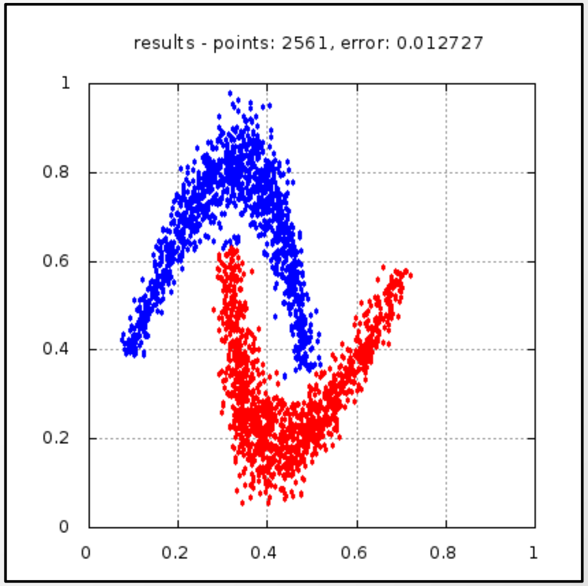
Классификатор

разделения объектов на классы

Детектор котов:  → вектор-признак → есть/нет







Восстановление плотности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

Байесовский классификатор

λ_y - потеря для объектов y

P(y) - априорная вероятность класса y
(доля примеров класса y,
пропорция классов должна соответствовать)

p(x|y) - ф-ция правдоподобия класса y (плотность)

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

- параметрический
- непараметрический
- смеси распределений

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

НЕпараметрический подход

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{j=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

смеси распределений

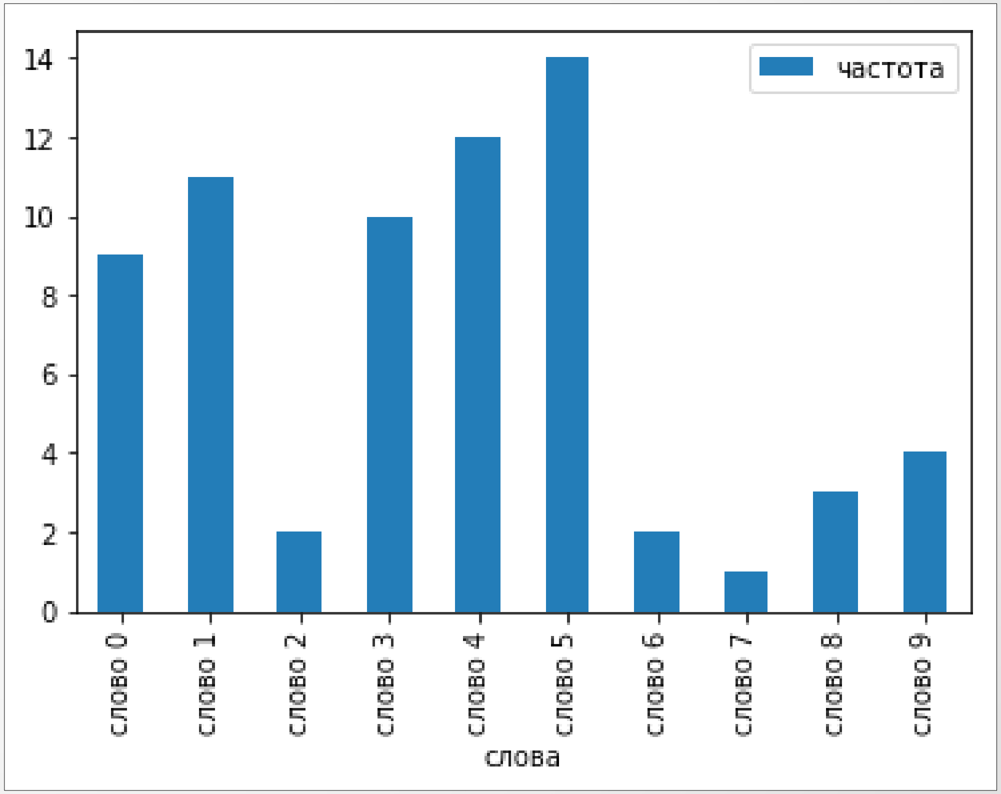
$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Восстановление плотности

НЕпараметрический подход

дискретный случай: гистограмма

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[x=x_i]$$



пример: распределение повторов слов в тексте

Восстановление плотности

непараметрические методы

<u>непрерывный случай:</u> доля объектов попавших в окно ширины h

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

Восстановление плотности

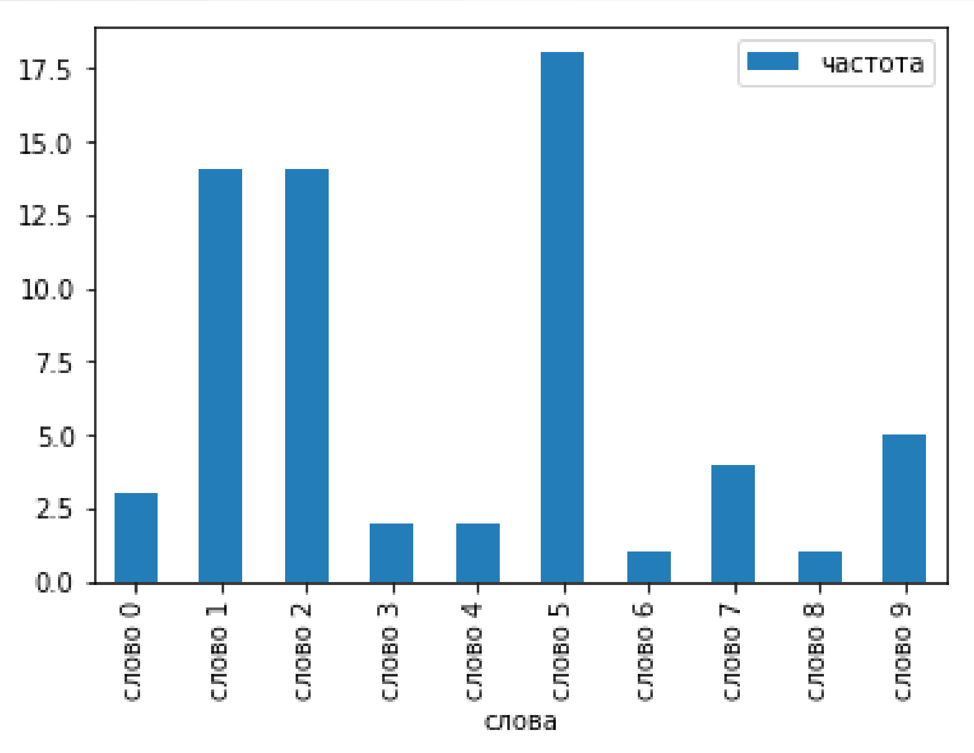
непараметрические методы:
оценка плотности Парзена-Розенблата

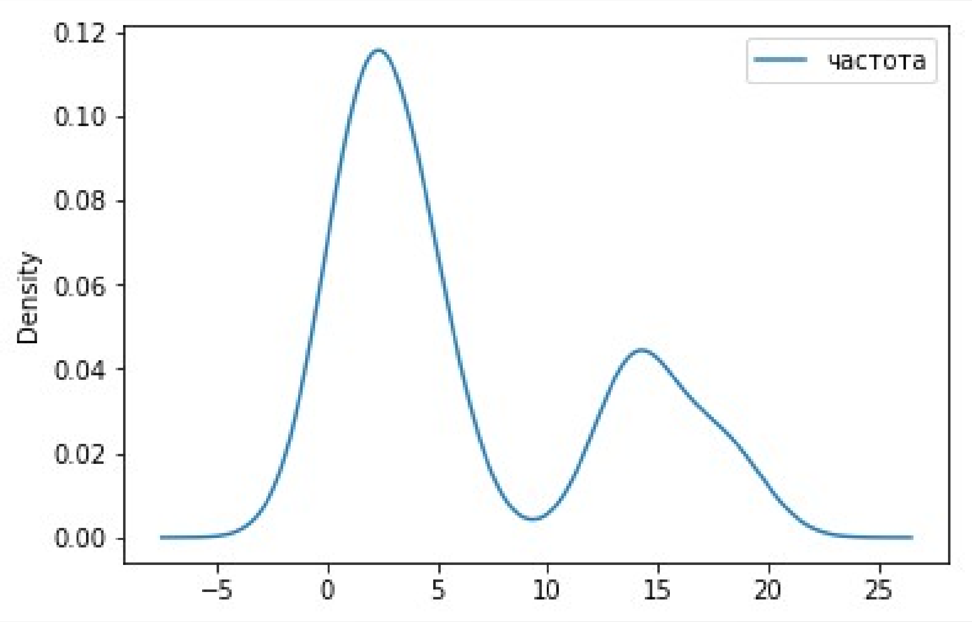
$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mV(h)} \sum_{i=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

ядерное сглаживание (гистограммы)

KDE, Kernel Density Estimation

K(r) - ядро
$\rho(x_1, x_2)$ - мера на X
V(h) - нормирующий множитель

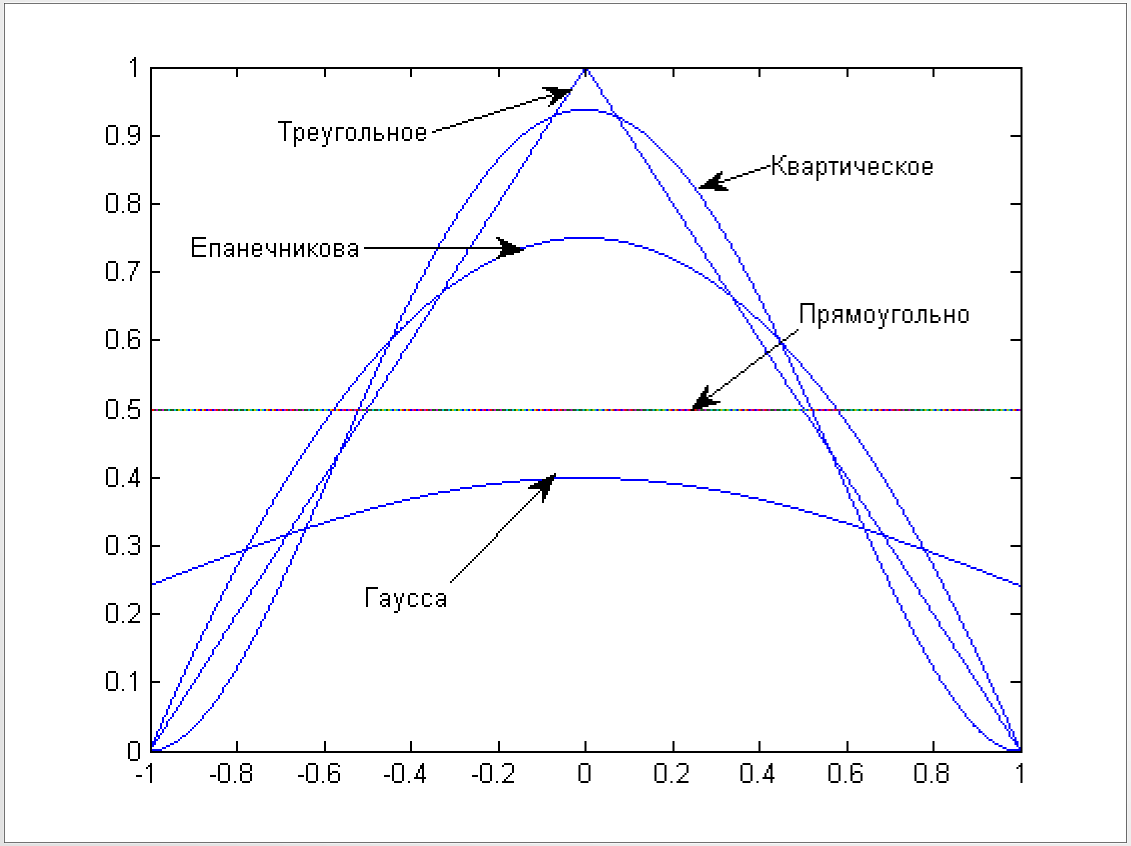




Восстановление плотности

непараметрические методы:
функции ядра для сглаживания гистограммы

KDE, Kernel Density Estimation



ядро Епанечникова:

$$K(r)=\frac{3}{4}(1-r^2);|r|\le 1$$

Восстановление плотности

Байесовский классификатор: метод Парзеновского окна

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y = y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Восстановление плотности

непараметрические методы:

*выбор оптимального размера Парзеновского окна **h***

методом скользящего контроля (Leave One Out, LOO)

$$LOO(h, X) = \sum_{i=1}^{l} \left[a\left(x_i, \{X \setminus x_i\}, h\right) \neq y_i \right] \rightarrow \min_h$$

параметр **h** выбираем перебором

для разных значений **h**
проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

при этом
из учебного набора **X** удаляется текущий (проверяемый) пример

Восстановление плотности

<u>параметрический подход</u>

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

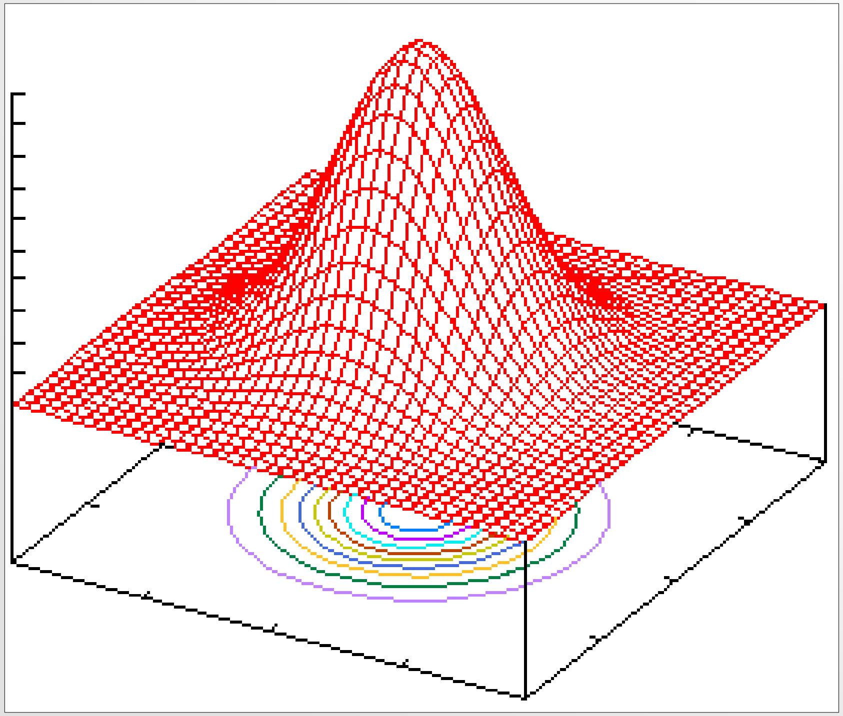
принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Восстановление плотности

параметрический подход:
допустим - **p(x)** это нормальная плотность

$$p(x)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$



n-мерная нормальная плотность

Восстановление плотности

параметры оценки максимального правдоподобия
для n-мерной гауссовской плотности имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\hat{\mu}\right)\left(x_i-\hat{\mu}\right)^T$$

Восстановление плотности

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n-мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y = y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y = y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(det\, \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Восстановление плотности

Дополнение:
если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:y=y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} (x_i - \hat{\mu}_{yi})(x_i - \hat{\mu}_{yi})^T$$

Байесовский классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Восстановление плотности

смеси распределений

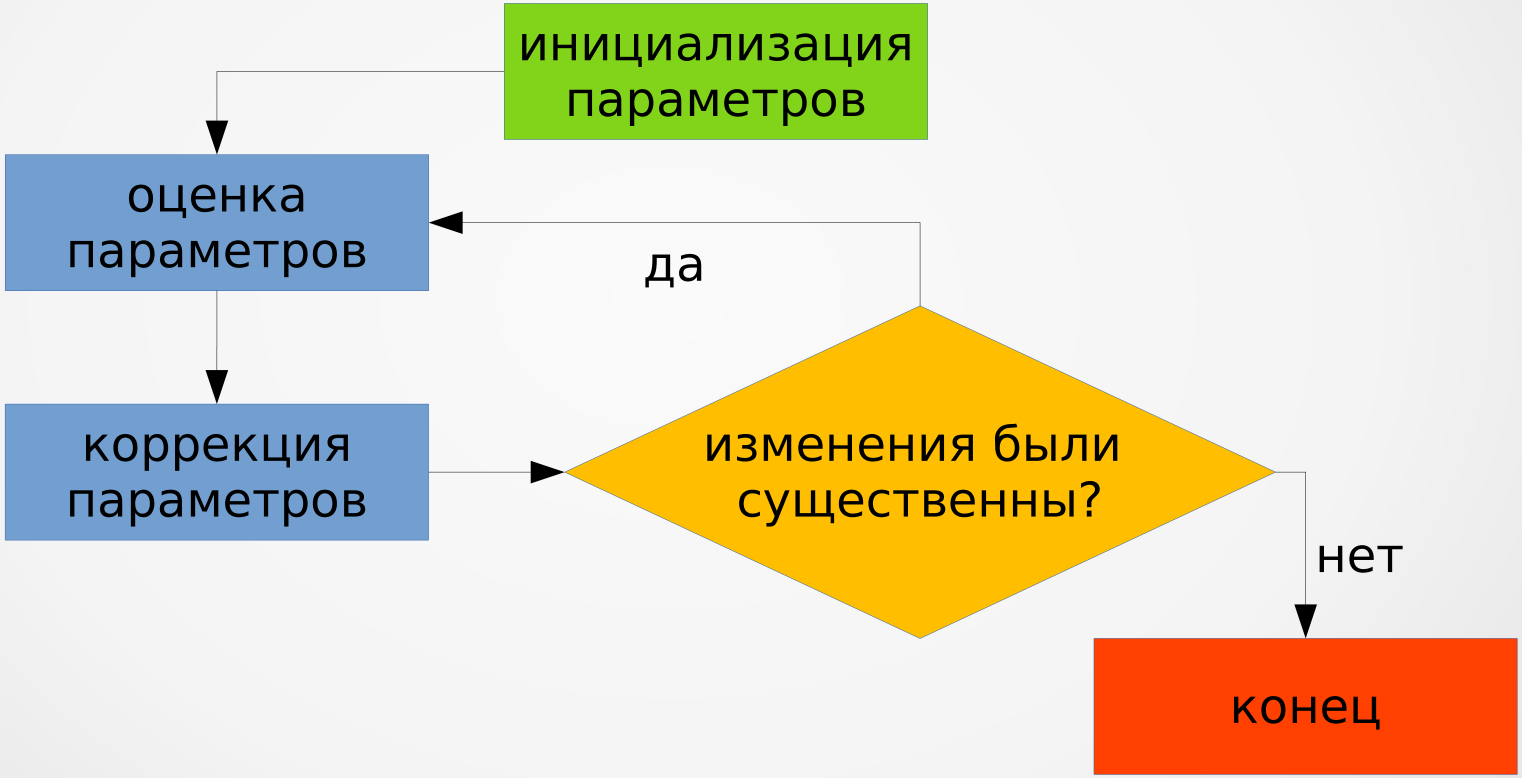
$$\hat{p}(x)=\sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x, \theta_j);$$

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = 1; \qquad w_j \geq 0$$

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm):

базовый вариант алгоритма



Восстановление плотности

EM (expectation–maximization algorithm)

<u>оценка</u>

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation–maximization algorithm)

<u>оценка</u>

$$g_{ij}=\frac{w_j\varphi_j(x_i,\theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\varphi_k(x_i,\theta_k)}$$

<u>коррекция</u>

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij}=\frac{w_j\,\varphi_j(x_i,\theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\,\varphi_k(x_i,\theta_k)}$$

коррекция

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j=\underset{\theta}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln\varphi_j(x_i,\theta)$$

i=1…m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij}=\frac{w_j\,\varphi_j(x_i,\theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\,\varphi_k(x_i,\theta_k)}$$

коррекция

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j=\underset{\theta}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln\varphi_j(x_i,\theta)$$

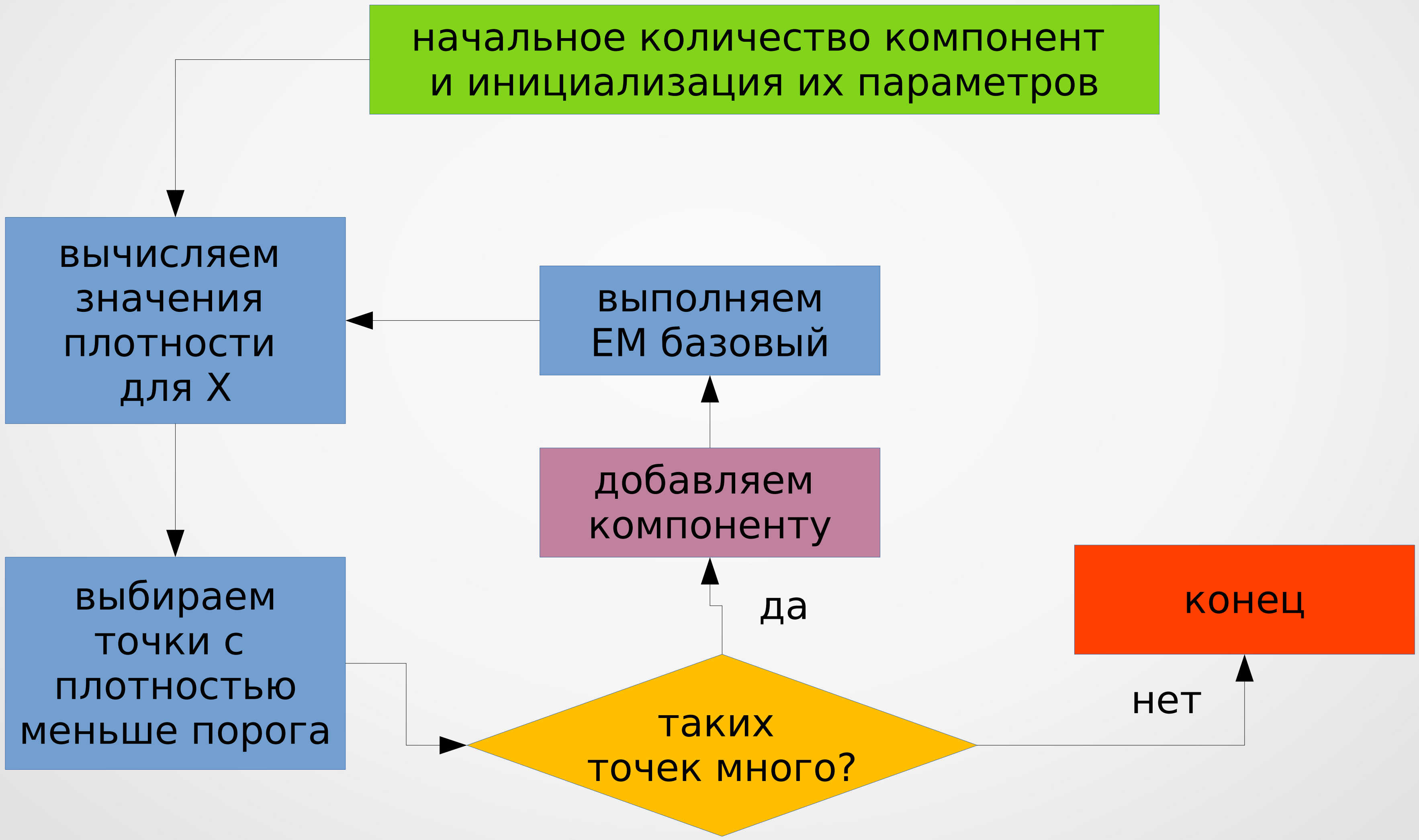
i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

условие остановки: параметры не изменились

$$|g_{ij}(t-1)-g_{ij}(t)|<\delta\,;0<\delta<1$$

Восстановление плотности

ЕМ с последовательным добавлением компонент

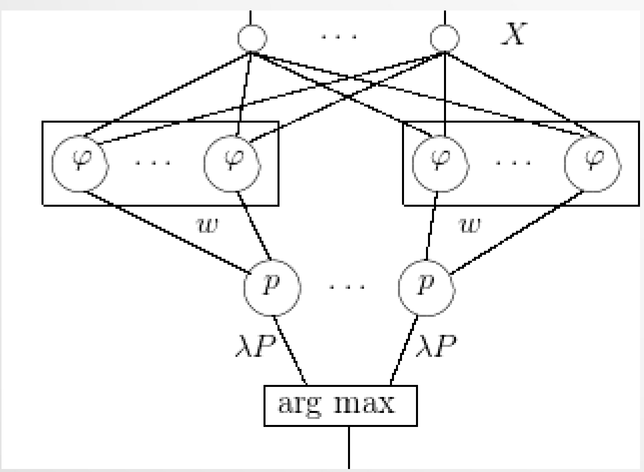


Восстановление плотности

RBF - сеть радиальных базисных функций

Байесовский классификатор

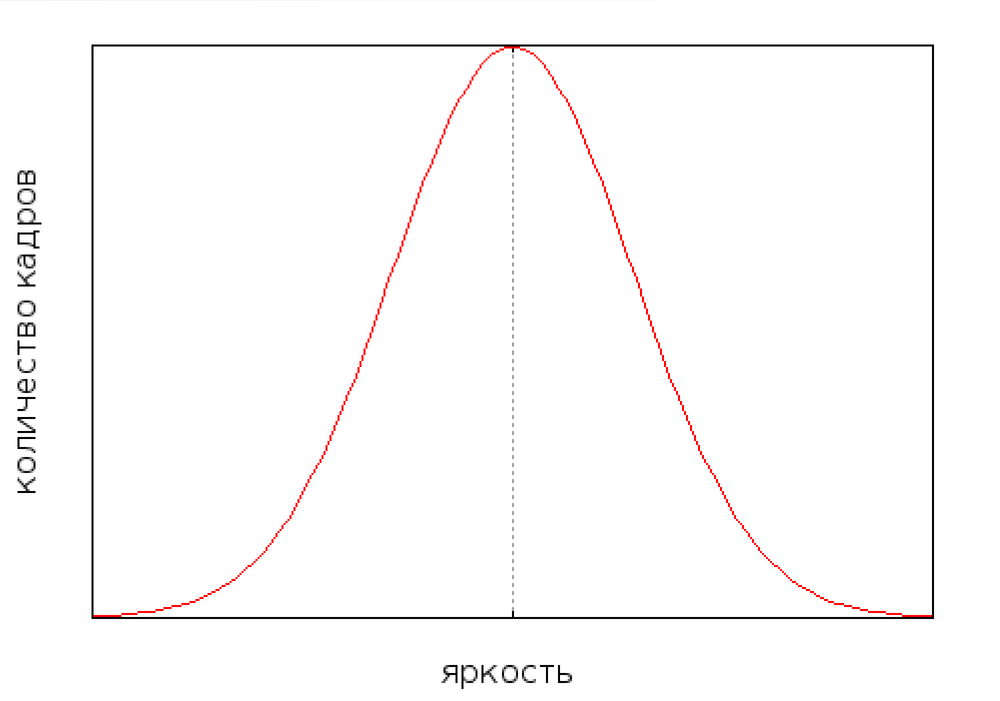
плотности классов - смеси нормальных распределений



$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

Восстановление плотности

Пример: детектор новых объектов для неподвижных камер



Классификатор: литература

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

К.В. Воронцов   Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С. Байесовский классификатор.
http://mechanoid.kiev.ua/ml-bayes.html

Борисов Е.С. Восстановление смеси плотностей распределений с помощью EM-алгоритма.
http://mechanoid.kiev.ua/ml-em-base.html

Классификатор: почти последний слайд...

Вопросы ?

Классификатор: практика

источники данных для экспериментов

sklearn.datasets

UCI Repository

kaggle