



Лекция 11: Байесовский классификатор

Евгений Борисов

Байесовский классификатор

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

x - вектор-признак

y - метка класса

n - размер пространства признаков

m - количество примеров

Байесовский классификатор

X - объекты

Y - ответы

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x,y)$

(x_i, y_i) - выборка

Задача:

найти функцию

$a: X \rightarrow Y$ с минимальной ошибкой

Байесовский классификатор

X - объекты

Y - ответы

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x,y)$

(x_i, y_i) - выборка

Задача:

найти функцию (классификатор)

$a: X \rightarrow Y$ с минимальной ошибкой

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x)$$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y) p(x|y)$$

$P(y)$ - априорная вероятность класса y

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y

$P(y|x)$ - апостериорная вероятность класса y

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска:

$a: X \rightarrow Y$ - классификатор

$A_y = \{ x \in X \mid a(x) = y \}$, $y \in Y$ - разбиение **X** на части

Ошибка: объект **x** класса **y** попал в класс **s**
 A_s , $s \neq y$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска:

$a: X \rightarrow Y$ - классификатор

$A_y = \{ x \in X \mid a(x) = y \}$, $y \in Y$ - разбиение X на части

Ошибка: объект x класса y попал в класс s

A_s , $s \neq y$

Вероятность ошибки:
$$P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$$

Байесовский классификатор

про функционал среднего риска:

Потеря от ошибки: зададим $\lambda_{ys} \geq 0$ для всех пар $(y,s) \in Y \times Y$

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$,
- плотности их распределений $p(x|y)$
- $\lambda_{ys} \geq 0$ потери от ошибки

тогда минимум среднего риска **$R(\mathbf{a})$** достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$,
- плотности их распределений $p(x|y)$
- $\lambda_{ys} \geq 0$ потери от ошибки

тогда минимум среднего риска $R(a)$ достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Дополнение:

если $\lambda_{yy} = 0$ и $\lambda_{ys} = \lambda_y$ для всех $y, s \in Y$ то

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - априорная вероятность класса y
(доля примеров класса y ,
пропорция классов должна соответствовать)

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y (плотность)

Байесовский классификатор

подходы к оценке плотности распределения:

- непараметрический
- параметрический
- смеси распределений

Байесовский классификатор

параметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Байесовский классификатор

параметрический подход к оценке плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

смеси распределений

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Байесовский классификатор

параметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

смеси распределений

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Непараметрический подход к оцениванию плотности

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{m V(h)} K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

Байесовский классификатор

«наивный Байес»

допущение: признаки X - независимы друг от друга

тогда многомерную плотность
можно представить как произведение одномерных плотностей

$$p(x|y) = p_1(x_1|y) \dots p_n(x_n|y)$$

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

дискретный случай (гистограмма) :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x = x_i]$$

пример: распределение повторов слов в тексте

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

непрерывный случай: эмпирическая оценка, окно ширины h
(доля объектов попавших в отрезок)

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2hm} \sum_{i=1}^m \left[|x - x_i| < h \right]$$

Байесовский классификатор

непараметрические методы

оценка плотности распределения

непрерывный случай: эмпирическая оценка, окно ширины h
(доля объектов попавших в отрезок)

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2hm} \sum_{i=1}^m \left[|x - x_i| < h \right]$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

Байесовский классификатор

оценка плотности Парзена-Розенблата

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

чётная ф-ция $K(r) = K(-r)$

нормированная $\int K(r) dr = 1$

невозрастающая при $r > 0$, неотрицательная ф-ция

Байесовский классификатор

оценка Парзена-Розенблата для класса y

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

$$\hat{p}(x|y) = \frac{1}{l_y V(h)} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

l_y - количество объектов y

$\rho()$ - мера на X

$V(h)$ - нормирующий множитель

Байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

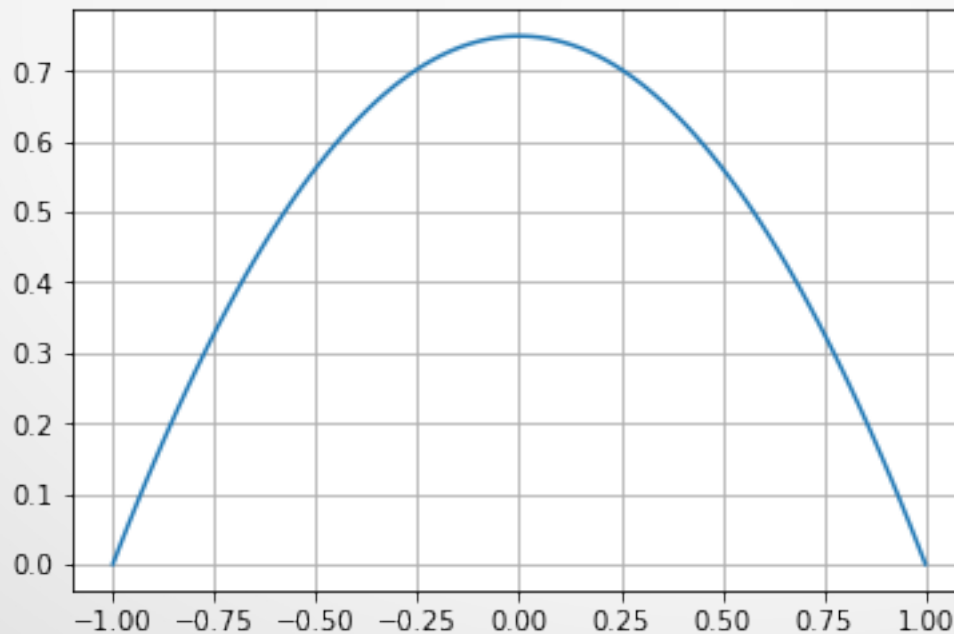
метод Парзенковского окна

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Байесовский классификатор

ядро Епанечникова

$$K(r) = \frac{3}{4}(1 - r^2); |r| \leq 1$$



Байесовский классификатор

выбор оптимального размера окна h

метод скользящего контроля (Leave One Out, LOO)

параметр h выбираем перебором

проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

из учебного набора удаляется текущий (проверяемый) пример.

$$LOO(h, X) = \sum_{i=1}^l [a(x_i, \{X \setminus x_i\}, h) \neq y_i] \rightarrow \min_h$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

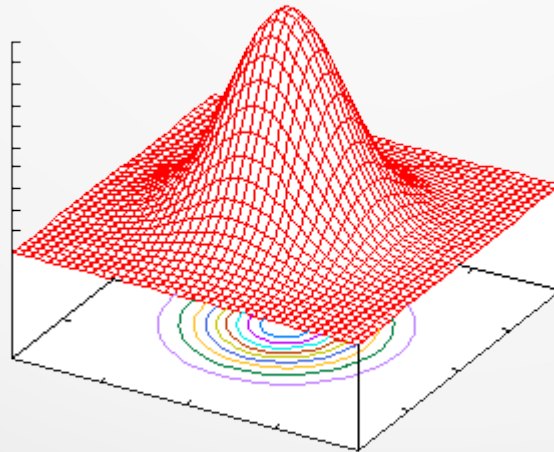
условие оптимума

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x_i, \theta) = 0$$

Байесовский классификатор

допущение: классы имеют n-мерную нормальную плотность

$$p(x|y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_y)^T \Sigma_y^{-1}(x - \mu_y)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma_y}}; y \in Y$$



Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n -мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n -мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(\det \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Байесовский классификатор

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

Байесовский классификатор

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Байесовский классификатор



Вопросы ?

Байесовский классификатор

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

К.В. Воронцов Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД
Яндекс 2014

Борисов Е.С. Байесовский классификатор.
<http://mechanoid.kiev.ua/ml-bayes.html>

Байесовский классификатор

источники данных для экспериментов



sklearn.datasets
UCI Repository
kaggle



задание

выбрать данные в репозитории UCI
(<https://archive.ics.uci.edu/ml>)

реализовать для них байесовские классификаторы

посчитать оценки качества классификации