Байесовский классификатор. Оценка плотности распределения.

Евгений Борисов

Байесовский классификатор

X - объекты,   Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача**:** построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a : X' \rightarrow Y'$$

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x)$$

Байесовский классификатор

<u>принцип максимума апостериорной вероятности</u>

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x)$$

<u>формула Байеса :</u>

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

<u>байесовский классификатор</u>

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - доля примеров класса y (априорная вероятность)

$p(x|y)$ - плотность класса y

Байесовский классификатор

подходы к оценке плотности распределения

- непараметрический
- параметрический
- смеси распределений

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

НЕпараметрический подход

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{j=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

смеси распределений

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Байесовский классификатор

«наивный Байес»

допущение: признаки *X* - независимы друг от друга

тогда многомерную плотность можно представить как произведение одномерных плотностей

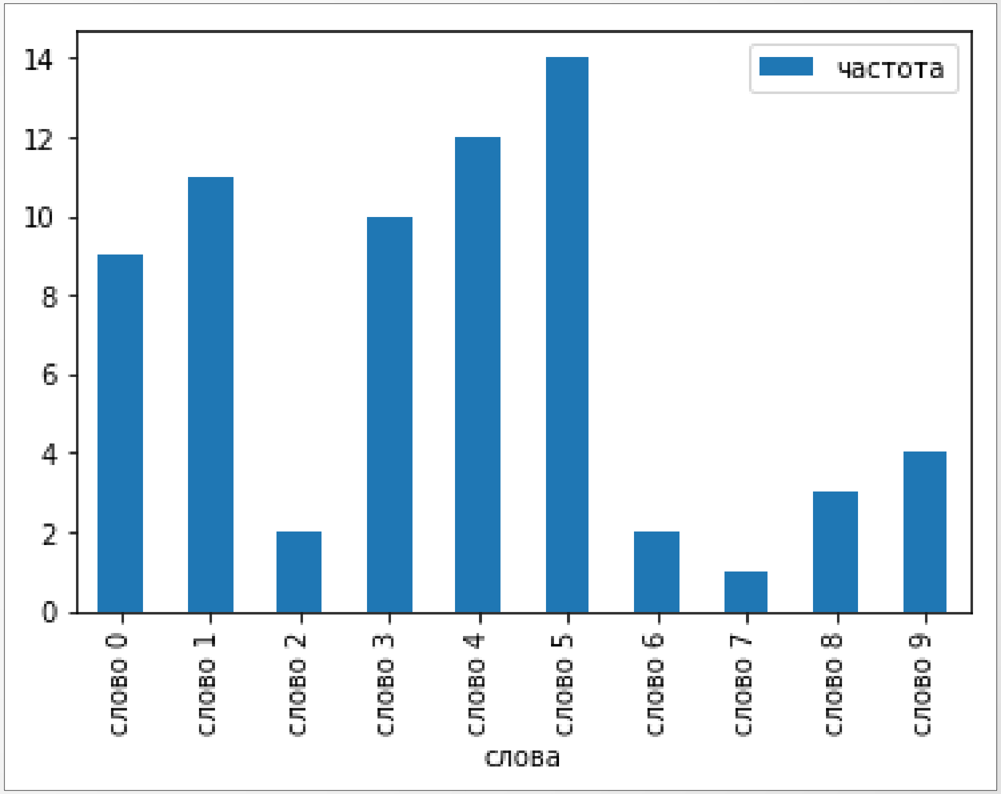
$$p(x|y)=p_1(x_1|y)\dots p_n(x_n|y)$$

Восстановление плотности

НЕпараметрический подход

дискретный случай: гистограмма

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [x = x_i]$$



пример: распределение повторов слов в тексте

Байесовский классификатор

непараметрические методы
оценки плотности распределения

непрерывный случай: эмпирическая оценка, окно ширины h

(доля объектов попавших в отрезок)

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2hm} \sum_{i=1}^{m} \left[|x - x_i| < h \right]$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

Байесовский классификатор

оценка Парзена-Розенблата для класса y

$$\hat{p}(x|y) = \frac{1}{L_y V(h)} \sum_{i:\, y = y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

L_y - количество объектов y

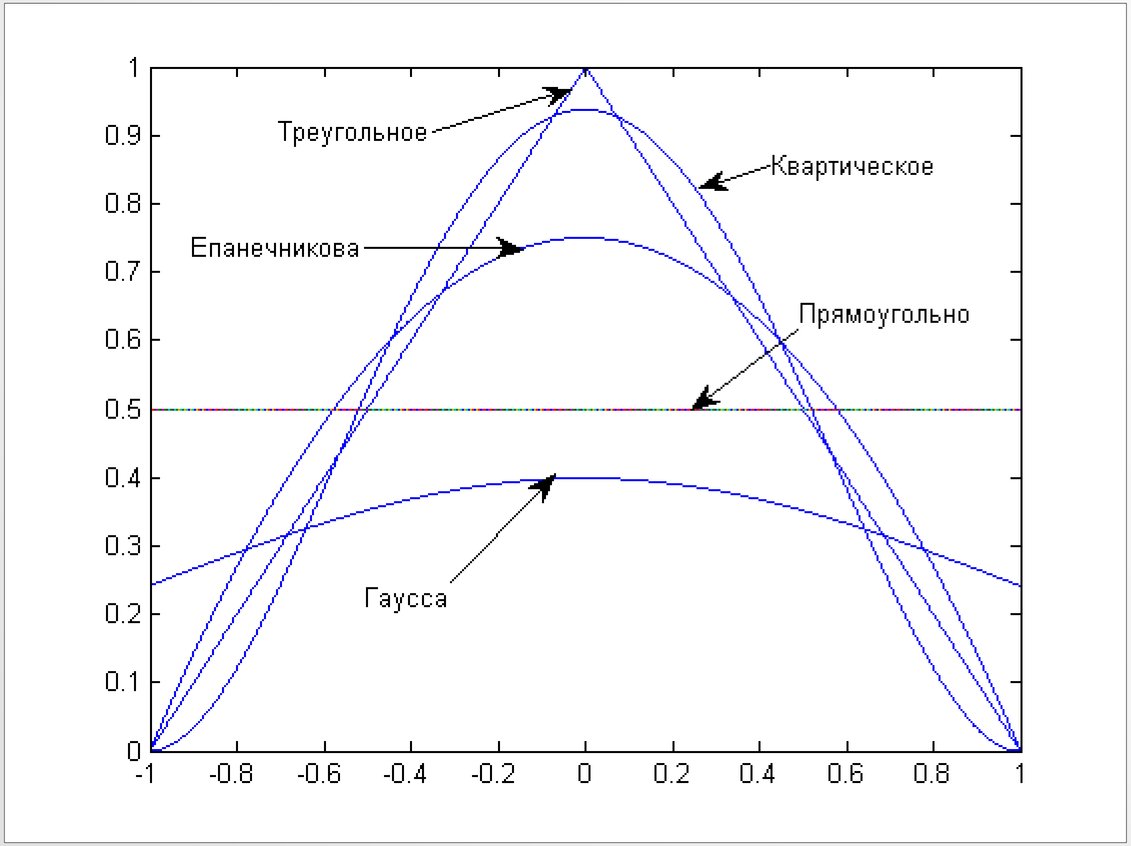
$\rho(x_i, x_j)$ - мера на X

$V(h)$ - нормирующий множитель

Восстановление плотности

функции ядра для сглаживания гистограммы

KDE, Kernel Density Estimation



чётная ф-ция

$$K(r) = K(-r)$$

нормированная

$$\int K(r)\,dr = 1$$

невозрастающая при $r>0$,
неотрицательная ф-ция

ядро Епанечникова:

$$K(r) = \frac{3}{4}(1 - r^2); |r| \le 1$$

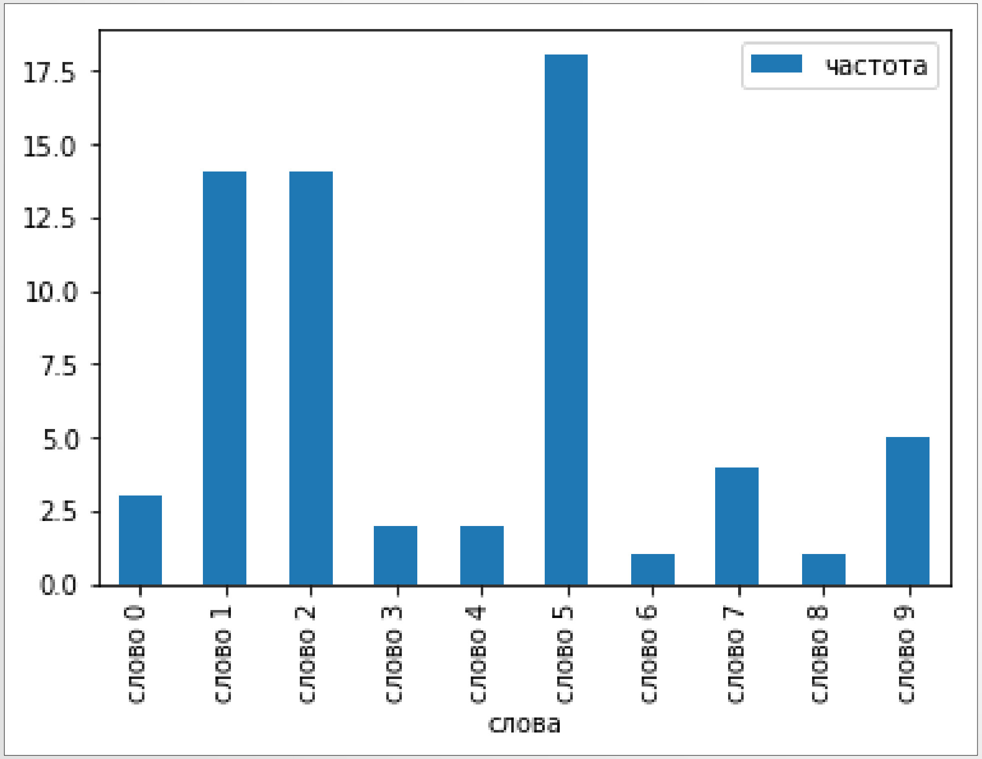
Восстановление плотности

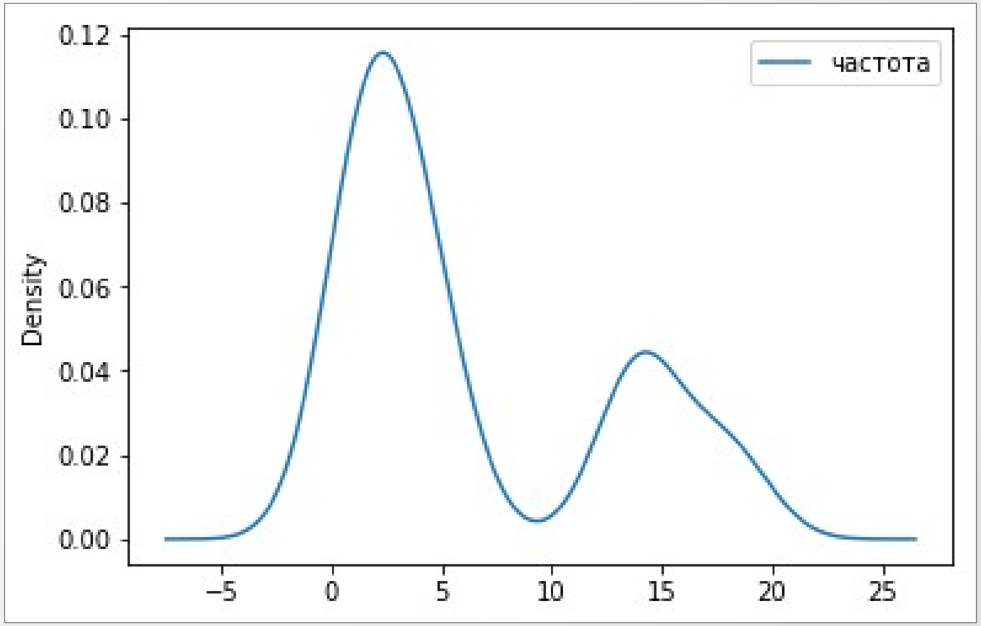
непараметрические методы:
оценка плотности Парзена-Розенблата

ядерное сглаживание (гистограммы)

KDE, Kernel Density Estimation

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{i=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$





Байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\arg\max}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор, метод Парзеновского окна

$$a(x, X^L, h) = \underset{y \in Y}{\arg\max}\, \lambda_y P(y) \frac{1}{L_y} \sum_{i:\, y = y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Байесовский классификатор

оценка плотности - параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi(x_i, \theta) \to \max_{\theta}$$

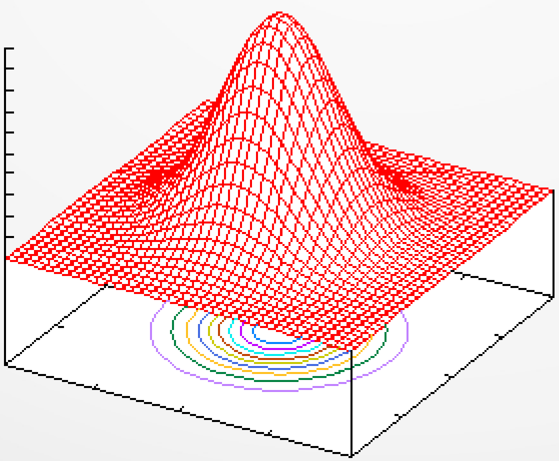
условие оптимума

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x_i, \theta) = 0$$

Байесовский классификатор

допущение: классы имеют n-мерную нормальную плотность

$$p(x|y)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_y)^T\Sigma_y^{-1}(x-\mu_y)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma_y}};\ y\in Y$$



Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n-мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y=y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n-мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y = y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y = y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(det\, \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Байесовский классификатор

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны

то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:\, y = y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \left(x_i - \hat{\mu}_{y_i}\right)\left(x_i - \hat{\mu}_{y_i}\right)^T$$

Байесовский классификатор

Дополнение:
если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i:y=y_i} x_i \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} (x_i - \hat{\mu}_{yi})(x_i - \hat{\mu}_{yi})^T$$

Байесовский классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Байесовский классификатор

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

К.В. Воронцов   Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С.   Байесовский классификатор. *http://mechanoid.su/ml-bayes.html*