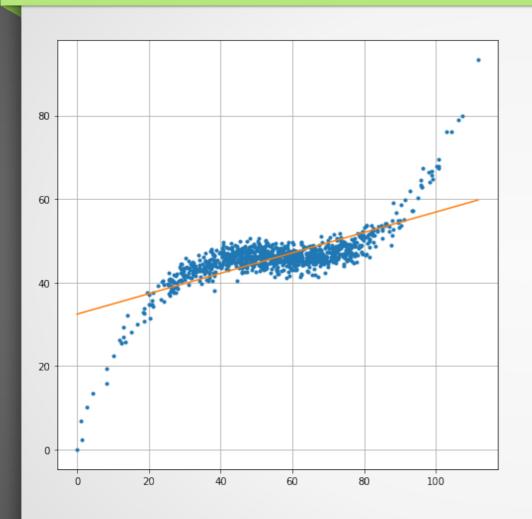
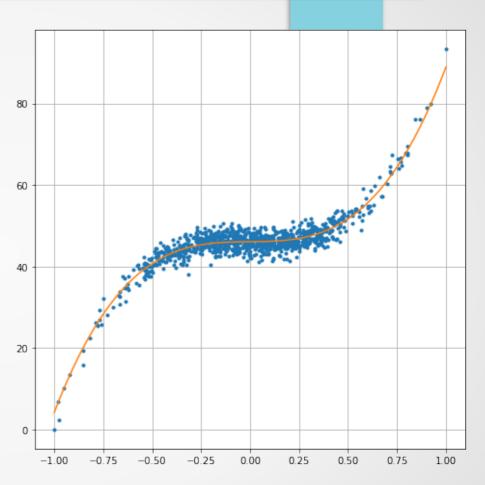
Евгений Борисов

### Оценка недвижимости по статистике продаж

```
цена = оценка(
район,
площадь,
этаж,
лифт,
ремонт,
```



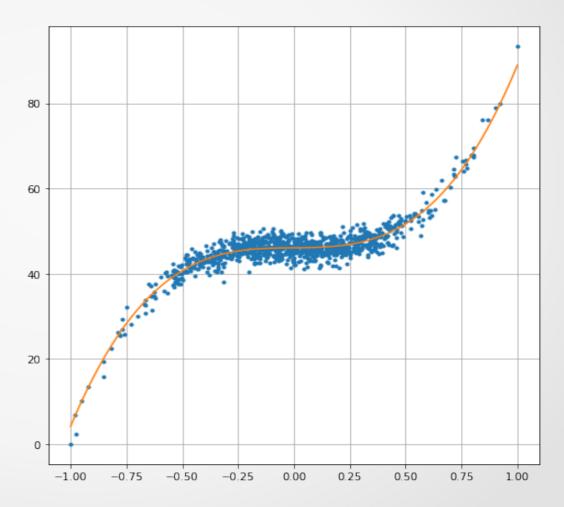


регрессия-задача восстановления зависимости

$$X \subset \mathbb{R}^n$$
 - объекты

$$Y \subset \mathbb{R}$$
 - ответы

$$a: X \to Y$$



регрессия - задача восстановления зависимости

$$a: X \rightarrow Y$$

$$X{\subset}{\mathbb R}^n$$
 - объекты  $Y{\subset}{\mathbb R}$  - ответы

$$Y \subset \mathbb{R}$$
 - ответы

параметрический подход:определяем (допускаем) вид зависимости

$$a = f(x, \theta)$$

... и подбираем параметры решая задачу оптимизации (метод наименьших квадратов)

$$Q(\theta, X) = \sum_{i=1}^{m} \left[ f(x_i, \theta) - y_i \right]^2 \rightarrow \min_{\theta}$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & y_m \end{vmatrix}$$

х - вектор-признак

у - ответ (значение функции)

n - размер пространства признаков

т - количество примеров

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y=h(x,\theta)=\theta\cdot X_i=\theta_0+\theta_1\cdot x_1+\ldots+\theta_n\cdot x_n$$

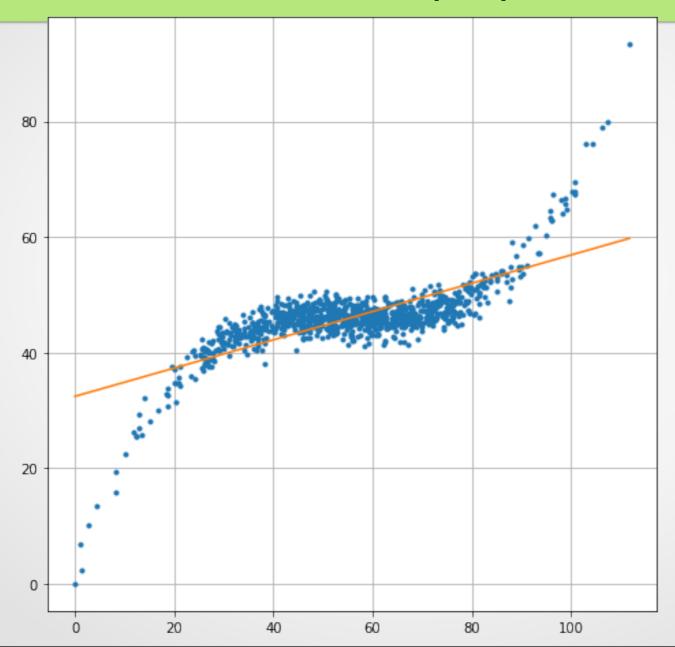
х - вектор-признак

у - ответ (значение функции)

n - размер пространства признаков

т - количество примеров

θ - параметры



$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$
$$\theta = ?$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y=h(x,\theta)=\theta\cdot X_i=\theta_0+\theta_1\cdot x_1+\ldots+\theta_n\cdot x_n$$

метод наименьших квадратов: минимизация суммы квадратов отклонений

функции от искомых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y=h(x,\theta)=\theta\cdot X_i=\theta_0+\theta_1\cdot x_1+\ldots+\theta_n\cdot x_n$$

метод наименьших квадратов:

минимизация суммы квадратов отклонений  $\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$ функции от искомых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

#### ограничения метода:

не работает для больших наборов данных

**X<sup>T</sup>X** может быть необратимая (вырожденная)

- строки Х линейно зависимы
- признаков больше чем примеров

$$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$$
 - функция ошибки

$$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left( h(x_i, \theta) - y_i \right)^2$$
 функция потери (loss) средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$$\min_{ heta} J( heta)$$
 - задача оптимизации

$$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$$
 - функция ошибки

$$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left( h(x_i, \theta) - y_i \right)^2$$
 функция потери (loss) средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$$\min_{ heta} J( heta)$$
 - задача оптимизации

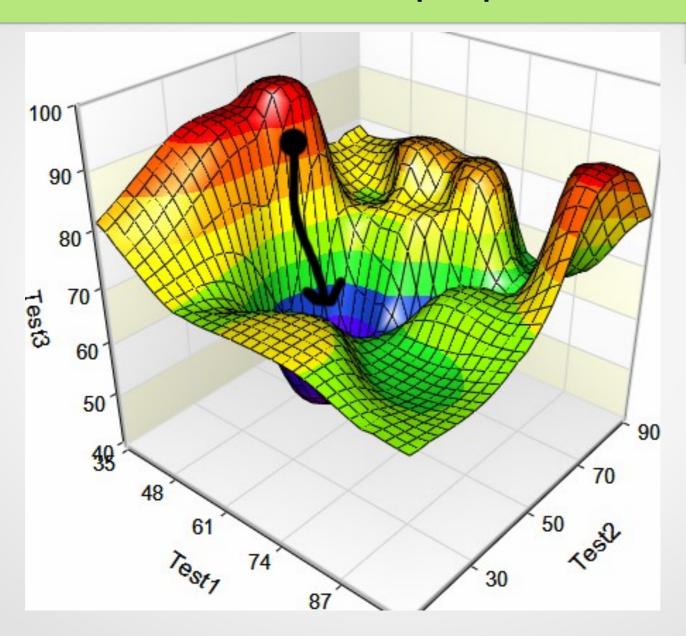
#### метод градиентного спуска:

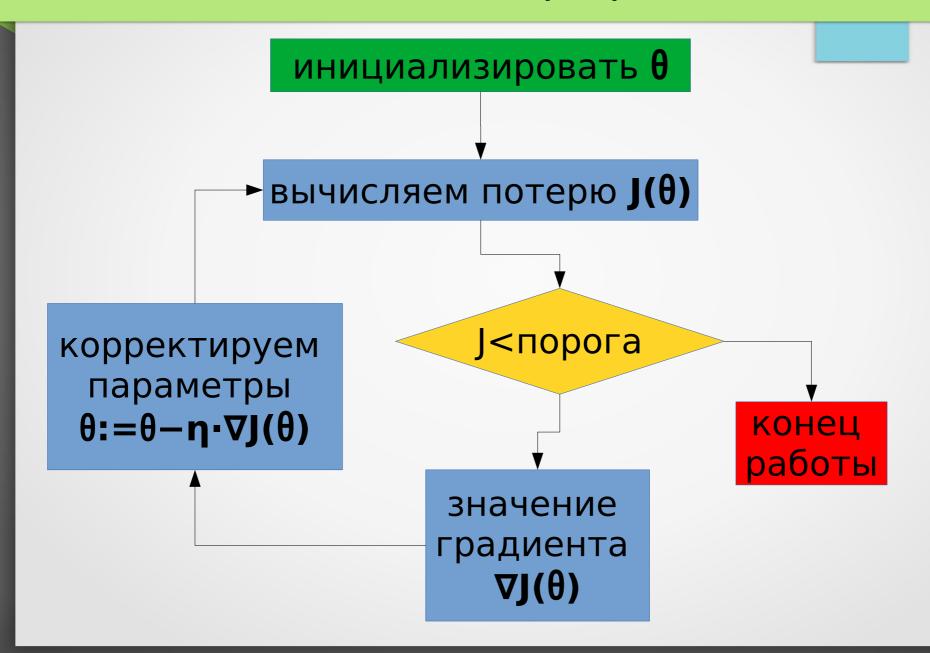
градиент функции - направление наискорейшего возрастания ф-ции

$$\nabla J(\theta) = \left[ \frac{\partial J}{\partial \theta_0}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \theta_n} \right]$$

двигаем параметры в противоположную сторону

$$\theta := \theta - \alpha \cdot \nabla J(\theta)$$





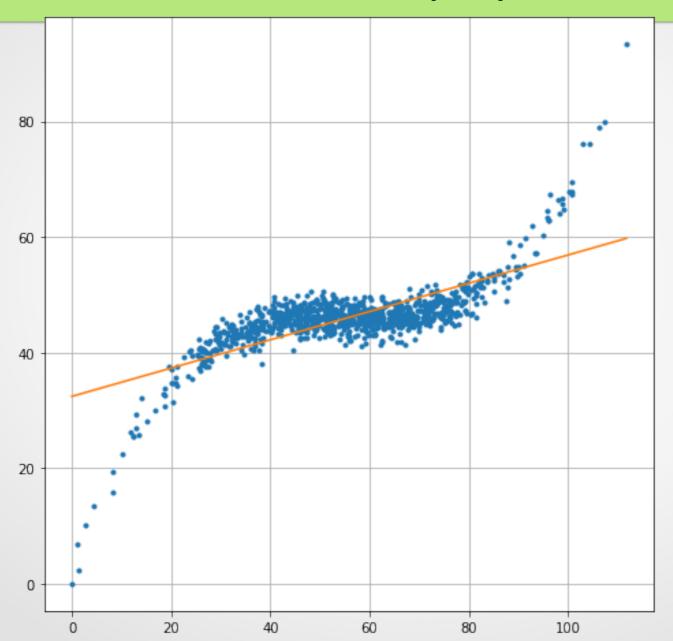
### функция потери (MSQE)

$$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left( h(x_i, \theta) - y_i \right)^2$$

### градиент и изменение весов

$$\theta_{j} := \theta_{j} - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_{j}} = \theta_{j} - \alpha \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left( h(x_{i}, \theta) - y_{i} \right) \cdot x_{ij}$$

$$\theta := \theta - \alpha \cdot X^{T} \cdot (h(X, \theta) - y)$$



#### преобразование исходных данных

увеличиваем размерность пространства  ${f k}$  на признаках  ${f x}$ , размера  ${f n}$ 

<u>пример для одномерного пространства (n=1):</u>

строим полином k=1

линейная:  $h_{lin}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$ 

#### преобразование исходных данных

увеличиваем размерность пространства  ${f k}$  на признаках  ${f x}$ , размера  ${f n}$ 

<u>пример для одномерного пространства (n=1):</u>

строим полином k=1

линейная:  $h_{lin}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$ 

строим полином k=3

нелинейная:  $h_{nlin}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3$ 

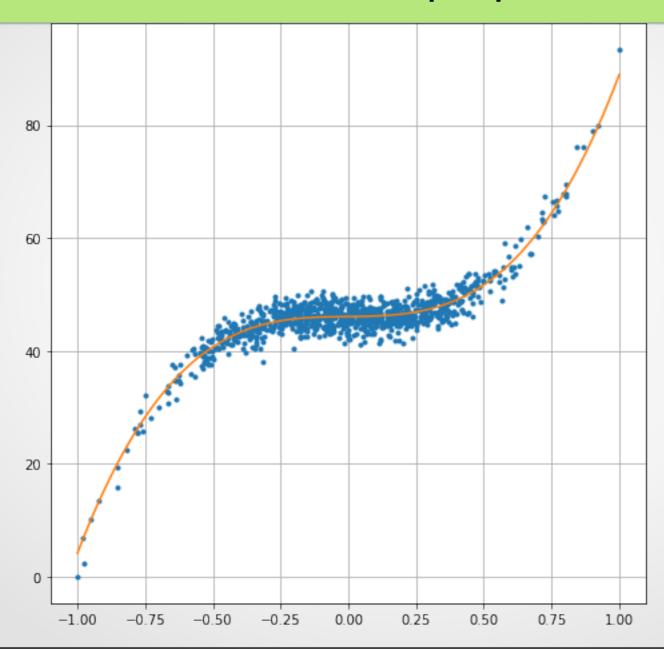
**m** примеров, размера **n, n+1** параметр  $\theta$ 

исходные данные 
$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$h(x, \theta) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \theta_3 \cdot x_1 \cdot x_2 + \theta_4 \cdot x_1^2 + \theta_5 \cdot x_2^2$$

строим полином степени  ${\bf k}$  на переменных  ${\bf x}$ ,

комбинируем столбцы матрицы X число параметров  $\theta$  увеличивается



git clone https://github.com/mechanoid5/ml\_lectorium.git

Воронцов К.В. Методы восстановления регрессии - курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов E.C. Модели математической регрессии. http://mechanoid.su/ml-regression.html

Машинное обучение для людей https://vas3k.ru/blog/machine\_learning/