



# **Байесовский классификатор**

Евгений Борисов

# Байесовский классификатор

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

x - вектор-признак

y - метка класса

n - размер пространства признаков

m - количество примеров

# Байесовский классификатор

$X$  - объекты,  $Y$  - метки классов

$X \times Y$  - вероятностное пространство  
с плотностью  $p(x, y)$

# Байесовский классификатор

$X$  - объекты,  $Y$  - метки классов

$X \times Y$  - вероятностное пространство  
с плотностью  $p(x, y)$

выборка:  $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача: построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \rightarrow Y'$$

# Байесовский классификатор

$X$  - объекты,  $Y$  - метки классов

$X \times Y$  - вероятностное пространство  
с плотностью  $p(x, y)$

выборка:  $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача: построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \rightarrow Y'$$

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} P(y|x)$$

# Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y) p(x|y)$$

$P(y)$  - априорная вероятность класса  $y$

$p(x|y)$  - ф-ция правдоподобия класса  $y$

$p(y|x)$  - апостериорная вероятность класса  $y$

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

# Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$  - классификатор

$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$  - разбиение  $X$  на части

# Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$  - классификатор

$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$  - разбиение  $X$  на части

**Ошибка:** объект  $x$  класса  $y$  попал в класс  $s$

$A_s, s \neq y$  - множество ошибочно классифицированных



# Байесовский классификатор

## о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$  - классификатор

$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$  - разбиение  $X$  на части

**Ошибка:** объект  $x$  класса  $y$  попал в класс  $s$

$A_s, s \neq y$  - множество ошибочно классифицированных

Вероятность ошибки  $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$

где  $p(x, y)$  - плотность вероятностного пространства

# Байесовский классификатор

## о функционале среднего риска

Вероятность ошибки  $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$

где  $p(x, y)$  - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - потеря от ошибки

$$\lambda_{ys} > 0, ys \in Y \times Y$$

# Байесовский классификатор

## о функционале среднего риска

Вероятность ошибки  $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$   
где  $p(x, y)$  - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - потеря от ошибки

$$\lambda_{ys} > 0; y, s \in Y$$

**Средний риск:** мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

# Байесовский классификатор

**Средний риск:** мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

## Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов  $P(y)$
- плотности их распределений  $p(x, y)$
- потери от ошибки  $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска  $R(a)$  достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

# Байесовский классификатор

## Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов  $P(y)$
- плотности их распределений  $p(x, y)$
- потери от ошибки  $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска  $R(a)$  достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Дополнение:

если  $\lambda_{yy} = 0$ ;  $\lambda_y \equiv \lambda_{ys}$

то  $a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$

# Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x)$$

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$\lambda_y$  - потеря для объектов  $y$

$P(y)$  - доля примеров класса  $y$  (априорная вероятность)

$p(x|y)$  - плотность класса  $y$

# Байесовский классификатор

```
git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git
```

К.В. Воронцов Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С. Байесовский классификатор.  
<http://mechanoid.su/ml-bayes.html>

# Байесовский классификатор



**Вопросы ?**