



Методы восстановления плотности распределения

Евгений Борисов

Восстановление плотности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - априорная вероятность класса y
(доля примеров класса y ,
пропорция классов должна соответствовать)

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y (плотность)

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

- параметрический
- непараметрический
- смеси распределений

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения:

параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

Непараметрический подход

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{j=1}^m K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$$

смеси распределений

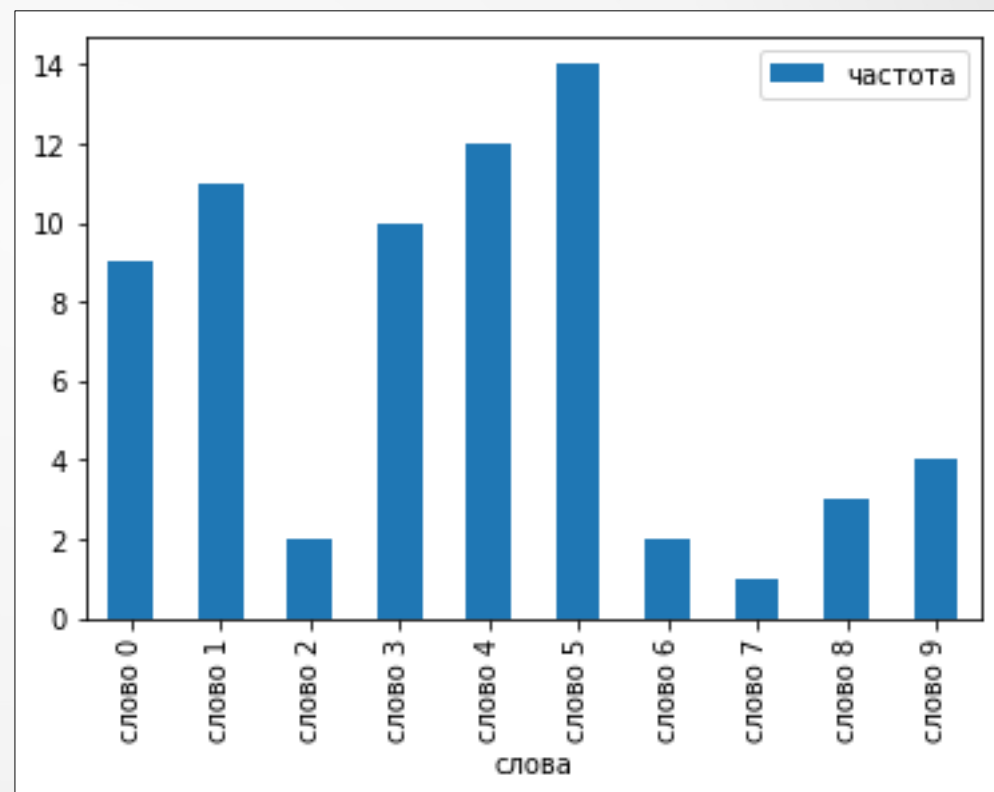
$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j)$$

Восстановление плотности

Непараметрический подход

дискретный случай: гистограмма

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x = x_i]$$



пример: распределение повторов слов в тексте

Восстановление плотности

непараметрические методы

непрерывный случай: доля объектов попавших в окно ширины h

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{mh} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_i|}{h} < 1 \right]$$

Восстановление плотности

непараметрические методы:

оценка плотности Парзена-Розенблата

ядерное сглаживание (гистограммы)

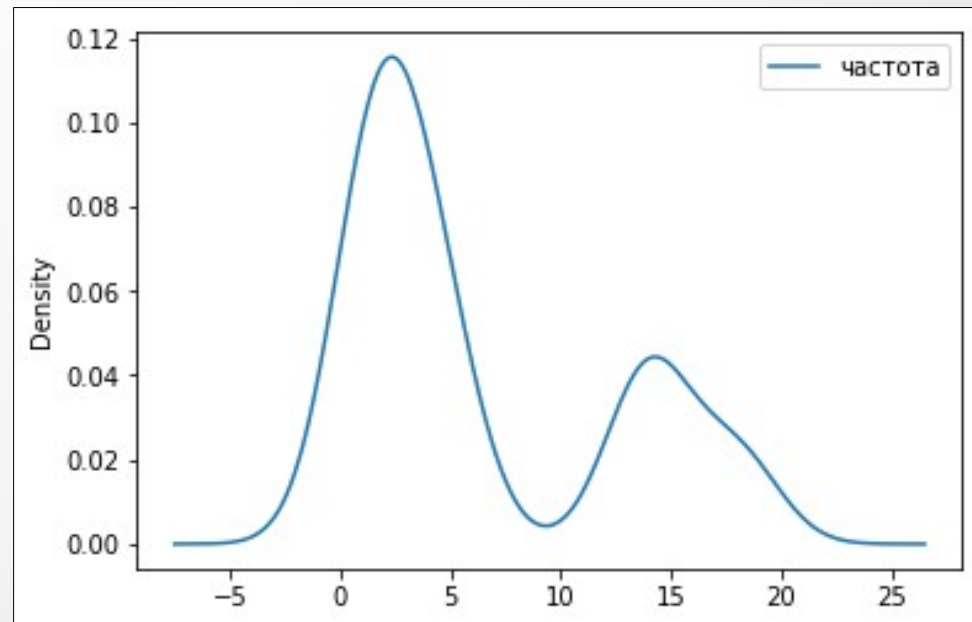
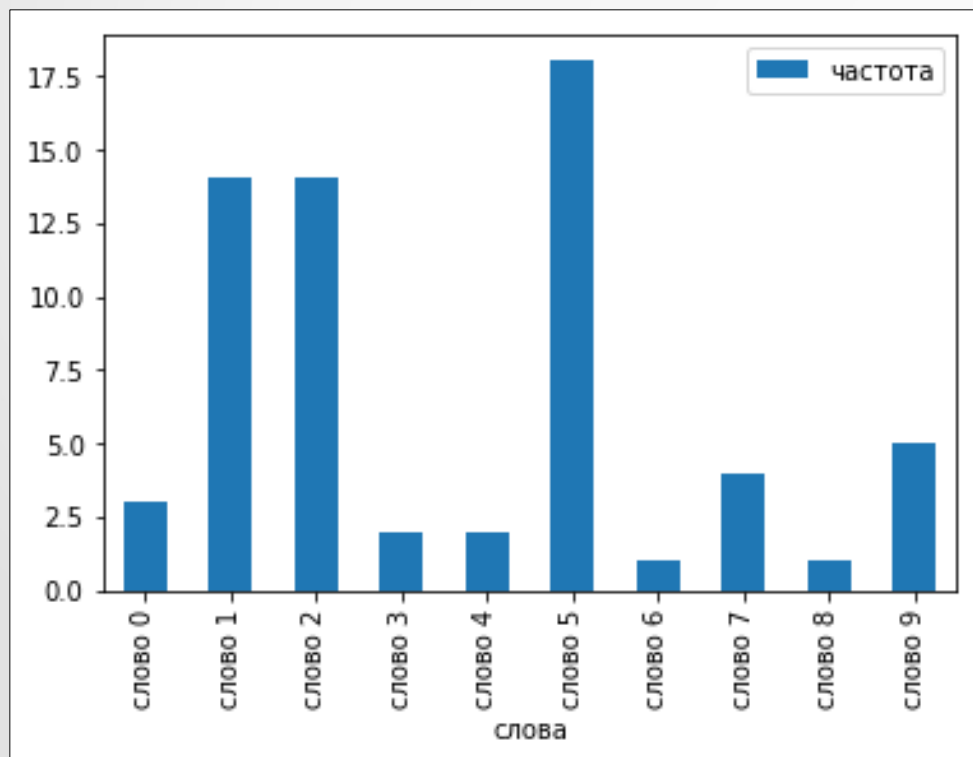
KDE, Kernel Density Estimation

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{m V(h)} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

$K(r)$ - ядро

$\rho(x_1, x_2)$ - мера на X

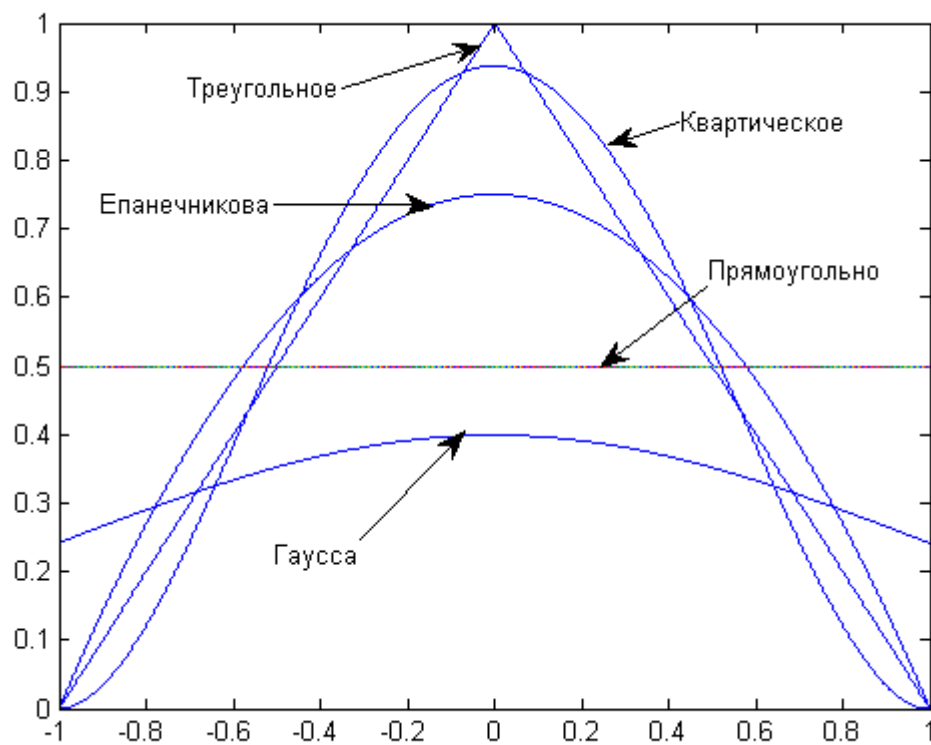
$V(h)$ - нормирующий множитель



Восстановление плотности

непараметрические методы:
функции ядра для сглаживания гистограммы

KDE, Kernel Density Estimation



ядро Епанечникова:

$$K(r) = \frac{3}{4}(1 - r^2); |r| \leq 1$$

Восстановление плотности

Байесовский классификатор: метод парзеновского окна

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

$$a(x, X^l, h) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right)$$

Восстановление плотности

непараметрические методы:

*выбор оптимального размера парзеновского окна **h***

методом скользящего контроля (Leave One Out, LOO)

$$LOO(h, X) = \sum_{i=1}^l \left[a(x_i, \{X \setminus x_i\}, h) \neq y_i \right] \rightarrow \min_h$$

параметр **h** выбираем перебором

для разных значений **h**

проверяем суммарную ошибку на учебном множестве

при этом

из учебного набора **X** удаляется текущий (проверяемый) пример

Восстановление плотности

параметрический подход

$$\hat{p}(x) = \varphi(x, \theta)$$

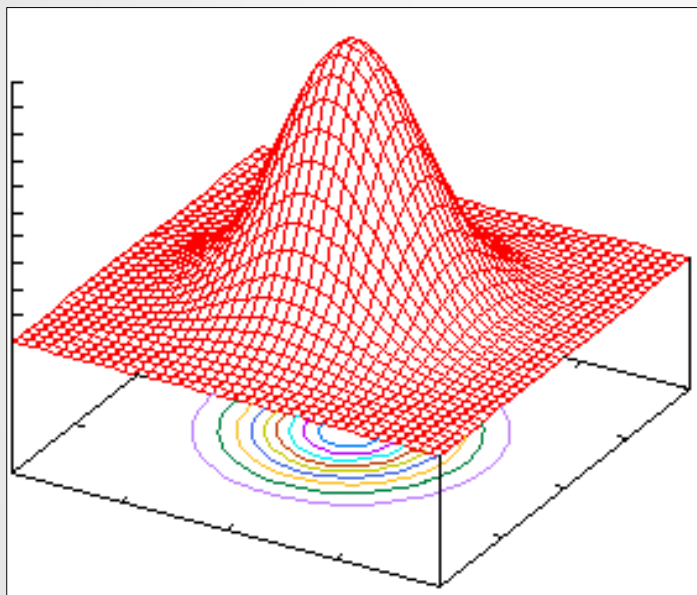
принцип максимума правдоподобия

$$L(\theta, X) = \sum_{i=1}^m \ln \varphi(x_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Восстановление плотности

параметрический подход:

допустим - $p(x)$ это нормальная n -мерная плотность



$$p(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

Восстановление плотности

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x) = N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия
имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

Восстановление плотности

Теорема: параметры оценки максимального правдоподобия для n -мерных гауссовских плотностей классов y имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} (x_i - \hat{\mu}_y)(x_i - \hat{\mu}_y)^T$$

Байесовский классификатор: квадратичный дискриминант

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - (x - \hat{\mu}_y)^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln(\det \hat{\Sigma}_y) \right)$$

Восстановление плотности

Дополнение:

если матрицы ковариаций классов равны
то параметры оценки плотности имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i: y=y_i} x_i \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

Байесовский классификатор: линейный дискриминант Фишера

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right)$$

Восстановление плотности

смеси распределений

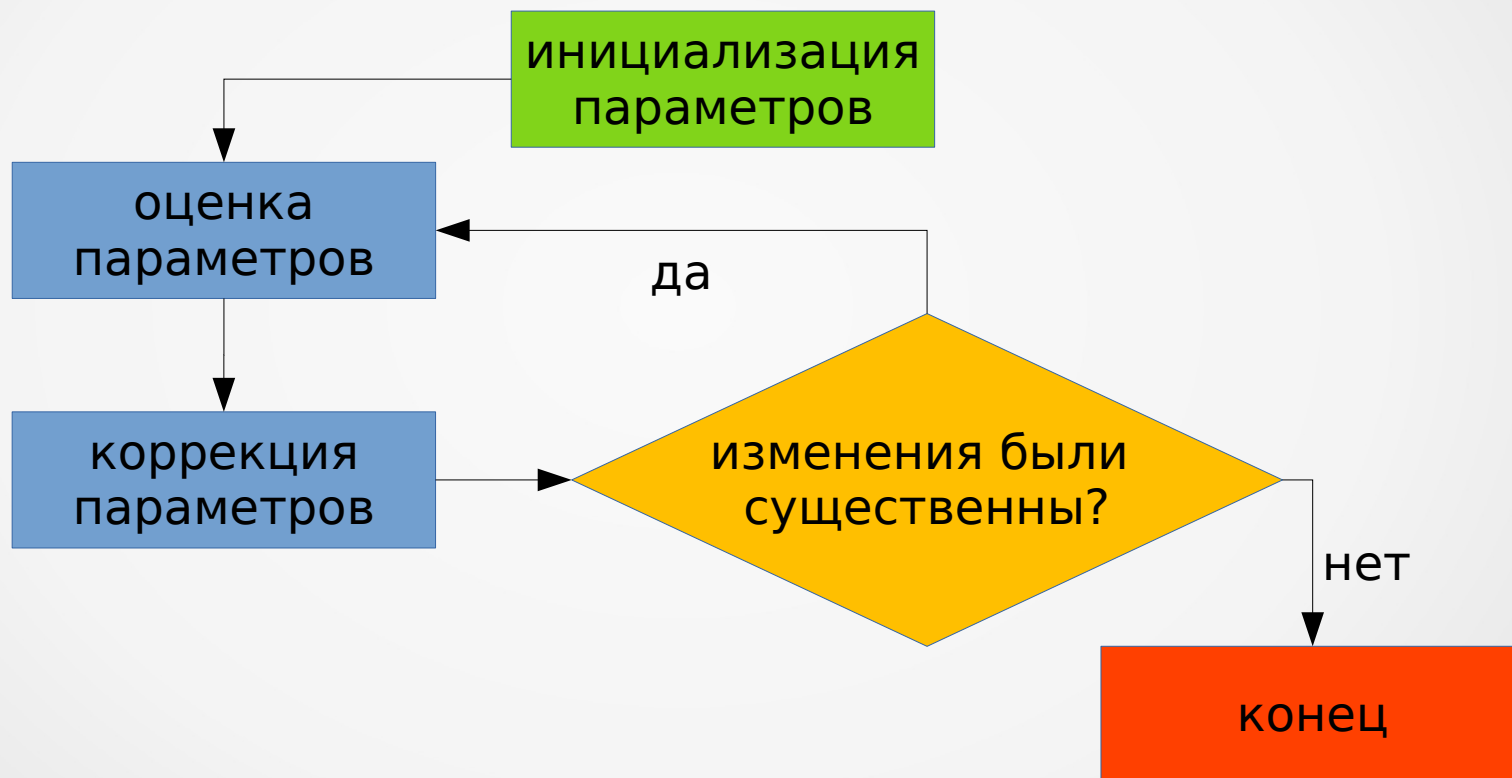
$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi_j(x, \theta_j);$$

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1; \quad w_j \geq 0$$

Восстановление плотности

ЕМ (expectation-maximization algorithm):

базовый вариант алгоритма



Восстановление плотности

ЕМ (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

m - количество примеров X

s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

ЕМ (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

m - количество примеров X

s - количество компонент смеси

коррекция

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

Восстановление плотности

ЕМ (expectation-maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^s w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

$i=1\dots m$

m - количество примеров X

s - количество компонент смеси

коррекция

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

условие остановки: параметры не изменились

$$|g_{ij}(t-1) - g_{ij}(t)| < \delta ; 0 < \delta < 1$$

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x) = N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия
имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:
$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:

$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

ВЕС КОМПОНЕНТЫ

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:
$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:
$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

вес компоненты

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

мат.ожидание компоненты

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x) = \sum_k w_k N(x; \Sigma_k, \mu_k)$$

оценка:

$$g_{ij} = \frac{w_j N(x_i; \Sigma_j, \mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i; \Sigma_k, \mu_k)}$$

$$N(x; \Sigma, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j, \mu_j = \underset{\Sigma, \mu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^m g_{ij} \ln N(x_i; \Sigma, \mu)$$

коррекция:

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_j$$

вес компоненты

$$N_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

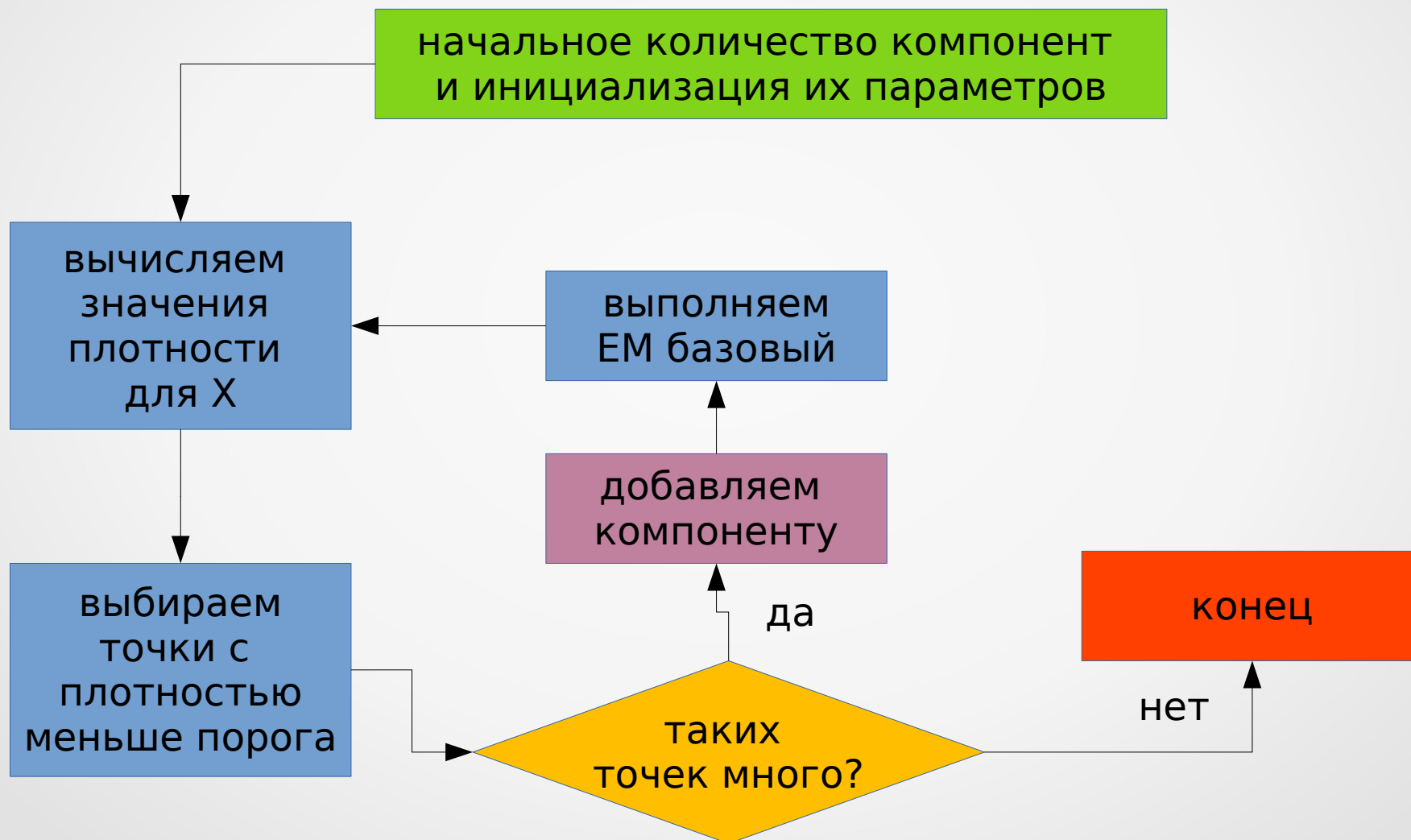
мат.ожидание компоненты

$$\Sigma_j = \frac{1}{c N_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} (x_i - \mu_j)^T (x_i - \mu_j); 0 < c \leq 1$$

матрица ковариаций компоненты

Восстановление плотности

ЕМ с последовательным добавлением компонент



Восстановление плотности

ЕМ последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

начальные значения параметров первой компоненты смеси

$$w_1 = 1$$

вес компоненты

$$\Sigma_1 = \text{cov}(X)$$

матрица ковариаций
компоненты

$$\mu_1 = \frac{1}{|X|} \sum X$$

мат.ожидание
компоненты

Восстановление плотности

ЕМ последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций
компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание
компоненты

Восстановление плотности

ЕМ последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций
компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание
компоненты

коррекция весов старых компонент смеси

$$w_i := w_i (1 - w_{k+1})$$

после определения новых параметров смеси запускаем ЕМ

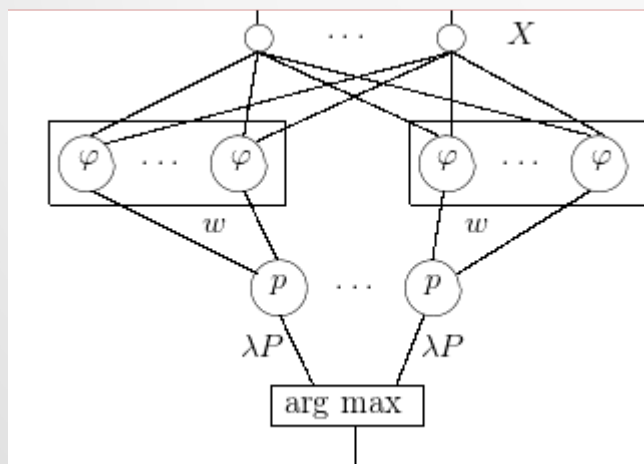
Восстановление плотности

RBF - сеть радиальных базисных функций

Байесовский классификатор

плотности классов - смеси нормальных распределений

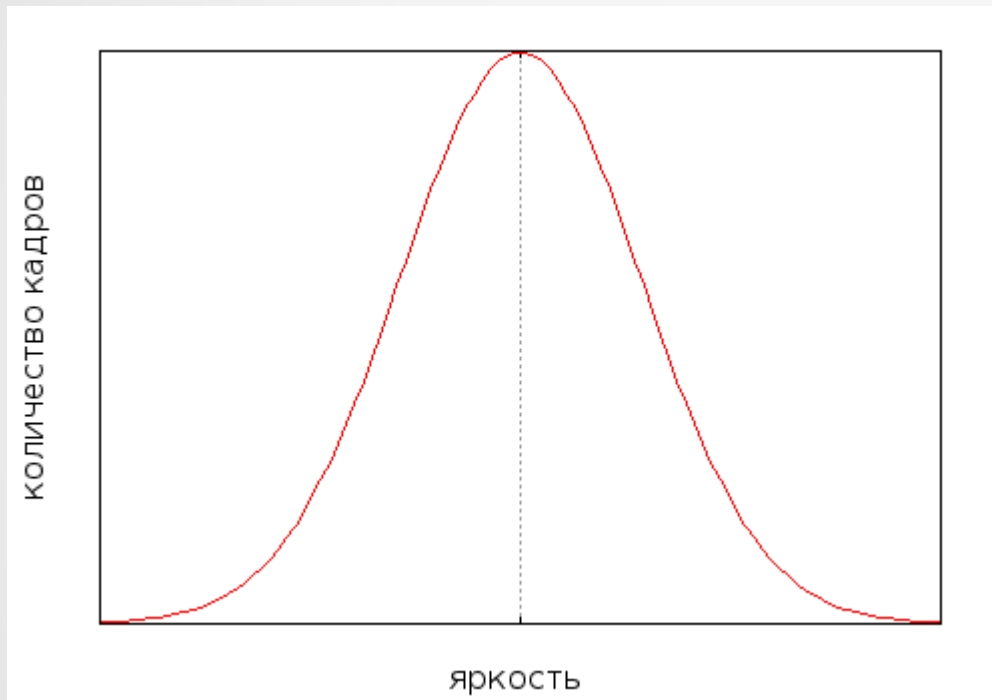
$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$



$$p(x|y) = \sum_k w_k^y \varphi_k^y(x; \theta_k^y) = \sum_k w_k^y N(x; \Sigma_k^y, \mu_k^y)$$

Восстановление плотности

Пример: детектор новых объектов для неподвижных камер



Восстановление плотности: литература

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

- К.В. Воронцов Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014
- Борисов Е.С. Байесовский классификатор.
<http://mechanoid.su/ml-bayes.html>
- Борисов Е.С. Восстановление смеси плотностей распределений с помощью ЕМ-алгоритма. <http://mechanoid.su/ml-em-base.html>
- Борисов Е.С. Классификатор на основе RBF.
<http://mechanoid.su/ml-rbf.html>
- Борисов Е.С. Детектор объектов для неподвижных камер.
<http://mechanoid.su/cv-backgr.html>

Восстановление плотности



Вопросы ?