



# **модели ассоциативной памяти, сеть Хопфилда, машина Больцмана**

Евгений Борисов

# Нейросети

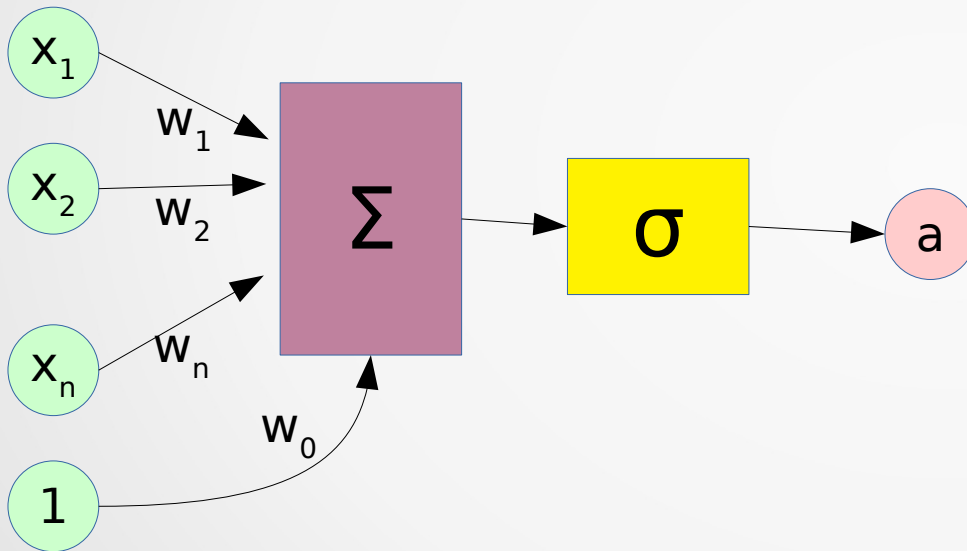
Ассоциативная память - адресация по содержанию,  
чтение и запись в ячейки такой памяти  
выполняется в зависимости от их содержимого

[ входной образ ] → [ выходной образ (ассоциация) ]

# Нейросети

## модель нейрона

$$a(x, w) = \sigma \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i - w_0 \right) = \sigma(\langle x, w \rangle)$$



$x_i$  - ВХОД

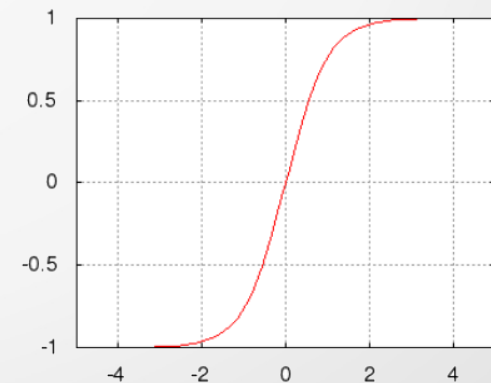
$w_i$  - вес связи

$\sigma$  - функция активации

$s$  - состояние нейрона

$$s(x, w) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i - w_0$$

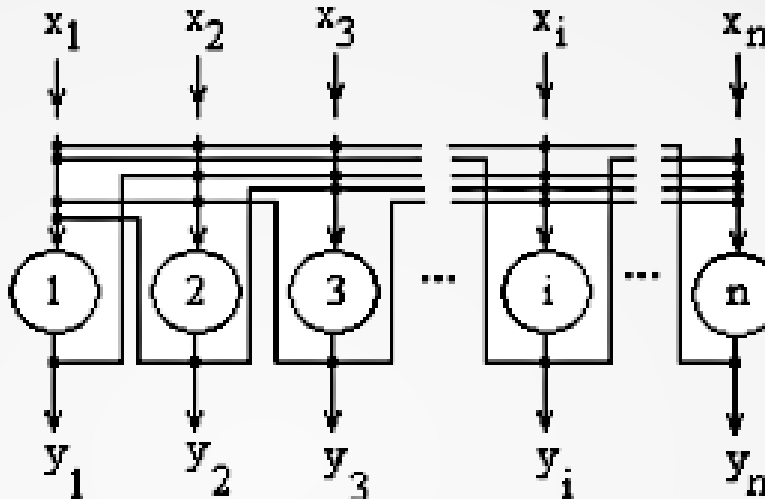
$\sigma$  - функция активации



биполярный сигмоид

# Нейросети

## сеть Хопфилда ( J.J.Hopfield 1982)



один слой

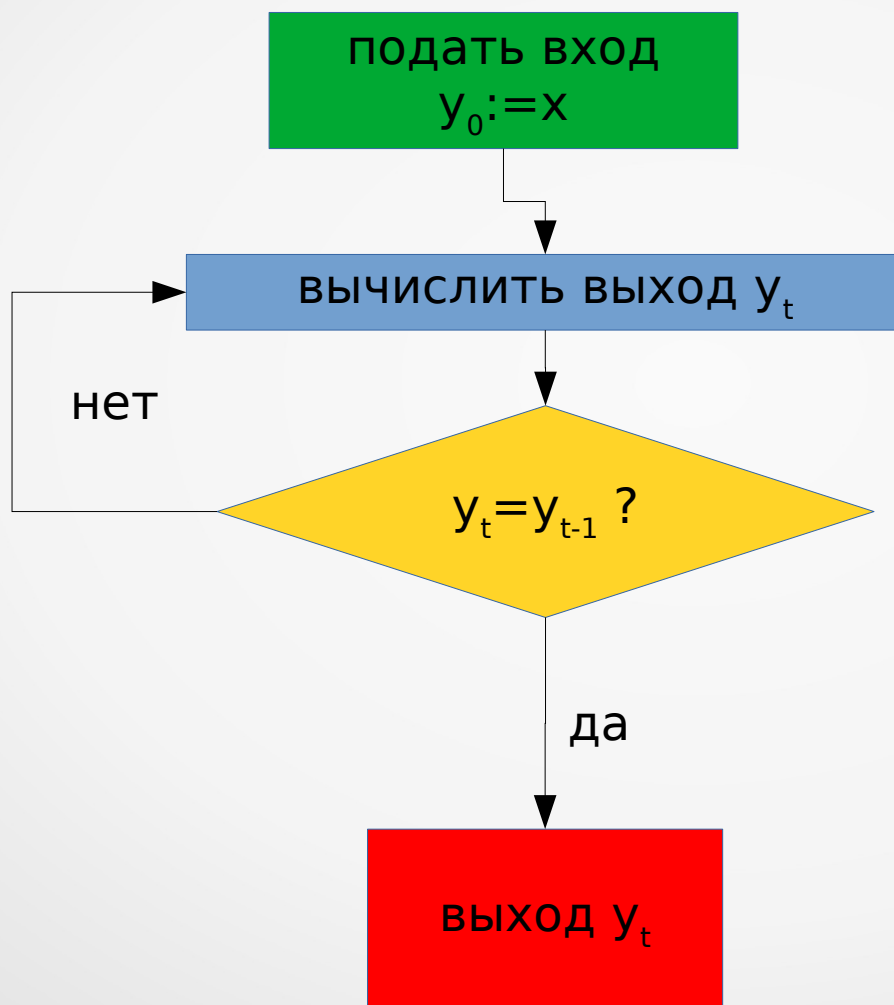
обратные связи

обратная связь нейрона на себя отсутствует

матрица весов симметрична  $w_{ij} = w_{ji}$   
и имеет нулевую главную диагональ  $w_{ii} = 0$

# Нейросети

## схема работы сети Хопфилда



# Нейросети

## сеть Хопфилда

энергия сети 
$$E = - \sum_i s_i b_i - \sum_{i>j} s_i s_j w_{ij}$$

$s_i$  - состояние нейрона  $i$

$b_i$  - сдвиг нейрона  $i$

$w_{ij}$  - вес связи  $i$   $j$

# Нейросети

## сеть Хопфилда

энергия сети 
$$E = - \sum_i s_i b_i - \sum_{i>j} s_i s_j w_{ij}$$

$s_i$  - состояние нейрона  $i$

$b_i$  - сдвиг нейрона  $i$

$w_{ij}$  - вес связи  $i$   $j$

в процессе переходов состояний сети энергия уменьшается и достигает локального минимума - **аттрактора**

# Нейросети

## сеть Хопфилда

энергия сети 
$$E = - \sum_i s_i b_i - \sum_{i>j} s_i s_j w_{ij}$$

$s_i$  - состояние нейрона  $i$

$b_i$  - сдвиг нейрона  $i$

$w_{ij}$  - вес связи  $i$   $j$

в процессе переходов состояний сети энергия уменьшается и достигает локального минимума - **аттрактора**

в случае ассоциативной памяти:  
аттракторами являются хранимые сетью образцы



# Нейросети

## сеть Хопфилда

энергия сети 
$$E = - \sum_i s_i b_i - \sum_{i>j} s_i s_j w_{ij}$$

$s_i$  - состояние нейрона  $i$

$b_i$  - сдвиг нейрона  $i$

$w_{ij}$  - вес связи  $i$   $j$

в процессе переходов состояний сети энергия уменьшается и достигает локального минимума - **аттрактора**

в случае ассоциативной памяти:

аттракторами являются хранимые сетью образцы

ёмкость памяти  $\sim 0.15 * \text{количество нейронов сети}$

ложные аттракторы

# Нейросети

## сеть Хопфилда

обучение - метод Хэбба

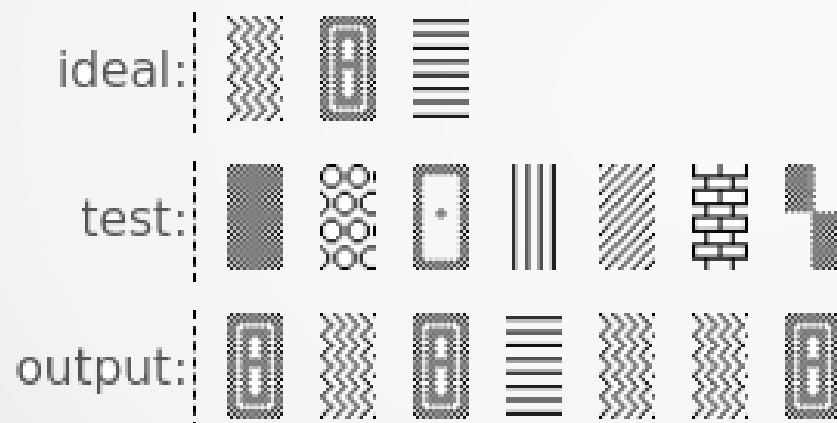
$$W = X^T \cdot X$$

обнуляем главную диагональ матрицы весов  
т. е. убираем связь нейрона на себя

# Нейросети

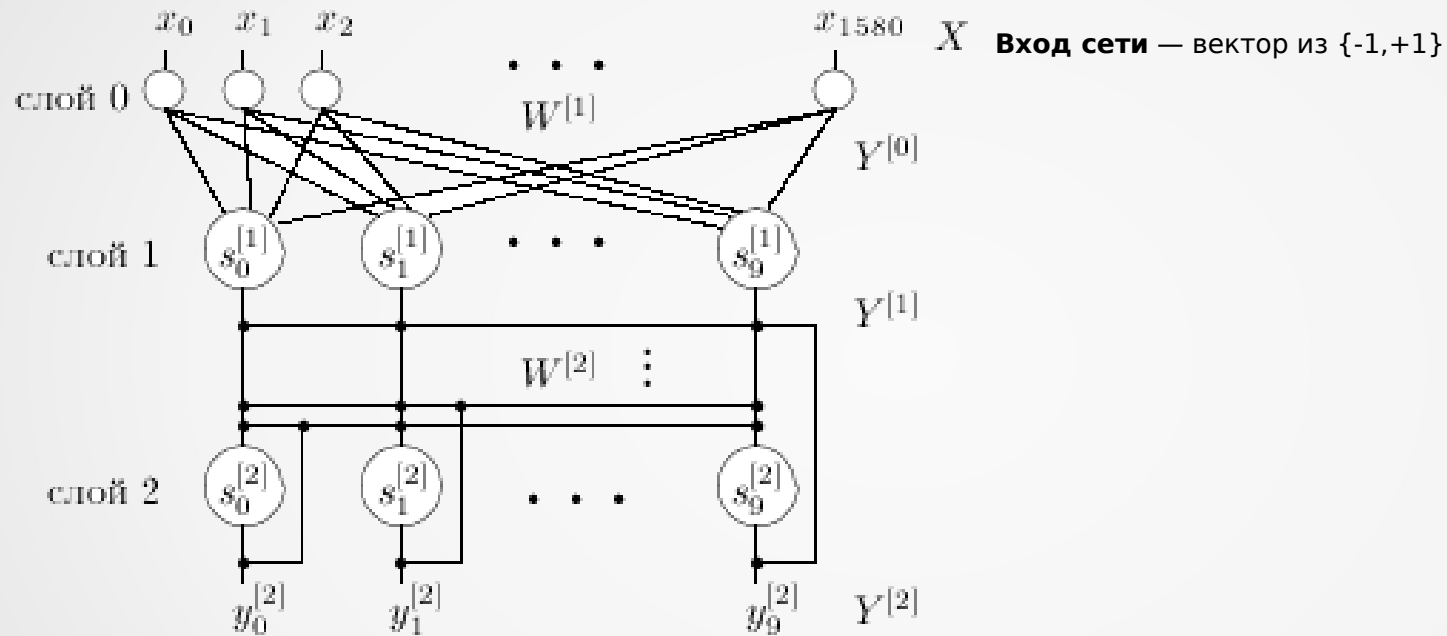
## сеть Хопфилда

пример результатов работы



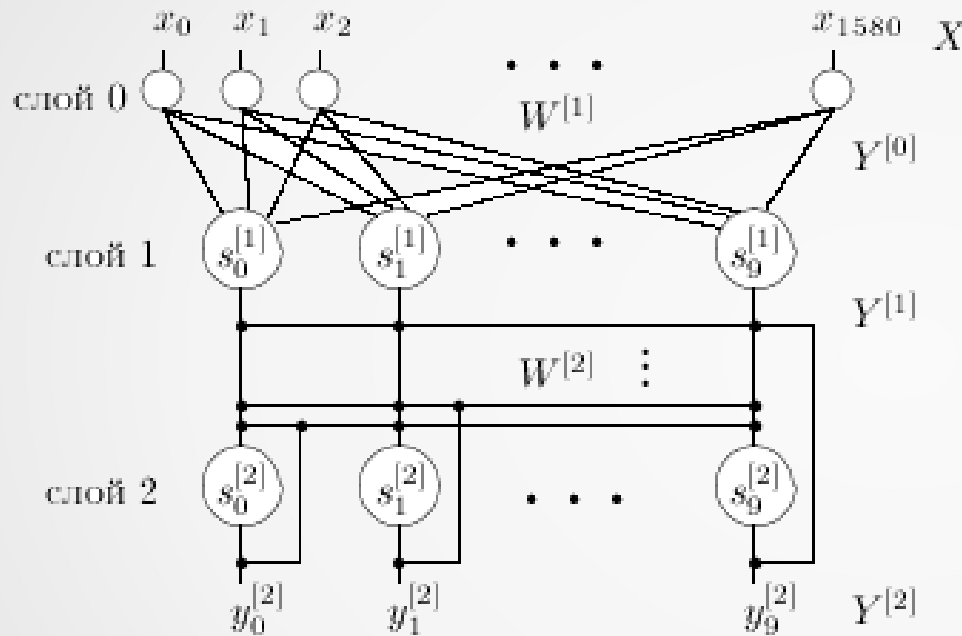
# Нейросети

## сеть Хэминга (Lipman R. 1987)



# Нейросети

## сеть Хэминга (Lipman R. 1987)



**Вход сети** — вектор из  $\{-1, +1\}$

**Первый слой** — имеет линейную активацию,

вычисляет расстояние Хемминга между всеми эталонными образцами, хранящимися в сети, и текущим входом сети.

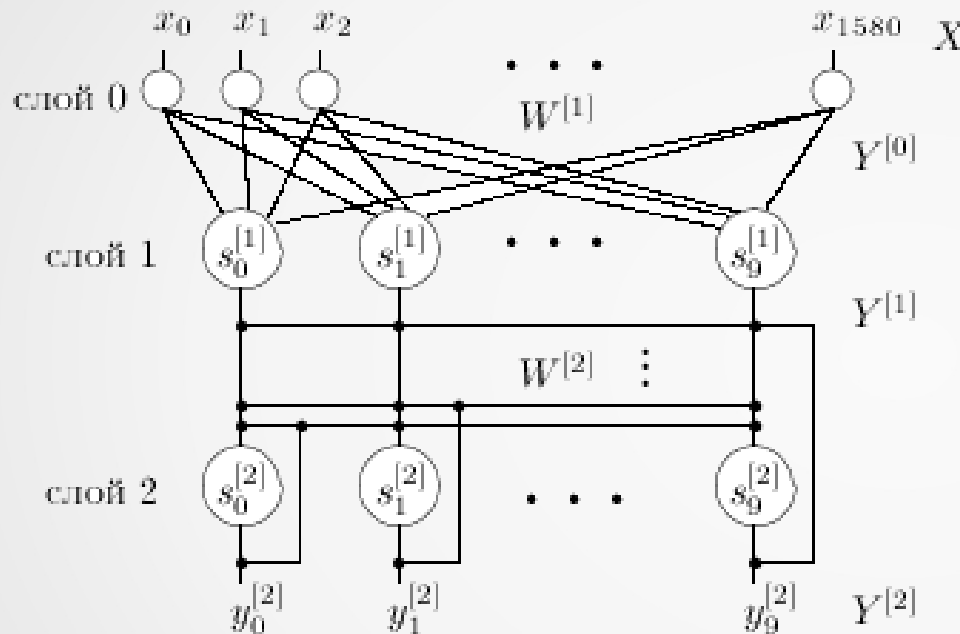
Расстояние Хемминга — количество отличающихся компонент во входном и эталонном векторах.

**Веса первого слоя:**  $W^{[1]} = \frac{1}{2} X^T$

где  $X$  — матрица из векторов-образов, которые записываем в память

# Нейросети

## сеть Хэминга (Lipman R. 1987)



**Вход сети** — вектор из  $\{-1, +1\}$

**Первый слой** — имеет линейную активацию,

вычисляет расстояние Хемминга между всеми эталонными образцами, хранящимися в сети, и текущим входом сети.

Расстояние Хемминга — количество отличающихся компонент во входном и эталонном векторах.

**Веса первого слоя:**  $W^{[1]} = \frac{1}{2} X^T$

где  $X$  — матрица из векторов-образов, которые записываем в память

**Второй слой** — сеть Хопфилда, используется для разрешения конфликтов, когда входной вектор оказывается похож по Хеммингу на более чем один идеал.

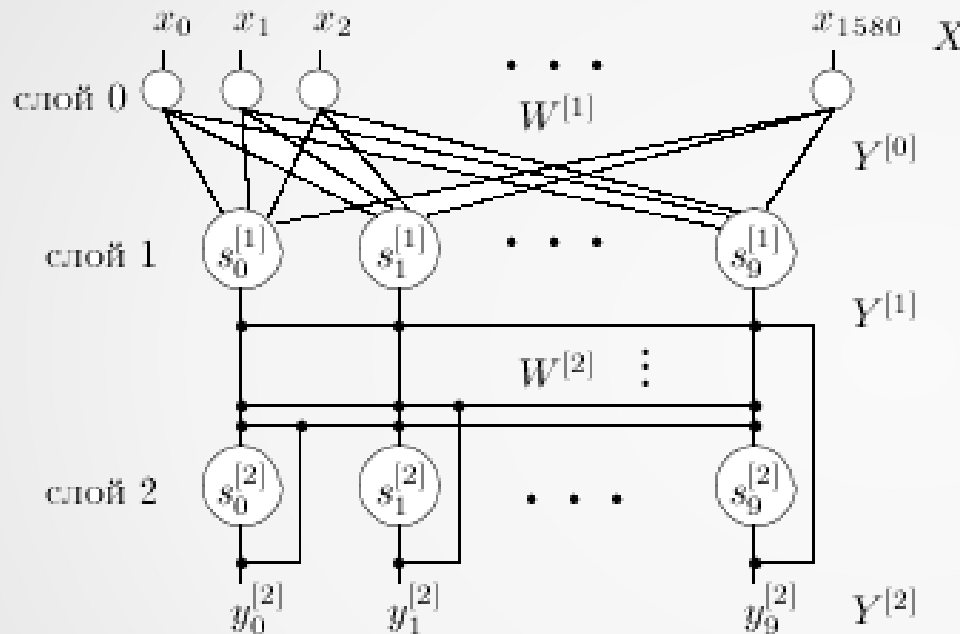
**Веса второго слоя** фиксированны

$$w_{ij}^{[2]} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ -c & , i \neq j \end{cases}$$

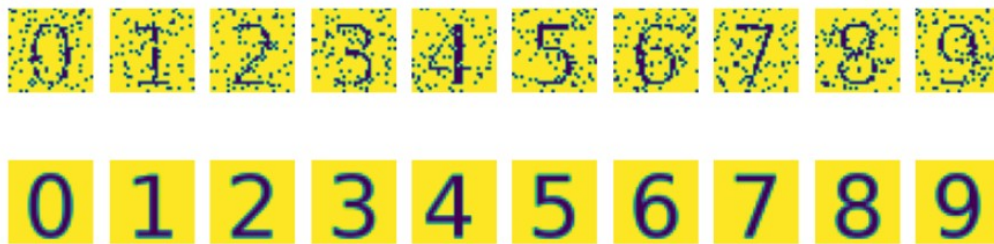
где  $c = 1/(2m)$  — коэффициент торможения,  $m$  — количество образов

# Нейросети

## сеть Хэминга (Lipman R. 1987)



Пример работы сети Хэминга как фильтра шумов



**Вход сети** — вектор из  $\{-1, +1\}$

**Первый слой** — имеет линейную активацию,

вычисляет расстояние Хемминга между всеми эталонными образцами, хранящимися в сети, и текущим входом сети.

Расстояние Хемминга — количество отличающихся компонент во входном и эталонном векторах.

**Веса первого слоя:**  $W^{[1]} = \frac{1}{2} X^T$

где  $X$  — матрица из векторов-образов, которые записываем в память

**Второй слой** — сеть Хопфилда, используется для разрешения конфликтов, когда входной вектор оказывается похож по Хеммингу на более чем один идеал.

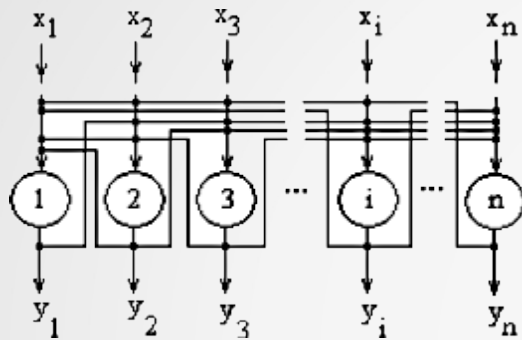
**Веса второго слоя** фиксированны

$$w_{ij}^{[2]} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ -c & , i \neq j \end{cases}$$

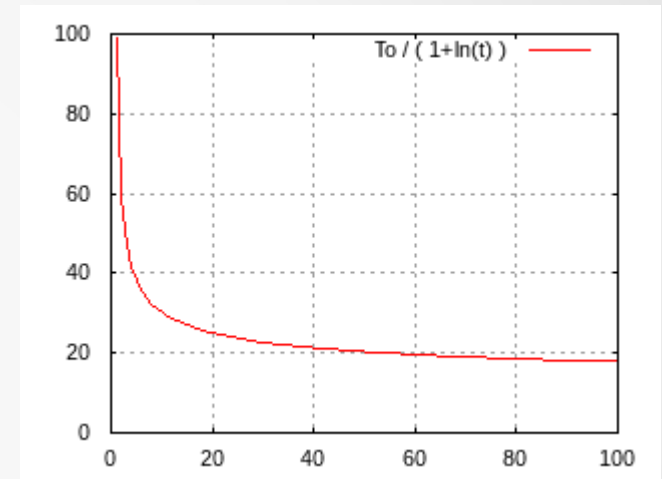
где  $c = 1/(2m)$  — коэффициент торможения,  $m$  — количество образов

# Нейросети

## машина Больцмана (G.Hinton, 1985)



моделирует процесс отжига металла - со снижением температуры вероятность изменения состояния уменьшается

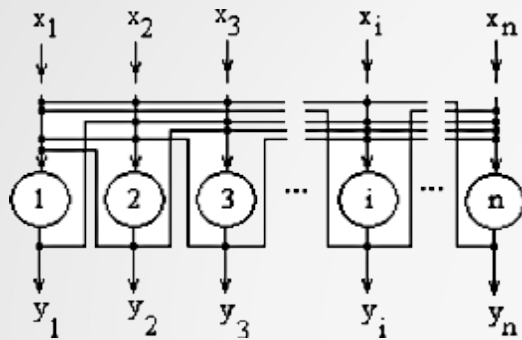


температура сети  $T = \frac{T_0}{1 + \ln(t)}$



# Нейросети

## машина Больцмана (G.Hinton, 1985)



моделирует процесс отжига металла - со снижением температуры вероятность изменения состояния уменьшается

Вероятность перехода нейрона  $i$  в новое состояние

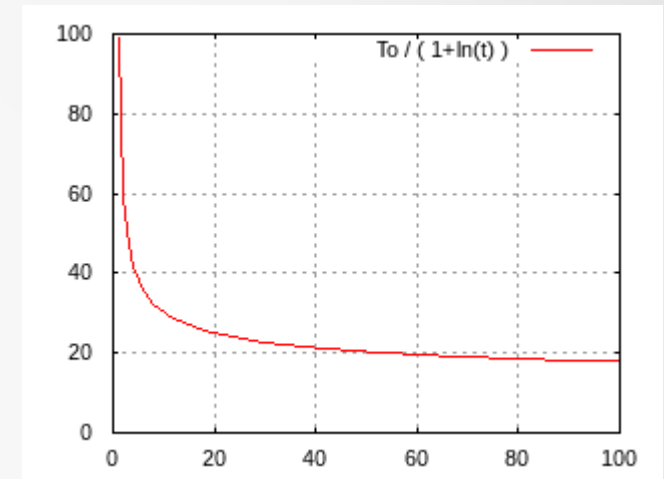
$$P_i = 1 / \left( 1 + \exp \left( -\frac{\Delta E_i}{T} \right) \right)$$

изменение энергии

$$\Delta E_i(t) = E_i(t) - E_i(t-1)$$

энергия сети на итерации  $t$

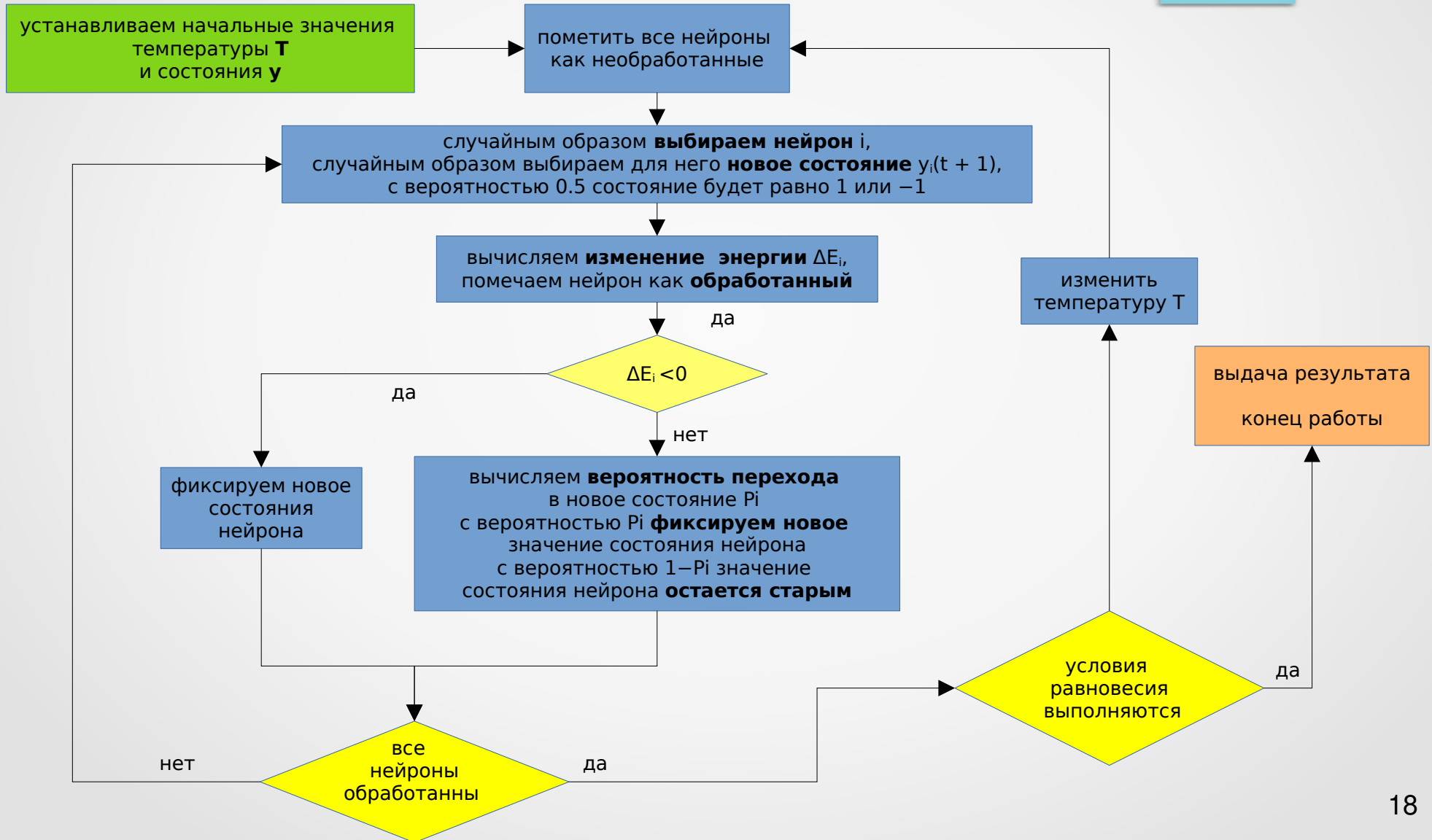
$$E_i(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left( \sum_j w_{ij} \cdot y_j(t) \cdot y_i(t) \right) - y_i(t) \cdot y_i(t-1)$$



температура сети  $T = \frac{T_0}{1 + \ln(t)}$

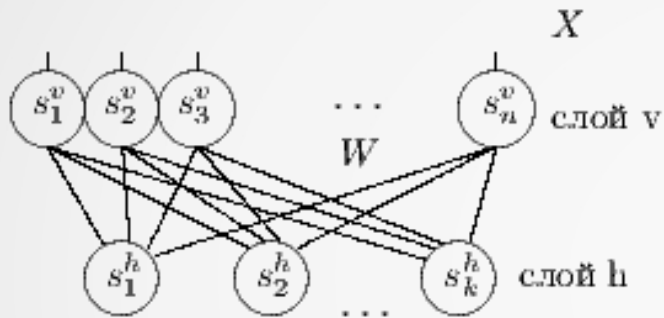
# Нейросети

## машина Больцмана (G.Hinton, 1985)



# Нейросети

## ограниченная машина Больцмана (RBM) (P.Smolensky, 1986, G.Hinton, 2006)



RBM - модификация машины Больцмана

нейроны были разделены на две группы,

убраны некоторые связи,

таким образом был образован второй (скрытый) слой.

<http://mechanoid.su/neural-net-boltzman-restr.html>

# Нейросети: литература

git clone [https://github.com/mechanoid5/ml\\_lectorium.git](https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git)

- Е.С.Борисов Ассоциативная память на основе нейронной сети Хопфилда.  
<http://mechanoid.su/neural-net-hopfield-associative-memory.html>
- Е.С.Борисов Классификатор на основе нейронной сети Хемминга.  
<http://mechanoid.su/neural-net-hamming-classifier.html>
- Е.С.Борисов Нечеткий поиск на основе нейронной сети Хемминга.  
<http://mechanoid.su/neural-net-hamming-fuzzy-search.html>
- Ассоциативная память на основе машины Больцмана.  
<http://mechanoid.su/neural-net-boltzman.html>
- Е.С.Борисов Ассоциативная память на основе ограниченной машины Больцмана (RBM).  
<http://mechanoid.su/neural-net-boltzman-restr.html>
- Саймон Хайкин Нейронные сети. Полный курс : пер. с англ. -- Москва:Вильямс, 2006. (глава 14 нейродинамика)
- Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. — М.: Финансы и статистика, 2002. (глава 7 рекуррентные сети как ассоциативные запоминающие устройства)