Байесовский классификатор

Евгений Борисов

Байесовский классификатор

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- *логические* - построить правило (комбинацию предикатов)
- ***<u>статистические</u>*** - восстановить плотность, определить вероятность
- *линейные* - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

Байесовский классификатор

X - объекты,   Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача**:** построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \to Y'$$

Байесовский классификатор

X - объекты,   Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

<u>выборка:</u> $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

<u>Задача</u>**:** построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \to Y'$$

<u>принцип максимума апостериорной вероятности</u>

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x)$$

Байесовский классификатор

<u>принцип максимума апостериорной вероятности</u>

$$a(x) = \arg\max_{y \in Y} P(y|x) = \arg\max_{y \in Y} P(y)\, p(x|y)$$

$P(y)$ - априорная вероятность класса y

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y

$p(y|x)$ - апостериорная вероятность класса y

<u>формула Байеса :</u>

$$P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}$$

Байесовский классификатор

<u>о функционале среднего риска</u>

$a: X' \to Y'$ - классификатор

$A_y = \{ x \in X | a(x) = y \}, \ y \in Y$ - разбиение X на части

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \to Y'$ - классификатор

$A_y = \{x \in X | a(x) = y\},\ y \in Y$ - разбиение X на части

Ошибка: объект *x* класса *y* попал в класс *s*

$A_s,\ s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$ - классификатор

$A_y = \{x \in X | a(x) = y\},\ y \in Y$ - разбиение X на части

Ошибка: объект *x* класса *y* попал в класс *s*

$A_s,\ s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Вероятность ошибки $P(A_s, y) = \int\limits_{A_s} p(x, y)\,dx$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Байесовский классификатор

<u>о функционале среднего риска</u>

Вероятность ошибки $$P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y)\, dx$$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - <u>потеря от ошибки</u>

$$\lambda_{ys} > 0,\ ys \in Y \times Y$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

Вероятность ошибки $$P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y)\,dx$$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - потеря от ошибки

$$\lambda_{ys} > 0;\; y, s \in Y$$

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Байесовский классификатор

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска *R(a)* достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{argmin} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска *R(a)* достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{argmin} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

<u>Дополнение:</u>

если $\lambda_{yy} = 0; \lambda_y \equiv \lambda_{ys}$

то $a(x) = \underset{y \in Y}{argmax} \lambda_y P(y) p(x|y)$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x)$$

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - доля примеров класса y (априорная вероятность)

$p(x|y)$ - плотность класса y

Байесовский классификатор

git clone https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git

К.В. Воронцов   Байесовская теория классификации и методы восстановления плотности. - Курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С.   Байесовский классификатор. http://mechanoid.su/ml-bayes.html