



# **Модель Кохонена**

Евгений Борисов

# SOM

## Задача кластеризации

**Дано:**

$X^\ell = \{x_i\}_{i=1}^\ell$  — обучающая выборка объектов,  $x_i \in \mathbb{R}^n$   
 $\rho^2(x, w) = \|x - w\|^2$  — евклидова метрика в  $\mathbb{R}^n$

**Найти:**

центры кластеров  $w_y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in Y$ ; алгоритм кластеризации  
«правило жёсткой конкуренции» (WTA, Winner Takes All):

$$a(x) = \arg \min_{y \in Y} \rho(x, w_y)$$

**Критерий:** среднее внутрикластерное расстояние

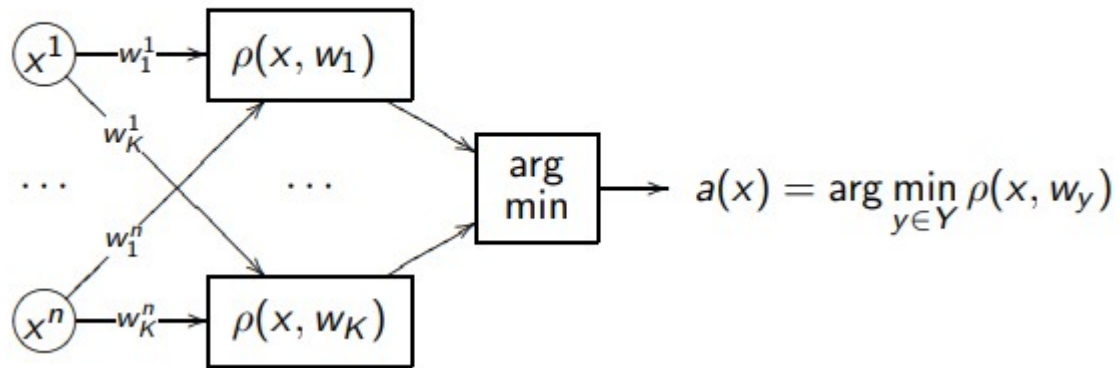
$$Q(w; X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \rho^2(x_i, w_{a(x_i)}) \rightarrow \min_{w_y: y \in Y}$$

# SOM

## Модель Кохонена. Конкурентное обучение.

T.Kohonen. Self-organized formation of topologically orret feature maps. 1982.

Структура алгоритма — двухслойная нейронная сеть:



Градиентный шаг в методе SG: для выбранного  $x_i \in X^\ell$

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y)[a(x_i) = y]$$

Если  $x_i$  относится к кластеру  $y$ , то  $w_y$  сдвигается в сторону  $x_i$

# SOM

## Модель Кохонена. Конкурентное обучение.

T.Kohonen. Self-organized formation of topologically orret feature maps. 1982.

### Алгоритм обучения (SGD)

**Вход:** выборка  $X^\ell$ ; темп обучения  $\eta$ ; параметр  $\lambda$ ;

**Выход:** центры кластеров  $w_1, \dots, w_K \in \mathbb{R}^n$ ;

инициализировать центры  $w_y, y \in Y$ ;

инициализировать текущую оценку функционала:

$$Q := \sum_{i=1}^{\ell} \rho^2(x_i, w_{a(x_i)});$$

#### повторять

выбрать объект  $x_i$  из  $X^\ell$  (например, случайно);

вычислить кластеризацию:  $y := \arg \min_{y \in Y} \rho(x_i, w_y)$ ;

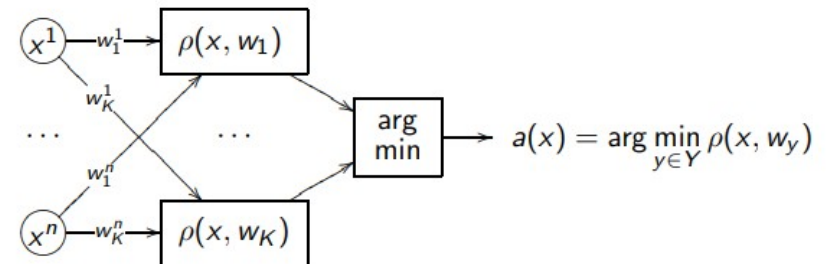
градиентный шаг:  $w_y := w_y + \eta(x_i - w_y)$ ;

оценить значение функционала:

$$Q := (1 - \lambda)Q + \lambda \rho^2(x_i, w_y);$$

**пока** значение  $Q$  и/или веса  $w$  не стабилизируются;

Структура алгоритма — двухслойная нейронная сеть:



Градиентный шаг в методе SG: для выбранного  $x_i \in X^\ell$

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y)[a(x_i) = y]$$

Если  $x_i$  относится к кластеру  $y$ , то  $w_y$  сдвигается в сторону  $x_i$

# SOM

## Модель Кохонена. Конкурентное обучение.

T.Kohonen. Self-organized formation of topologically orret feature maps. 1982.

Правило жёсткой конкуренции WTA (winner takes all):

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y) [a(x_i) = y], \quad y \in Y$$

Недостатки правила WTM:

- медленная скорость сходимости
- некоторые  $w_y$  могут никогда не выбираться

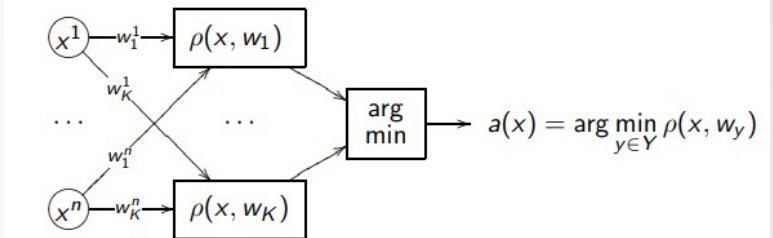
Правило мягкой конкуренции WTM (winner takes most):

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y) K(\rho(x_i, w_y)), \quad y \in Y$$

где ядро  $K(\rho)$  — неотрицательная невозрастающая функция

Теперь центры всех кластеров смещаются в сторону  $x_i$ ,  
но чем дальше от  $x_i$ , тем меньше величина смещения

Структура алгоритма — двухслойная нейронная сеть:



# SOM

## Карты Кохонена. Self-Organizing Maps.

Teuvo Kohonen. Self-Organizing Maps. 2001.

**Правило мягкой конкуренции WTM (winner takes most):**

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y) K(\rho(x_i, w_y)), \quad y \in Y$$

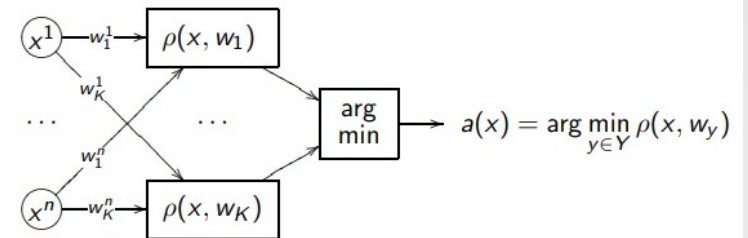
где ядро  $K(\rho)$  — неотрицательная невозрастающая функция

Теперь центры всех кластеров смещаются в сторону  $x_i$ ,  
но чем дальше от  $x_i$ , тем меньше величина смещения

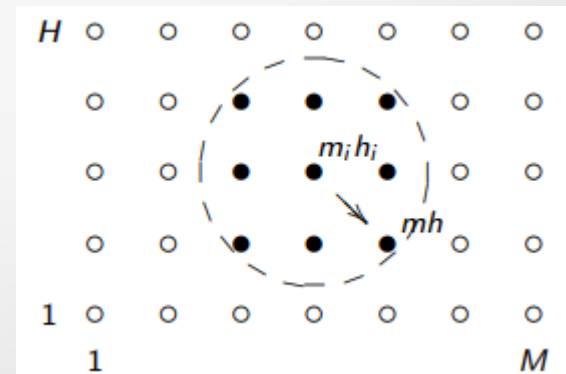
$Y = \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, H\}$  — прямоугольная сетка кластеров  
Каждому узлу  $(m, h)$  приписан нейрон Кохонена  $w_{mh} \in \mathbb{R}^n$   
Наряду с метрикой  $\rho(x_i, x)$  на  $X$  вводится метрика на сетке  $Y$ :

$$r((m_i, h_i), (m, h)) = \sqrt{(m - m_i)^2 + (h - h_i)^2}$$

Структура алгоритма — двухслойная нейронная сеть:



Окрестность  $(m_i, h_i)$ :



# SOM

## Карты Кохонена. Self-Organizing Maps.

Teuvo Kohonen. Self-Organizing Maps. 2001.

Правило мягкой конкуренции WTM (winner takes most):

$$w_y := w_y + \eta(x_i - w_y) K(\rho(x_i, w_y)), \quad y \in Y$$

где ядро  $K(\rho)$  — неотрицательная невозрастающая функция

Теперь центры всех кластеров смещаются в сторону  $x_i$ ,  
но чем дальше от  $x_i$ , тем меньше величина смещения

### Обучение Карты Кохонена.

**Вход:**  $X^\ell$  — обучающая выборка;  $\eta$  — темп обучения;

**Выход:**  $w_{mh} \in \mathbb{R}^n$  — векторы весов,  $m = 1..M$ ,  $h = 1..H$ ;

$w_{mh} := \text{random}(-\frac{1}{2MH}, \frac{1}{2MH})$  — инициализация весов;

**повторять**

выбрать объект  $x_i$  из  $X^\ell$  случайным образом;

WTA: вычислить координаты кластера:

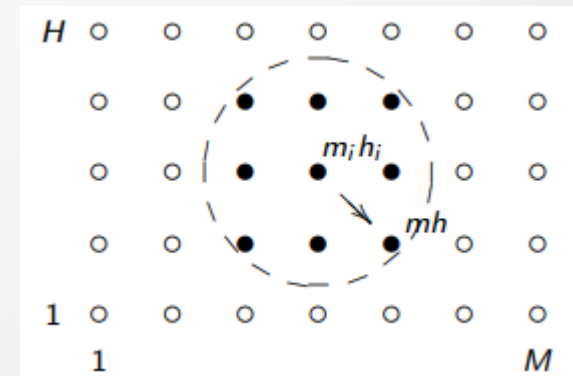
$$(m_i, h_i) := a(x_i) \equiv \arg \min_{(m,h) \in Y} \rho(x_i, w_{mh});$$

**для всех**  $(m, h) \in \text{Окрестность}(m_i, h_i)$

WTM: сделать шаг градиентного спуска:

$$w_{mh} := w_{mh} + \eta(x_i - w_{mh}) K(r((m_i, h_i), (m, h)));$$

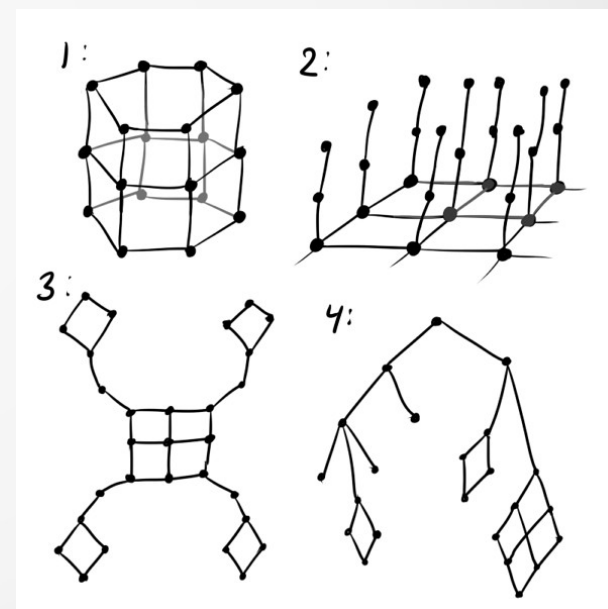
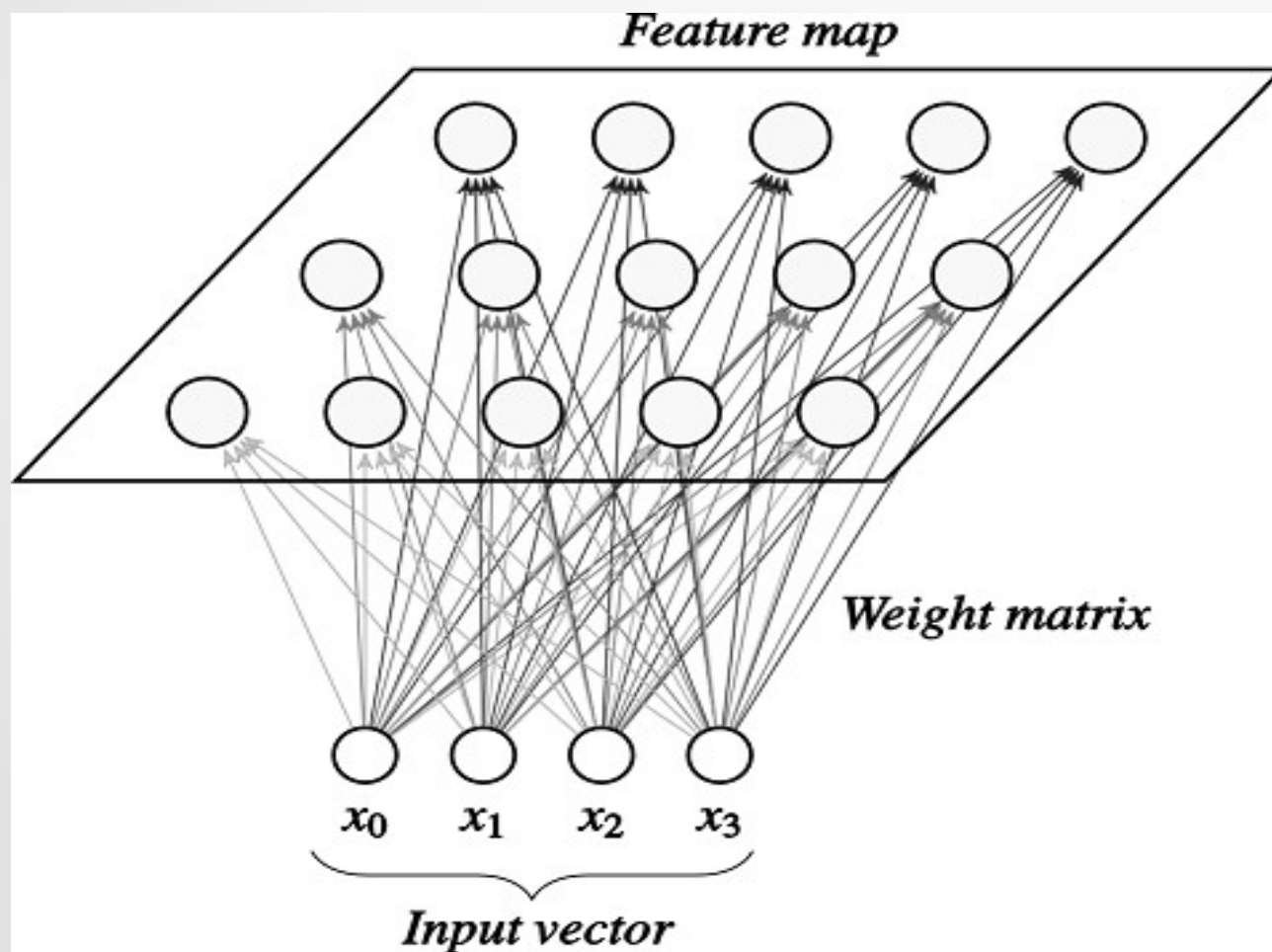
**пока** кластеризация не стабилизируется;





# SOM

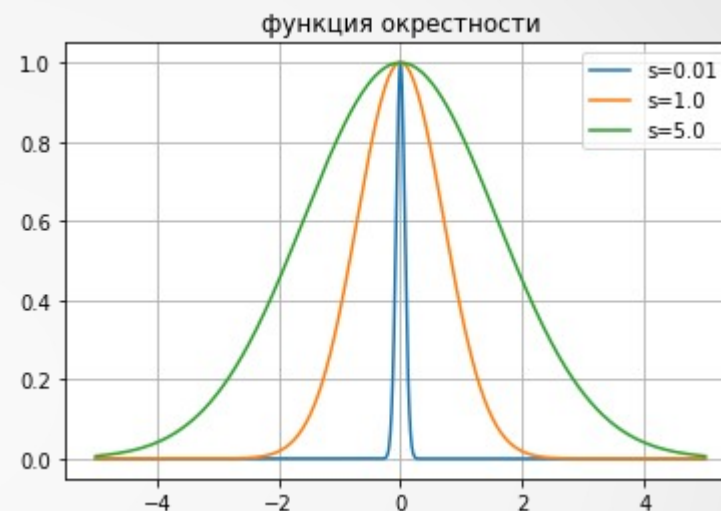
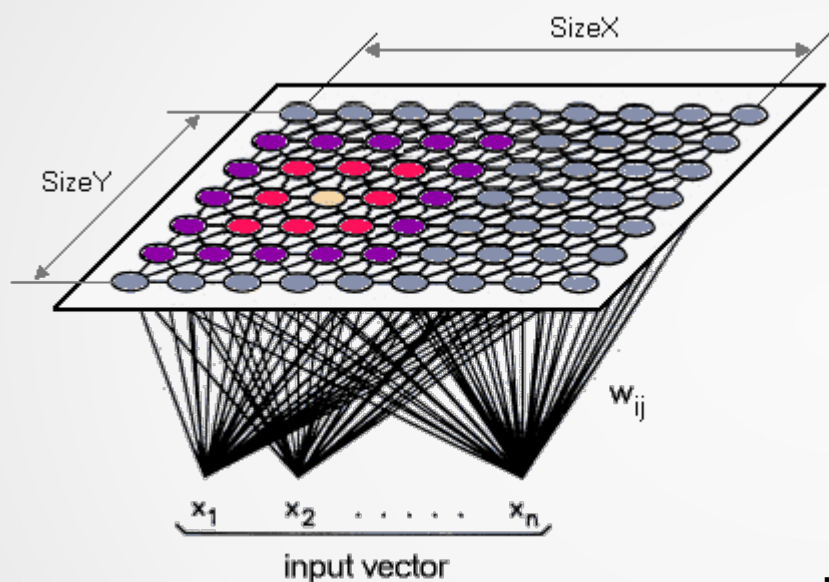
## Различные топологии выходного слоя SOM





# SOM

## Обучение модели и функция окрестности



## competitive hebbian learning

изменение весов

$$\Delta w = \eta \cdot \theta(k) \cdot (x - w)$$

$\eta \in (0, 1)$  - шаг обучения

$k$  - номер нейрона-победителя

$\theta(k)_j \in [0, 1]$  - значение ф-ции окрестности нейрона-победителя  $k$  для нейрона  $j$ ;

# SOM

## Карты Кохонена. Self-Organizing Maps.

Teuvo Kohonen. Self-Organizing Maps. 2001.

### Интерпретация результатов

Два типа графиков — цветных карт  $M \times H$ :

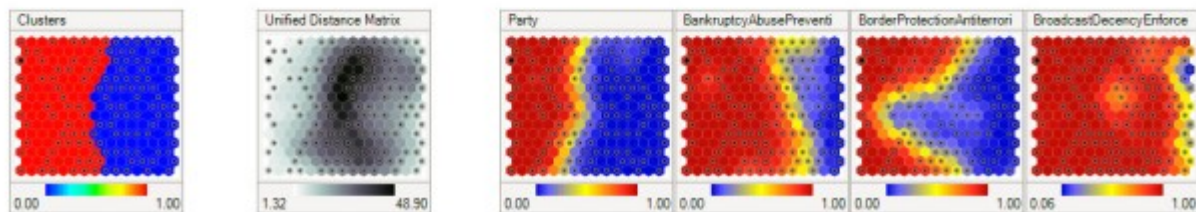
- Цвет узла  $(m, h)$  — локальная плотность в точке  $(m, h)$  — среднее расстояние до  $k$  ближайших точек выборки
- По одной карте на каждый признак:  
цвет узла  $(m, h)$  — значение  $j$ -й компоненты вектора  $w_{m,h}$

**Пример:** задача UCI house-votes (US Congress voting patterns)

Объекты — конгрессмены

Признаки — результаты голосования по различным вопросам

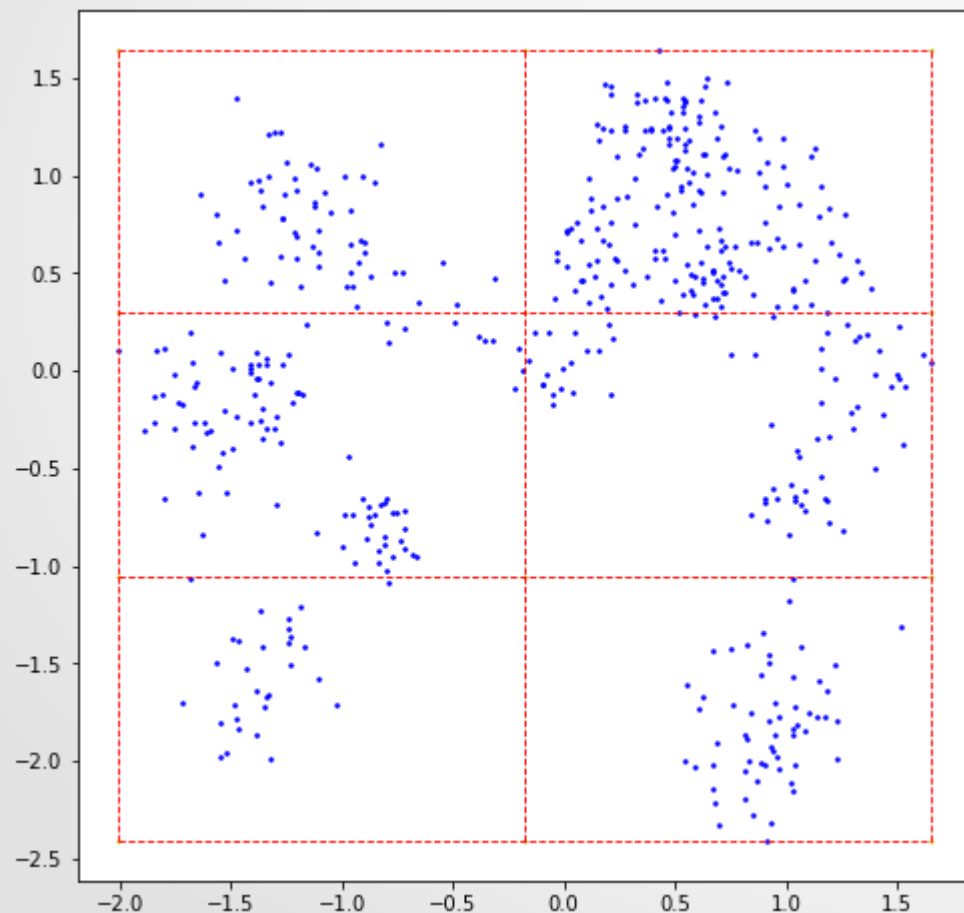
Есть целевой признак «партия»  $\in \{\text{демократ, республиканец}\}$



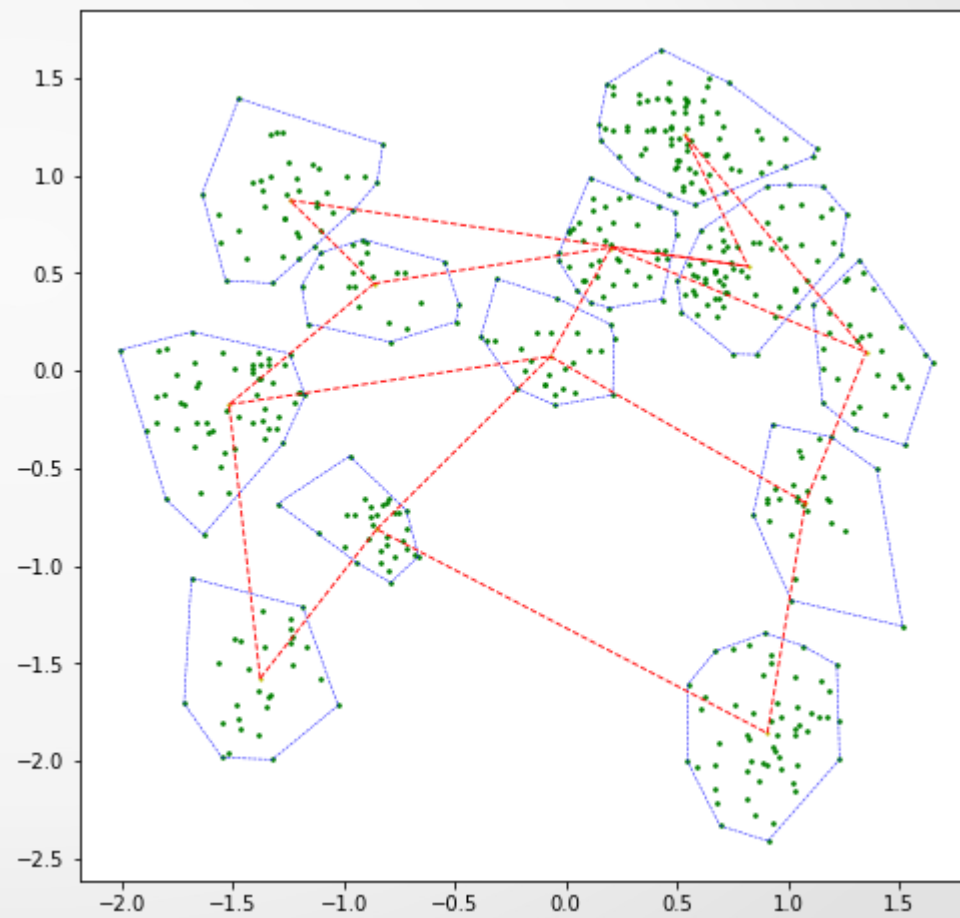
# SOM

**Топология выходного слоя SOM - двумерная решетка**  
(накрываем данные сеткой)

начальное состояние



результат работы



# SOM: литература

git clone [https://github.com/mechanoid5/ml\\_lectorium.git](https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git)

Kohonen, T. Learning Vector Quantization, Neural Networks, 1988, 1 (suppl 1), 303.

T.Kohonen. Self-organized formation of topologically orret feature maps. 1982.

Teuvo Kohonen. Self-Organizing Maps. 2001.

Воронцов К. В.

Прикладные модели машинного обучения. 2021.

Лекция 2: Обучение без учителя.

<https://www.youtube.com/watch?v=wfbe2yaXAkI>

Борисов Е.С. Кластеризатор на основе нейронной сети Кохонена.

<http://mechanoid.su/neural-net-kohonen-clusterization.html>