



# **Линейная и нелинейная регрессия**

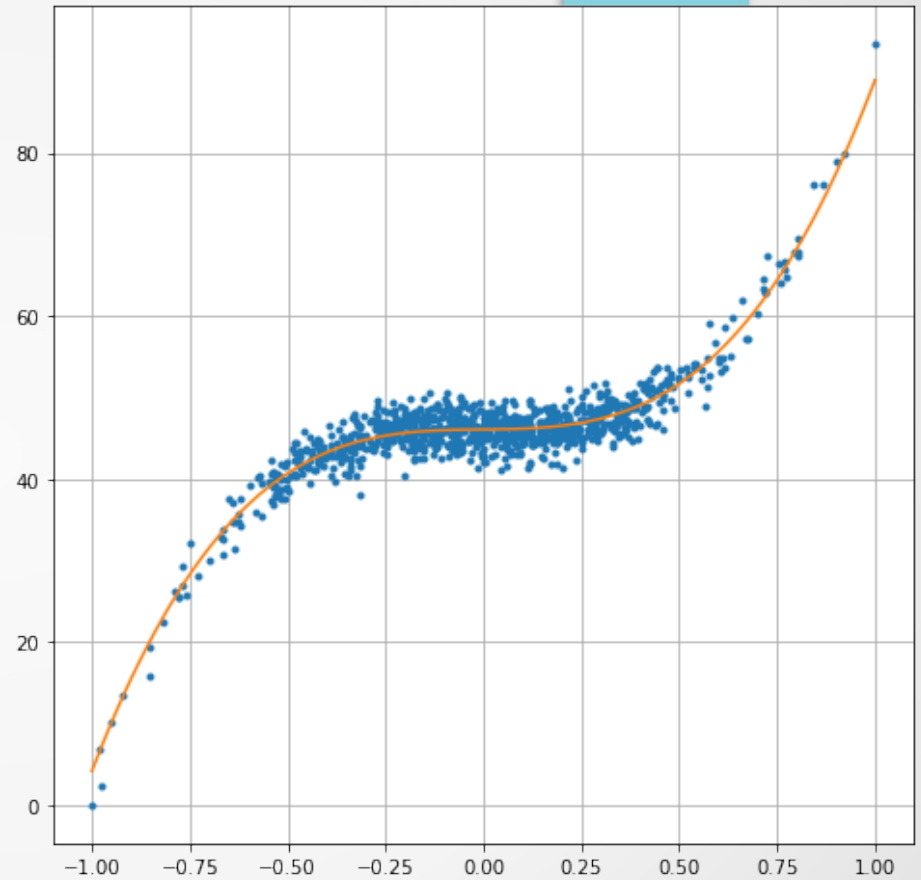
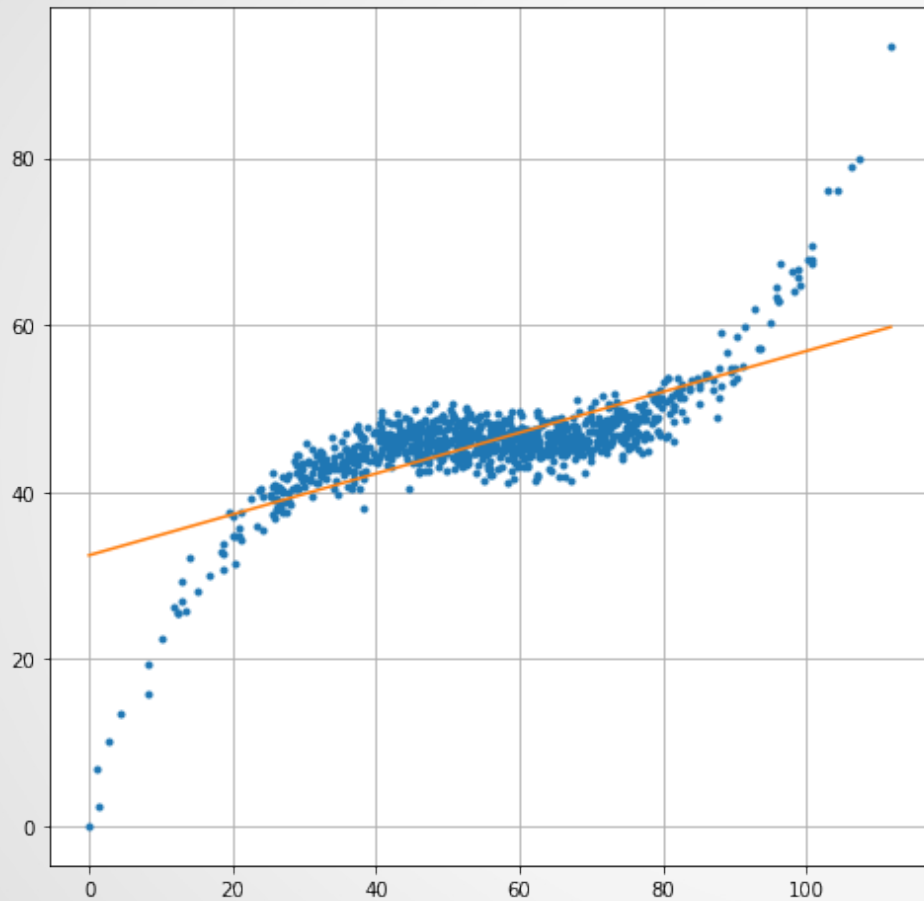
Евгений Борисов

# линейная и нелинейная регрессия

## Оценка недвижимости по статистике продаж

цена = **оценка**(  
район,  
площадь,  
этаж,  
лифт,  
ремонт,  
)

# линейная и нелинейная регрессия



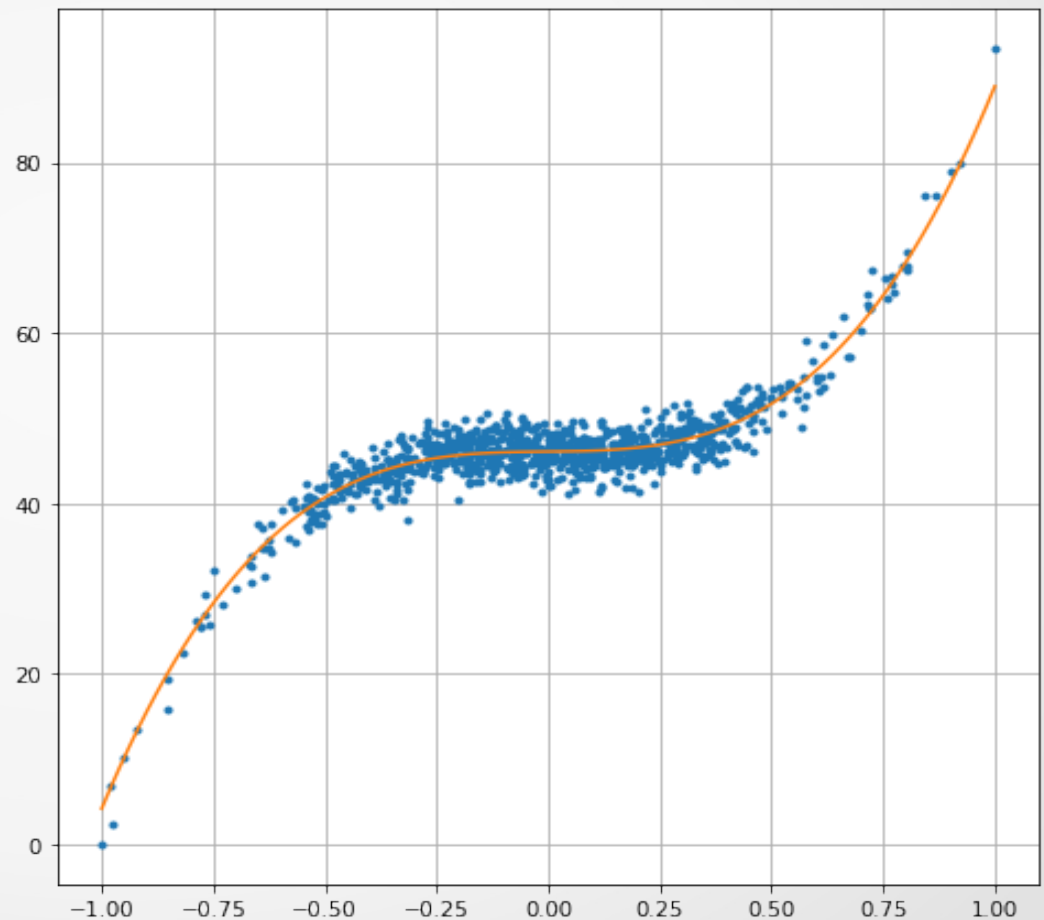
# линейная и нелинейная регрессия

регрессия - задача восстановления зависимости

$X \subset \mathbb{R}^n$  - объекты

$Y \subset \mathbb{R}$  - ответы

$$a: X \rightarrow Y$$



# линейная и нелинейная регрессия

регрессия - задача восстановления зависимости

$a: X \rightarrow Y$        $X \subset \mathbb{R}^n$  - объекты       $Y \subset \mathbb{R}$  - ответы

параметрический подход: определяем (допускаем) вид зависимости

$$a = f(x, \theta)$$

... и подбираем параметры решая задачу оптимизации (метод наименьших квадратов)

$$Q(\theta, X) = \sum_{i=1}^m (f(x_i, \theta) - y_i)^2 \rightarrow \min_{\theta}$$

# линейная и нелинейная регрессия

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

$x$  - вектор-признак

$y$  - ответ (значение функции)

$n$  - размер пространства признаков

$m$  - количество примеров

# линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

$x$  - вектор-признак

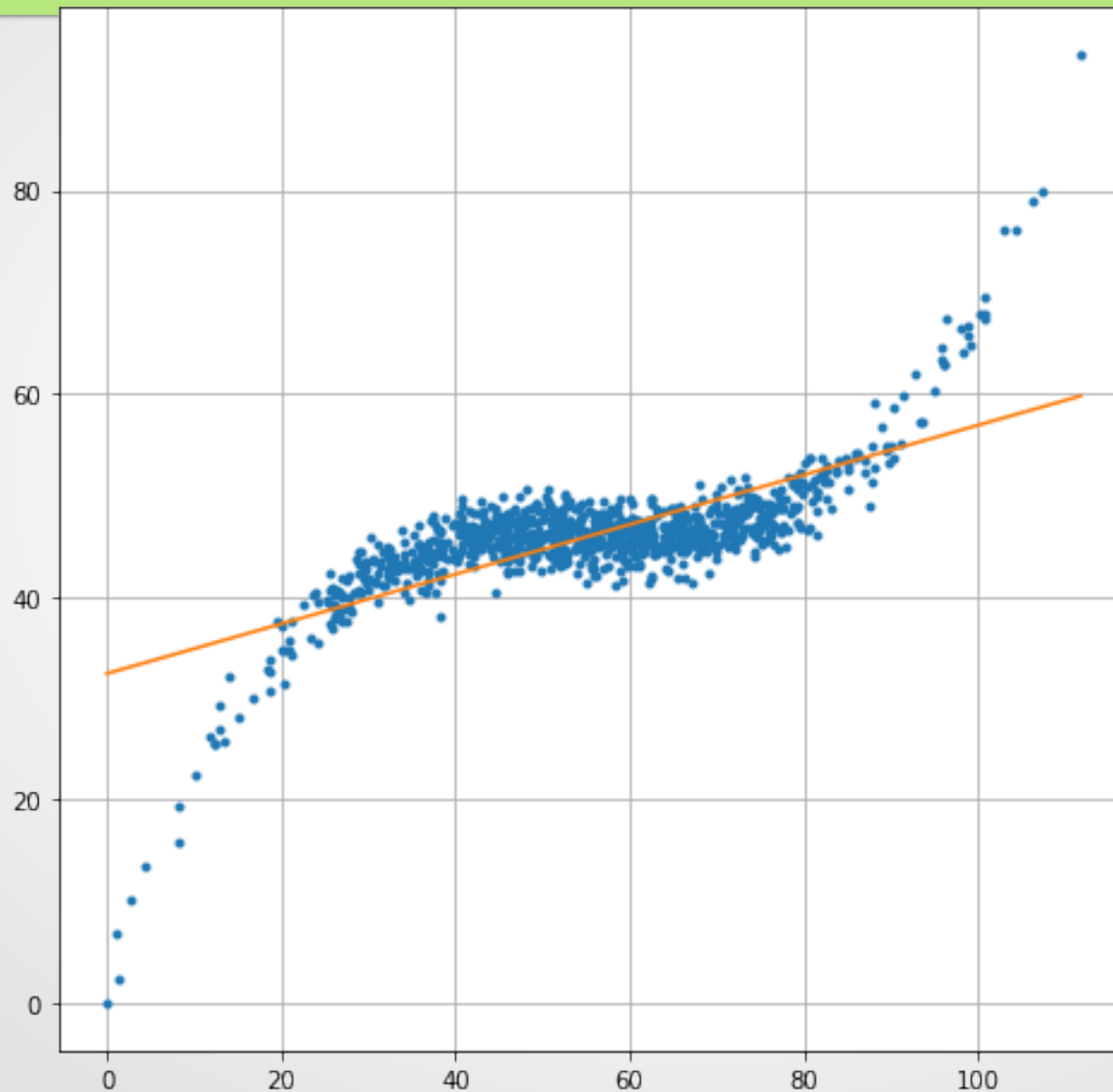
$y$  - ответ (значение функции)

$n$  - размер пространства признаков

$m$  - количество примеров

$\theta$  - параметры

# линейная и нелинейная регрессия





# линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

$$\theta = ?$$

# линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

метод наименьших квадратов:  
минимизация суммы квадратов отклонений  
функции от искоемых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

# линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

метод наименьших квадратов:  
минимизация суммы квадратов отклонений  
функции от искоемых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

## ограничения метода:

не работает для больших наборов данных

$X^T X$  может быть необратимая (вырожденная)

- строки  $X$  линейно зависимы
- признаков больше чем примеров

# линейная и нелинейная регрессия

$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$  - функция ошибки

$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$  функция потерь (loss)  
средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$\min_{\theta} J(\theta)$  - задача оптимизации

# линейная и нелинейная регрессия

$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$  - функция ошибки

$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$  функция потерь (loss)  
средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$\min_{\theta} J(\theta)$  - задача оптимизации

## метод градиентного спуска:

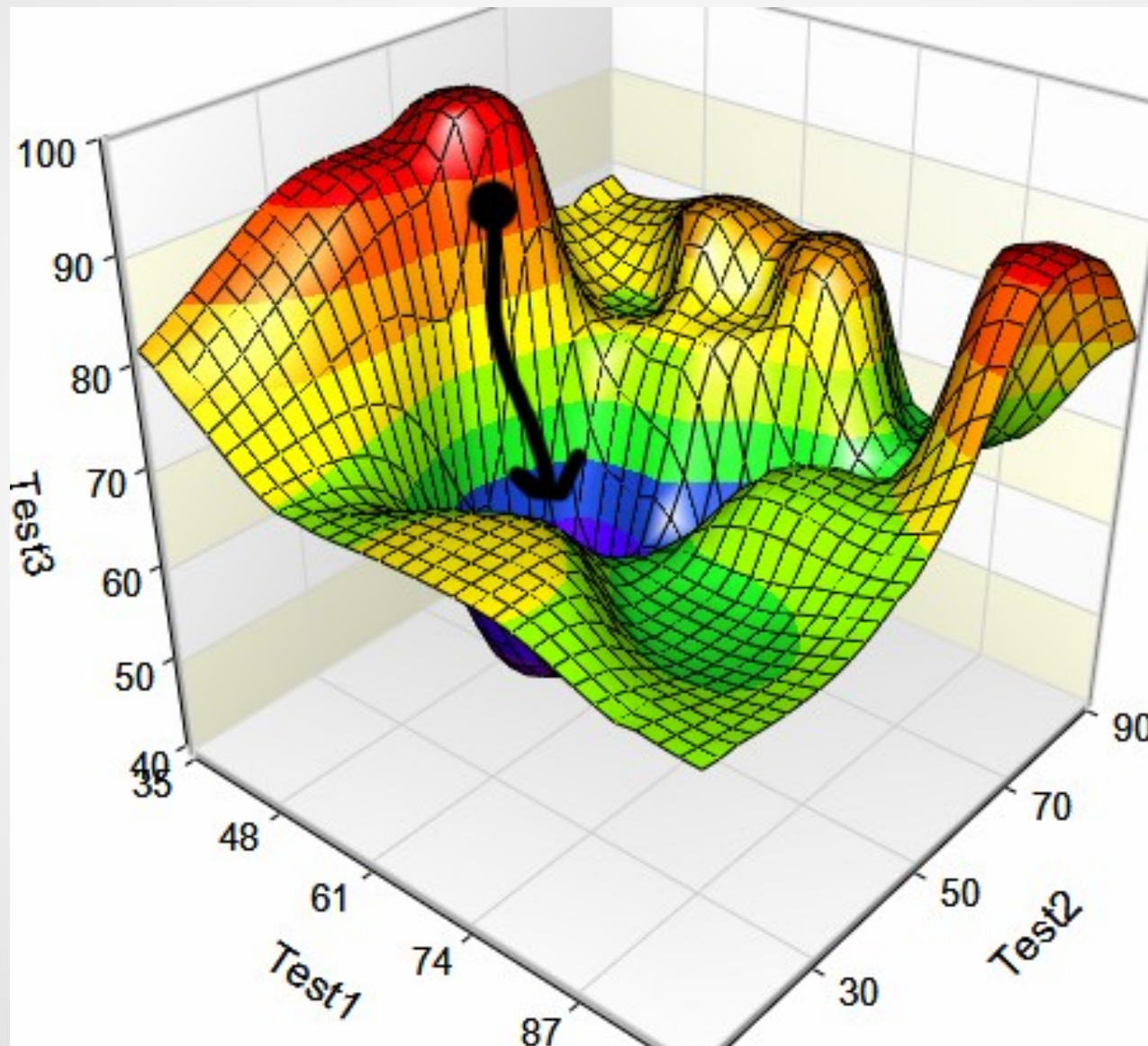
градиент функции - направление наискорейшего возрастания ф-ции

$$\nabla J(\theta) = \left[ \frac{\partial J}{\partial \theta_0}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \theta_n} \right]$$

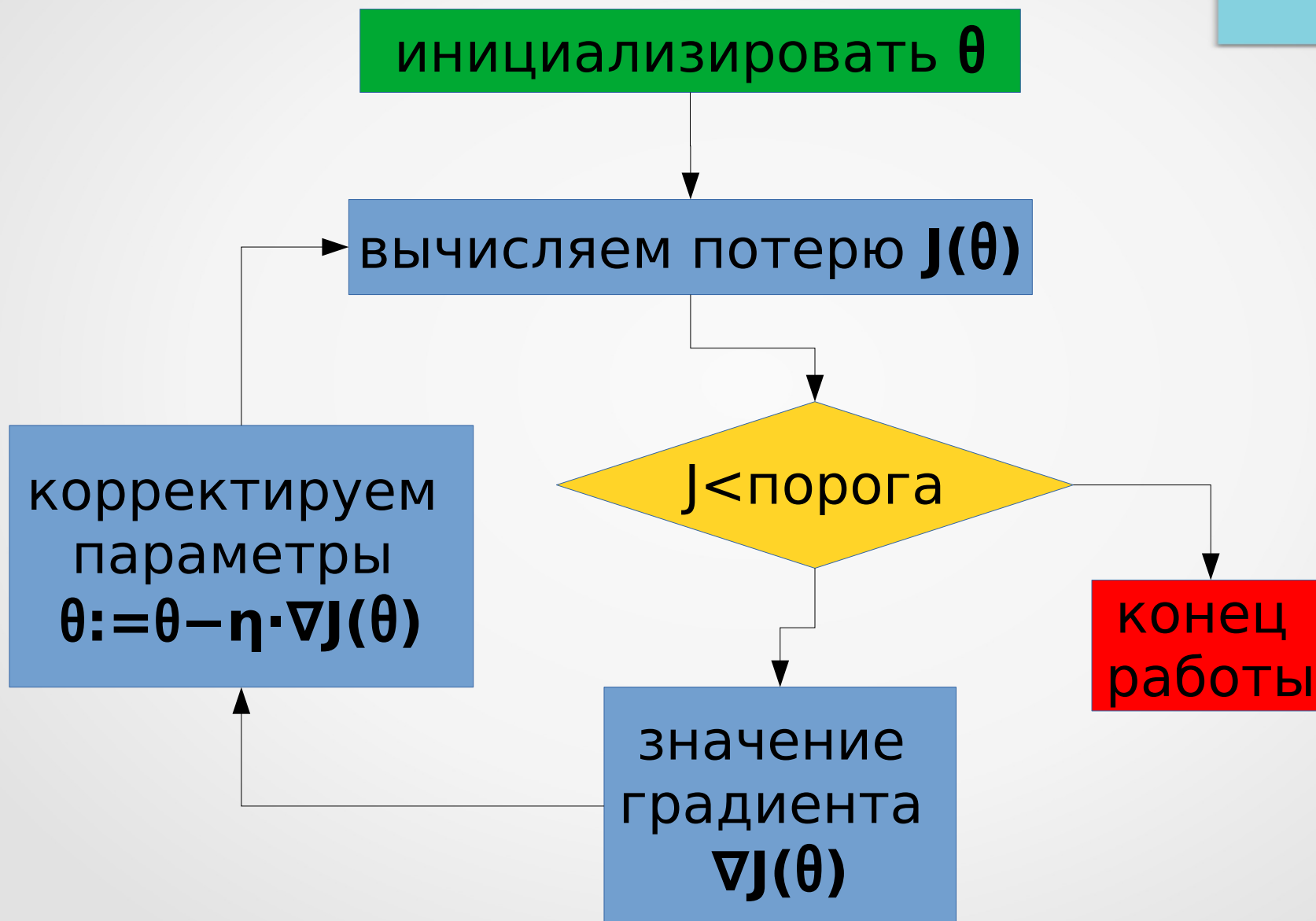
двигаем параметры в противоположную сторону

$$\theta := \theta - \alpha \cdot \nabla J(\theta)$$

# линейная и нелинейная регрессия



# линейная и нелинейная регрессия



# линейная и нелинейная регрессия

функция потери (MSQE)

$$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$$

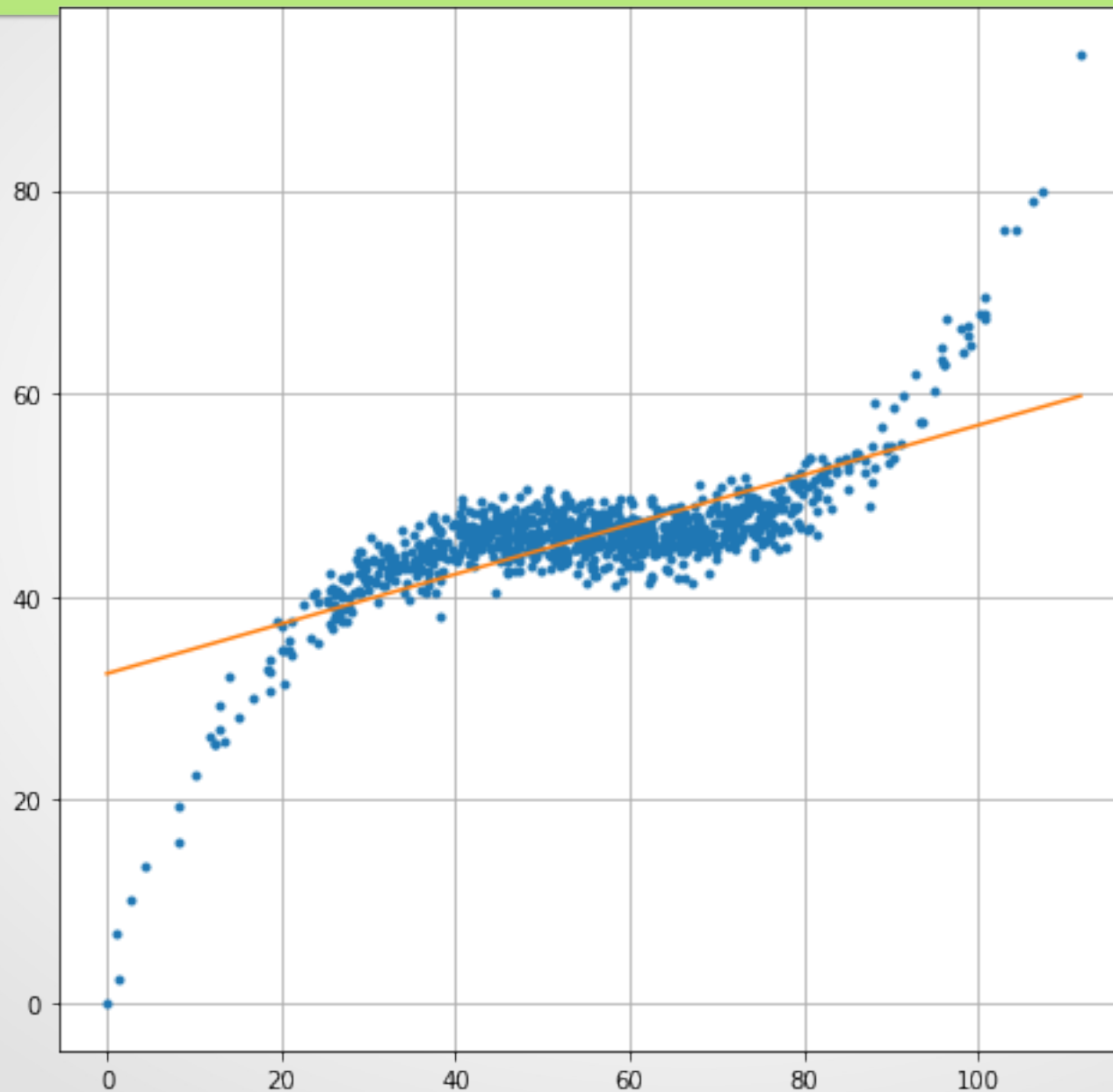
градиент и изменение весов

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_j} = \theta_j - \alpha \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i) \cdot x_{ij}$$

$$\theta := \theta - \alpha \cdot X^T \cdot (h(X, \theta) - y)$$



# линейная и нелинейная регрессия



# линейная и нелинейная регрессия

**преобразование исходных данных**

увеличиваем размерность пространства

строим полином степени **k** на признаках **x**, размера **n**

пример для одномерного пространства ( $n=1$ ) :

строим полином  $k=1$

**линейная:**  $h_{\text{lin}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$

# линейная и нелинейная регрессия

## преобразование исходных данных

увеличиваем размерность пространства

строим полином степени **k** на признаках **x**, размера **n**

пример для одномерного пространства ( $n=1$ ) :

строим полином  $k=1$

**линейная:**  $h_{\text{lin}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$

строим полином  $k=3$

**нелинейная:**  $h_{\text{nl}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3$

# линейная и нелинейная регрессия

**m** примеров, размера **n**, **n+1** параметр  $\theta$

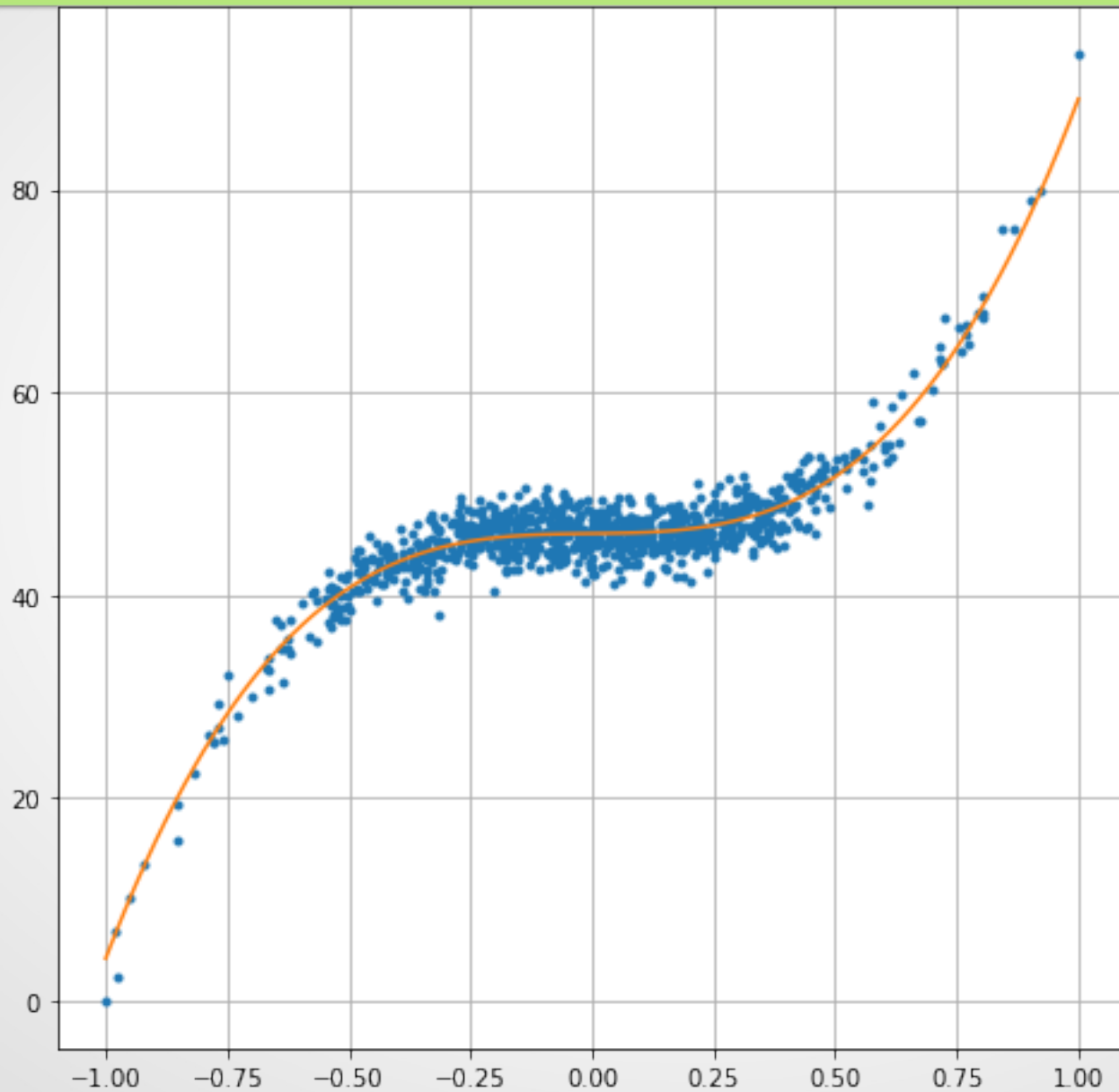
исходные данные  $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$

$$h(x, \theta) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \theta_3 \cdot x_1 \cdot x_2 + \theta_4 \cdot x_1^2 + \theta_5 \cdot x_2^2$$

строим полином степени **k** на переменных **x**,

комбинируем столбцы матрицы **X**  
число параметров  $\theta$  увеличивается

# линейная и нелинейная регрессия



# линейная и нелинейная регрессия

git clone [https://github.com/mechanoid5/ml\\_lectorium.git](https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium.git)

Воронцов К.В. Методы восстановления регрессии - курс "Машинное обучение" ШАД Яндекс 2014

Борисов Е.С. Модели математической регрессии.  
<http://mechanoid.su/ml-regression.html>

Машинное обучение для людей  
[https://vas3k.ru/blog/machine\\_learning/](https://vas3k.ru/blog/machine_learning/)