



Линейная и нелинейная регрессия

Евгений Борисов

линейная и нелинейная регрессия

Оценка недвижимости по статистике продаж

цена = **оценка**(
район,
площадь,
этаж,
лифт,
ремонт,
)

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

регрессия-задача восстановления зависимости

$$y = \varphi(x; \theta)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ - аргументы

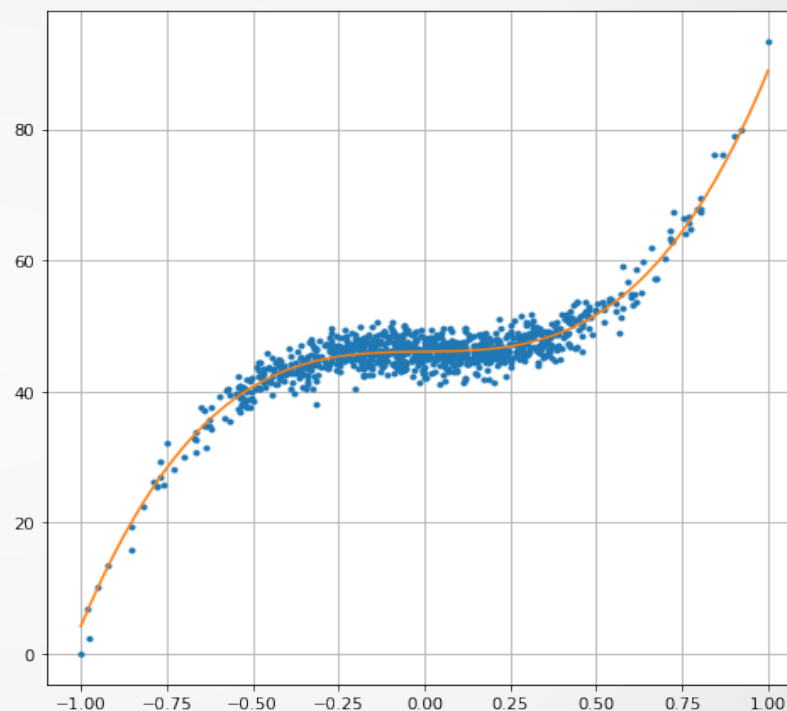
$y \in \mathbb{R}$ - значения функции

θ - параметры функции

датасет

$$L = (X, Y)$$

$$X \subset \mathbb{R}^n \quad Y \subset \mathbb{R}$$



Задача: по данным L определить $\hat{\varphi}(x; \hat{\theta})$

максимально близкую к $\varphi(x; \theta)$

линейная и нелинейная регрессия

регрессия - задача восстановления зависимости

$a: X \rightarrow Y$ $X \subset \mathbb{R}^n$ - объекты $Y \subset \mathbb{R}$ - ответы

параметрический подход: определяем (допускаем) вид зависимости

$$a = f(x, \theta)$$

... и подбираем параметры решая задачу оптимизации
(метод наименьших квадратов)

$$Q(\theta, X) = \sum_{i=1}^m (f(x_i, \theta) - y_i)^2 \rightarrow \min_{\theta}$$

линейная и нелинейная регрессия

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

x - вектор-признак

y - ответ (значение функции)

n - размер пространства признаков

m - количество примеров

линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

x - вектор-признак

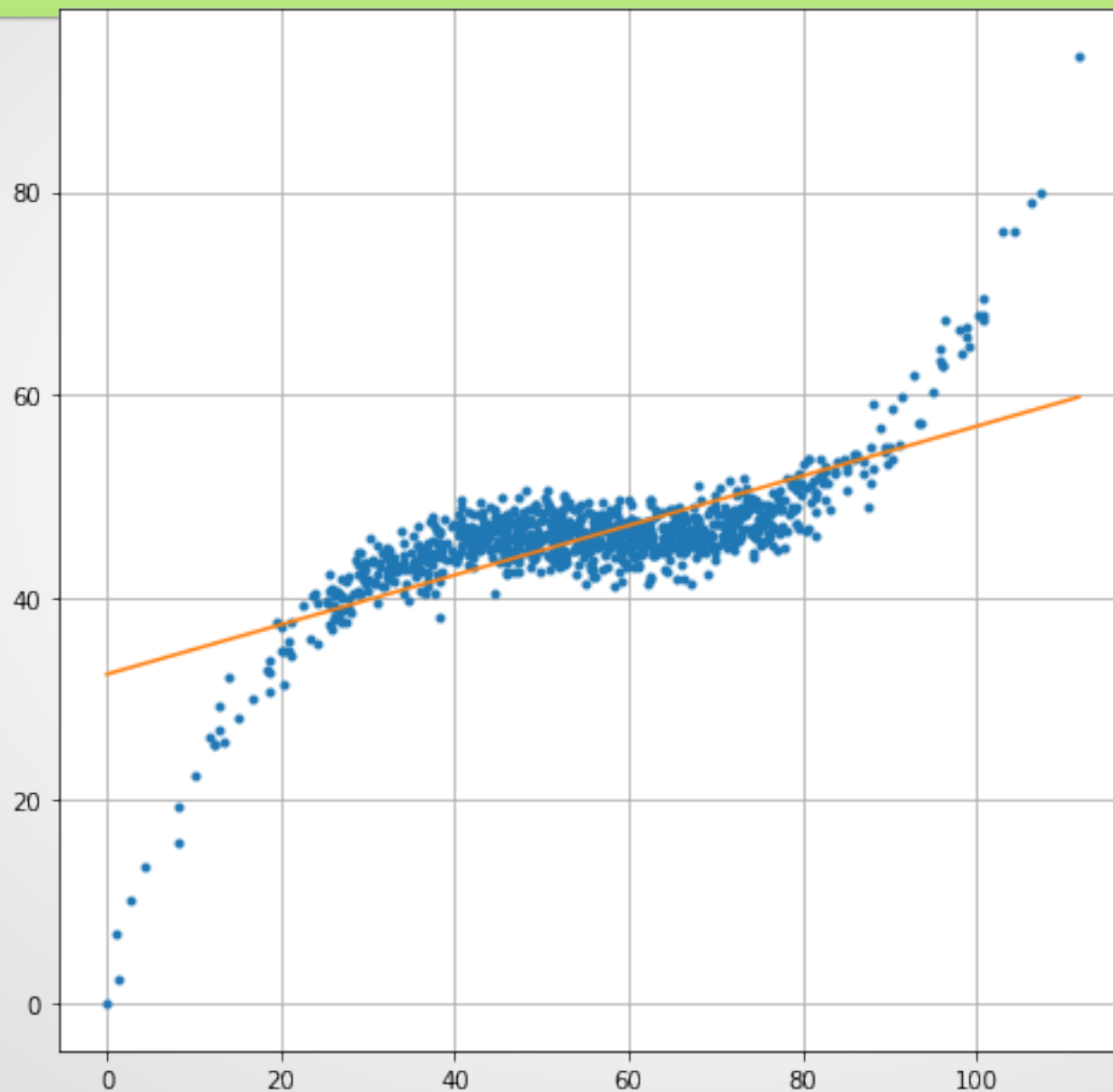
y - ответ (значение функции)

n - размер пространства признаков

m - количество примеров

θ - параметры

линейная и нелинейная регрессия



линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

$$\theta = ?$$

линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

метод наименьших квадратов:
минимизация суммы квадратов отклонений
функции от искоемых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

линейная и нелинейная регрессия

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$y = h(x, \theta) = \theta \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_n \cdot x_n$$

метод наименьших квадратов:
минимизация суммы квадратов отклонений
функции от искоемых переменных

$$\theta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

ограничения метода:

не работает для больших наборов данных

$X^T X$ может быть необратимая (вырожденная)

- строки X линейно зависимы
- признаков больше чем примеров

линейная и нелинейная регрессия

$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$ - функция ошибки

$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$ функция потерь (loss)
средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$\min_{\theta} J(\theta)$ - задача оптимизации

линейная и нелинейная регрессия

$E(\theta, x, y) = h(x, \theta) - y$ - функция ошибки

$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$ функция потерь (loss)
средняя квадратичная ошибка (MSQE)

$\min_{\theta} J(\theta)$ - задача оптимизации

метод градиентного спуска:

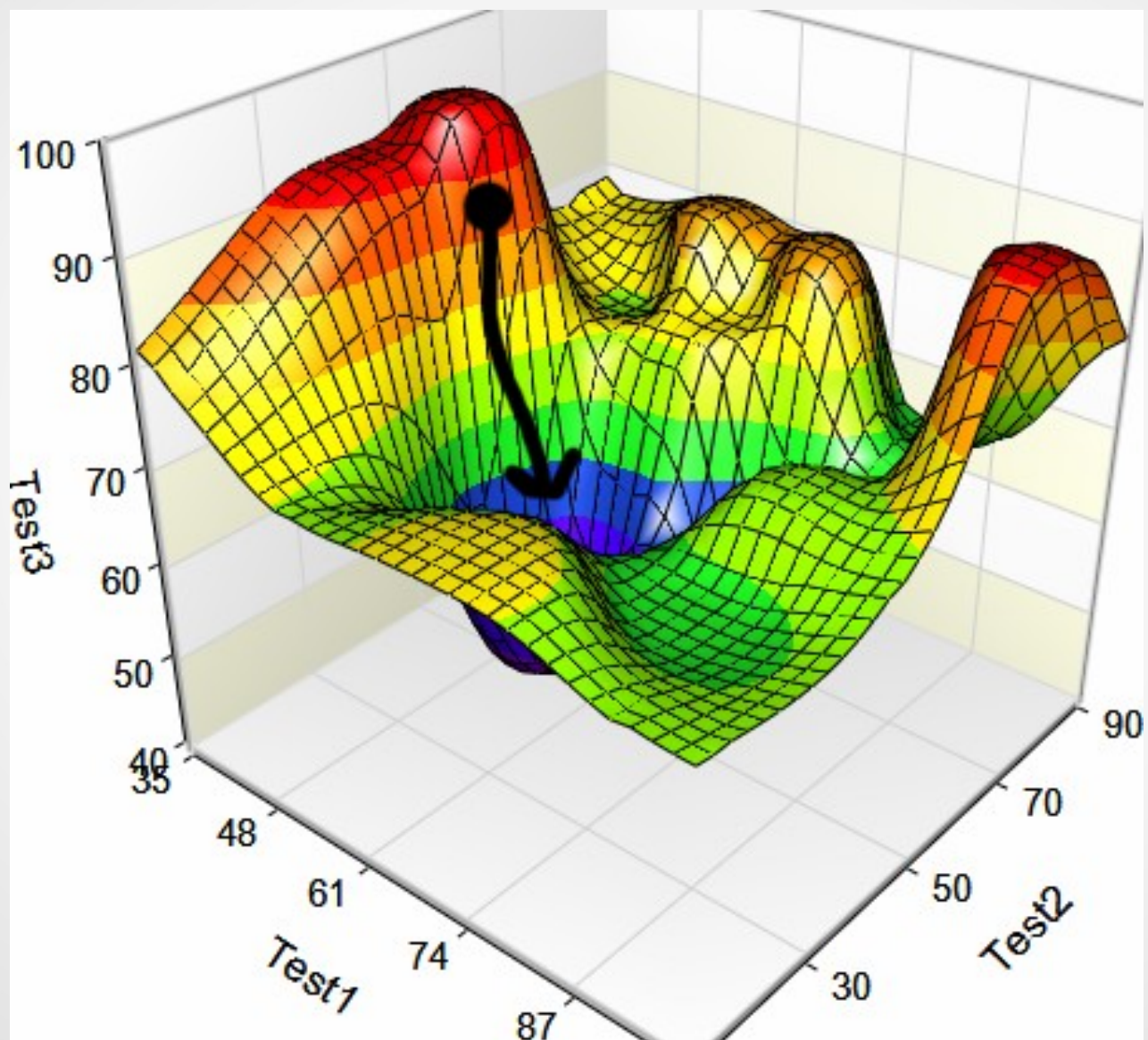
градиент функции - направление наискорейшего возрастания функции

$$\nabla J(\theta) = \left[\frac{\partial J}{\partial \theta_0}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \theta_n} \right]$$

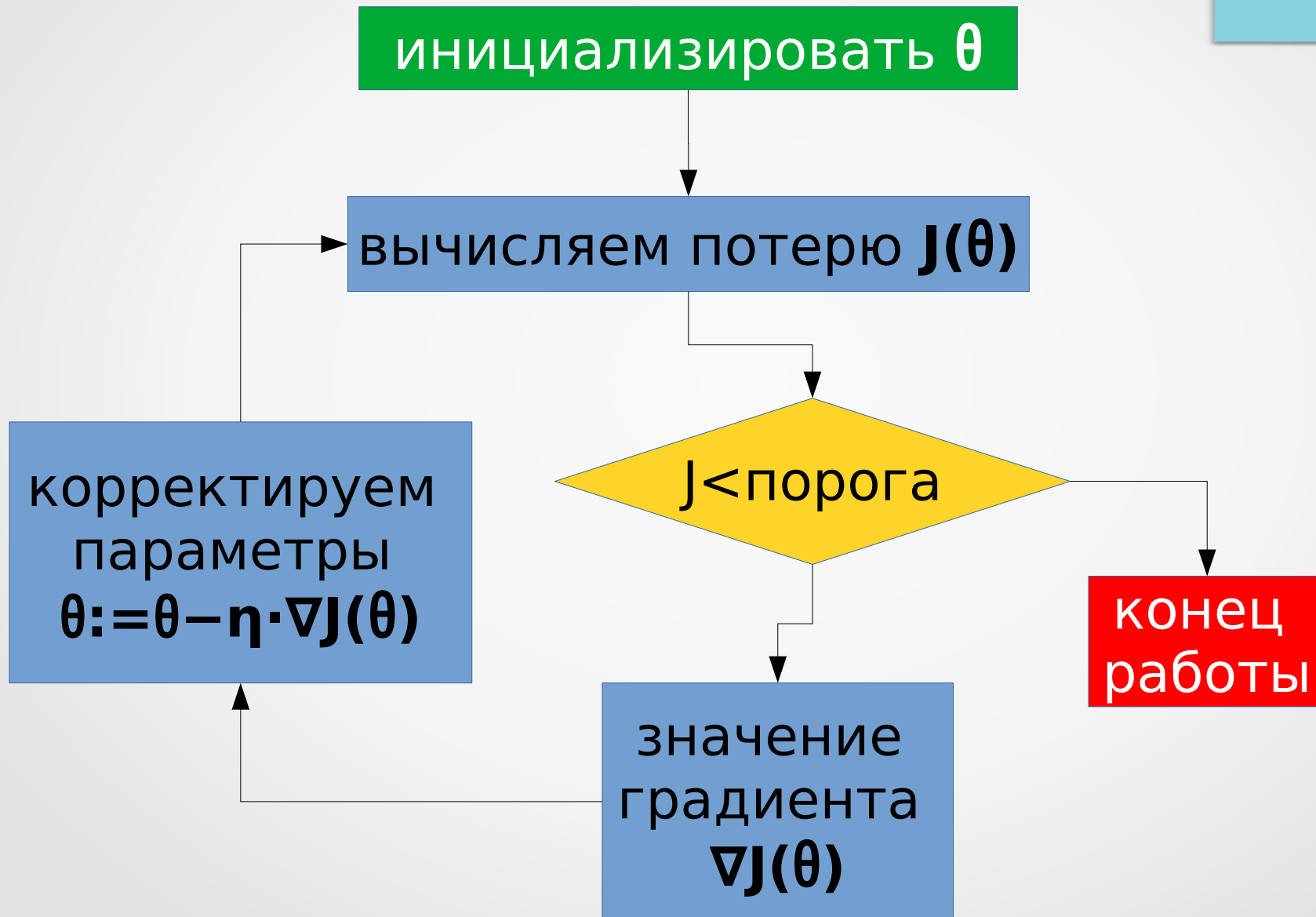
двигаем параметры в противоположную сторону

$$\theta := \theta - \alpha \cdot \nabla J(\theta)$$

линейная и нелинейная регрессия



линейная и нелинейная регрессия



линейная и нелинейная регрессия

функция потери (MSQE)

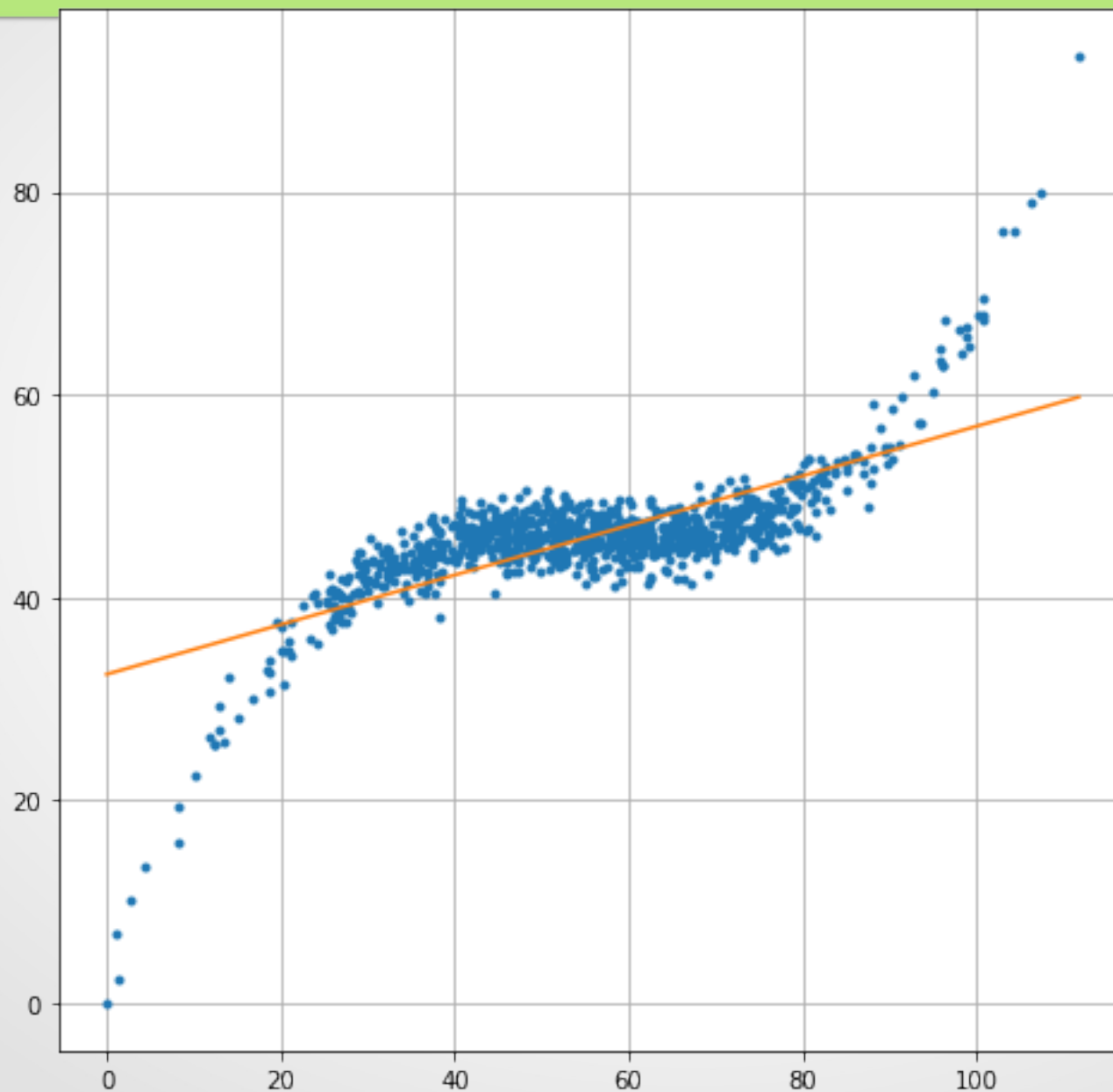
$$J(\theta) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i)^2$$

градиент и изменение весов

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_j} = \theta_j - \alpha \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m (h(x_i, \theta) - y_i) \cdot x_{ij}$$

$$\theta := \theta - \alpha \cdot X^T \cdot (h(X, \theta) - y)$$

линейная и нелинейная регрессия



линейная и нелинейная регрессия

преобразование исходных данных

увеличиваем размерность пространства

строим полином степени **k** на признаках **x**, размера **n**

пример для одномерного пространства ($n=1$) :

строим полином $k=1$

линейная: $h_{\text{lin}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$

линейная и нелинейная регрессия

преобразование исходных данных

увеличиваем размерность пространства

строим полином степени **k** на признаках **x**, размера **n**

пример для одномерного пространства ($n=1$) :

строим полином $k=1$

линейная: $h_{\text{lin}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x$

строим полином $k=3$

нелинейная: $h_{\text{nl}}(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3$

линейная и нелинейная регрессия

m примеров, размера **n**, **n+1** параметр θ

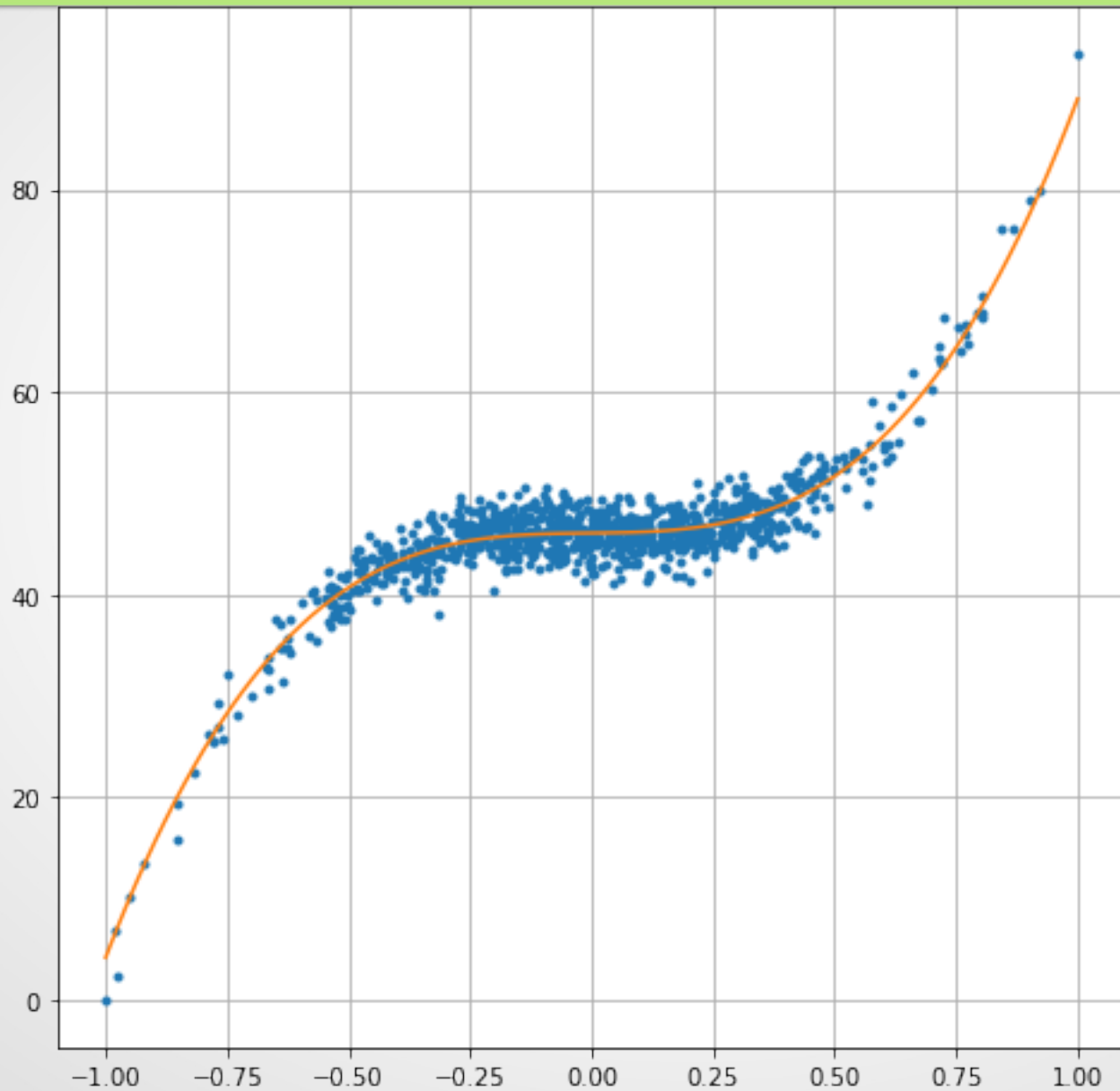
исходные данные $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$

$$h(x, \theta) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \theta_3 \cdot x_1 \cdot x_2 + \theta_4 \cdot x_1^2 + \theta_5 \cdot x_2^2$$

строим полином степени **k** на переменных **x**,

комбинируем столбцы матрицы **X**
число параметров θ увеличивается

линейная и нелинейная регрессия



Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024

https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов Машинное обучение. ШАД Яндекс

https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC