Линейные методы

Евгений Борисов

Линейные методы

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- *логические* - построить правило (комбинацию предикатов)
- *статистические* - восстановить плотность, определить вероятность
- ***линейные*** - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

Линейные методы: о задаче классификации

$X=(x, y)$ - датасет

$Y=\{-1,1\}$ - метки классов

Линейные методы: о задаче классификации

$X = (x, y)$ - датасет

$Y = \{-1, 1\}$ - метки классов

алгоритм классификации

$$a(x, w) = sign(f(x, w))$$

$f(x, w)$ - дискриминантная ф-ция

w - вектор параметров

Линейные методы: о задаче классификации

$X=(x,y)$ - датасет

$Y=\{-1,1\}$ - метки классов

разделяющая поверхность

$$f(x,w)=0$$

алгоритм классификации

$$a(x,w)=sign(f(x,w))$$

$f(x,w)$ - дискриминантная ф-ция

w - вектор параметров

Линейные методы: о задаче классификации

$X = (x, y)$ - датасет

$Y = \{-1, 1\}$ - метки классов

разделяющая поверхность

$$f(x, w) = 0$$

алгоритм классификации

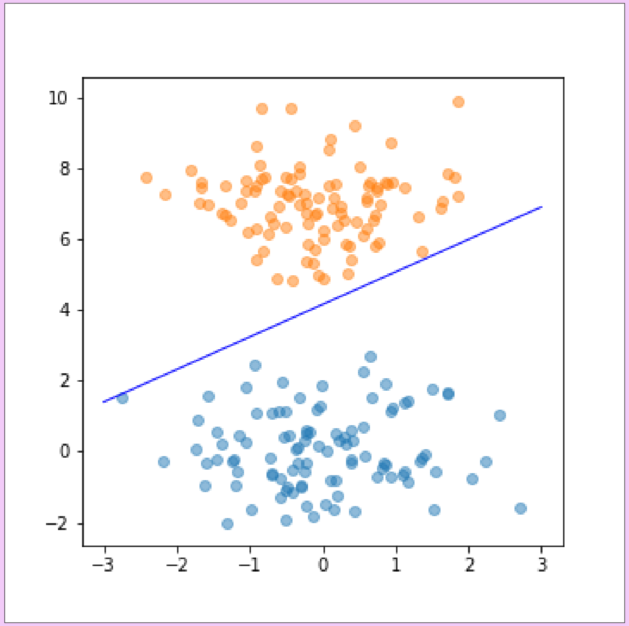
$$a(x, w) = sign(f(x, w))$$

$f(x, w)$ - дискриминантная ф-ция

w - вектор параметров

пример: линейно разделимые данные
разделяющая поверхность - прямая

$$w_1 \cdot x + w_0 = 0$$



Линейные методы: о задаче классификации

$X=(x,y)$ - датасет

$Y=\{-1,1\}$ - метки классов

разделяющая поверхность

$$f(x,w)=0$$

алгоритм классификации

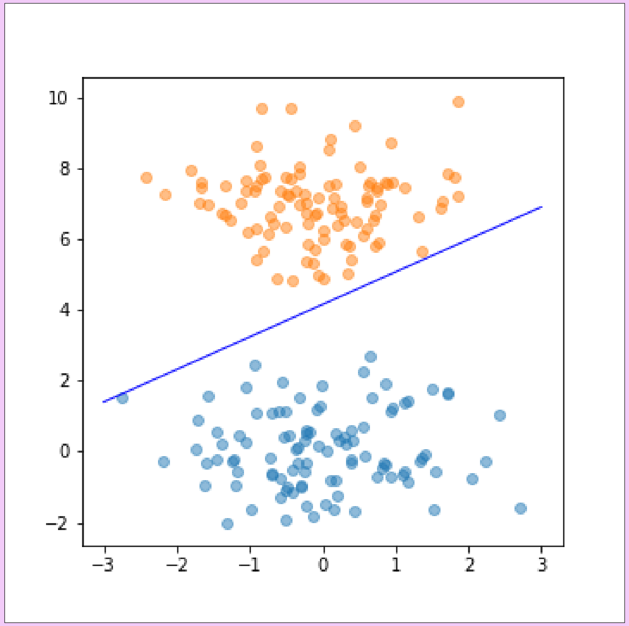
$$a(x,w)=sign(f(x,w))$$

$f(x,w)$ - дискриминантная ф-ция

w - вектор параметров

пример: линейно разделимые данные
разделяющая поверхность - прямая

$$w_1\cdot x+w_0=0$$

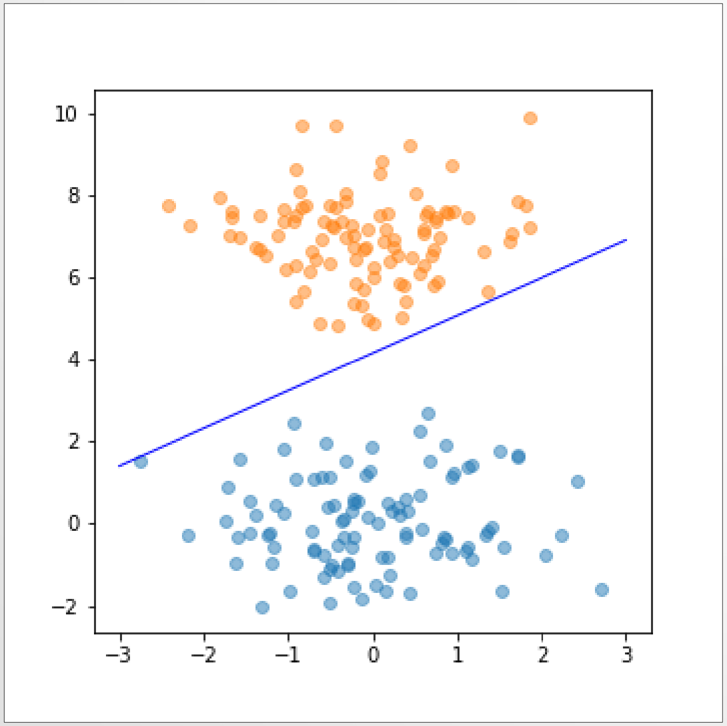


задача:
заданы данные *X,Y* и вид функции *f*
найти вектор параметров *w* ?

Линейные методы: отступы

отступ - насколько далеко объект **x** от разделяющей поверхности

$$M(x,w)=y\cdot f(x,w)$$



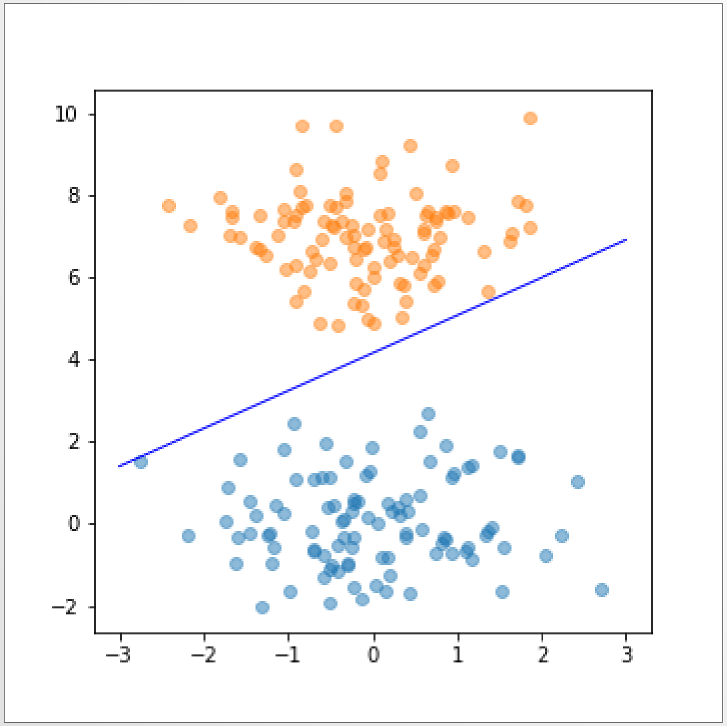
$y\in\{-1,1\}$ - метка класса

$f(x,w)$ - дискриминантная функция

Линейные методы: отступы

отступ - насколько далеко объект **x** от разделяющей поверхности

$$M(x,w) = y \cdot f(x,w)$$



$y \in \{-1, 1\}$ - метка класса

$f(x,w)$ - дискриминантная функция

$M(x,w) < 0$ - алгоритм ошибается на **x**

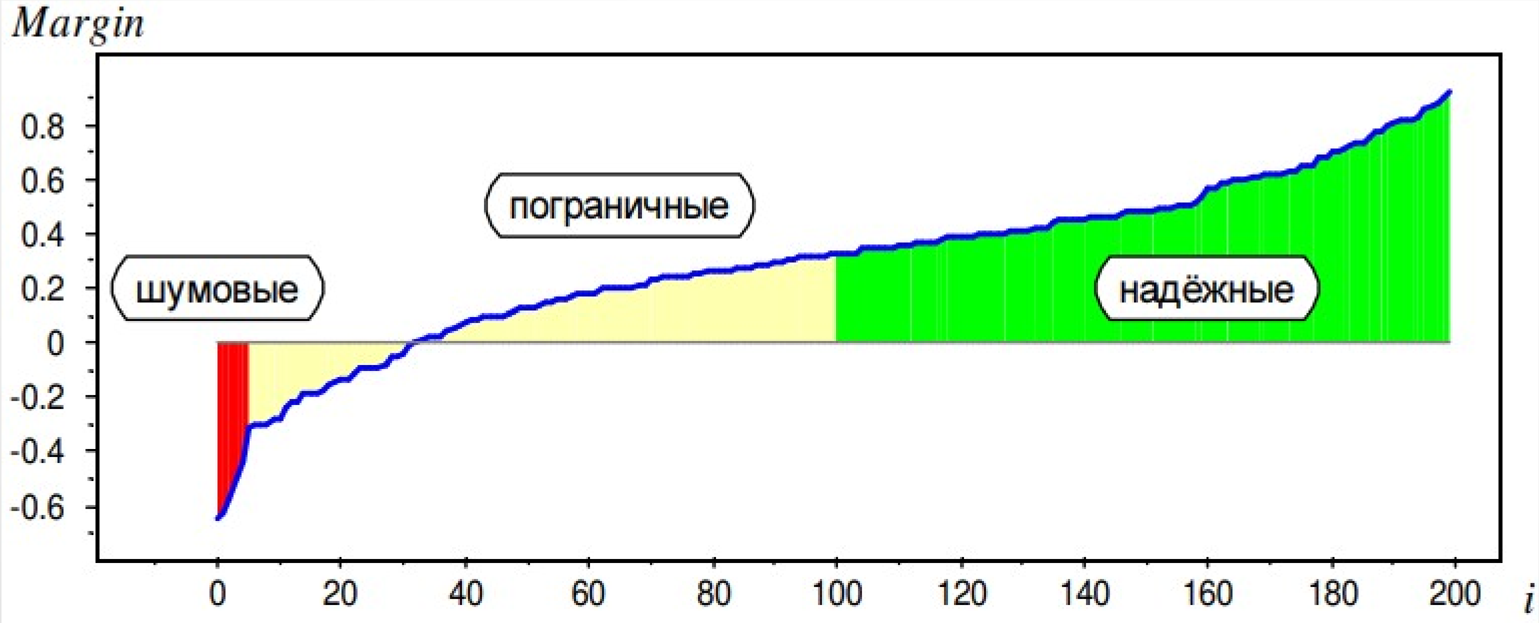
Линейные методы: отступы

отступ - насколько далеко объект от разделяющей поверхности

$$M(x,w) = y \cdot f(x,w)$$

$y \in \{-1, 1\}$ - метка класса

$f(x,w)$ - дискриминантная функция



$M(x,w) < 0$ - алгоритм ошибается на **x**

Линейные методы: эмпирический риск

функционал эмпирического риска, (число ошибок)

$$Q(x,w)=\sum_x [M(x,w)<0]$$

$M(x,w)=f(x,w)\cdot y$ - отступ объекта **x**

$y\in\{-1,1\}$ - метка класса

$f(x,w)$ - дискриминантная функция

$M(x,w)<0$ - алгоритм ошибается на **x**

Линейные методы: функция потери

функционал эмпирического риска

$$Q(x,w)=\sum_{x}[M(x,w)<0]$$

Линейные методы: функция потери

функционал эмпирического риска

$$Q(x, w) = \sum_{x} [M(x, w) < 0]$$

[M<0] это пороговая функция,

не учитываем значение отступа M,

оптимизировать не удобно,

заменим её...

Линейные методы: функция потери

функционал эмпирического риска

$$Q(x,w)=\sum_{x}[M(x,w)<0]$$

[M<0] это пороговая функция,

не учитываем значение отступа M,

оптимизировать не удобно,

заменим её...

построим аппроксимацию Q

определим **функцию потери L(M) -** невозрастающая, неотрицательная

$$\tilde{Q}(x,w)=\sum_{x}L\big(M(x,w)\big)\rightarrow min$$

$$Q(x,w)\leqslant\tilde{Q}(x,w)$$

Линейные методы

функционал эмпирического риска

$$Q(x,w)=\sum_x [M(x,w)<0]$$

[M<0] это пороговая функция, оптимизировать не удобно, заменим её...

варианты для замены [M<0]

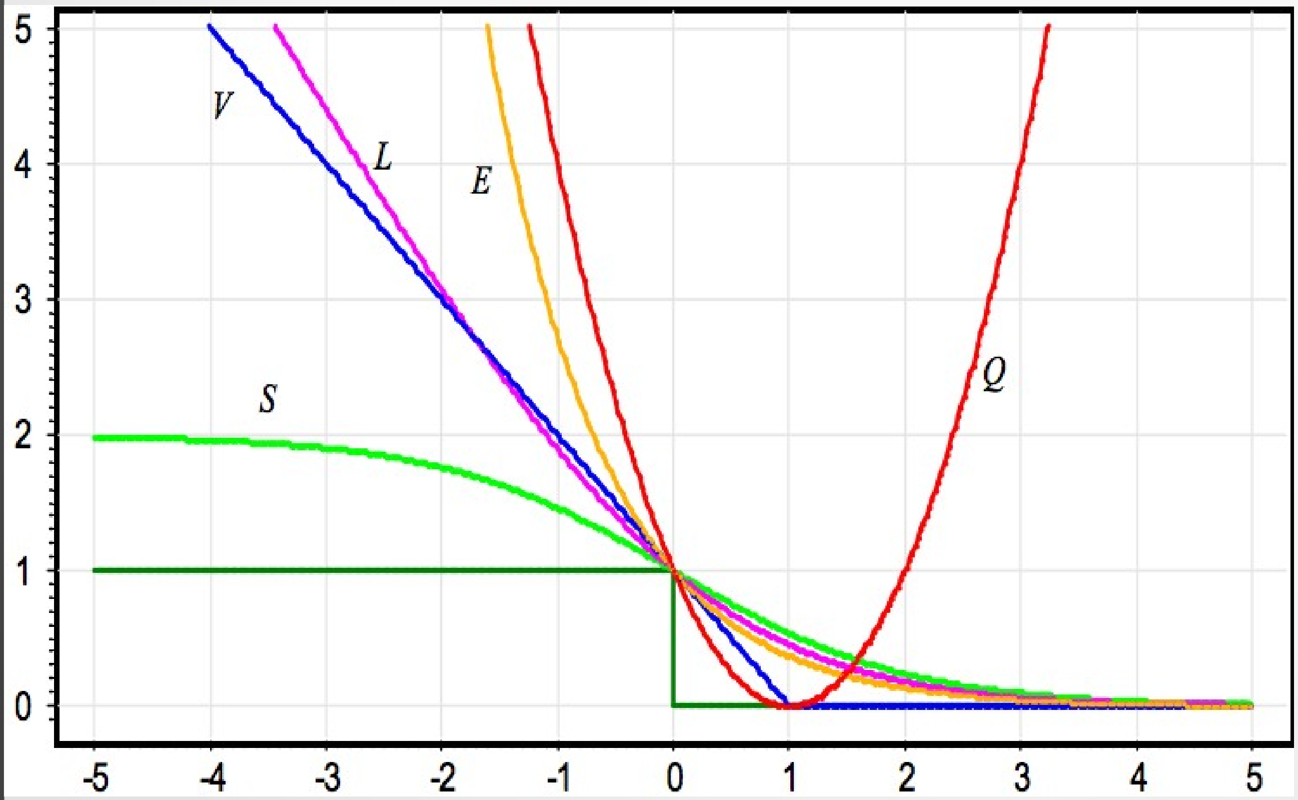
$$L(M)=\log_2\left(1+\frac{1}{\exp(M)}\right)$$ логарифмическая

$$V(M)=(1-M)_+$$ кусочно-линейная

$$Q(M)=(1-M)^2$$ квадратичная

$$E(M)=\frac{1}{\exp(M)}$$ экспоненциальная

$$S(M)=\frac{1}{2\cdot(1+\exp(M))}$$ сигмоид



Линейные методы: линейный классификатор

рассмотрим линейный классификатор,

дискриминантная функция f(x,w) это гиперплоскость

$$f(x,w)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i - w_0$$ - дискриминантная функция

$$a(x,w)=sign(f(x,w))=sign\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i - w_0\right)=sign(\langle x,w\rangle)$$

$$M(x,w)=\langle x,w\rangle \cdot y$$ - отступ на объекте **x** класса **y**

$$sign(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Линейные методы

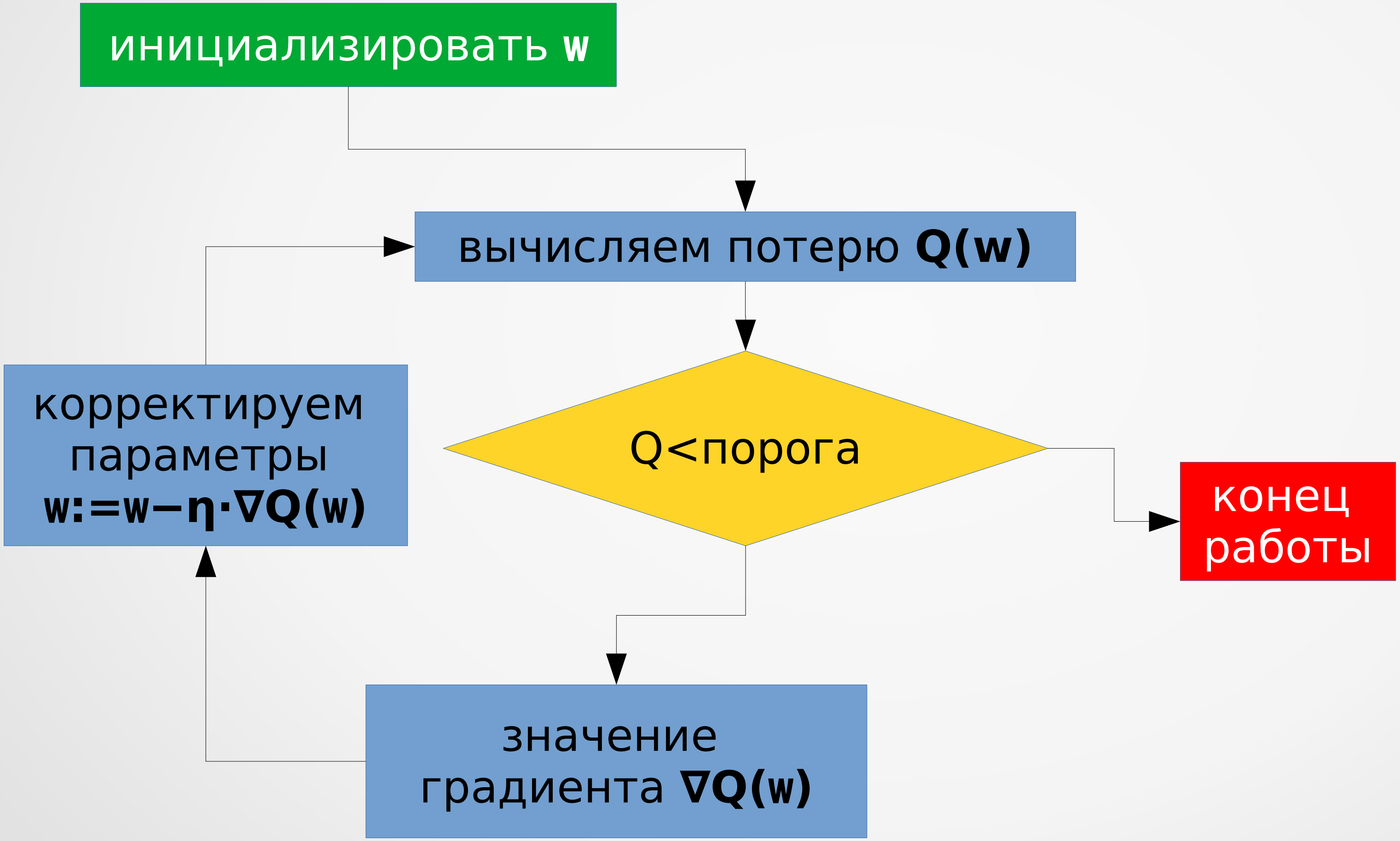
обучение классификатора как задача оптимизации

$$Q(w;X)=\sum_{x\in X} L(\langle x,w\rangle\cdot y)\to \min_{w}$$

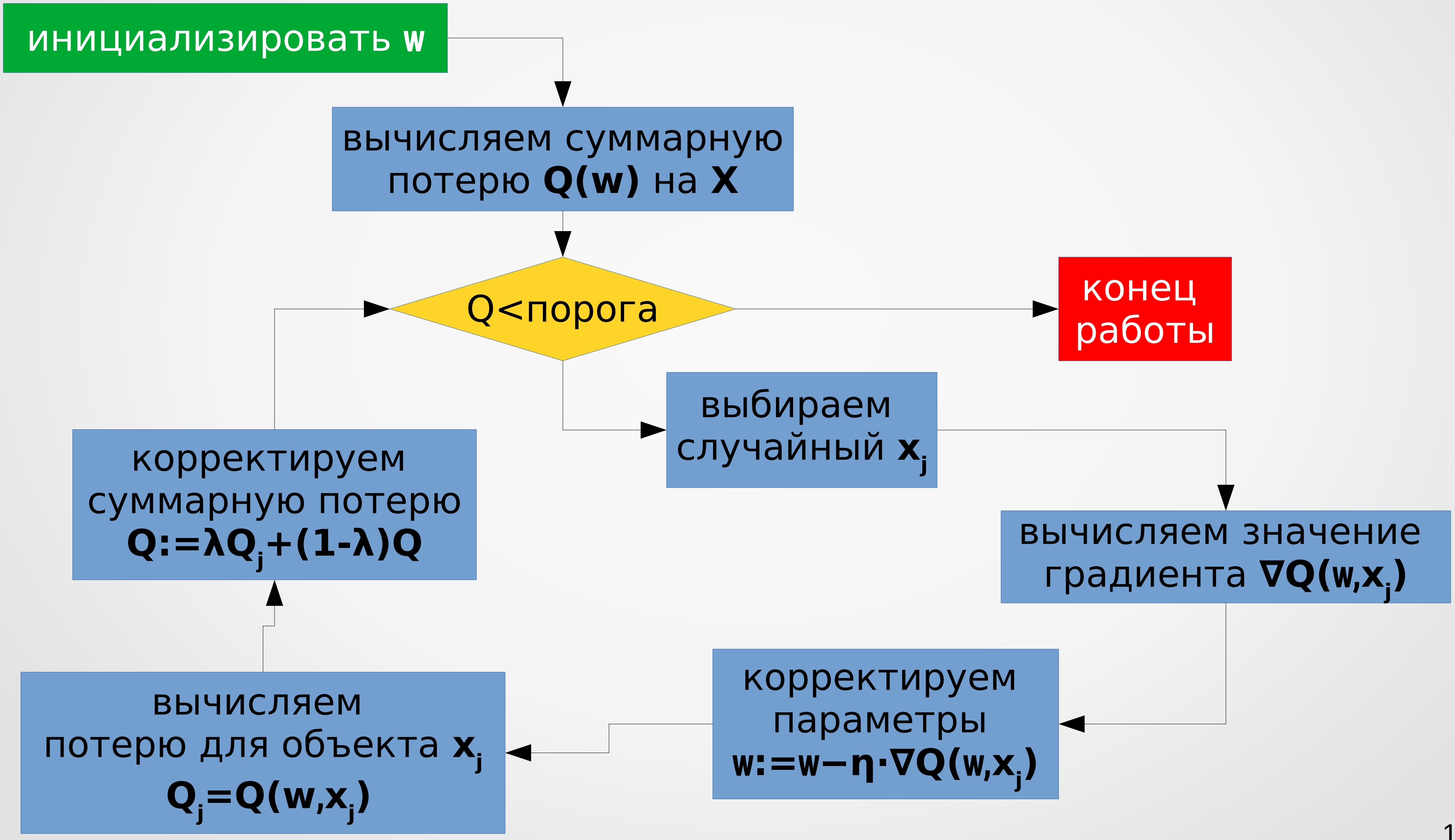
можно использовать градиентные методы

$$\nabla Q(w)=\left(\frac{\partial Q(w)}{\partial w_j}\right)_{j=0}^{n}$$ - вектор градиента ф-ции **Q**

Линейные методы: градиентный спуск (GD)



Линейные методы: стохастический градиентный спуск (SGD)



Линейные методы

«зоопарк» методов

- вид разделяющей поверхности **f(x,w)** (линейная, нелинейная)
- вид функции потерь **L(M)**
- вид метода оптимизации **Q(w) → min**

Линейные методы: итог

- линейные методы строят разделяющие поверхности в пространстве признаков
- использования нелинейных поверхностей позволяет разделять линейно неразделимые наборы
- аппроксимация пороговой ф-ции потерь позволяет использовать градиентные методы оптимизации
- метод стохастического градиента SGD подходит для обучения на больших данных

Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024
https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов   Машинное обучение. ШАД Яндекс
https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC