



Байесовский классификатор

Евгений Борисов

Байесовский классификатор

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- *логические* - построить правило (комбинацию предикатов)
- *статистические* - восстановить плотность, определить вероятность
- *линейные* - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство
с плотностью $p(x, y)$

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство
с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача: построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \rightarrow Y'$$

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство
с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача: построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \rightarrow Y'$$

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} P(y|x)$$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y) p(x|y)$$

$P(y)$ - априорная вероятность класса y

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y

$p(y|x)$ - апостериорная вероятность класса y

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$ - классификатор

$$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$$

- разбиение X на части классификатором

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$ - классификатор

$$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$$

- разбиение X на части классификатором

Ошибка: объект x класса y попал в класс s

$A_s, s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \rightarrow Y'$ - классификатор

$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$ - разбиение X на части

Ошибка: объект x класса y попал в класс s

$A_s, s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Вероятность ошибки $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

Вероятность ошибки $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - потеря от ошибки

$$\lambda_{ys} > 0, ys \in Y \times Y$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

Вероятность ошибки $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y) dx$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - потеря от ошибки

$$\lambda_{ys} > 0; y, s \in Y$$

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Байесовский классификатор

Средний риск: мат. ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска $R(a)$ достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска $R(a)$ достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Дополнение:

если $\lambda_{yy} = 0$; $\lambda_y \equiv \lambda_{ys}$

то $a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} P(y|x)$$

формула Байеса :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - доля примеров класса y (априорная вероятность)

$p(x|y)$ - плотность класса y

Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024

https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов - Машинное обучение. ШАД Яндекс

https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC

SciKit-Learn : Naive Bayes

https://scikit-learn.org/stable/modules/naive_bayes.html