Байесовский классификатор

Евгений Борисов

Байесовский классификатор

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- ***<u>статистические</u>*** - восстановить плотность, определить вероятность
- *логические* - построить правило (комбинацию предикатов)
- *линейные* - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\Omega, A, P)$$

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$\mathbf{(\Omega, A, P)}$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{A}, \mathbf{P})$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

A - случайные события, набор подмножеств **Ω**.

A ∋ Ω - достоверное событие

A ∋ ∅ - невозможное событие

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\Omega, A, P)$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

A - случайные события, набор подмножеств **Ω**.

A ∋ Ω - достоверное событие

A ∋ ∅ - невозможное событие

P - функция вероятности $P: A \longrightarrow [0,1]$

$0 \leqslant P(a) \leqslant 1$ вероятность события **a** из **A**

$P(\varnothing)=0$; $P(\Omega)=1$

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\Omega, A, P)$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

A - случайные события, набор подмножеств **Ω**.

A ∋ Ω - достоверное событие

A ∋ ∅ - невозможное событие

P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**

0 ⩽ P(a) ⩽ 1 вероятность события **a** из **A**

P(∅**)=0** ; **P(Ω)=1**

Случайная величина в пространстве **(Ω,A,P)** это числовая функция

$$X: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

может быть интерпретирована как некоторое измерение объектов ***Ω***

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\Omega, A, P)$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

A - случайные события, набор подмножеств **Ω**.

A ∋ Ω - достоверное событие

A ∋ ∅ - невозможное событие

P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**

0 ⩽ P(a) ⩽ 1 вероятность события **a** из **A**

P(∅**)=0** ; **P(Ω)=1**

Случайная величина в пространстве **(Ω,A,P)** это числовая функция

$$X: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

типы случайных величин:

дискретные (discrete) - принимающая конечное или счетное число значений
(*Пример*: *частота слов в тексте, количество детей в семье*)

непрерывные (continuous) - принимают значение в определённом интервале
(*Пример*: *рост людей*)

Байесовский классификатор

<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**

случайная величина **X** задаётся распределением вероятностей **F** своих значений

$$\mathbf{F(x) = P(\, X \leqslant x \,)}$$

Байесовский классификатор

<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**

случайная величина **X** задаётся распределением вероятностей **F** своих значений

F(x) = P(X ⩽ x)

Рассмотрим интервалы **(x,x+Δx)**, где **Δx** - бесконечно малые приращения **x** для **F(x)**

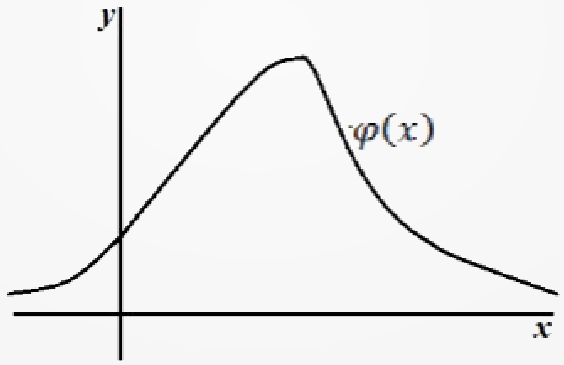
$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Плотностью распределения (вероятности) **φ(x)** непрерывной случайной величины **X** назовём первую производную функции распределения **F(x)**

Байесовский классификатор

<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶** ℝ
F(x)=P(X⩽x) - распределение вероятностей **P**
φ(x)=F`(x) - плотность распределения **F**

график функции **φ(x)**
плотности распределения **X**



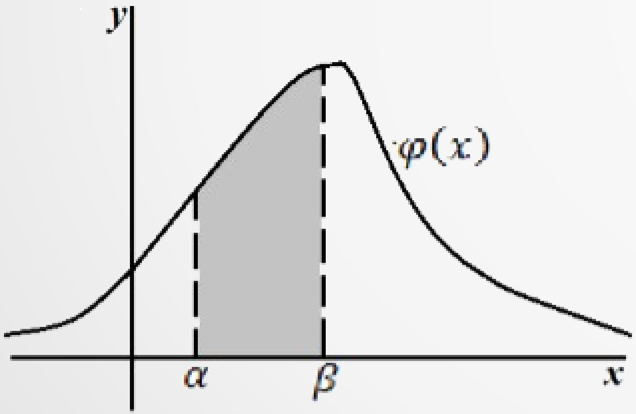
https://spravochnick.ru/matematika/plotnost_raspredeleniya_veroyatnostey_nepreryvnoy_sluchaynoy_velichiny/

Байесовский классификатор

Вероятностное пространство **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶** ℝ
F(x)=P(X⩽x) - распределение вероятностей **P**
φ(x)=F`(x) - плотность распределения **F**

график функции **φ(x)**
плотности распределения **X**

площадь криволинейной трапеции,
ограниченной графиком **φ(x)** и прямыми **x=a, x=b, y=0**
это вероятность **P(a⩽X⩽b)** попадания **X** в интервал **[a,b]**



$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

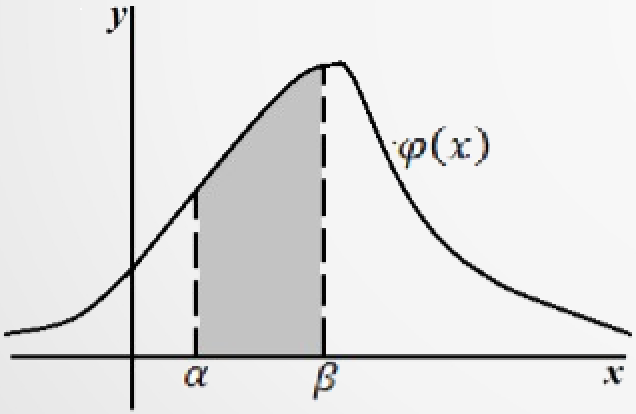
https://spravochnick.ru/matematika/plotnost_raspredeleniya_veroyatnostey_nepreryvnoy_sluchaynoy_velichiny/

Байесовский классификатор

<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**
F(x)=P(X⩽x) - распределение вероятностей **P**
φ(x)=F`(x) - плотность распределения **F**

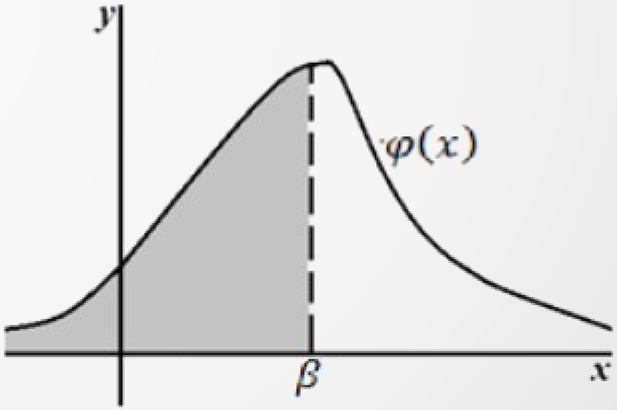
график функции **φ(x)**
плотности распределения **X**

площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)** и прямыми **x=a, x=b, y=0** это вероятность **P(a⩽X⩽b)** попадания **X** в интервал **[a,b]**



$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)**, прямой **x=b, y=0** это функция распределения **F(b)=P(X⩽b)**

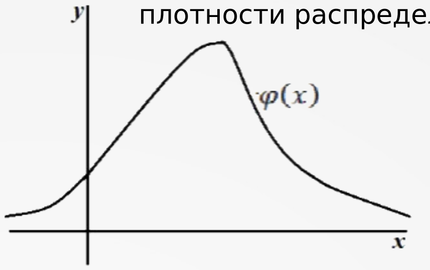


$$F(\beta) = P(X \leqslant \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

Байесовский классификатор

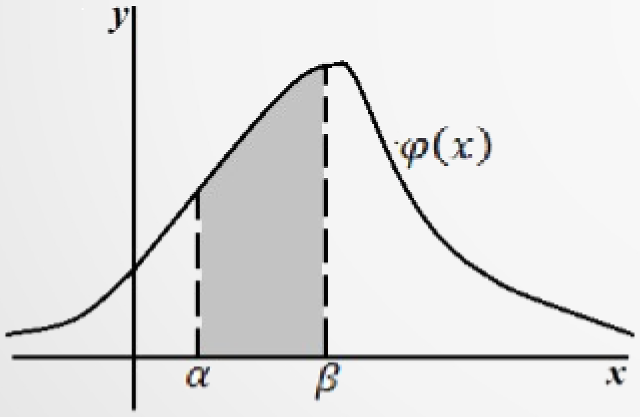
<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**
F(x)=P(X⩽x) - распределение вероятностей **P**
φ(x)=F`(x) - плотность распределения **F**

график функции **φ(x)**
плотности распределения **X**



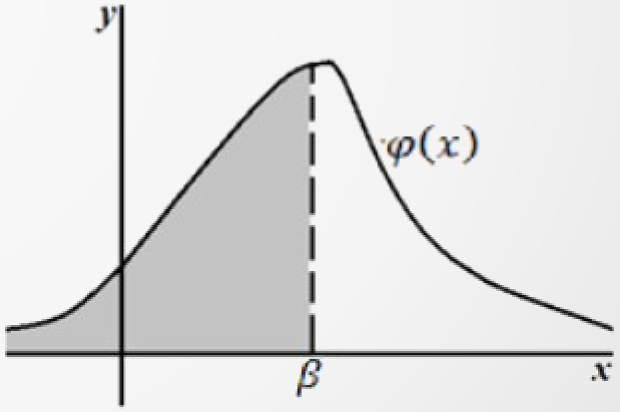
$$P(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$$

площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)** и прямыми **x=a, x=b, y=0** это вероятность **P(a⩽X⩽b)** попадания **X** в интервал **[a,b]**



$$P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx$$

площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)**, прямой **x=b, y=0** это функция распределения **F(b)=P(X⩽b)**



$$F(\beta)=P(X\leqslant\beta)=\int_{-\infty}^{\beta}\varphi(x)\,dx$$

https://spravochnick.ru/matematika/plotnost_raspredeleniya_veroyatnostey_nepreryvnoy_sluchaynoy_velichiny/

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

Байесовский классификатор

X - объекты,   Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача**:** построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a : X' \to Y'$$

Байесовский классификатор

X - объекты, Y - метки классов

$X \times Y$ - вероятностное пространство с плотностью $p(x, y)$

выборка: $(X' \times Y') \subset (X \times Y)$

Задача**:** построить классификатор с минимальной ошибкой

$$a: X' \rightarrow Y'$$

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}}\, P(y|x)$$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y)\, p(x|y)$$

$P(y)$ - априорная вероятность класса y

$p(x|y)$ - ф-ция правдоподобия класса y

$P(y|x)$ - апостериорная вероятность класса y

формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(A)\, P(B|A)}{P(B)}$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \to Y'$ - классификатор

$$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\}, y \in Y$$

- разбиение X на части классификатором

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \to Y'$ - классификатор

$$A_y = \{x \in X \mid a(x) = y\},\ y \in Y$$

- разбиение X на части классификатором

Ошибка: объект x класса y попал в класс s

$A_s, s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

$a: X' \to Y'$ - классификатор

$A_y = \{x \in X | a(x) = y\}, y \in Y$ - разбиение X на части

Ошибка: объект *x* класса *y* попал в класс *s*

$A_s, s \neq y$ - множество ошибочно классифицированных

Вероятность ошибки $P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y)\,dx$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

Вероятность ошибки $$P(A_s, y) = \int\limits_{A_s} p(x, y)\, dx$$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - <u>потеря от ошибки</u>

$$\lambda_{ys} > 0,\ ys \in Y \times Y$$

Байесовский классификатор

о функционале среднего риска

Вероятность ошибки $$P(A_s, y) = \int_{A_s} p(x, y)\,dx$$

где $p(x, y)$ - плотность вероятностного пространства

Определим константы для каждого класса - <u>потеря от ошибки</u>

$$\lambda_{ys} > 0\,;\, y, s \in Y$$

Средний риск: мат.ожидание потери классификатора

$$R(a) = \sum_{y \in Y} \sum_{s \in Y} \lambda_{ys} P(A_s, y)$$

Байесовский классификатор

Средний риск: мат. ожидание потери классификатора

$$R(a)=\sum_{y\in Y}\sum_{s\in Y}\lambda_{ys}P(A_s, y)$$

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys}>0$

тогда минимум среднего риска *R(a)* достигается классификатором

$$a(x)=\underset{s\in Y}{argmin}\sum_{y\in Y}\lambda_{ys}P(y)p(x|y)$$

Байесовский классификатор

Теорема про оптимальный байесовский классификатор

пусть заданы:

- априорные вероятности классов $P(y)$
- плотности их распределений $p(x, y)$
- потери от ошибки $\lambda_{ys} > 0$

тогда минимум среднего риска *R(a)* достигается классификатором

$$a(x) = \underset{s \in Y}{argmin} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P(y) p(x|y)$$

Дополнение:

если $\lambda_{yy} = 0; \lambda_y \equiv \lambda_{ys}$

то $a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x)=\underset{y\in Y}{\arg\max}\, P(y|x)$$

формула Байеса

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

байесовский классификатор

$$a(x)=\underset{y\in Y}{\arg\max}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - доля примеров класса y (априорная вероятность)

$p(x|y)$ - плотность класса y

Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024
https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов - Машинное обучение. ШАД Яндекс
https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC

SciKit-Learn : Naive Bayes
https://scikit-learn.org/stable/modules/naive_bayes.html