Логические методы

Евгений Борисов

логические методы

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- *статистические - восстановить плотность, определить вероятность*
- ***логические*** - построить правило (комбинацию предикатов)
- *линейные* - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

логические методы

моделируем логику человеческих решений

интерпретируемость

логические методы

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая формула от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

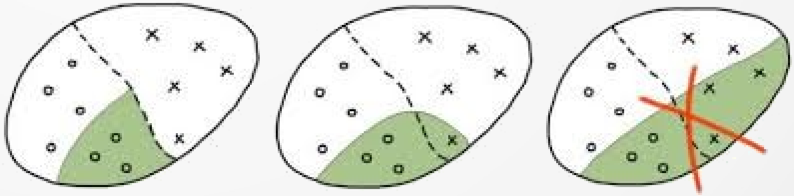
логические методы

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая формула от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса



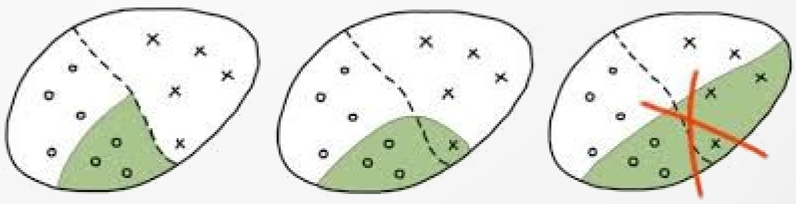
логические методы

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса



- **идея**: покрыть весь датасет предикатами, получим классификатор

логические методы

закономерность - набор правил (предикатов)

- конъюнкция $R(x) = \bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x) = \left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d\right]$
- полуплоскость $R(x) = \left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geqslant w_0\right]$
- шар $R(x) = [\rho(x_0, x) \leqslant w_0]$

логические методы

закономерность - набор правил (предикатов)

- конъюнкция $R(x) = \bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x) = \left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d \right]$
- полуплоскость $R(x) = \left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geqslant w_0 \right]$
- шар $R(x) = [\rho(x_0, x) \leqslant w_0]$

задача: нужно отбирать «хорошие» закономерности

вопрос: как оценивать закономерности?

логические методы

закономерность - набор правил (предикатов)

- конъюнкция $R(x)=\bigwedge_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x)=\left[\sum_i [a_i \leqslant f_i(x) < b_i] > d\right]$
- полуплоскость $R(x)=\left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geqslant w_0\right]$
- шар $R(x)=\left[\rho(x_0, x) \leqslant w_0\right]$

задача: нужно отбирать «хорошие» закономерности

вопрос: как оценивать закономерности?

введём понятие информативности

логические методы

энтропийный критерий информативности

два исхода с вероятностями q и 1−q

количество информации: $I_1 = -\log_2(q); I_0 = -\log_2(1-q)$

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

логические методы

энтропийный критерий информативности

два исхода с вероятностями q и 1−q

количество информации: $I_1 = -\log_2(q); I_0 = -\log_2(1-q)$

энтропия - математическое ожидание количества информации $h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса *y*)

$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

логические методы

энтропийный критерий информативности

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса *y*)

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

предикат **R** выделил объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

энтропия выборки
после получения информации **R**

$$H(y|R) = \frac{(p+n)}{S} \cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right) + \frac{s-p-n}{S} \cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

логические методы

энтропийный критерий информативности

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса *y*)

$$H(y)=h\left(\frac{P}{S}\right)$$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

предикат **R** выделил объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

энтропия выборки
после получения информации **R**

$$H(y|R)=\frac{(p+n)}{S}\cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right)+\frac{s-p-n}{S}\cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

информационный выигрыш (Information gain)

$$iGain(y,R)=H(y)-H(y|R)$$

логические методы

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки?
  <u>не наука, но творчество</u>

- какого вида закономерности нужны?
  <u>простые, малое количество признаков</u>

- как определить информативность?
  <u>iGain, и др.</u>

- как искать закономерности?
  <u>ограниченный перебор (rule induction)</u>

- как объединить закономерности в алгоритм?

логические методы

как объединить закономерности в алгоритм:

решающее дерево

рекурсивное разделение данных на две части

строим простой предикат -
ищем признак **i** и порог **b** для него

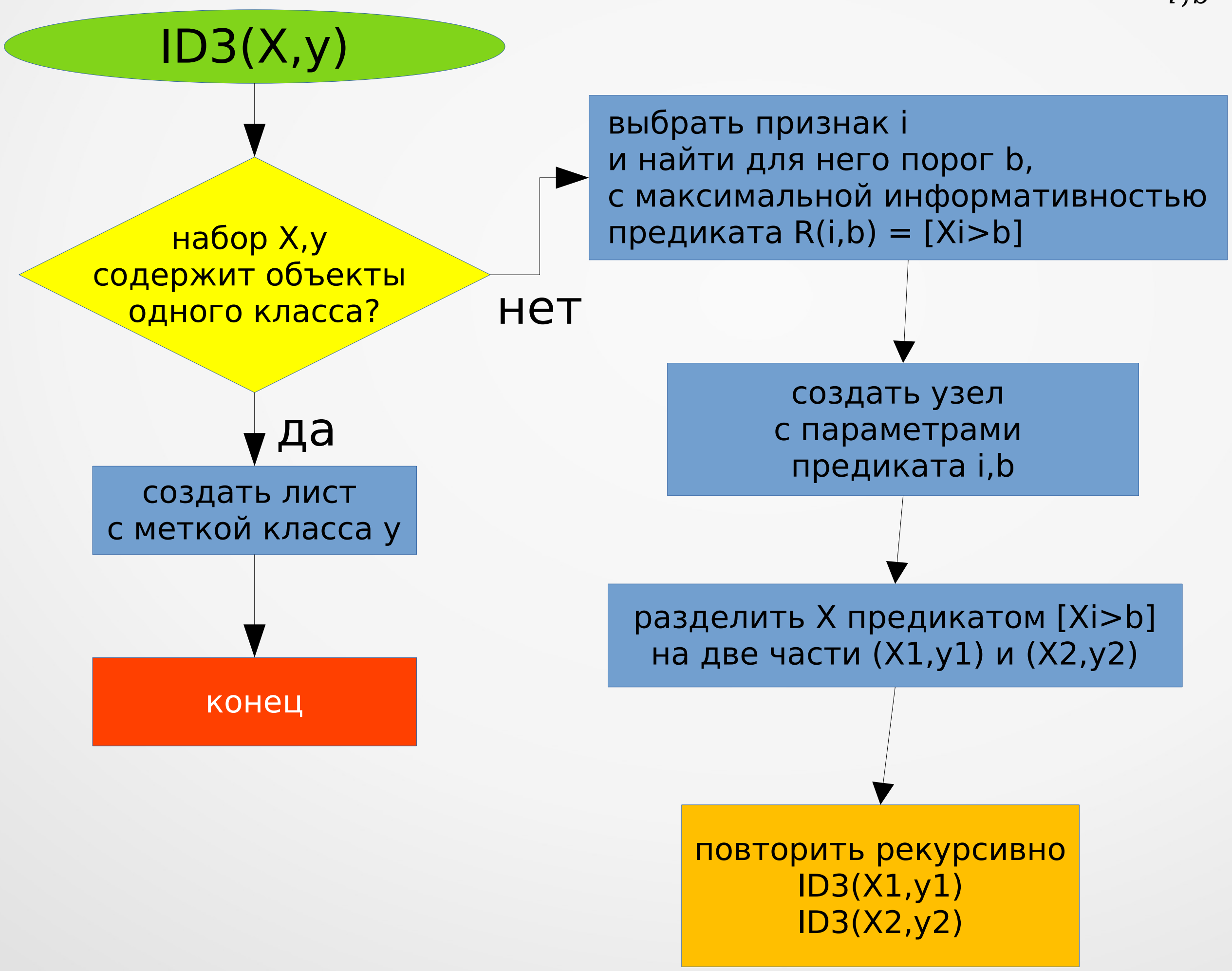
максимизируем информативность

$$\max_{i,b}\left(iGain\left(y,[X_i>b]\right)\right)$$

логические методы

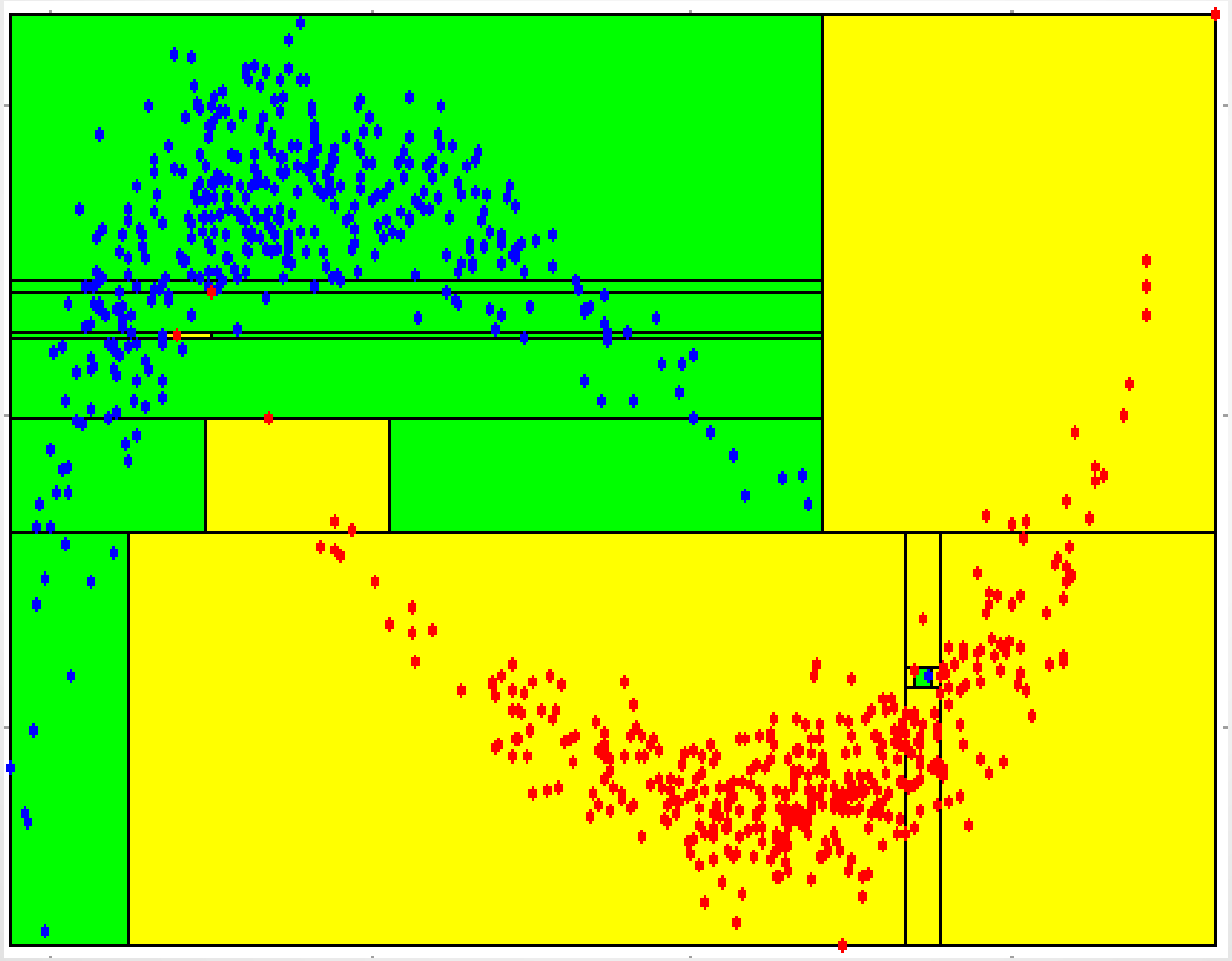
как объединить закономерности в алгоритм:
решающее дерево, алгоритм ID3

$$\max_{i,b}\left(iGain\left(y,[X_i>b]\right)\right)$$



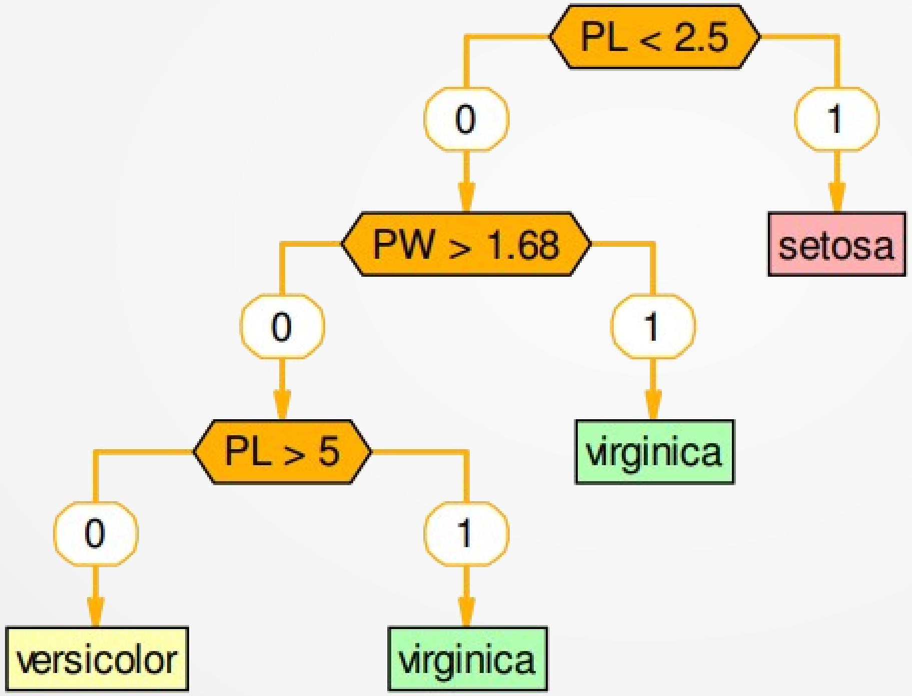
логические методы

разделение набора объектов решающим деревом



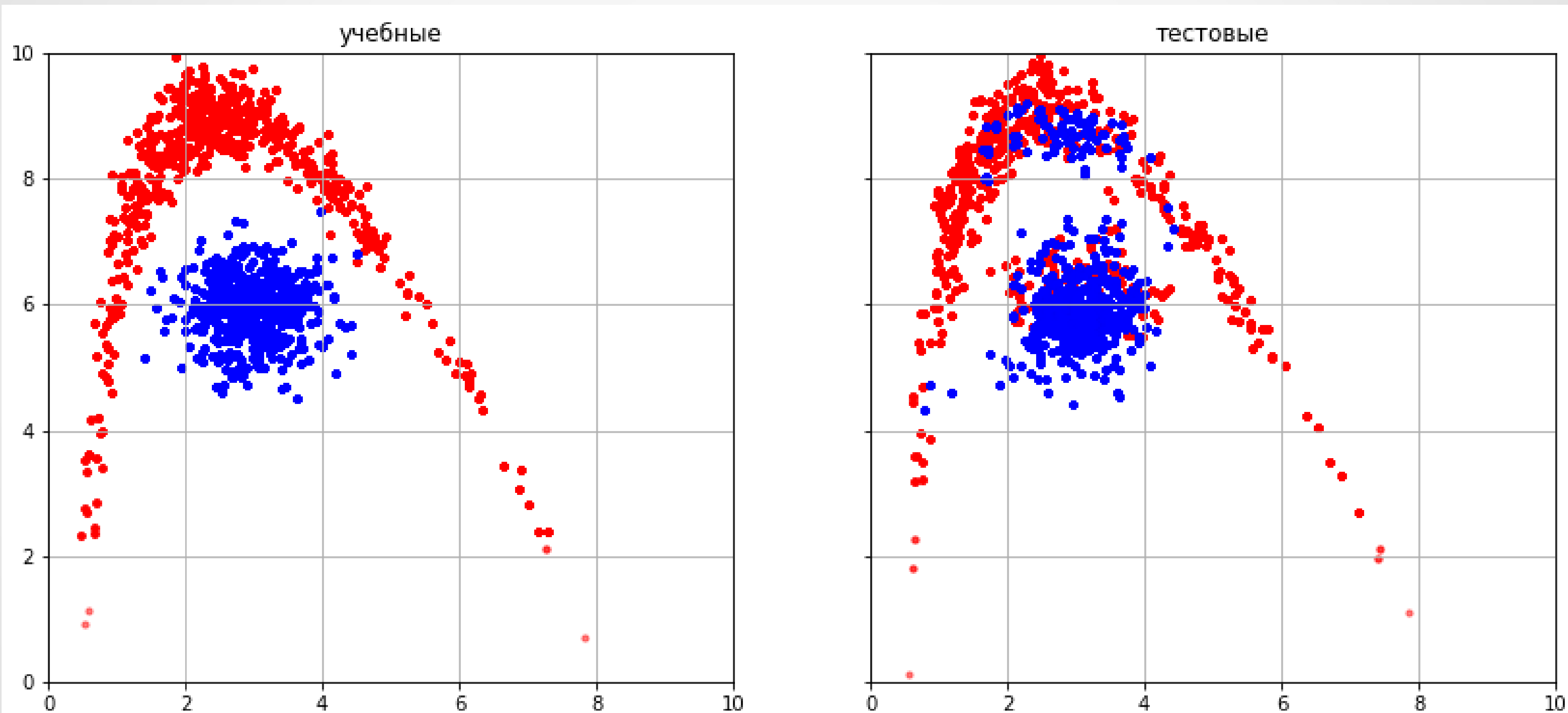
логические методы

пример дерева для набора iris



логические методы

результат работы решающего дерева



на учебном наборе - 100% точность

на тесте - переобучение

логические методы

решающее дерево

достоинство: интерпретируемость результата

недостаток: переобучение, неустойчивы к шуму

pruning - обрезка решающего дерева

pre-pruning – критерий раннего останова.
если информативность меньше порога или глубина велика
то прекращаем ветвление

post-pruning – пост-редукция.
просматриваем все внутренние вершины дерева
проверяем их качество на тестовой выборке,
заменяем листом, где качество после разделения ухудшается

логические методы

регрессия-задача восстановления зависимости

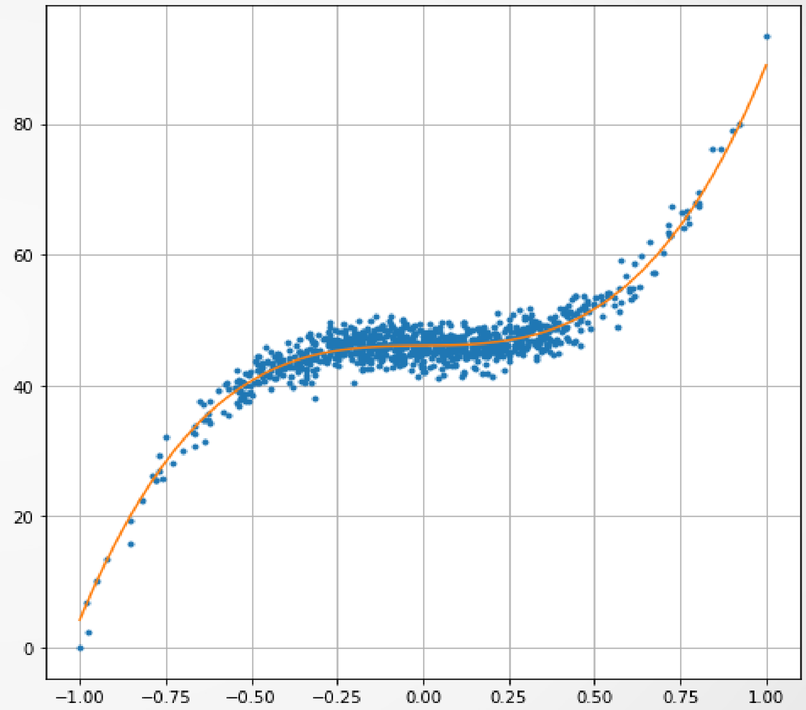
$$y=\varphi(x;\theta)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ - аргументы
$y \in \mathbb{R}$ - значения функции
θ - параметры функции

датасет

$$L=(X,Y)$$

$$X \subset \mathbb{R}^n \quad Y \subset \mathbb{R}$$



Задача: по данным L определить $\hat{\varphi}(x;\hat{\theta})$ максимально близкую к $\varphi(x;\theta)$

логические методы

Решение задачи регресии — модификация ID3

На каждом шаге для выбора оптимальногой гиперплоскости **Xj=b**

Вместо критерия информативности используем дисперсию значений функции **D(y)**

$$D = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}(y_i - \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell} y_i)^2,$$

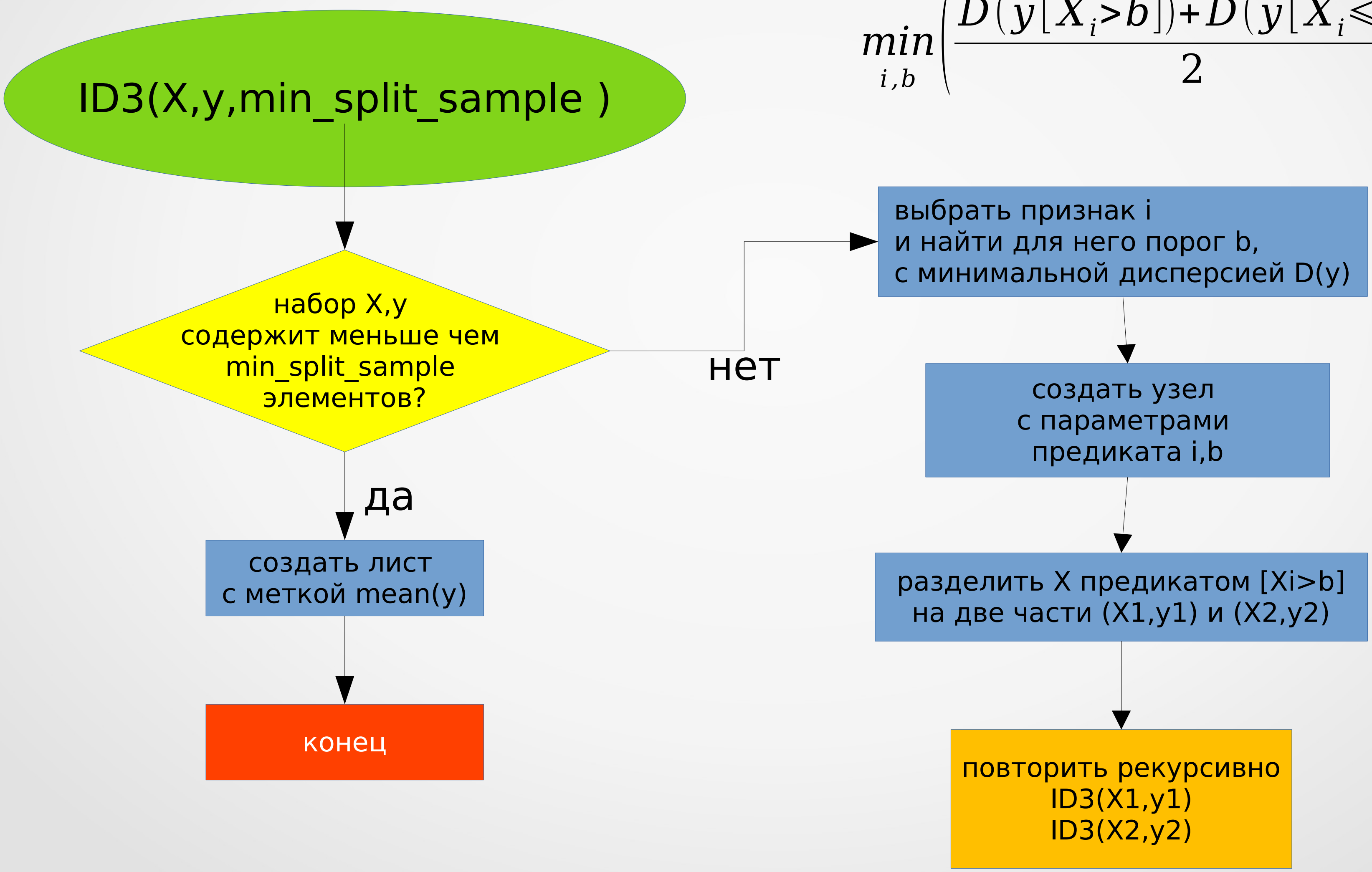
т. е. подбираем признак **Xj** и порог его значений **b**, который бы минимизировал дисперсию **D** значений **y** в разбиении **Xj>b**

в итоге значения **y** в каждом листе будут примерно равны.

логические методы

решающее дерево, алгоритм ID3 для регресии

$$\min_{i,b}\left(\frac{D(y[X_i>b])+D(y[X_i\leqslant b])}{2}\right)$$



Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024
https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов   Машинное обучение. ШАД Яндекс
https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC

SciKit-Learn : Decision Trees
https://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html