



Логические методы

Евгений Борисов

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

методы ML

- *метрические* – измеряем расстояния, определить ближайших
- *статистические* - *восстановить плотность, определить вероятность*
- *логические* - построить правило (комбинацию предикатов)
- *линейные* - построить разделяющую поверхность
- *композиции* - собрать несколько классификаторов в один

логические методы

моделируем логику человеческих решений

интерпретируемость

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая формула от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

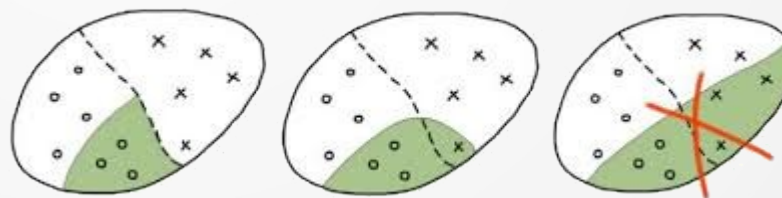
ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая формула от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса



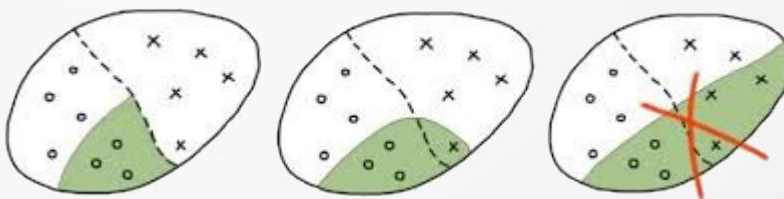
ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

предикат - «простое» правило для выделения объектов

- предикат может быть описан естественным языком
- простая от небольшого числа признаков

$$(x_1 > 10) \wedge (x_2 < 3) \vee \neg x_3$$

- должен быть информативен, т.е. выделяет некоторое количество объектов одного класса



- **идея:** покрыть весь датасет предикатами, получим классификатор

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

закономерность - набор правил (предикатов)

- конъюнкция $R(x) = \bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x) = \left[\sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d \right]$
- полуплоскость $R(x) = \left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geq w_0 \right]$
- шар $R(x) = [\rho(x_0, x) \leq w_0]$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

закономерность - набор правил (предикатов)

- КОНЪЮНКЦИЯ $R(x) = \bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x) = \left[\sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d \right]$
- полуплоскость $R(x) = \left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geq w_0 \right]$
- шар $R(x) = [\rho(x_0, x) \leq w_0]$

задача: нужно отбирать «хорошие» закономерности

вопрос: как оценивать закономерности?

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

закономерность - набор правил (предикатов)

- КОНЪЮНКЦИЯ $R(x) = \bigwedge_i [a_i \leq f_i(x) < b_i]$
- синдром $R(x) = \left[\sum_i [a_i \leq f_i(x) < b_i] > d \right]$
- полуплоскость $R(x) = \left[\sum_i w_i \cdot f_i(x) \geq w_0 \right]$
- шар $R(x) = [\rho(x_0, x) \leq w_0]$

задача: нужно отбирать «хорошие» закономерности

вопрос: как оценивать закономерности?

введём понятие информативности

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

энтропийный критерий информативности

два исхода с вероятностями q и $1-q$

количество информации: $I_1 = -\log_2(q); I_0 = -\log_2(1-q)$

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

энтропийный критерий информативности

два исхода с вероятностями q и $1-q$

количество информации: $I_1 = -\log_2(q); I_0 = -\log_2(1-q)$

энтропия - математическое ожидание количества информации

$$h(q) = -q \cdot \log_2(q) - (1-q) \cdot \log_2(1-q)$$

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса y)

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

энтропийный критерий информативности

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса y)

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

предикат **R** выделил объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

энтропия выборки
после получения информации **R**

$$H(y|R) = \frac{(p+n)}{S} \cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right) + \frac{s-p-n}{S} \cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

энтропийный критерий информативности

энтропия выборки :

исходы q это позитивно размеченные объекты (класса y)

$$H(y) = h\left(\frac{P}{S}\right)$$

P - количество позитивных объектов

S - общее количество объектов

предикат **R** выделил объекты

p - количество позитивных

n - количество негативных

энтропия выборки
после получения информации **R**

$$H(y|R) = \frac{(p+n)}{S} \cdot h\left(\frac{p}{p+n}\right) + \frac{s-p-n}{S} \cdot h\left(\frac{P-p}{S-p-n}\right)$$

информационный выигрыш (Information gain)

$$iGain(y, R) = H(y) - H(y|R)$$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

основные вопросы построения логического классификатора

- как извлекать признаки?
не наука, но творчество
- какого вида закономерности нужны?
простые, малое количество признаков
- как определить информативность?
iGain, и др.
- как искать закономерности?
ограниченный перебор (rule induction)
- как объединить закономерности в алгоритм?

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

как объединить закономерности в алгоритм:

решающее дерево

рекурсивное разделение данных на две части

строим простой предикат -
ищем признак **i** и порог **b** для него

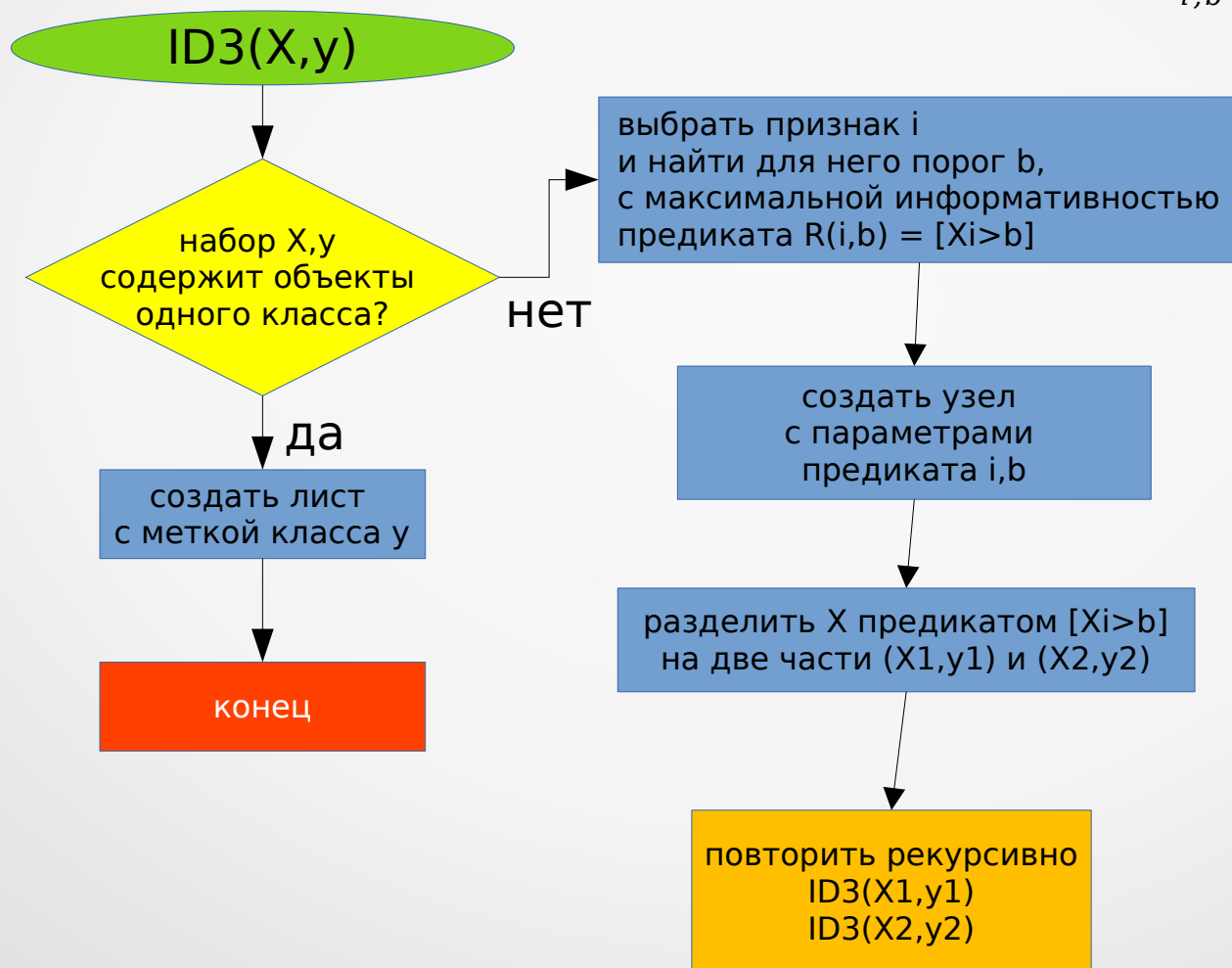
максимизируем информативность

$$\max_{i,b} (iGain(y, [X_i > b]))$$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

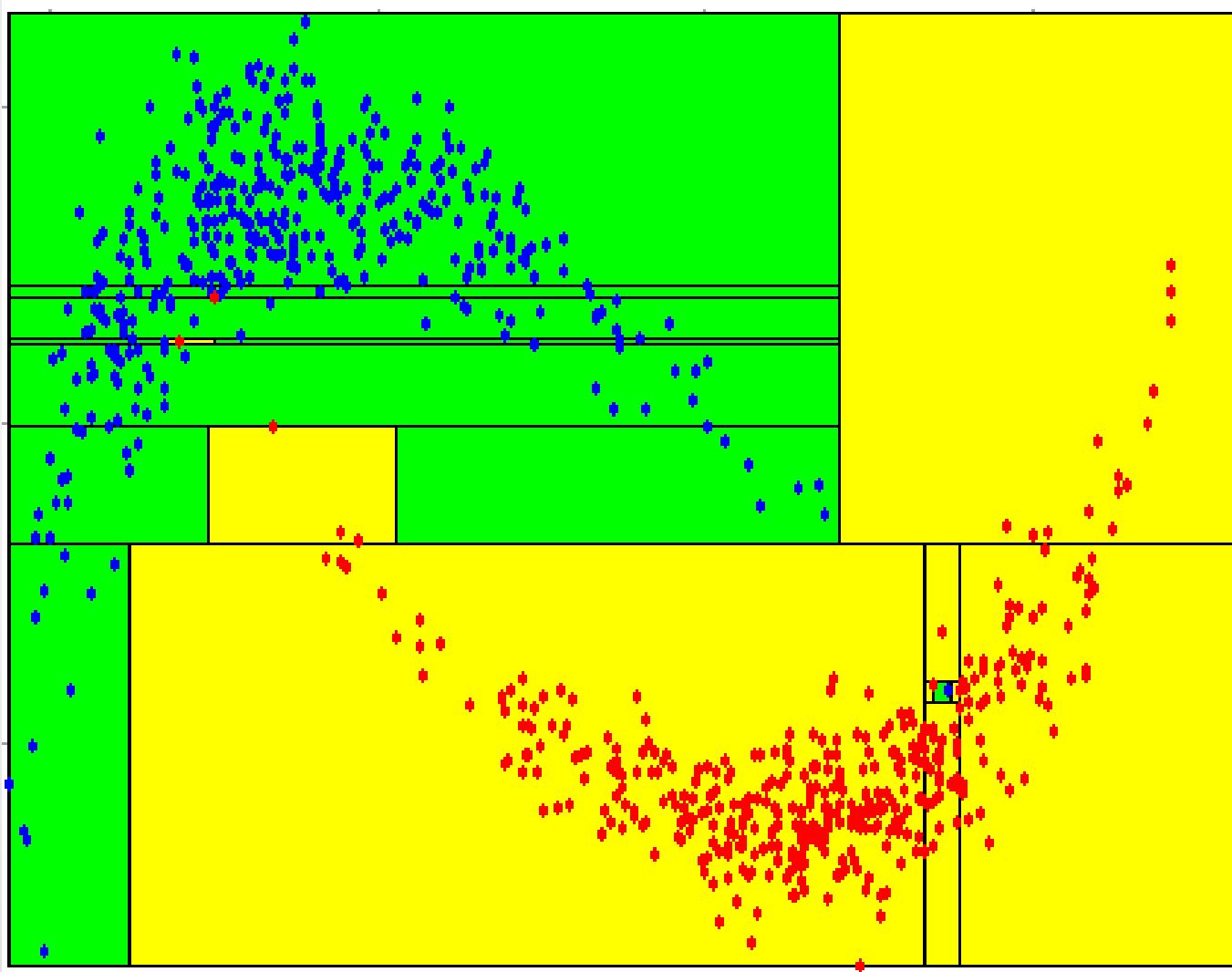
как объединить закономерности в алгоритм:
решающее дерево, алгоритм ID3

$$\max_{i,b} (iGain(y, [X_i > b]))$$



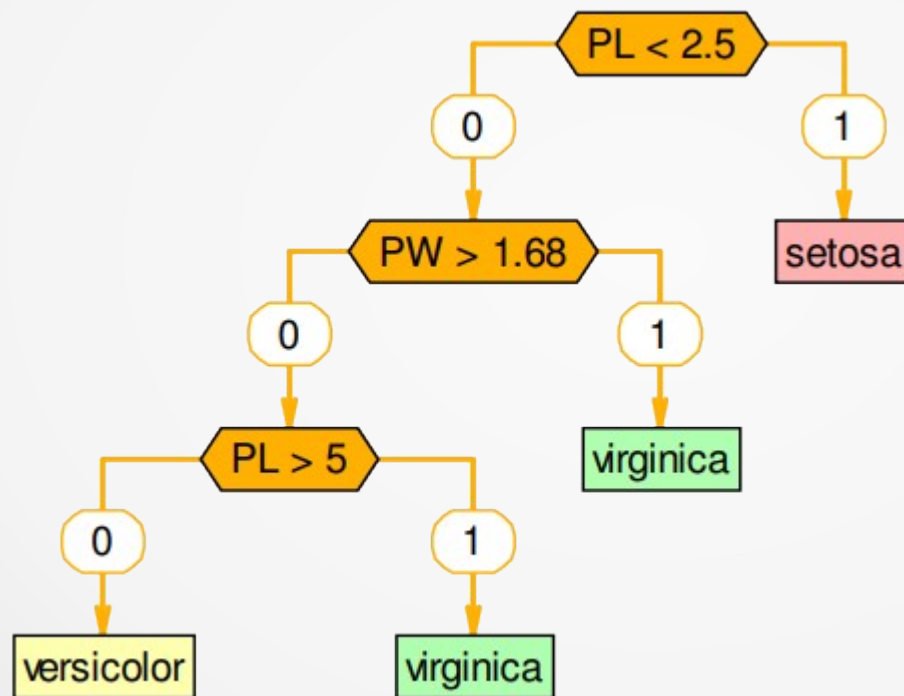
ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

разделение набора объектов решающим деревом



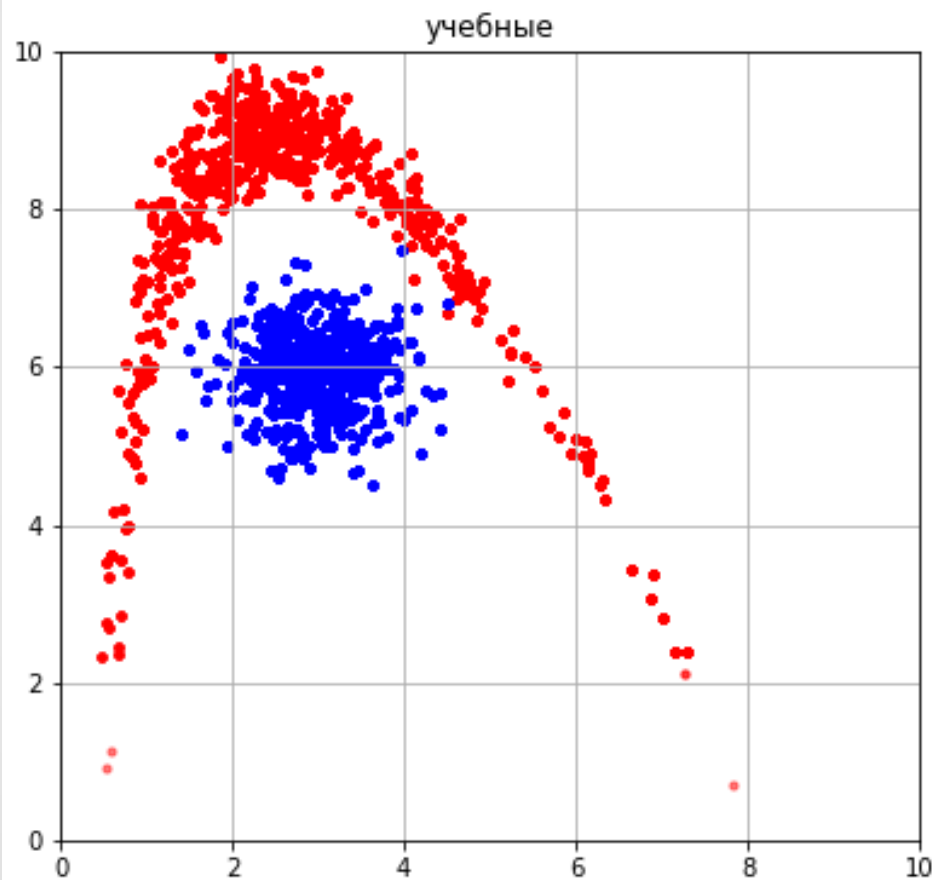
ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

пример дерева для набора iris

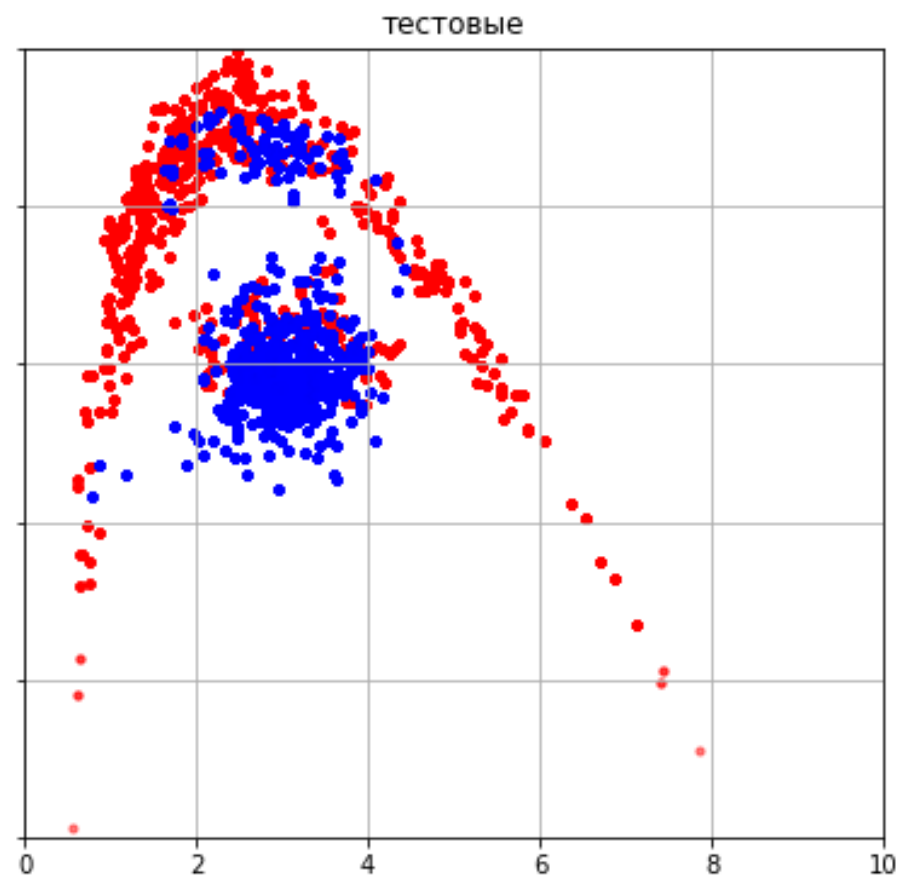


ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

результат работы решающего дерева



на учебном наборе - 100% точность



на тесте - переобучение

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

решающее дерево

достоинство: интерпретируемость результата

недостаток: переобучение, неустойчивы к шуму

pruning - обрезка решающего дерева

pre-pruning – критерий раннего останова.

если информативность меньше порога или глубина велика
то прекращаем ветвление

post-pruning – пост-редукция.

просматриваем все внутренние вершины дерева

проверяем их качество на тестовой выборке,

заменяем листом, где качество после разделения ухудшается

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

регрессия-задача восстановления зависимости

$$y = \varphi(x; \theta)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ - аргументы

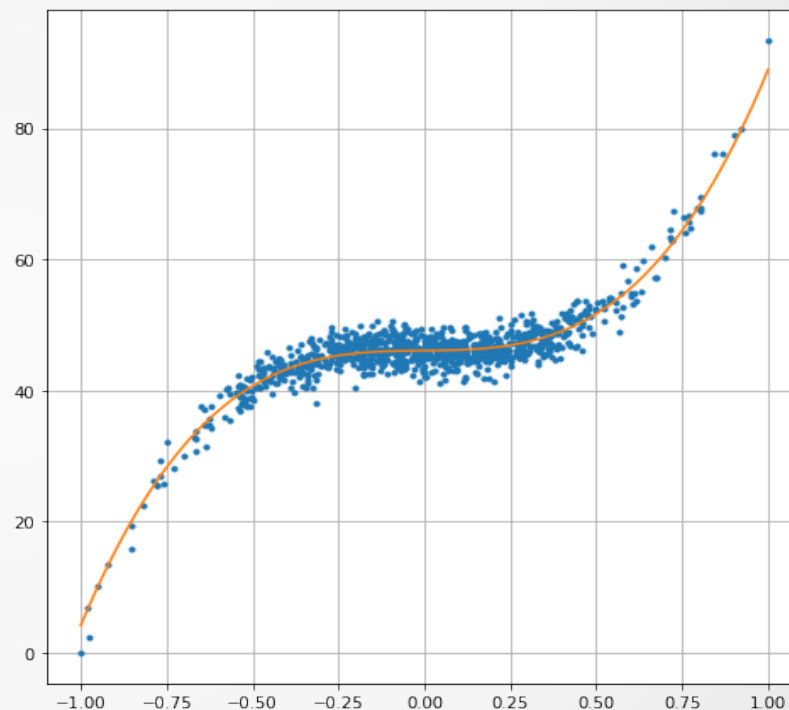
$y \in \mathbb{R}$ - значения функции

θ - параметры функции

датасет

$$L = (X, Y)$$

$$X \subset \mathbb{R}^n \quad Y \subset \mathbb{R}$$



Задача: по данным L определить $\hat{\varphi}(x; \hat{\theta})$
максимально близкую к $\varphi(x; \theta)$

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Решение задачи регрессии — модификация ID3

На каждом шаге для выбора оптимальной гиперплоскости $\mathbf{X_j} = \mathbf{b}$

Вместо критерия информативности используем дисперсию значений функции $\mathbf{D(y)}$

$$D = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y_i)^2,$$

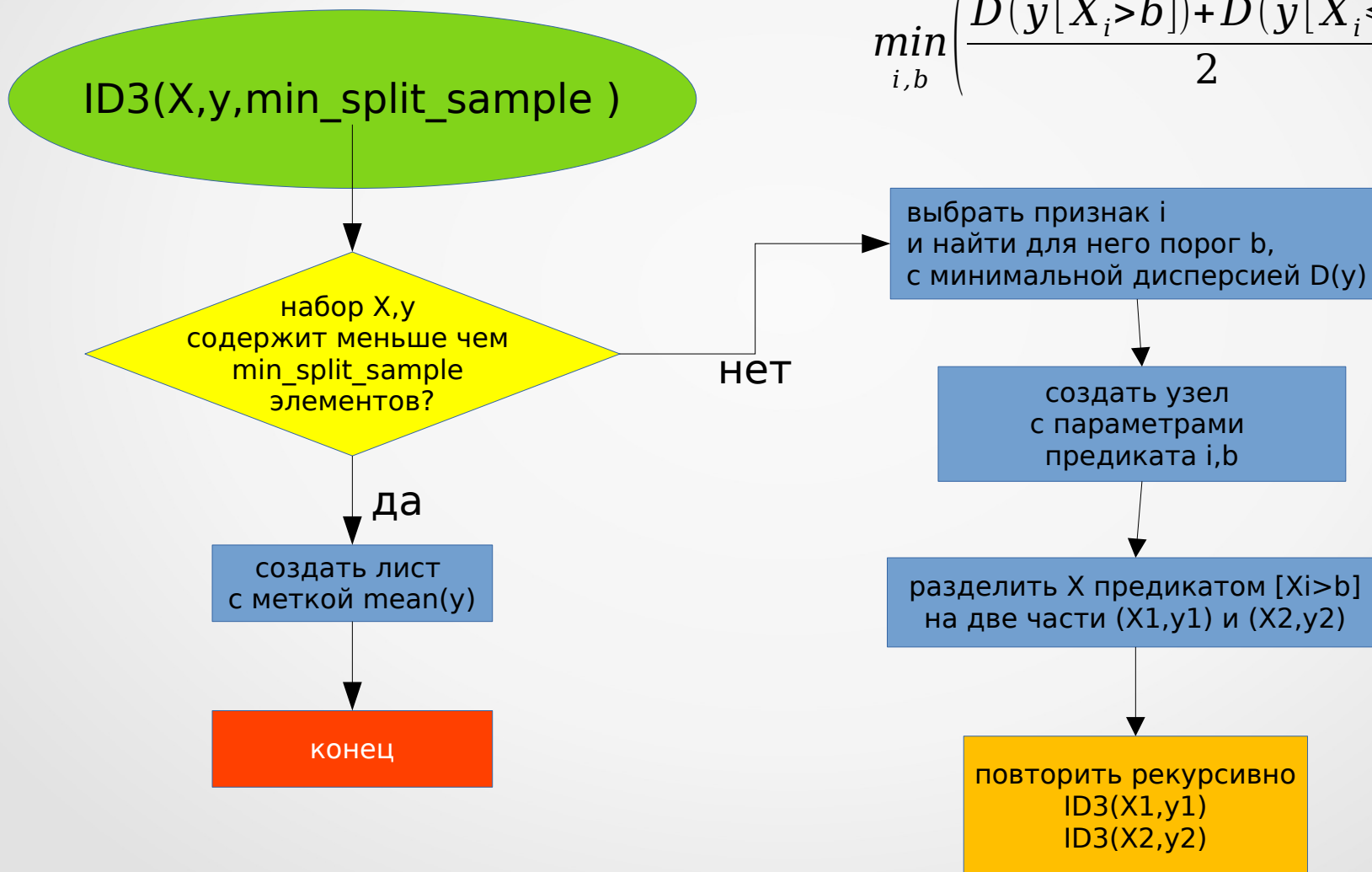
т. е. подбираем признак $\mathbf{X_j}$ и порог его значений \mathbf{b} , который бы минимизировал дисперсию \mathbf{D} значений \mathbf{y} в разбиении $\mathbf{X_j} > \mathbf{b}$

в итоге значения \mathbf{y} в каждом листе будут примерно равны.

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

решающее дерево, алгоритм ID3 для регрессии

$$\min_{i,b} \left(\frac{D(y[X_i > b]) + D(y[X_i \leq b])}{2} \right)$$



Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024

https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов Машинное обучение. ШАД Яндекс

https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC

Константин Воронцов Машинное_обучение. курс_лекций.

[http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Машинное_обучение_\(курс_лекций,_К.В.Воронцов\)](http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Машинное_обучение_(курс_лекций,_К.В.Воронцов))

SciKit-Learn : Decision Trees

<https://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html>