Методы восстановления плотности распределения

Евгений Борисов

Восстановление плотности

Вероятностное пространство математическая модель случайного эксперимента (опыта)

$$(\Omega, A, P)$$

Ω - элементарные исходы эксперимента, множество объектов ω.

A - случайные события, набор подмножеств **Ω**.

$A \ni \Omega$ - достоверное событие

$A \ni \varnothing$ - невозможное событие

P - функция вероятности $P: A \longrightarrow [0,1]$

$0 \leqslant P(a) \leqslant 1$ вероятность события **a** из **A**

$P(\varnothing)=0$; $P(\Omega)=1$

Случайная величина в пространстве **(Ω,A,P)** это числовая функция

$$X: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

типы случайных величин:

дискретные (discrete) - принимающая конечное или счетное число значений
(*Пример*: *частота слов в тексте, количество детей в семье*)

непрерывные (continuous) - принимают значение в определённом интервале
(*Пример*: *рост людей*)

Восстановление плотности

Вероятностное пространство **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**

случайная величина **X** задаётся распределением вероятностей **F** своих значений

F(x) = P(X ⩽ x)

Рассмотрим интервалы **(x,x+Δx)**, где **Δx** - бесконечно малые приращения **x** для **F(x)**

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Плотностью распределения (вероятности) **φ(x)** непрерывной случайной величины **X** назовём первую производную функции распределения **F(x)**

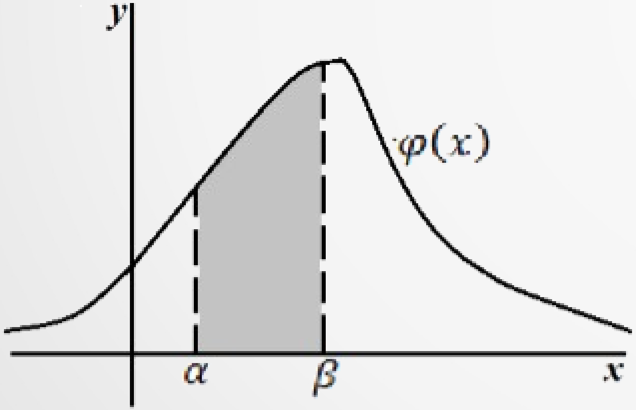
Восстановление плотности

<u>Вероятностное пространство</u> **(Ω,A,P)**
Ω - элементарные исходы эксперимента
A - случайные события, набор подмножеств **Ω**
P - функция вероятности **P: A ⟶ [0,1]**
X - случайная величина **X: A ⟶ ℝ**
F(x)=P(X⩽x) - распределение вероятностей **P**
φ(x)=F`(x) - плотность распределения **F**

график функции **φ(x)**
плотности распределения **X**

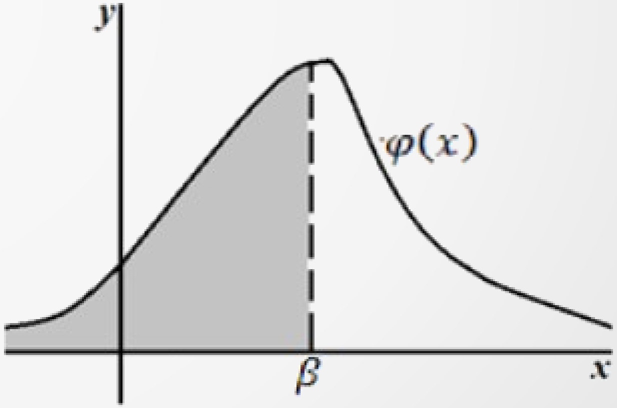
$$P(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$$

площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)** и прямыми **x=a, x=b, y=0** это вероятность **P(a⩽X⩽b)** попадания **X** в интервал **[a,b]**



$$P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx$$

площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком **φ(x)**, прямой **x=b, y=0** это функция распределения **F(b)=P(X⩽b)**



$$F(\beta)=P(X\leqslant\beta)=\int_{-\infty}^{\beta}\varphi(x)\,dx$$

https://spravochnick.ru/matematika/plotnost_raspredeleniya_veroyatnostey_nepreryvnoy_sluchaynoy_velichiny/

Байесовский классификатор

принцип максимума апостериорной вероятности

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, P(y|x)$$

формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

байесовский классификатор

$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y) p(x|y)$$

λ_y - потеря для объектов y

$P(y)$ - доля примеров класса y (априорная вероятность)

$p(x|y)$ - плотность класса y

Восстановление плотности

подходы к оценке плотности распределения

- непараметрический $\hat{p}(x)=\frac{1}{mV(h)}\sum_{j=1}^{m} K\left(\frac{\rho(x, x_j)}{h}\right)$

- параметрический $\hat{p}(x)=\varphi(x, \theta)$

- **смеси распределений** $\hat{p}(x)=\sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x, \theta_j)$

Восстановление плотности

смеси распределений

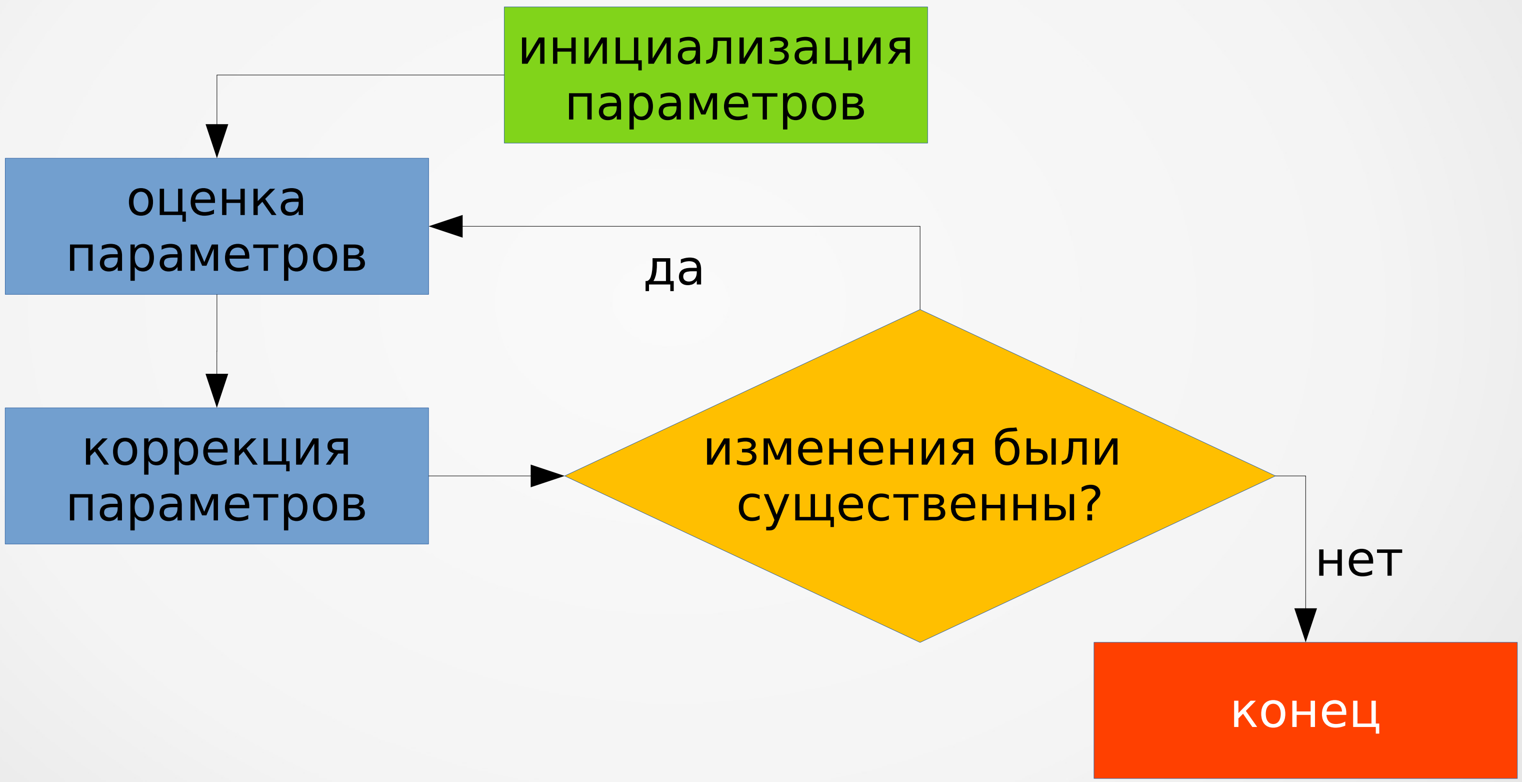
$$\hat{p}(x)=\sum_{j=1}^{k} w_j \varphi_j(x,\theta_j);$$

$$\sum_{j=1}^{k} w_j=1; \qquad w_j>0$$

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm):

базовый вариант алгоритма



Восстановление плотности

EM (expectation–maximization algorithm)

оценка

$$g_{ij}=\frac{w_j\,\varphi_j\left(x_i,\theta_j\right)}{\sum_{k=1}^{s} w_k\,\varphi_k\left(x_i,\theta_k\right)}$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation–maximization algorithm)

<u>оценка</u>

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

<u>коррекция</u>

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{argmax} \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

Восстановление плотности

EM (expectation-maximization algorithm)

<u>оценка</u>

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi_j(x_i, \theta_j)}{\sum_{k=1}^{s} w_k \varphi_k(x_i, \theta_k)}$$

<u>коррекция</u>

$$w_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\theta_j = \underset{\theta}{argmax} \sum_{i=1}^{m} g_{ij} \ln \varphi_j(x_i, \theta)$$

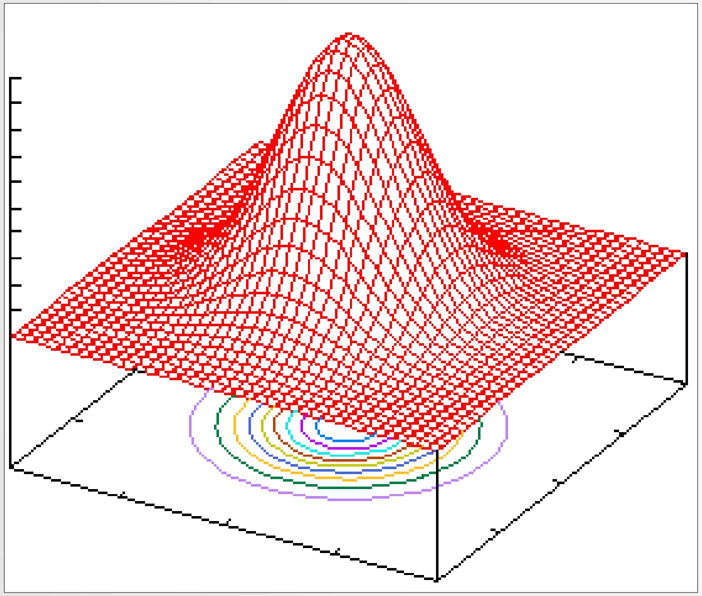
i=1...m
m - количество примеров X
s - количество компонент смеси

<u>условие остановки:</u> параметры не изменились

$$|g_{ij}(t-1) - g_{ij}(t)| < \delta ; 0 < \delta < 1$$

Восстановление плотности

параметрический подход:
допустим - **p(x)** это нормальная *n-мерная* плотность



$$p(x)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности

$$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

n-мерная гауссовская плотность

$$p(x)=N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

оценки параметров для максимального правдоподобия имеют следующий вид

мат.ожидание

$$\hat{\mu}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

матрица ковариаций

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{\mu})(x_i-\hat{\mu})^T$$

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности $$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

оценка: $$g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$$

задача:

$$\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$$

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности $p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$

оценка: $$g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^m g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$$

коррекция:

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m N_j \qquad N_j=\sum_{i=1}^m g_{ij}$$

вес компоненты

Восстановление плотности

EM для нормальной плотности $p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$

оценка: $g_{ij}=\dfrac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

задача: $\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$

коррекция:

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} N_j$$

вес компоненты

$$N_j=\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\mu_j=\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}x_i$$

Мат. ожидание компоненты

Восстановление плотности

ЕМ для нормальной плотности $$p(x)=\sum_k w_k N(x;\Sigma_k,\mu_k)$$

оценка: $$g_{ij}=\frac{w_j N(x_i;\Sigma_j,\mu_j)}{\sum_k w_k N(x_i;\Sigma_k,\mu_k)}$$

$$N(x;\Sigma,\mu)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

задача:

$$\Sigma_j,\mu_j=\underset{\Sigma,\mu}{argmax}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}\ln N(x_i;\Sigma,\mu)$$

коррекция:

$$w_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} N_j$$

вес компоненты

$$N_j=\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$

$$\mu_j=\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}x_i$$

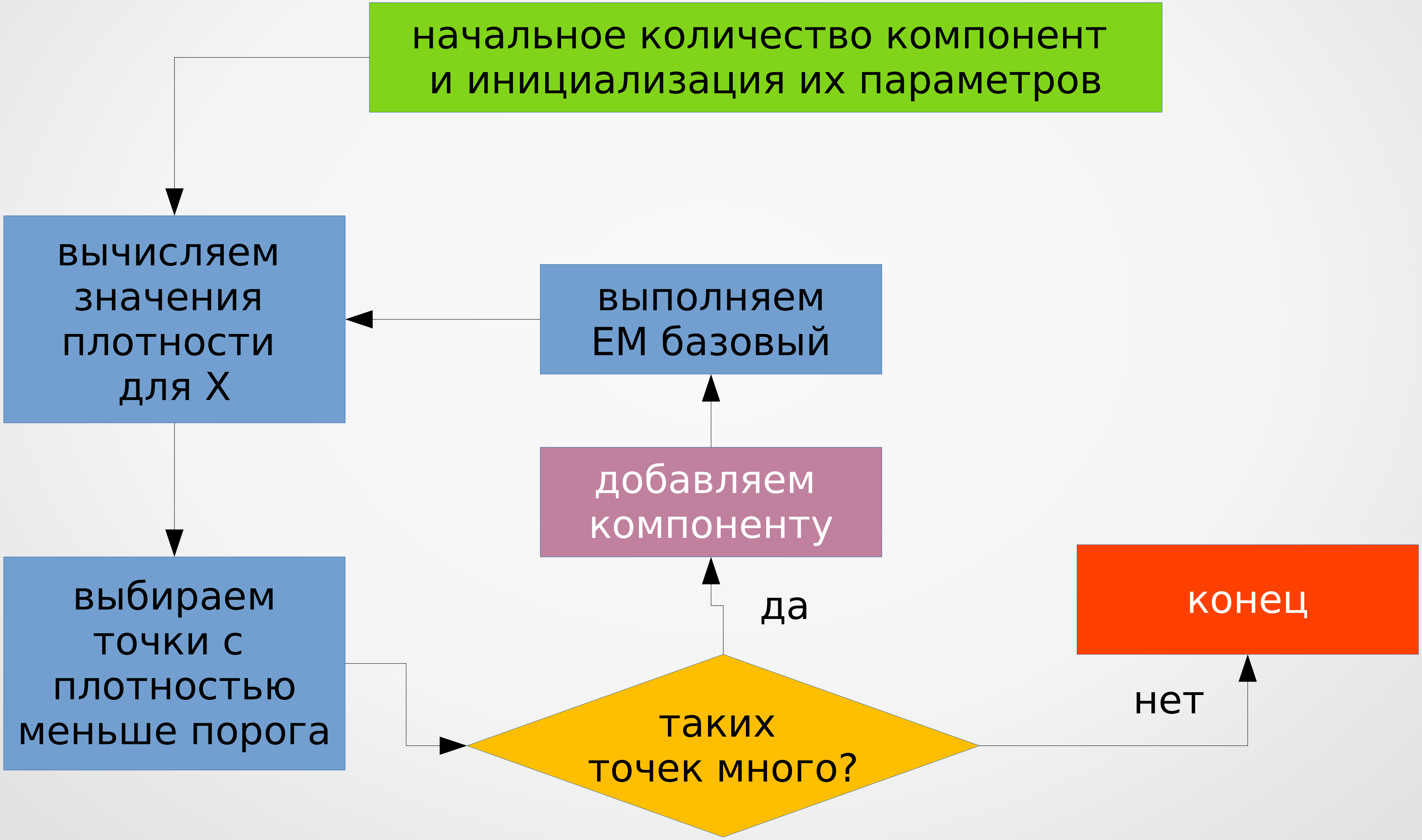
мат.ожидание компоненты

$$\Sigma_j=\frac{1}{cN_j}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}(x_i-\mu_j)^T(x_i-\mu_j);0<c\leq 1$$

матрица ковариаций компоненты

Восстановление плотности

ЕМ с последовательным добавлением компонент



Восстановление плотности

EM последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

начальные значения параметров первой компоненты смеси

$$w_1 = 1$$

вес компоненты

$$\Sigma_1 = cov(X)$$

матрица ковариаций
компоненты

$$\mu_1 = \frac{1}{|X|} \sum X$$

мат.ожидание
компоненты

Восстановление плотности

EM последовательное добавление компонент (для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание компоненты

Восстановление плотности

EM последовательное добавление компонент
(для нормальной плотности)

$X_{low} \subset X$ - точки с правдоподобием (значением смеси) ниже порога

начальные значения параметров новой компоненты смеси

$$w_{k+1} = \frac{|X_{low}|}{|X|}$$

вес компоненты

$$\Sigma_{k+1} = cov(X_{low})$$

матрица ковариаций
компоненты

$$\mu_{k+1} = w_{k+1} \frac{1}{|X_{low}|} \sum X_{low}$$

мат.ожидание
компоненты

коррекция весов старых компонент смеси

$$w_i := w_i (1 - w_{k+1})$$

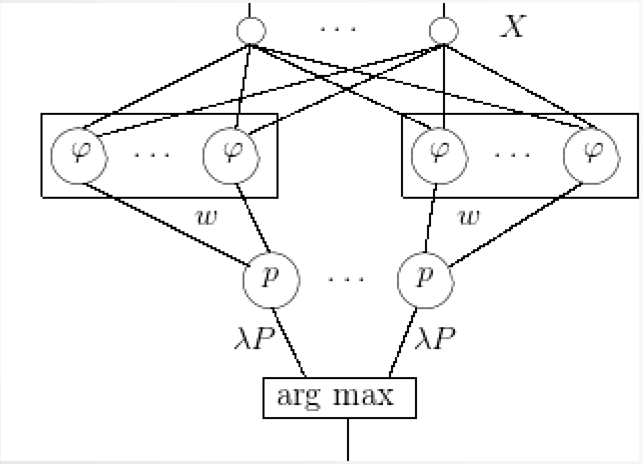
после определения новых параметров смеси запускаем EM

Восстановление плотности

RBF - сеть радиальных базисных функций

Байесовский классификатор

плотности классов - смеси нормальных распределений



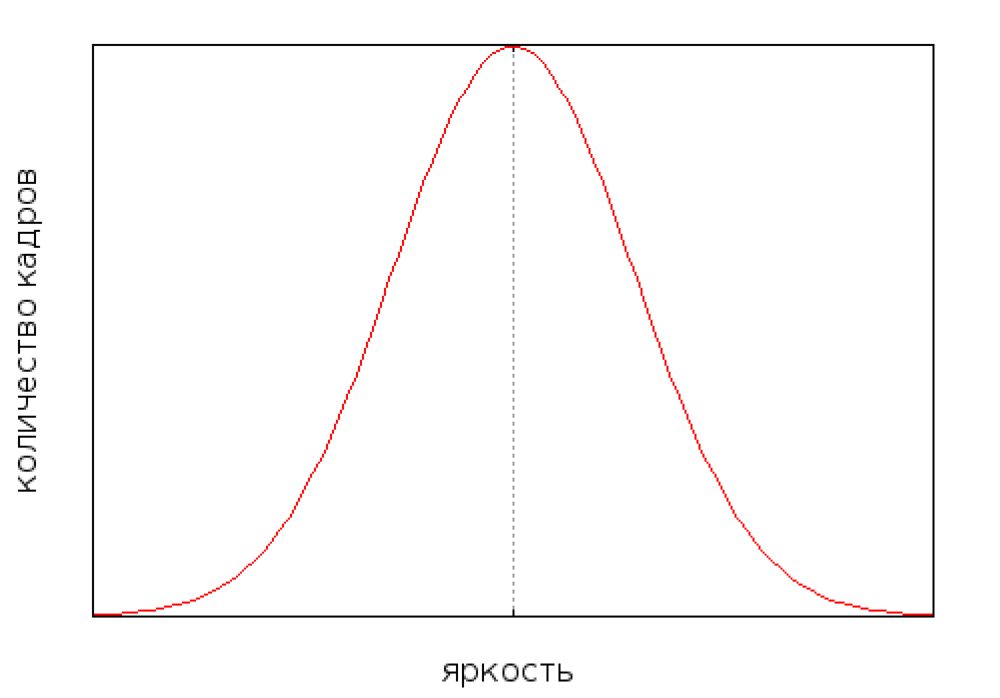
$$a(x) = \underset{y \in Y}{argmax}\, \lambda_y P(y)\, p(x|y)$$

$$p(x|y) = \sum_k w_k^y \varphi_k^y(x; \theta_k^y) = \sum_k w_k^y N(x; \Sigma_k^y, \mu_k^y)$$

http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Сеть_радиальных_базисных_функций

Восстановление плотности

Пример: детектор новых объектов для неподвижных камер



Литература

Борисов Е.С. Методы машинного обучения. 2024
https://github.com/mechanoid5/ml_lectorium_2024_I

Константин Воронцов Машинное обучение. ШАД Яндекс
https://www.youtube.com/playlist?list=PLJOzdkh8T5kp99tGTEFjH_b9zqEQiiBtC

SciKit-Learn : Naive Bayes
https://scikit-learn.org/stable/modules/naive_bayes.html

Евгений Борисов Детектор объектов для неподвижных камер.
http://mechanoid.su/cv-backgr.html