ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПЕРГРАФОВ

Выполнила студентка
608 группы
Ахмеджанова Маргарита

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Шабанов Д.А.

(подпись научного руководителя)

Москва
2018

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию двух классических задач о раскрасках гиперграфов, находящихся на стыке теории графов и экстремальной теории вероятностей. Все результаты дипломной работы являются новыми и улучшают ранее известные теоремы из данных областей.

Дадим основные определения из теории гиперграфов. Гиперграф является некоторым обобщением графа, в котором ребром могут соединяться не только две вершины, но и любые подмножества вершин. В n-однородном гиперграфе, каждое ребро содержит ровно n вершин. Степенью ребра гиперграфа называется число других ребер данного гиперграфа, имеющих с данным хотя бы одну общую вершину.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется правильной, если в этой раскраске все ребра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то говорят, что H является r-раскрашиваемым. Наконец, хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-раскрашиваемым.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется b-простым, если каждые два его различных ребра имеют не более b общих вершин. **Теорема 1** позволяет установить количественную связь хроматического числа b-простого гиперграфа и его максимальной степени ребра.

Правильные раскраски допускают различные обобщения, одним из которых являются справедливые раскраски. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой* (в мировой литературе используется термин *equitable*), если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более, чем на единицу.

Теорема 2 касается справедливых раскрасок в два цвета. А именно, получена оценка на число ребер n-однородного гиперграфа, которая обеспечивает существование справедливой раскраски в два цвета. Замечательным является тот факт, что нам удалось добиться того, чтобы наша оценка для справедливых раскрасок совпала с наилучшей оценкой для правильных раскрасок.

Содержание

1 Введение

1.1 Основные определения

Настоящая работа посвящена исследованию двух классических задач о раскрасках гиперграфов, находящихся на стыке теории графов и экстремальной теории вероятностей. Для удобства текст работы разбит на две главы. В первой главе идет речь о b-простых гиперграфах и количественной связи хроматического числа b-простого гиперграфа с его максимальной степенью ребра. Вторая глава работы посвящена справедливым раскраскам в два цвета.

Напомним, что гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — некоторое множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф является n-однородным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Отметим, что в частном случае $n = 2$ мы в точности получаем классическое определение графа. Степенью ребра гиперграфа называется число других ребер данного гиперграфа, имеющих с данным хотя бы одну общую вершину. Максимальная степень ребра гиперграфа H обозначается через $\Delta(H)$.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется правильной, если в этой раскраске все ребра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то говорят, что H является r-раскрашиваемым. Наконец, хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-раскрашиваемым.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется b-простым, если каждые два его различных ребра имеют не более b общих вершин. Гиперграфы, являющиеся 1-простыми, принято также называть простыми или линейными. В общем случае b-простые гиперграфы хорошо известны в мировой литературе как частичные системы Штейнера, полные же системы Штейнера являются одним из основных объектов изучения в теории кодирования. Отметим важнейшее свойство b-простого гиперграфа — любой его набор из $b + 1$ вершины полностью содержится не более чем в одном ребре (или ровно в одном в случае полной системы Штейнера).

Напомним, что раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой*, если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более чем на единицу (тем самым, все цвета задействуются почти одинаковое число раз). Последнее означает, что множество вершин V можно разбить не просто на r независимых множеств, а на r независимых множеств почти одинакового размера.

1.2 История задачи о хроматического числе b-простого гиперграфа и новый результат

Данная задача посвящена поиску количественной связи хроматического числа b-простого гиперграфа и его максимальной степени ребра. Впервые подобная связь была установлена в классической работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [1], которые показали, что если максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant \frac{1}{4} r^{n-1}, \tag{1}$$

то $\chi(H) \leqslant r$. Однако, как оказалось в дальнейшем, неравенство (1) не является оптимальным и оценка максимальной степени ребра, обеспечивающую r-раскрашиваемость гиперграфа, была неоднократно усилена различными исследователями. Авторы рекомендуют читателю обзорную работу [2] для знакомства с историей задачи. Мы же отметим только последние работы в данной области. В случае, когда число цветов r не велико по сравнению с параметром однородности n, наилучший результат был получен Д. Черкашиным и Я. Козиком [3]: если максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-2}, \tag{2}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то $\chi(H) \leqslant r$. Отметим, что в частном случае $r = 2$ данный результат был ранее доказан Дж Радхакришнаном и А. Сринивасаном в [4]. Однако, как легко видеть, при $r > n$, оценка (2) становится хуже классической оценки (1). Данное недоразумение было исправлено в работе И.А. Акользина и Д.А. Шабанова [5], которые показали, что если $r > n$ и максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant c \frac{n}{\ln n} r^{n-1}, \tag{3}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то H является r-раскрашиваемым.

В своей работе [1] Эрдеш и Ловас доказали существование n-однородных простых гиперграфов со сколь угодно большим хроматическим числом и поставили вопрос о нахождении количественной связи хроматического числа простого гиперграфа и его максимальной степени ребра. Первый нетривиальный результат здесь был получен в работе З. Сабо [**?**], который показал, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого n-однородного простого гиперграфа H неравенство $\Delta(H) \leqslant n^{1-\varepsilon} 2^n$ означает 2-раскрашиваемость H, если $n > n_0(\varepsilon)$. Данное утверждение было обобщено А.В. Косточкой и М. Кумбхатом в [6]: для заданных $b \geqslant 1$, $r \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $n > n_0(r, b, \varepsilon)$ любой n-однородный b-простой гиперграф H с условием

$$\Delta(H) \leqslant n^{1-\varepsilon} r^{n-1} \tag{4}$$

является r-раскрашиваемым. Отметим сразу два момента.

- В случае $r = 2$ оценка (4) заметно сильнее (2), которая в данной ситуации принимает вид $(n/\ln n)^{1/2} 2^n$, в то время как (4) дает $n^{1-o(1)} 2^n$.

- Величина $\varepsilon > 0$ в (4) может быть выбрана сколь угодно малой при достаточно большом n, тем самым, ее можно заменить на некоторую функцию $\varepsilon(n)$, стремящуюся к нулю с ростом n.

Последнее наблюдение породило целую серию работ [7], [8], [9] в которых авторы последовательно улучшали оценки на функцию $\varepsilon(n)$. Наконец, Я. Козику и Д.А. Шабанову

[10] удалось показать, что для случая простых гиперграфов можно положить $\varepsilon(n) = 0$, а именно они установили, что если H — простой n-однородный гиперграф с условием

$$\Delta(H) \leqslant c \cdot n\, r^{n-1}, \tag{5}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то H является r-раскрашиваемым.

Целью настоящей работы является обобщение соотношения (5) для класса b-простых гиперграфов. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Для достаточно большого $n \geqslant n_0(b)$ всякий b-простой n-однородный гиперграф H, удовлетворяющий условию*

$$\Delta(H) \leqslant (2e)^{-4} n r^{n-b} \tag{6}$$

является r-раскрашиваемым.

Сравним полученный результат с ранее известными. Ясно, что при $b = 1$ оценка (6) полностью совпадает с (5). При $b > 1$ наилучшим оставался результат Козика из работы [7], где была обоснована оценка

$$\Delta(H) = O\left(\frac{n}{\ln n} r^{n-b-1}\right),$$

обеспечивающая r-раскрашиваемость гиперграфа. Легко видеть, что наша новая оценка заметно лучше. Отметим, однако, что при $b > 1$ оценка (6) будет слабее результата (3), выполненного для всего класса однородных гиперграфов, а не только b-простых, уже при $r > \ln n$.

Насколько результат теоремы 1 далек от максимально возможного? Как показали А.В. Косточка и В. Рёдль в [11] для любых $n, r \geqslant 2$ существует простой n-однородный гиперграф с хроматическим числом больше r и максимальной степенью ребра не более $n^2 r^{n-1} \ln r$. Тем самым, при фиксированных r и b наша оценка не более чем в n раз слабее максимально возможного результата.

1.3 История задачи о справедливых раскрасках в два цвета и новый результат

Во второй главе исследуется известная задача экстремальной комбинаторики, связанная с раскрасками гиперграфов в два цвета.

Гиперграф обладает *свойством* B (в англоязычной литературе используется термин Property B), если найдется раскраска множества его вершин в два цвета, при которой все его ребра неоднцветны. Такие раскраски называют *правильными*.

В 1961 году Эрдеш и Хайнал [12] поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в n-однородном гиперграфе, который не обладает свойством B. Формально,

$$m(n) = min\{|E| : H = (V, E) - n\text{–однородный гиперграф } H,$$
$$H \text{ не обладает свойством } B\}.$$

На сегодняшний день известно, что

$$0.1 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n \leqslant m(n) \leqslant \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n (1 + o(1)) \tag{7}$$

Нижняя оценка в (1.1) принадлежит Радхакришнану и Сринивасану [4], а верхняя — Эрдешу [13]. Автор рекомендует читателю обзорную работу [2] для знакомства с историей задачи.

Нами доказано, что что нижняя оценка из (7) обеспечивает возможность не только правильной, но справедливой раскраски в два цвета.

Теорема 2. *Пусть $n > 5$, а $H = (V, E)$ произвольный n–однородный гиперграф с условием*

$$|E| \leq 0.01 \sqrt{\frac{n}{\ln n}} 2^n. \tag{8}$$

Тогда для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Наличие справедливой раскраски можно исследовать не только при ограничении на число ребер, но и при условии, когда ограничены степени вершин гиперграфа. Так, в 1970 году Хайнал и Семереди [15] доказали знаменитую гипотезу Эрдеша [14]: *любой граф G с максимальной степенью вершины $\Delta(G)$ допускает не только правильную, но и справедливую раскраску в $\Delta(G) + 1$ цветов.* Позже, доказательство этого фундаментального факта было значительно упрощено Х. Киерстедом и А.В. Косточкой [16], они же совместно с М. Мидларжем и Е. Семереди отыскали [17] быстрый Алгоритм для получения искомой справедливой раскраски.

В случае n-однородных гиперграфов $\mathcal{H}$ Шабанов [18] показал, что для всякого простого гиперграфа(любые два его ребра имеют не более одной общей вершины) $H \in \mathcal{H}$, а также для всякого гиперграфа $H \in \mathcal{H}$ с большим количеством вершин условие на максимальную степень вершины $\Delta(H)$:

$$\Delta(H) \leq c \cdot 2^{n-1} / \sqrt{n \ln n}$$

обеспечивает возможность справедливой раскраски H в два цвета. Позже, этот результат был улучшен И. Акользиным [20], который доказал, что для больших n верна оценка:

$$\Delta(H) \leq c \cdot 2^{n-1}$$

2 Доказательство Теоремы 1

Для доказательства Теоремы 1 нам необходимо показать, что любой b-простой гиперграф с ограниченными степенями ребер является r-раскрашиваемыми. Основу доказательства составляет метод случайной перекраски, впервые предложенный Й. Беком [22]. Мы же используем его модификацию, примененную Козиком и Шабановым в [10]. Опишем данный подход более детально.

2.1 Метод случайной перекраски

Пусть $H = (V, E)$ — b-простой n-однородный гиперграф. Наша цель — построить некоторую случайную раскраску множества его вершин в r цветов и показать, что она является правильной с положительной вероятностью. Для построения подобной раскраски зададим случайный порядок на множестве вершин гиперграфа V с помощью отображения $\sigma : V \to [0, 1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$. Значение $\sigma(v)$ будем называть весом вершины v. С вероятностью единица отображение σ инъективно на V. Если $\sigma(v) < p$, где p — некоторый параметр нашей конструкции, то вершину v будем называть *свободной*.

Рассмотрим также случайную раскраску вершин $f : V \to \{0, \dots, r-1\}$, имеющую равномерное распределение на множестве всех раскрасок. Предположим, что нам не повезло и в случайной раскраске f появились одноцветные ребра. Для исправления ситуации мы используем следующий Алгоритм перекраски:

1. если в текущий раскраске имеется одноцветное ребро A цвета $\alpha \in \{0, \dots, r-1\}$, содержащее еще не перекрашивавшиеся *свободные* вершины, то выберем ту вершину v из них, которая имеет наименьший вес;
2. перекрасим вершину v в цвет $(\alpha + 1)(\mathrm{mod}\ r)$;
3. будем говорить, что вершина v *обвиняет* ребро A;
4. повторяем первый шаг, пока возможно.

Формально, этот Алгоритм может быть описан следующим способом:

Algorithm 1: Алгоритм перекраски

Input: $f : V \to \{0, \dots, r-1\}$, $\sigma : V \to [0, 1]$ инъекция
while *есть одноцветное ребро, в котором первая неперекрашенная вершина v свободна.* **do**
  $f(v)_{mod(r)} \leftarrow (f(v) + 1)_{mod(r)}$
return f

Отметим, что в рамках процедуры перекраски каждая вершина меняет цвет не более одного раза, поэтому Алгоритм не может работать бесконечно и обязательно остановится.

Следующим этапов доказательства является анализ конфигураций, которые получаются, когда Алгоритм не построил правильную раскраску. Козик и Шабанов показали, что такие конфигурации имеют определенный тип. Однако, для получения заявленных результатов нам придется использовать некоторые новые идеи и конструкции, которых не было в [10].

2.2 Конструкция h-дерева

Пусть даже Алгоритм не помог и по итогам его работы гиперграф H все еще содержит одноцветные ребра. Обозначим через A одно из подобных одноцветных ребер. Пусть его цвет в финальной раскраске равен α. Заметим, что ребро A может содержать вершины только двух типов: каждая $v \in A$

- либо несвободная вершина с изначальным цветом $f(v) = \alpha$;
- либо свободная вершина с изначальным цветом $f(v) = \alpha - 1$.

Однако во втором случае вершина v обязана обвинять некоторое другое ребро B, иначе она не смогла бы сменить свой цвет в процессе перекраски.

Начнем построение конфигурации ребер H, которую мы назовем h-деревом.

- В качестве корня мы возьмем ребро A, а его потомками будут все ребра B, которые обвиняются вершинами A (по одному ребру для каждой вершины).
- Далее, в каждом ребре B также могли быть вершины, имевшие изначальный цвет не $\alpha-1$, а $\alpha-2$. Подобные вершины также обязаны обвинять некоторые новые ребра C, иначе ребро B не могло бы стать одноцветным и, в свою очередь, никто не смог бы его обвинить. Добавим подобные ребра C в качестве потомков ребра B.
- Продолжим процесс построения, пока будет возможно.

В результате построения мы получим конфигурацию T, вершинами которой выступают ребра гиперграфа H, а связь определяется отношениями обвинения. Для того, чтобы не путать вершины гиперграфа H с вершинами индуцированного графа T, будем называть последние *узлами*. Отметим, что необходимым условием включения произвольного ребра в данную конструкцию является условие его одноцветности на некотором шаге Алгоритма перекраски.

Следствие 1. *Если Алгоритм перекраски не построил правильную раскраску H в r-цветов, то образовалась хотя бы одна T конфигурация.*

Доказательство данного факта можно найти в Утверждении 4 из работы [10].

Докажем, что при определенных ограничениях конфигурация T является деревом.

Лемма 1. *Если в изначальной раскраске гиперграфа H не было одноцветных ребер, в которых все вершины были бы свободными, то либо получается древовидная конфигурация T, либо мы получаем правильную раскраску H в r цветов.*

Доказательство. Действительно, наличие цикла означало бы существование такого узла A, что ребро $e(A)$ обвинила сначала одна вершина, а потом либо его обвинила другая вершина, либо узел A стал корнем. Рассмотрим ситуации подробней. Поскольку обвинять можно только те ребра, которые были одноцветными на некотором шаге Алгоритма перекраски, будем считать, что ребро $e(A)$ было цвета $\alpha_{mod(r)}$. Тогда в результате обвинения ребро $e(A)$ перестало быть одноцветным и стало содержать вершины двух цветов: $\alpha_{mod(r)}$ и $(\alpha+1)_{mod(r)}$. Теперь, чтобы цикл замкнулся на узле A нужно чтобы ребро $e(A)$ снова стало одноцветным, последнее возможно, если в ребре $e(A)$ в изначальной раскраске все вершины были свободные цвета $\alpha_{mod(r)}$. Поэтому если мы запретим существование таких ребер, то у нас не будет циклов в конфигурации T. □

Назовем древесную конфигурацию T h-деревом. Листьями получившегося дерева будут как раз те ребра, которые были одноцветными в исходной случайной раскраске f. Формальное определение h-дерева выглядит следующим образом:

h-дерево — это корневое дерево, пронумерованное по следующему правилу:

1. любому узлу x h-дерева соответствует ребро гиперграфа $e(x)$.
2. каждому ребру f h-дерева соответствует $v(f)$ вершина гиперграфа.
3. для любого ребра $f=(x_1,x_2)$ выполнено что $v(f)\in(e(x_1)\cap e(x_2))$.

2.3 Локальная Лемма

В [9] З.Сабо использововал специальный вариант Локальной Леммы, представляющий обобщение основного варианта, предложенного Й. Беком [22]. Мы же используем следующее обобщение из [7].

Лемма 2. *(Локальная лемма)*

Пусть $\chi=\{X_1,X_2\dots,X_m\}$ — независимые случайные величины (или векторы) на произвольном вероятностном пространстве, а $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ — множество событий, принадлежащих алгебре, порожденной этими случайными величинами. Для каждого A_j обозначим через $vbl(A_j)$ минимальное подмножество случайных величин χ таких, что A_j полностью принадлежит порожденной ими алгебре. Далее, для каждого $X\in\chi$ мы определяем многочлен $w_X(z)$:

$$w_X(z)=\sum_{A\in\mathcal{A}:X\in vbl(A)}Pr(A)z^{|vbl(A)|} \tag{9}$$

Предположим, что существует многочлен $w(z)$, мажорирующий все многочлены $w_X(z)$, т.е. для любого действительно числа $z_0\geq 1$ выполняется $w(z_0)\geq w_x(z_0)$. Если существует $\tau_0\in(0,1)$:

$$w\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)\leq\tau_0 \tag{10}$$

Тогда, с положительной вероятностью можно избежать все события из $\bar{A}$, т.е.

$$Pr(\cap_{A\in\mathcal{A}}\bar{A})>0. \tag{11}$$

Доказательство Локальной Леммы можно посмотреть в [7]. В нашей модели случайные независимые векторы — это пары величин $(f(v), \sigma(v))$, $v \in V$, которые были присвоены каждой вершине v гиперграфа H. Для каждой вершины v мы оцениваем вероятность всех типов всех Плохих событий и далее, суммируем их с соответствующими коэффициентами из (9). Для доказательства мы выбрали следующие параметры:

$$\tau_0 = \frac{1}{n+1}, \quad p = \frac{5 \ln n}{n}. \tag{12}$$

Сейчас мы переходим к анализу Плохих событий.

2.4 Анализ Плохих событий

Предположим, что Алгоритм не помог и по итогам его работы гиперграф H все еще содержит одноцветные ребра. Обозначим через A одно из подобных одноцветных ребер в финальной раскраске. Пусть T — это h-дерево с корнем A. Напомним, что отношение смежности в h-дереве индуцируется отношением обвинения.

2.4.1 Плохое событие 1: много перекрашенных вершин

В качестве первого Плохого события $\mathcal{B}_1$ возьмем событие, когда корень h-дерева содержит хотя бы $20e \ln n$ перекрашенных вершин. Это означает, что есть некоторое ребро C гиперграфа H(корень h-дерева) такое, что выполнены одновременно следующие 4 условия:

- в процессе Алгоритма C стало одноцветным ребром некоторого цвета α;
- каждая вершина $v \in C$ либо имела изначальный цвет $f(v) = \alpha$, либо изначальный цвет — $f(v) = \alpha - 1 \pmod r$;
- число свободных вершин в C хотя бы $20e \ln n$;
- все вершины с изначальным цветом $\alpha - 1$ свободные.

Вероятность события $\mathcal{B}_1(C)$ может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C)) &= r \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-k} \left(\frac{2p}{r}\right)^k = r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \binom{n}{k} (2p)^k \leqslant \\
&\leqslant r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{2enp}{k}\right)^k = r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{5e}{k}\right)^k \leqslant \\
&\leqslant r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant r^{1-n} 2^{1-20e \ln n} \leqslant 2\, r^{1-n} n^{-10}.
\end{aligned}$$

Поэтому, для каждой вершины v, имеет место быть следующая оценка на полином из Локальной Леммы:

$$
\begin{aligned}
w_v^1\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) &= \sum_{C\colon v\in C} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|C|} = \\
&\text{(поскольку число ребер инцидентных вершине } v \text{ не превосходит } \Delta(H)) \\
&= \sum_{C\colon v\in C} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \Delta(H)\cdot 2\,r^{1-n}n^{-10}e \leqslant \\
&\text{(используя условие 1)} \\
&\leqslant \frac{1}{(2e)^4}\,r^{n-b}n\cdot 2\,r^{1-n}n^{-10}e = \frac{1}{(2e)^3}r^{1-b}n^{-9} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Будем узел C называть *вырожденным*, если произошло событие $\mathcal{B}_1(C)$. Далее, мы рассматриваем h-деревья без вырожденных узлов.

2.4.2 Удаление повторяющихся ребре

Предположим, что T — это h-дерево с корнем A и в T нет вырожденных узлов. Для каждого узла $C \in T$ введем понятие h-поддерева $N(C)$, состоящего из всех узлов B h-дерева T, кратчайший путь из которых до корня проходит через C.

Отношение смежности в h-дереве индуцируется отношением обвинения. Так, если узел C обвиняет узел F, тогда ребро C содержит вершину $v(F)$, которая обвиняет ребро F, поэтому $v(F) \in C \cap F$. В случае простых гиперграфов такая вершина $v(F)$ однозначно определена для ребер C и F, потому что по определению простого гиперграфа — в пересечении любых двух различных ребер может быть не более одной общей вершины. В случае b-простых гиперграфов такое свойство уже не выполняется, здесь размер $C \cap F$ может быть больше 1. Однако, как утверждает следующая лемма, обвиняющая вершина по-прежнему может быть однозначно определена.

Утверждение 1. *Пусть узлы $F_1, \ldots, F_s$ — потомки первого порядка узла C. Тогда, обвиняющие вершины $v(F_1), \ldots, v(F_s) \in C$ однозначно восстанавливаются по структуре графа T, т.е. существует взаимно-однозначное соответствие между множеством ребер и множеством перекрашенных вершин.*

Доказательство. Узел-предок C был одноцветным некоторого цвета α на некотором шаге Алгоритма перекраски. Поэтому есть вершина $u \in C$, которая была перкрашена в C последней (до того как ребро C стало одноцветным цвета α). В свою очередь, вершина u должна была обвинить некоторое ребро F_i, которое к моменту перекраски u должно было быть одноцветным, цвета $\alpha - 1$. Следовательно, $|C \cap F_i| = 1$ и $u = C \cap F_i = v(F_i)$. Удалим теперь вершину u из C и повторим предыдущие рассуждения для оставшихся вершин. Таким образом мы установим взаимно однозначное соответствие между $F_1, \ldots, F_s$ и $v(F_1), \ldots, v(F_s)$. □

Предположим, что C и D различные узлы в T, но $C = D$ как ребра гиперграфа H. Такая ситуация происходит, когда обвиняющие вершины $v(C)$ и $v(D)$ совпадают. В дальнейшем, такие совпадающие ребра C и D будем называть *копиями*. В случае простых гиперграфов такая ситуация может быть разрешена путем рассмотрения простых циклов в гиперграфе H. В случае b-простых гиперграфов такой подход не сработает, потому что у нас нет ограничений на 2-костепени в H. Поэтому будем действовать другим путем.

Заметим, что если узлы C и D совпали, то h- поддеревья $N(C)$ и $N(D)$ тоже совпадают. Таким образом, свойство иметь копию наследуется. Исходя из этого, будем говорить, что вершина v *специальная*, если есть два различных узла C и D в h-дереве T такие, что

- C и D совпадают как ребра гиперграфа;
- $v = v(C)$ и $v = v(D)$;
- родители C и D в h-дереве не совпадают как ребра гиперграфа H.

Определение специальной вершины в h-поддереве абсолютно аналогичное.

Для заданного h-дерева (или h-поддерева) T, определим операцию удаления повторяющихся ребер.

1. Зафиксируем некоторый порядок ζ' на множестве ребер H. Будем нумеровать узлы h-дерева T по возрастанию расстояния до корня A, а если расстояния совпали для каких-то двух узлов, то нумеруем в соответствии с порядком ζ', если приэтом номера ζ' совпали (т.е. мы имеем случай совпадающих ребер), то занумеруем их в соответствии с номерами их предков в h-дереве. Обозначим через ζ финальный порядок на множестве узлов T.
2. Будем теперь рассматривать узлы в соответствии с порядком ζ.
3. Для текущего узла C, если имеется совпадающий узел с ним узел D(назовем его копией C), тогда удаляем из h-дерева все копии C вместе со всеми их потомками (т.е. удаляем D вместе с $N(D)$, если D копия C.).
4. Повторяем предыдущий шаг до тех пор пока возможно.

Обозначим через $O(T)$ новое h-дерево, которое получилось после операции O. Ясно, что в $O(T)$ нет совпадающих ребер. Для удобства, такие h-деревья будем называть *правильными*. Применяя операцию O мы можем сделать все h-деревья правильными. Поэтому всюду далее рассматриваем только правильные h-деревья.

2.4.3 Плохое событие 2: b-непересекающиеся правильные h-деревья

Пусть теперь $T_1 = O(T)$ правильное h-дерево с корнем A. Далее, ребро C будем называть *плохим* ребром, если

$$\left| C \cap \bigcup_{B \in T_1 \setminus N(C)} B \right| \geqslant b + 1,$$

т.е. C имеет не менее, чем $b+1$ общую вершину с объединением ребер, которые не входят в поддерево $N()$. Аналогичным образом можно ввести понятие плохого ребра в любом h-поддереве.

Прямым путем в корневом дереве будем называть кратчайший путь, соединяющий вершину с корнем. Возможно 2 случая:

1. В T_1 есть прямой путь, на котором лежат все плохие ребра.

2. В T_1 такого пути нет.

Рассмотрим первую альтернативу: пусть C_m это плохое ребро, которое лежит дальше всех от корня A. Пусть $(C_m, C_{m-1}, \dots, C_0 = A)$ прямой путь от C_m до A, и все плохие ребра содержатся в этом пути. Предположим также, что для каждого $j = 0, \dots, m-1$,

$$\left| C_j \cap \bigcup_{i=j+1}^{m} C_i \right| \leqslant b. \tag{14}$$

Правильное h-дереово (или h-поддерево) будем называть *b-непересекающемся* если есть прямой путь , содержащий все плохие ребра h-дерева, и выполняется условие (14). Если в h-дереве нет плохих ребре, то мы можем считать, что прямой путь состоит ровно из одного ребра — корня A. Таким образом в Плохом событии $\mathcal{B}_2(T)$ мы рассматриваем случай b-непересекающихся правильных h-деревьев T.

Пусть величина t — это размер дерева T. Тогда имеет место быть следующее утверждение.

Утверждение 2. *Число вершин гиперграфа H, которые попали в T, не меньше, чем $n + (n-b)(t-1)$.*

Доказательство. Обозначим через $(C_m, \dots, C_0)$ путь, который содержит все плохие ребра. Для удобства перенумеруем узлы T следующим образом: сначала идут узлы $C_m, \dots, C_0$, а потом все остальные узлы по возрастанию расстояния до корневого узла C_0. Можно заметить, что каждый узел (кроме узлов $C_m, \dots, C_0$) имеет номер меньше, чем любой его потомок и каждое ребро гиперграфа, отвечающее этому узлу имеет не более b общих вершин со всеми ребрами, которые отвечают предыдущим узлам. Согласно свойству (14) это же выполняется для узлов $C_m, \dots, C_0$. Учитывая, что размер T равен t получаем, что общее число вершин гиперграфа хотя бы $n + (n-b)(t-1)$ □

Напомним, что в T нет вырожденных ребер. Поэтому каждое ребро C содержит не больше, чем $10e \ln n$ вершин, которые были перекрашены до того как ребро C стало одноцветным некоторого цвета α . Будем называть такой цвет α *доминантным* цветом C. Заметим, что в изначальной раскраске f хотя бы $n - 10e \ln n$ вершин ребра C уже имеет доминантный цвет α.

Конструкция h-дерева обеспечивает важную вещь: если известен итоговый цвет α корня A h-дерева T_1, то изначальные цвета всех вершин гиперграфа, входящих в T, однозначно определяется по графу T_1. Это непосредственно следует из Алгоритма перекраски. Второе утверждение говорит, что это же верно и для всех h-поддеревьев.

Утверждение 3. *Если зафиксировать доминантный цвет корня A, но изначальные цвета всех вершин гиперграфа, которые попали в $T_1 = O(T)$, одназначно определяются.*

Доказательство. Для фиксированного доминантного цвета корня A, доминантные цвета всех остальных узлов однозначно определены. Согласно операция удаления повторяющихся ребер (операция O) потомки корня A не удаляются. Поэтому согласно доказанному утверждению 1 множество обвиняющих вершин $v(F_1), \ldots, v(F_s)$ будет однозначно определено потомками $F_1, \ldots, F_s$. Таким образом, цвета A восстанавливаются.

Далее, занумеруем оставшиеся узлы в соответствии с нумерацией ζ и положим $\mathcal{R}(T_1) = \{v(F_1), \ldots, v(F_2)\}$. Тогда для каждого следующего узла C,

- нам известны все цвета всех его общих вершин с предками. Добавим их в $\mathcal{R}(T_1)$;
- нам известны все цвета в множестве $\mathcal{R}(T_1) \cap C$;
- изначальные цвета всех оставшихся вершин равны доминантному цвету C.

Действительно, если изначальный цвет вершины w не равен доминантному цвету C, тогда эта вершины обвиняет другое ребро D, и потомки C находятся в h-дереве. Может так оказаться, что D было удалено в результате операции O, но в таком случае T_1 содержит узел D', являющийся копией D. Родители D' содержат вершину w и имеет номер ζ меньше, чем номер C, поэтому $w \in \mathcal{R}(T_1)$. $\square$

Пусть $\mathcal{R}(T_1)$ обозначает множество всех перекрашенных вершин в правильном h-дереве T_1 с корнем A. Приведенное выше утверждение показывает, что это множество однозначно определяется через ребра и их пересечения. Более того, повторяя доказательство утверждения 1 мы можем получить, что для каждого узла $C \neq A$ его обвиняющая вершина $v(C)$ также однозначно определена.

Утверждение 4. *Пусть $A_0 = A, A_1, \ldots, A_{t-1}$ — это узлы T_1. Тогда в каждом A_i найдется подмножество вершин $R_i \subset A_i$, такое что*

1. *$|R_i| \geqslant n - 20e \ln n - b$ для любого $i = 1, \ldots, t-1$;*
2. *множества $R_0, \ldots, R_{t-1}$ попарно не пересекаются , $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$;*
3. *все вершины в R_i в изначальной раскраске f покрашены в доминантный цвет ребра A_i ;*
4. *вершина $v(A_i)$ принадлежит R_i и это первая вершина в R_i (в соответствии с нумерацией σ) для каждого $i > 0$;*

Доказательство. Без потери общности, предположим, что $(A_m, \ldots, A_0)$ прямой путь, который содержит все плохие ребра. Определим множество R_i для $i = 0, \ldots, m$, следующим образом:

$$R_i = \{v(A_i)\} \cup A_i \setminus \left(\mathcal{R}(T_1) \cup \bigcup_{j=i+1}^{m} A_j \right). \tag{15}$$

Здесь мы предполагаем, что $\{v(A_0)\}$ равно пустому множеству. Для всех $i > m$, определим

$$R_i = \{v(A_i)\} \cup A_i \setminus \left(\mathcal{R}(T_1) \cup \bigcup_{F \in T_1 \setminus N(A_i)} F \right). \tag{16}$$

Так как каждое ребро A_i невырожденное, то для A верно, что $|A_i \cap \mathcal{R}(T_1)| \leqslant 20e \ln n$. Для $i > m$, A_i не плохое ребро, поэтому $|A_i \cap \bigcup_{F \in T_1 \setminus N(A_i)} F| \leqslant b$. Таким образом, $|R_i| \geqslant n - 20e \ln n - b$. Для $i \leqslant m$, необходимое соотношение следует из (14).

Предположим, что узлы $A_{m+1}, \ldots, A_{t-1}$ занумерованы по возрастанию их расстояния до корня. Обозначим через $R'_i = R_i \setminus \{v(A_i)\}$. Для $j < i$, множество R'_i может иметь непустое пересечение с A_j только тогда, когда A_j родитель A_i. Но R'_j не имеет пересечений с детьми A_j, потому что все их обвиняющие вершины попадают в $\mathcal{R}(T_1)$. Множества $R'_1, \ldots, R'_m$ также не пересекаются, это следует из определения (15). Если $i \leqslant m < j$, тогда A_i не могут быть потомками A_j, отсюда R'_i и R'_j не могут пересекаться. Следовательно, все множества $R'_0, \ldots, R'_{t-1}$ не пересекаются. Из определения (15) и (16) следует, что все эти множества не пересекаются с $\mathcal{R}(T_1)$, поэтому добавив вершины $v(F_i)$ в непересекающиеся множества $\mathcal{R}(T_1)$ мы по-прежнему будем иметь непересекающиеся множества $R_0, \ldots, R_{t-1}$.

Поскольку R_i не пересекается с детьми A_i, в изначальной раскраске f все вершины R_i должны окрашены в доминантный цвет ребра A. Более того, Алгоритм говорит, что вершина $v(A_i)$ может обвинить A_i тогда и только тогда, когда она является первой неперекрашенная вершиной в момент, когда A_i стало одноцветным. Итак, $v(A_i)$ — это первая вершины в R_i. □

Сейчас мы уже можем оценить вероятность событий $\mathcal{B}_2(T_1)$, т.е. события когда T_1 это b-непересекающееся правильное h-дерево без вырожденных ребер.

Утверждение 5. *Для каждого b-непересекающегося правильного h-дерева T размера t без вырожденных ребер,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_2(T)\right) \leqslant r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n - 20e \ln n - b}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e \ln n}. \tag{17}$$

Доказательство. Согласно доказанному утверждению 3 вероятность того, что для данного зафиксированного доминантного цвета корня все остальные вершины гиперграфа из T_1 будут иметь заранее определенные цвета, равна to r^{-m}, где m это число вершин в T_1. Из утверждения 2 следует, что $m \geqslant n + (n-b)(t-1)$.

Пусть A_0 это корень. Согласно утверждению 4, для любого $A_i \in T_1$, $A_i \neq A_0$, вершина $v(A_i)$ первая в множестве R_i, размер которого хотя бы $n - 20e \ln n - b$. ВСе такие множества являются попарно непересекающимися, поэтому данные события независимы и вероятность может быть оценена следующим образом $(1/(n - 20e \ln n - b))^{t-1}$.

Наконец, все вершины из специального множества $R_0 \subset A_0$ в изначальной раскраске f имеют доминантный цвет α и все они несвободные. С другой стороны, Алгоритм не закончился и ребро A_0 не может быть одноцветным в финальной раскраске. Вероятность этого события равна $(1-p)^{|R_0|} \leqslant (1-p)^{n-20e \ln n - b}$. Для завершения доказательства остается заметить, что R_0 не пересекается с остальными множествами R_i.

Все три события независимы и вместе составляют событие $\mathcal{B}_2(T)$. Поэтому, имеет место быть оценка (17). □

Последнее утверждение этого параграфа дает оценку на число конфигураций, содержащих фиксированную вершину и образующих h-дерево. Для обоснования этого факта мы повторим доказательство утверждение 6 в [10].

Утверждение 6. *Пусть $H = (V, E)$ — некоторый гиперграф с максимальной степенью ребра $\Delta(H)$ и пусть $v \in \ V$ произвольная вершина. Тогда число h-деревьев размера t, содержащих вершину v не превосхоит $(4\Delta(H))^t$.*

Доказательство. Воспользуемся верхней оценкой числа корневых деревьев с непронумерованными вершинами:

$$4^t/t \tag{18}$$

После того как выбрана структура (выбрано корневое дерево) есть t способов выбрать узел h-дерева, который будет содержать фиксированную вершину v гиперграфа H. После этого остается поставить в соотвествие каждому узлу дерева ребро гиперграфа. Достаточно действовать по следующему правилу: для каждого непореdeленного еще узла X, который смежен с уже пореdеленным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Ясно, что v принадлежит не больше чем $(\Delta(H) + 1)$ ребру гиперграфа, а выбор каждого следующего ребра возможен не более чем $\Delta(H)$ способами. Таким образом, получаем

$$t \cdot (\Delta(H))^{t-1} \cdot (\Delta(H) + 1) \cdot \frac{4^t}{t} \sim (4\Delta(H))^t \tag{19}$$

$\square$

Теперь все готово для того, чтобы получить нужную оценку на локальный полином для Плохого события 2.

$$w_v^2\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{T_1\colon v\in T_1} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_2(T_1)) \left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T_1))|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \sum_{T_1\colon v\in T_1,\, |T_1|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_2(T_1)) \left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T))|} \leqslant$$

(используя (17) и оценку $|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T_1))| \leqslant nt$)

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \sum_{T_1\colon v\in T_1,\, |T_1|=t} r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n-20e\ln n - b}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e\ln n - b} e^t \leqslant$$

(предполагая n достаточно большим и используя Утверждение 6 с условием (1))

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} (4\Delta(H))^t r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e\ln n - b} e^t \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^t n^t \left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} \left(1-\frac{5\ln n}{n}\right)^{n-20e\ln n} e^t \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot n^{-5+o(1)} \sum_{t=1}^{|E|} \left(\frac{8e}{(2e)^4}\right)^t = n^{-4+o(1)} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}. \tag{20}$$

2.4.4 Плохое событие 3: большое b-непересекающееся правильное h-поддерево

Сейчас мы предполагаем, что правильное h-дерево $T_1 = O(T)$ не является b-непересе- -кающемся, но однако имеет h-поддерево T', такое что $T_1' = O(T')$ является b-непересе- -кающемся правильным h-поддеревом размера хотя бы $\ln n$, $t = |T_1'| \geqslant \ln n$. Пусть $\mathcal{B}_3(T_1')$ соответствующее событие. Ранее сформулированные утверждения 2–4 также применимы к h-поддеревьям. Единственным отличием является оценка вероятности.

Утверждение 7. *Для каждого b-непересекающегося без вырожденных ребер правильного h-поддерева T' размера t,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_3(T_1')\right) \leqslant r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n - 20e\ln n - b}\right)^{t-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Первые два события из $\mathcal{B}_2(T_1)$ уже доказаны в утверждении 5. Но теперь мы не можем сказать, что большинство вершин корня должны быть несвободными (известно только, что хотя бы одна свободная), поэтому мы пропускаем третье событие для $\mathcal{B}_2(T_1)$. Объединение первых двух событий из (21) дает требуемую оценку вероятности (21). $\square$

Число h-поддеревьев фиксированного размера, которые содержат фиксированную вершину может быть оценено также как в утверждении 6. Итак, мы выписываем оценку на локальный полином для Плохого события 3.

$$\begin{aligned}
w_v^3\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) &= \sum_{T_1'\colon v\in T_1'} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_3(T_1'))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))|} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\ \sum_{T_1'\colon v\in T_1',\ |T_1'|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_3(T_1'))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (21) и оценку } |\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))| \leqslant nt) \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\ \sum_{T_1'\colon v\in T_1',\ |T_1'|=t} r^{1-n-(n-b)(t-1)}\left(\frac{1}{n-20e\ln n-b}\right)^{t-1} e^t \leqslant \\
&\text{(предполагая } n \text{ достаточно большим и пользуясь условием (1))} \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n} (4\Delta(H))^t r^{1-n-(n-b)(t-1)}\left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} e^t \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^t n^t \left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} e^t \leqslant n\cdot \sum_{t\geqslant \ln n}\left(\frac{8e}{(2e)^4}\right)^t \leqslant \\
&\leqslant n\cdot (2e^3)^{1-\ln n} \leqslant n^{-3+o(1)} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}.
\end{aligned} \tag{22}$$

2.4.5 Плохое событие 4: маленькое b-непересекающееся правильное h-поддерево

Пусть T — это такое h-дерево, что $O(T)$ не является b-непересекающемся. Рассмотрим в нем наименьшее поддерево Y, такое что $Y' = O(Y)$ также не является b-непересекающемся.

Пусть A — это корень Y и пусть $F_1, \ldots, F_s$ — это дети Y. Тогда любое поддерево $N(F_i)$ обладает тем свойством, что $O(N(F_i))$ является b-непересекающемся. (иначе бы Y не было наименьшим). Если размер $O(N(F_i))$ больше, чем $\ln n$ тогда мы попадает в уже разобранный случай Плохого события 3. Поэтому будем считать, что размер $O(N(F_i))$ меньше, чем $\ln n$. Поскольку $s \leqslant 20e \ln n$ (напомним, что у нас нет вырожденных ребер в T), размер Y' также ограничен:

$$|Y'| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |O(N(F_i))| + 1 \leqslant (20e \ln n) \ln n + 1 \leqslant 30e(\ln n)^2. \tag{23}$$

В данном случае соотношение (23) может и не выполняться, поскольку некоторые ребра Y могли быть удалены в $O(Y)$.

Если Y' не является b-непересекающемся, тогда

(a) либо есть прямой путь $C_m, \ldots, C_1, C_0 = A$, который содержит все плохие ребра, и при этом соотношение (14) не выполняется;

(b) либо такого пути нет и поэтому найдутся два плохих ребра C и D, такие что $C \notin N(D)$ и $D \notin N(C)$.

Обозначим данное событие через $\mathcal{B}_4(Y')$. Тогда верна следующая оценка вероятности для $\mathcal{B}_4(Y')$.

Утверждение 8. *Пусть размер Y' равен t. Тогда,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_4(Y')\right) \leqslant r^{1-t(n-bt)}. \tag{24}$$

Доказательство. Узлы Y' не совпадают как ребра гиперграфа H, т.к. мы удалили все копии с помощью операции $O(Y)$. Ввиду того, что H является b-простым гиперграфом, каждый узел как ребро гиперграфа H содержит хотя бы $n - bt$ вершин, которые присутствуют только в нем. Поэтому, общее число вершин хотя бы $t(n - bt)$. Конструкция h-поддерева обеспечивает то, что для данного доминантного цвета, цвета всех остальных вершин однозначно определяются. Аналогичные рассуждения верно и после проведения операции O (смотрите утверждение (4)). Отсюда следует оценка (24). □

Далее мы получим оценку на число h-поддеревьев, которые не являются b-непересе- -кающимися и содержат некоторую фиксированную вершину v гиперграфа H.

Утверждение 9. *Число b-непересекающихся h-поддеревьев размера t, в которых нет вырожденных ребер и которые содержат некоторую фиксированную вершину v, не превосходит*

$$2 \cdot 4^t t^2 (\Delta(H))^{t-1} \binom{nt}{b+1}.$$

Доказательство. Количество корневых деревьев размера t оценивается числом $4^t/t$.

Рассмотрим случай (a). Напомним, что мы имеем прямой путь $C_m, \ldots, C_1, C_0$, с корнем C_0, который содержит все плохие ребра. В нашем случае условие (14) не выполнено.

Мы рассмотрим три конкретных узла: узел D, который содержит вершину v, узел C_m и какой-нибудь узел C_j, $j < m$, для которого условие (14) не выполняется (зафиксировать такие три ребра можно не более, чем t^3 способов). Напомним, что C_m — это плохое ребро. Узел D может быть выбран не более, чем $\Delta(H)$ способами. Теперь, если C_m не входит в прямой пусть, содержащий D и корень C_0, тогда, до определения C_m (т.е. до сопостовления узлу C_m некоторого ребра гиперграфа H), мы можем определить все узлы, которые не принадлежат $N(C_m)$. Достаточно действовать по следующему правилу: для каждого непоределенного еще узла X, который смежен с уже пореdefinedленным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Каждый раз мы имеем не более, чем $\Delta(H)$ вариантов . После этого мы выбраем C_m. Поскольку наш гипепрграф b-простой и C_m плохое ребро, то такое ребро однозначно определяется выбором $b+1$ вершины из множества $\bigcup_{F \in Y' \setminus N(C_m)} F$. Это множество уже определено и его размер не больше, чем nt, поэтому C_m может быть определено не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами. Все оставшиеся узлы в $N(C_m)$ могут быть определены используя обычное правило, и это дает не более, чем $\Delta(H)$ вариантов.

Если C_m содержится в прямом пути, содержащем D и корень C_0, тогда мы можем определять узлы пути по обычному правилу до тех пор пока не достигнем C_j. Согласно сделанному дополнению к (14) узел C_j может быть определен не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами, потому что это ребро должно содержать хотя бы $b+1$ общую вершину с уже выбранными ребрами $C_m, \ldots, C_{j+1}$.

В случае (b) у нас есть два плохих ребра C и F, которые не лежат ни в одном прямом пути, идущем до корня.Снова мы можем рассмотреть три конкретных узла: узел D, который содержит вершину v, узел C и узел F. Тогда либо мы можем определить все узлы, которые не попадают в $N(C)$ до того как потребуется определить C, либо мы можем определить все узлы, которые не попадают в $N(F)$ до того как потребуется определить F. Действительно, хотя бы один из узлов C или F не лежит на прямом пути, соединяющем другой узел с корнем. Пусть это будет узел C. Снова мы пользуемся обычное правило: для каждого неопределенного еще узла X, который смежен с уже определенным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Каждый раз мы имеем не более, чем $\Delta(H)$ вариантов . После этого мы выбраем C. Поскольку наш гиперграф b-простой и C плохое ребро, то такое ребро однозначно определяется выбором $b+1$ вершины из множества $\bigcup_{F' \in Y' \setminus N(C)} F'$. Это множество уже определено и его размер не больше, чем nt, поэтому C может быть определено не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами. Все оставшиеся узлы в $N(C)$ могут быть определены используя обычное правило, и это дает не более, чем $\Delta(H$ вариантов. $\square$

Итак, мы получаем следующую оценку для локального полинома Плохого события 4:

$$
\begin{aligned}
w_v^4\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{Y'\colon v\in Y'} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_4(Y'))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (23))} \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2}\ \sum_{Y'\colon v\in Y',\ |Y'|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_4(Y'))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (24) и оценивая } |\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))| \leqslant nt) \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2}\ \sum_{Y'\colon v\in Y',\ |Y_1'|=t} r^{1-t(n-bt)}e^t \leqslant \\
&\text{(предполагая } n \text{ достаточо большим и используя условие (1))} \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 2\cdot 4^t(\Delta(H))^{t-1}t^2\binom{nt}{b+1}r^{1-t(n-bt)}e^t \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8\left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^{t-1} t^2n^te^t(nt)^{b+1}r^{(n-b)(t-1)+1-t(n-bt)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8e\left(\frac{1}{4e^3}\right)^{t-1} t^2n^t(nt)^{b+1}r^{b(t^2-t+1)+1-n} \leqslant \\
&\text{(поскольку } t=O((\ln n)^2) \text{ и } n \text{ велико по сравнению с } b) \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8e\left(\frac{1}{4e^3}\right)^{t-1} e^{O((\ln n)^3)}r^{O((\ln n)^2)-n} \leqslant \\
&\leqslant 2^{O((\ln n)^3)-n} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

2.5 Завершение доказательства Теоремы 1

Для применения Локальной Леммы мы должны проверить выполнимость достаточных условий (10). А именно, для каждой вершины v, имеют место быть оценки (13), (20), (22), (25) для локальных полиномов. Поэтому их сумма $w_v(z) = \sum_{i=1}^4 w_v^i(z)$ также ограничена

$$
w_v\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{i=1}^{4} w_v^i\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) \leqslant \frac{4}{10(n+1)} < \frac{1}{n+1} = \tau_0.
$$

Из Локальной леммы следует, что с положительной вероятностью не произойдет ни одно из указанных Плохих событий. Следовательно, с положительной вероятностью Алгоритм построит правильную раскраску в r-цветов. Теорема 1 доказана.

3 Следствия

3.1 Максимальная степень вершины

Первое следствие устанавливает связь между максимальной степенью вершины b-простого гиперграфа и его хроматического числа.

Следствие 2. *Пусть фиксированы числа r и b. Тогда существует число $n_0(b)$, такое, что всякий b-простой n-однородный гиперграф H с $\chi(H) > r$ и $n > n_0(b)$ имеет максимальную степень вершины не меньше, чем $1/(2e)^4 r^{n-b}$.*

Доказательство. Из Теоремы 1 следует, что H содержит ребро A степени хотя бы $1/(2e)^4 n \cdot r^{n-b}$. Следовательно, в A есть вершина у которой степень хотя бы $1/(2e)^4 r^{n-b}$. □

3.2 Число ребер

В [23] Косточка, Мубай, Рёдль и Тетали предложили рассматривать задачу об оценке минимально возможного числа ребер в b-простом n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше, чем r. . Данную величину принято обозначать через $m(n, r, b)$ Авторы [23] показали, что при фиксированных n и b, функция $m(n, r, b)$ имеет порядок $\Theta_{n,b}((r \ln r)^{1+1/b})$ как функция от r. В данном работе мы рассмотрим противоположную ситуацию: r, b фиксированы, а n растет. Для данного случая Косточка и Кумбхат KostKumb показали, что

$$r^{n(1+1/b)} n^{-\varepsilon(n)} \leqslant m(n, r, b) \leqslant c_1 \, r^{n(1+1/b)} n^{2(1+1/b)}, \tag{26}$$

где $\varepsilon(n) > 0$ медленно убывает к нулю при $n \to +\infty$ и $c_1 = c_1(b, r) > 0$ не зависит от n. Позже, верхняя оценка в (26) была улучшена Косточкой и Рёдлем [11], они доказали, что

$$m(n, r, b) \leqslant c_2 \, r^{n(1+1/b)} n^{1+1/b}, \tag{27}$$

где $c_2 = c_2(b, r) > 0$ не зависит от n. Наилучшей нижней оценкой на сегодняшней день является оценка Козика [7]:

$$m(n, r, b) \geqslant \Omega_{r,b}\left(\left(\frac{r^n}{\ln n}\right)^{1+1/b}\right). \tag{28}$$

Мы улучшили оценку (28) следующим образом.

Следствие 3. *При фиксированных $r \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ и при достаточно большом $n > n_0(b)$,*

$$m(n, r, b) \geqslant c \cdot r^{n(1+1/b)}, \tag{29}$$

где $c = c(r, b) > 0$ зависит только от r и b.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения мы повторим рассуждения из [7]. Доказательство базируется на идеи, впервые предложенные Ловасом и Ердёшем и доработанные Косточкой и Кумбхатом. Пусть $H = (V, E)$ b-простой n однородный гиперграф, который нельзя правильно раскрасить в r цветов. Рассмотрим вспомогательный гиперграф $F^b(H) = (V, E')$, который получается из исходного гиперграфа удалением из каждого ребра первых b вершин наибольшей степени. Полученный новый гиперграф является $(n-b)$ однородным, но по-прежнему остается r-нераскрашиваемым и b-простым.

Полагая параметр n достаточно большим и используя доказанное следствие 3 мы можем , что в $F^b(H) = (V, E')$, а значит и в исходном гиперграфе $H = (V, E)$, существует вершина v со степенью не меньше, чем $d = 1/(2e)^4 r^{n-2b}$. Обозначим множество инцидентных v ребер за F, а множество всех удаленных вершин из F за Y. Мощность множества Y можно оценить через d. Для этого нужно заметить, что любое b подмножество вершин из Y вместе с вершиной v содержится не больше чем в одном ребре и любое ребро из F содержит некоторое b-подмножество Y.

$$d \leqslant \binom{|Y|}{b} \leqslant |Y|^b.$$

откуда следует, что $|Y| \geq d^{1/b}$ Для удобства будем считать, что $m = \lceil d^{1/b} \rceil$. Для вершин $v_1, v_2, ..., v_m$ из множества $|Y|$ определим последовательно числа $d_1, d_2, ..., d_m$, где d_i равно общему числу всех ребер, которые содержат v_i и которые имеют не больше , чем $(b-1)$ общую вершину с множеством $\{v_1, v_2, ... v_{i-1}\}$. Нетрудно заметить, что выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \geqslant \sum_{j=1}^{m} \left(d - \binom{j-1}{b} \right) \geqslant dm - \binom{m}{b+1} \geqslant d^{1+1/b} - \frac{m^{b+1}}{(b+1)!} \geqslant c_0\, d^{1+1/b},$$

, где $c_0 = c_0(b) > 0$ зависит только от b. Поделив последнее значение на b, так как каждое ребро может участвовать не больше чем в b суммах, мы получим искомый результат.

$$|E| \geqslant \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m} d_j \geqslant \frac{c_0}{b}\, d^{1+1/b} \geqslant c(r,b) r^{n(1+1/b)}.$$

□

Заметим, что нижняя оценка (29) is only $n^{1+1/b}$ раз меньше, чем верхняя оценка (27) для фиксированных r, b и большого n.

4 Доказательство Теоремы 2

Пусть $n > 5$, а $H = (V, E)$ — n–однородный гиперграф. Для удобства будем считать, что число вершин m четно, а число ребер меньше, чем $c\sqrt{n/\ln n}2^n$. Под случайной раскраской $C = C(K_1, K_2)$ будем понимать случайное разбиение множества вершин гиперграфа на две равные доли: $V = K_1 \sqcup K_2, |K_1| = |K_2|$.

Лемма 3. *Пусть $H = (V, E)$ произвольный n–однородный гиперграф, в котором выполнены следующие соотношения:*

$$|E| < c\sqrt{n/\ln n}2^n, \qquad |V| < n(n-1)/\ln n.$$

Тогда при $c < 1/2$ для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску C гиперграфа H. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) &\leq \sum_{e\in E} \frac{2\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \\
&= |E| \frac{2^{-n+1}(1-2/m)...(1-2(n-1)/m)}{(1-1/m)...(1-(n-1)/m)} \leq \\
\leq 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} &\frac{\exp(\ln(1-2/m)+...+\ln(1-2(n-1)/m))}{\exp(\ln(1-1/m)+...+\ln(1-(n-1)/m))} = \\
&= 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \prod_{x=1}^{n-1} \exp\left(\ln(1-2x/m) - \ln(1-x/m)\right).
\end{aligned}$$

Из разложения натурального логарифма в ряд Тейлора следует, что $\ln(1-2x/m) - \ln(1-x/m) < -x/m$ при $x \in (0;1)$. Поэтому, складывая показатели степеней у произведения экспонент, окончательно получаем:

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) \leq 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} e^{-n(n-1)/2m} \leq 2c\frac{1}{\sqrt{\ln n}} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная раскраска C является справедливой раскраской. Лемма 3 доказана. □

Таким образом, нам остается рассмотреть гиперграфы, в которых число вершин m больше, чем $n(n-1)/\ln n$.

Рассмотрим случайную величину X, равную числу одноцветных ребер в раскраске C. Оценим математическое ожидание X:

$$\mathsf{E}X = \frac{2|E|\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \leqslant \frac{2|E|\binom{m}{m/2}(\frac{m/2}{m})^n}{\binom{m}{m/2}} \leq 2c\sqrt{n/\ln n}.$$

Следовательно, с вероятностью не меньше чем $(1-2/x)$ в случайной раскраске гиперграфа $H = (V, E)$ будет не больше, чем $cx\sqrt{n/\ln n}$ одноцветных ребер.

Следующим шагом в доказательстве теоремы 2 является применение модифицированной версии Алгоритма перекраски Радакришнана-Сринивасана. Алгоритм Радакришнана-Сринивасана описан в [4], а наша модификация состоит в том, что вместо того, чтобы красить вершины случайно и независимо в 2 цвета, мы случайно делим множество вершин пополам и одну половину вершин красим в один цвет, а другую — в противоположный. Целью нашего Алгоритма перекраски является построение из раскраски C правильной раскраски в два цвета.

4.1 Алгоритм построения правильной раскраски из случайной раскраски C

Наша цель — построить из случайной раскраски C некоторую новую случайную раскраску и показать, что она является правильной с положительной вероятностью. Для построения подобной раскраски зададим случайный порядок на множестве вершин гиперграфа V с помощью отображения $\sigma : V \to [0,1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,1]$. Также определим отображение $b : V \to \{0,1\}$, где $b(v), v \in V$, — независимые бернуллиевские случайные величины с параметром $p = (1/2)\ln n/n$.

Предположим, что нам не повезло и в изначальной случайной раскраске C есть одноцветные ребра. Пусть $v_1, v_2, ..., v_m$ — вершины гиперграфа, заданные в порядке σ, т.е. $\sigma(v_1) \leq \sigma(v_2) \leq ... \leq \sigma(v_m)$. Положим $\chi_0 = C$. Обозначим через $\mathcal{M}(v_k, \chi_0)$ число инцидентных v_k вершине одноцветных ребер в раскраске χ_0. Для исправления ситуации мы используем следующий Алгоритм перекраски:

1. Если $\mathcal{M}(v_1, \chi_0) \neq 0$ и $b(v_1) = 1$, перекрашиваем вершину v_1, получая раскраску χ_1.

2. Если хотя бы одно ребро из $\mathcal{M}(v_2, \chi_0)$ продолжает быть одноцветным в раскраске χ_1 и $b(v_2) = 1$, перекрашиваем вершину v_2, получая раскраску χ_2.

i. Если хотя бы одно ребро из $\mathcal{M}(v_i, \chi_0)$ продолжает быть одноцветным в раскраске χ_{i-1} и $b(v_i) = 1$, перекрашиваем вершину v_i, получая раскраску χ_i.

Обозначим финальную раскраску через χ^*, а множество одноцветных ребер в раскраске χ^* через $\mathcal{M}(\chi^*)$.

4.2 Анализ ситуаций, в которых не получается правильная раскраска

Пусть f — произвольное ребро гиперграфа H. Оценим вероятность того, что ребро f стало одноцветным в финальной раскраске χ^*. Возможны две ситуации, когда ребро f стало одноцветным в χ^*.

1. Ребро f было одноцветным в χ_0 и осталось одноцветным того же цвета в χ^*. Обозначим данное событие через $\mathcal{A}(f)$. Заметим, что в этом случае для каждой вершины

ребра f выполнено $b(v_i) = 0$. Отсюда,

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}(f)) \le \frac{2\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}}(1-p)^n \le \frac{2\binom{m}{m/2}\left(\frac{m/2}{m}\right)^n}{\binom{m}{m/2}}(1-p)^n \le 2^{-n+1}(1-p)^n$$

2. Ребро f не было одноцветным в χ_0, но стало одноцветным в χ^*. Предположим, что в ребре f перекрашена $l+1$ вершина. Рассмотрим вершину v^*, которая была перекрашена в f последней. В силу Алгоритма перекраски для v^* существовало инцидентное одноцветное в раскраске χ_0 ребро f', в котором номер $\sigma(v^*)$ меньше номеров всех остальных вершин z из f', для которых $b(z) = 1$. Нетрудно заметить, что для такого ребра f' будет верно, что $|f \cap f'| = 1$.

   Обозначим множество оставшихся перекрашенных вершин ребра f за S, $v^* \notin S$. Заметим, что для каждой вершины $w \in S$ выполнено, что $b(w) = 1$ и $\sigma(w) < \sigma(v^*)$.

   Обозначим через $\mathcal{B}(f, f', S)$ событие, заключающееся в том, что два конкретных ребра f и f' и множество вершин $S, S \subset f$, обладают соотвествующими, вышеперечисленными свойствами. Еще нам понадобиться событие $\mathcal{B}(f, f')$, отличающееся от $\mathcal{B}(f, f', S)$ тем, что множество S заранее не фиксировано.

$$\mathsf{P}(\mathcal{B}(f, f', S)|\sigma(v^*) = x) \le \frac{2\binom{m-2n+1}{m/2-(n-l-1)}}{\binom{m}{m/2}}p^{l+1}x^l(1-xp)^{n-1} \le$$

$$\le 2 \cdot 2^{-2n+2}p^{l+1}x^l(1-xp)^{n-1}, \tag{30}$$

$$\mathsf{P}(\mathcal{B}(f, f')) \le 2^{-2n+3}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^{l+1}\int_0^1 x^l(1-xp)^{n-1}dx \le 2 \cdot 2^{-2n+2}p.$$

Второе неравенство в (2.1) вытекает из следующих оценок комбинаторных функций:

$$\frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}e^{-1/(4p)} < \binom{2p}{p} < \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}},$$

$$\frac{\binom{m-2n+1}{m/2-(n-l-1)}}{\binom{m}{m/2}} \le \frac{2\binom{m-2n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \le 2^{-2n+1}e^{1/(2m-2n)}\sqrt{\frac{1}{1-2n/m}} \le 2^{-2n+1} \cdot 2, \tag{31}$$

при $n > 5$ и $m > n(n-1)/\ln n$, причем, в (2.2) при достаточно большом n множитель 2 можно заменить на $(1+\epsilon(n))$, где $\epsilon(n)$ сколь угодно мало.

В итоге,

$$\mathsf{P}(\mathcal{M}(\chi^*) \ne \emptyset) \le 2 \cdot 2^{-n}|E|(1-p)^n + 2 \cdot 2 \cdot 2^{-2n+1}|E|^2p \le$$

$$\le 2c\sqrt{n/\ln n} \cdot \left(1 - \frac{\ln n}{2n}\right)^n + 8c^2n/\ln n \cdot \frac{\ln n}{2n} \le \frac{2c}{\sqrt{\ln n}} + 4c^2.$$

А при достаточно большом n,

$$\mathsf{P}(\mathcal{M}(\chi^*) \ne \emptyset) \le 2 \cdot 2^{-n}|E|(1-p)^n + 4(1+\epsilon(n))2^{-2n}|E|^2p \le 2c^2(1+\epsilon(n)). \tag{32}$$

4.3 Построение справедливой раскраски C^* из правильной раскраски χ^*

Обозначим через $M^i(\chi^*)$, $i = 1, 2$, множество вершин, перекрашенных в цвет i в результате Алгоритма перекраски.

Обозначим через $D^i(C, j)$, $i = 1, 2$, $j \geq 1$, множество ребер E, каждое из которых имеет ровно j неперекрашенных вершин цвета i в финальной раскраске χ^*.

$$D^1(C, j) = \begin{cases} e : e \in E(H) : \\ (e \setminus (M^2(\chi^*)) \cap K_1(C) = j, \end{cases}$$

$$D^2(C, j) = \begin{cases} e : e \in E(H) : \\ (e \setminus (M^1(\chi^*)) \cap K_2(C) = j. \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть $H = (V, E)$ n-однородный гиперграф с $|E| \leqslant c\sqrt{n/\ln n}2^n$. Тогда с вероятностью не меньше, чем $(1 - 2c(6 \cdot e^2 - 2)/\alpha - 2c(e-1)/\alpha\sqrt{\ln n})$, в случайной раскраске C выполнено:*

$$|D^i(C, j)| < \alpha n^{j+1/2}$$

для всех $1 \leq j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor$ и $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть в ребре e ровно k вершин, перекрашенных в цвет
$i (\bmod 2) + 1$. Обозначим через $D^i(C, j, k)$, $i = 1, 2$, $j \geq 1$, $k \geq 0$, множество ребер $D^i(C, j)$, в которых в финальной раскраске χ^* ровно k вершин перекрашенных в цвет $i (\bmod 2) + 1$.

Случай 1: $k = 0$. Тогда,

$$\mathsf{P}(e \in D^i(C, j, 0)) \leq \binom{n}{j} \frac{\binom{m-n}{m/2-j}}{\binom{m}{m/2}},$$

$$\mathsf{E}|D^i(C, j, 0)| \leq |E| \cdot \binom{n}{j} \frac{\binom{m-n}{m/2-j}}{\binom{m}{m/2}} \leq |E| \cdot \frac{n^j}{j!} \frac{\binom{m-n}{m/2-(n/2)}}{\binom{m}{m/2}} \leq$$
$$\leq |E| \cdot \frac{2^{-n} n^j}{j!} \leq c\frac{n^{j+1/2}}{\sqrt{\ln n} j!},$$

$$\mathsf{P}(\exists j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor : |D^i(C, j, 0))| \geqslant \alpha n^{j+1/2}) \leqslant$$
$$1/\alpha \sum_{1 \leq j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \frac{c}{\sqrt{\ln n} j!} \leq \frac{c(e-1)}{\alpha\sqrt{\ln n}}.$$

Случай 2: $k \geq 1$.

Рассмотрим вершину, которая была перекрашена в ребре e последней. Согласно Алгоритму для этой вершины v^* выполнено следующее условие: $\exists f \in E : |f \cap e| \leq (j + 1), v \in (f \cap e)$, f одноцветно в изначальной раскраске C.

Таким образом, событие $\{e \in D^i(C,j,k)\}$ подразумевает, что кроме v^* в ребре e было ровно $j+k-1$ вершин цвета i, а вершина v принадлежала пересечению одноцветного, цвета i, ребра f с e. Всего же вершин во вместе взятых ребрах f и e не меньше, чем $(2n-j-1)$. Отсюда,

$$p(k,e) = \mathsf{P}(e \in D^i(C,j,k),\ \text{в } e \text{ перекрашено } k \text{ вершин}) \leqslant$$
$$\leq |E|\binom{j+1}{1}\left(\binom{n}{j+k-1}\binom{j+k-1}{k-1}p^k\right)\frac{\binom{m-(2n-j-1)}{m/2-(n-j-k)}}{\binom{m}{m/2}}.$$

Поскольку, $\frac{\binom{m-(2n-j-1)}{m/2-(n-j-k)}}{\binom{m}{m/2}} \leq \frac{\binom{m-2n+j+1}{m/2-n+j+1}}{\binom{m}{m/2}} \leq \frac{2^{j+1}\binom{m-2n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \leq 2\cdot 2^{-2n+j+1}$ (см. (4)), вероятность события $\{e \in D^i(C,j)\}$ может быть оценена следующим образом:

$$\mathsf{P}(e \in D^i(C,j)) = \sum_{k\geq 1} p(k,e) < 4|E|(j+1)\left(\sum_k \frac{n!}{(n-(j+k-1))!(k-1)!j!}p^k\right)2^{-2n+j},$$

$$\mathsf{E}|D^i(C,j)| \leq |E|\cdot\max_e \mathsf{P}(e \in D^i(C,j)) < c\cdot(n/\ln n)\frac{(j+1)2^{j+2}n^{j-1}}{j!}\sum_{k\geq 1}\frac{(np)^k}{(k-1)!} =$$
$$= cn\cdot\frac{(j+1)2^{j+1}n^{j-1}}{j!}\sum_{k\geq 0}\frac{(np)^k}{k!} \leq cn^j\cdot\frac{2^{j+1}(j+1)e^{1/2\ln n}}{j!} < c\cdot n^{j+1/2}\cdot\frac{2^{j+1}(j+1)}{j!}$$

$$\mathsf{P}(\exists j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor : |D^i(C,j))| \geqslant \alpha n^{j+1/2}) \leqslant$$
$$\leq \sum_{1\leq j\leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \mathsf{P}\left(D^i(C,j) \geqslant \frac{\alpha\cdot j!}{c\cdot 2^{j+1}(j+1)}\cdot \mathrm{E}D^i(C,j)\right) \leq$$
$$\leq (c/\alpha)\sum_{j\geq 1}\frac{2^{j+1}(j+1)}{j!} \leq \frac{c(6e^2-2)}{\alpha}.$$

□

Теперь мы хотим показать, что найдется подмножество неперекрашенных вершин цвета i, перекрасив вершины которого мы не получим одноцветных ребер.

Напомним, что мы обозначили через $D^i(C,j)$, $i=1,2$, $j\geq 1$, множество ребер гиперграфа H, каждое из которых имеет ровно j неперекрашенных вершин цвета i в финальной раскраске χ^*. Для всякого ребра e из $D^i(C,j)$ определим множество $A^i(C,j,e)$, состоящее из j неперекрашенных вершин ребра e, которые имеют цвет i в финальной раскраске χ^*.

Лемма 5. *Во множестве неперекрашенных вершин цвета i существует множество T', такое что:*

(1.) $|T'| = \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor$,

(2.) для любого $j \in \{1, 2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor\}$ и всякого $e \in D^i(C, j)$ выполнено, что $A^i(C, j, e) \not\subset T'$.

Доказательство. Мы доказали, что с вероятностью не меньше, чем $(1-2/x)$ в случайной раскраске гиперграфа $H = (V, E)$ будет не больше, чем $cx\sqrt{n/\ln n}$ одноцветных ребер. Поскольку перекрашенных вершин не больше, чем было изначально одноцветных ребер, число неперекрашенных вершин цвета i не меньше, чем $m/2 - cx\sqrt{n/\ln n}$. Для удобства вычислений исключим из множества неперекрашенных вершин те вершины, которые попали в $D^i(C, 1)$. По лемме 4 с некоторой положительной вероятностью $|D^i(C, j)| < \alpha n^{j+1/2}$ для любого $j \in \{1, 2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor\}$. Поэтому далее считаем, что мы выбираем множество T' из такого множества, в котором хотя бы $(m/2 - cx\sqrt{n/\ln n} - \alpha n^{1+1/2})$ вершин.

Выберем множество $|T'|$ случайно. Тогда,

$$\mathsf{P}(\exists j \in \{2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor\}, \exists e \in D^i(C, j) : A^i(C, j, e) \subset T') \leqslant$$

$$\leq \sum_{2 \leq j < \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \alpha n^{j+1/2} \frac{\binom{m/2 - \alpha n^{3/2} - cx\sqrt{n/\ln n} - j}{|T'| - j}}{\binom{m/2 - \alpha n^{3/2} - cx\sqrt{n/\ln n}}{|T'|}} \leq$$

$$\leq \sum_{2 \leq j < \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \alpha n^{j+1/2} \left(\frac{|T'|}{m/2}\right)^j \leq \sum_{2 \leq j < \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \alpha n^{j+1/2} \left(\frac{cx\sqrt{n/\ln n}}{n(n-1)/(2\ln n)}\right)^j =$$

$$= \sum_{2 \leq j < \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \alpha n^{1/2} \left(\frac{2cx\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}\right)^j \leq \frac{\alpha(2cx)^2 \ln n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 2cx\sqrt{\ln n})}.$$

□

4.4 Завершение доказательства Теоремы 2

Окончательно положим $c = 0.01$, $\alpha = 8$, $x = 5$. Тогда,

$$1 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2c}{\sqrt{\ln n}} + 4c^2 + \frac{2c(6 \cdot e^2 - 2)}{\alpha} + \frac{2c(e-1)}{\alpha \ln n} + \frac{\alpha(2cx)^2 \ln n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 2cx\sqrt{\ln n})}\right) > 0 \qquad (33)$$

Следовательно, с положительной вероятностью для гиперграфа из условия теоремы 2 одновременно выполнены следующие события: в случайной раскраске C мало одноцветных ребер, модифицированный Алгоритм из раскраски C построил правильную раскраску χ^*, существует множество, перекраска которого, с одной стороны, уровняет мощности обоих цветовых классов, а с другой стороны, не создаст новых одноцветных ребер. Теорема 2 доказана.

Следствие 4. *При достаточно большом n всякий n-однородный гиперграф с числом ребер, не превосходящем $0.7\sqrt{n/\ln n}2^n$, допускает справедливую раскраску в два цвета*

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия следствия 4. При достаточно большом n достаточно в (2.4) положить $c = 0.7, \alpha = x = 10000$ и заменить $4c^2$ оценкой из (2.3) для того чтобы показать, что H можно справедливо раскрасить в два цвета. □

Список Литературы

[1] P. Erdős, L. Lovász, "Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions", *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[2] A.M. Raigorodskii, D.A. Shabanov, "The Erdős–Hajnal problem, its generalizations and related problems", *Russian Mathematical Surveys*, **66**:5 (2011), 933–1002.

[3] D. Cherkashin, J. Kozik, "A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

[4] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, "Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring", *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[5] I.A. Akolzin, D.A. Shabanov, "Colorings of hypergraphs with large number of colors", *Discrete Mathematics*, **339**:12 (2016), 3020–3031.

[6] A.V. Kostochka, M. Kubmhat, "Coloring uniform hypergraphs with few edges", *Random Structures and Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

[7] J. Kozik, "Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **48**:1 (2016), 125–146.

[8] A.B. Kupavskii, D.A. Shabanov, "Colorings of uniform hypergraphs with large girth and applications", *Doklady Akademii Nauk*, **443**:4 (2012), 422–426.

[9] Д. А. Шабанов "Об обобщении теоремы Хайнала-Семереди для однородных гиперграфов"/ Доклады Академии Наук, т.459 №1 (2014), с. 22-26

[10] J. Kozik, D.A. Shabanov, "Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116** (2016), 312–332.

[11] A.V. Kostochka, V. Rödl, "Constructions od sparse uniform hypergraphs with high chromatic number", *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.

[12] P. Erdős, A.Hajnal, "On a property of families of sets", *Acta Math. Acad.Sci. Hungar.*,**1**:1-2 (1961), 87–123.

[13] P. Erdős, "On a combinatorial problem. II", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3-4 (1964), 445–447.

[14] P. Erdős , "Theory of Graphs and Its Applications" (M. Fieldler, Ed.) Czech. Acad. Sci. Publ., Prague, **9** (1964), 159.

[15] A. Hajnal, E. Szemeredi, "Proof of a conjecture of P. Erdős", *Combinatorial theory and its applications*, North-Holland, London, **II** (1969), 601-–623

[16] H. A. Kierstead, A. V. Kostochka, "A short proof of the Hajnal-Szemeredi Theorem on equitable coloring", *Combinatorics, Probability and Computing*, **17** (2008), 265–270.

[17] A. V. Kostochka, M. Mydlarz, E. Szemeredi, H.A. Kierstead, "A fast algorithm for equitable coloring", *Combinatorica*, **30(2)** (2010), 217–224.

[18] D.A. Shabanov, "Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász", *Random Structures and Algorithms*, **40**:2 (2012), 227–253.

[19] D. A. Shabanov "Equitable two-colorings of uniform hypergraphs"/ European Journal of Combinatorics, т.43 (2015), с. 185-203

[20] И. А. Аколзин "О справедливых раскрасках простых гиперграфов"/ ТРУДЫ МФТИ, т.9, №4 (2017), с. 161–173

[21] A. Kostochka, "Coloring uniform hypegraphs with few colors", *Random Structures and Algorithms*, **24** (2010), 1–10.

[22] J. Beck, "A remark concerning arithmetic progressions", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **29** (1980), 376–379.

[23] A.V. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, "On the chromatic number of set systems", *Random Structures and Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.