ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПЕРГРАФОВ

Выполнила студентка
608 группы
Ахмеджанова Маргарита

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Шабанов Д.А.

(подпись научного руководителя)

Москва
2018

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию нескольких классических задач о раскрасках гиперграфов, находящихся на стыке теории графов и экстремальной теории вероятностей. Все результаты дипломной работы являются новыми и улучшают ранее известные теоремы из данных областей.

Дадим основные определения из теории гиперграфов. Гиперграф является некоторым обобщением графа, в котором ребром могут соединяться не только две вершины, но и любые подмножества вершин. В n-однородном гиперграфе, каждое ребро содержит ровно n вершин. Степенью ребра гиперграфа называется число других ребер данного гиперграфа, имеющих с данным хотя бы одну общую вершину.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется правильной, если в этой раскраске все ребра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то говорят, что H является r-раскрашиваемым. Наконец, хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-раскрашиваемым.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется b-простым, если каждые два его различных ребра имеют не более b общих вершин. **Теоремы 1** позволяет установить количественную связь хроматического числа b-простого гиперграфа и его максимальной степени ребра.

Правильные раскраски допускают различные обобщения, одним из которых являются справедливые раскраски. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой* (в мировой литературе используется термин *equitable*), если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более, чем на единицу.

Теорема 2 и **Теорема 3**, отличающиеся техникой доказательства, касаются справедливых раскрасок. А именно, для $r = 2$ и для $r > 2$ получены оценки на число ребер n-однородного гиперграфа, которые обеспечивают существование справедливой раскраски в r цветов. Замечательным является тот факт, что нам удалось добиться того, чтобы наша оценка для справедливых раскрасок совпала с наилучшей оценкой для правильных раскрасок.

Содержание

1 Введение

1.1 Основные определения

Настоящая работа посвящена исследованию нескольких классических задач о раскрасках гиперграфов, находящихся на стыке теории графов и экстремальной теории вероятностей. Для удобства текст работы разбит на три главы. В первой главе мы изучаем справедливые раскраски в r цветов. Вторая глава посвящена справедливым раскраскам в два цвета. В третьей главе идет речь о b-простых гиперграфах и количественной связи хроматического числа b-простого гиперграфа и его максимальной степени ребра.

Напомним, что гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — некоторое множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф является n-однородным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Отметим, что в частном случае $n = 2$ мы в точности получаем классическое определение графа. Степенью ребра гиперграфа называется число других ребер данного гиперграфа, имеющих с данным хотя бы одну общую вершину. Максимальная степень ребра гиперграфа H обозначается через $\Delta(H)$.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется правильной, если в этой раскраске все ребра из E не являются одноцветными. Если для гиперграфа H существует правильная раскраска в r цветов, то говорят, что H является r-раскрашиваемым. Наконец, хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-раскрашиваемым.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется b-простым, если каждые два его различных ребра имеют не более b общих вершин. Гиперграфы, являющиеся 1-простыми, принято также называть простыми или линейными. В общем случае b-простые гиперграфы хорошо известны в мировой литературе как частичные системы Штейнера, полные же системы Штейнера являются одним из основных объектов изучения в теории кодирования. Отметим важнейшее свойство b-простого гиперграфа — любой его набор из $b+1$ вершины полностью содержится не более чем в одном ребре (или ровно в одном в случае полной системы Штейнера).

Напомним, что раскраска множества вершин гиперграфа называется *справедливой*, если она является правильной и при этом мощности всех цветовых классов отличаются не более чем на единицу (тем самым, все цвета задействуются почти одинаковое число раз). Последнее означает, что множество вершин V можно разбить не просто на r независимых множеств, а на r независимых множеств почти одинакового размера.

1.2 История задачи о хроматического числе b-простого гиперграфа и новый результат

Данная задача посвящена поиску количественной связи хроматического числа b-простого гиперграфа и его максимальной степени ребра. Впервые подобная связь была установлена в классической работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [1], которые показали, что если максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant \frac{1}{4} r^{n-1}, \tag{1}$$

то $\chi(H) \leqslant r$. Однако, как оказалось в дальнейшем, неравенство (1) не является оптимальным и оценка максимальной степени ребра, обеспечивающую r-раскрашиваемость гиперграфа, была неоднократно усилена различными исследователями. Авторы рекомендуют читателю обзорную работу [2] для знакомства с историей задачи. Мы же отметим только последние работы в данной области. В случае, когда число цветов r не велико по сравнению с параметром однородности n, наилучший результат был получен Д. Черкашиным и Я. Козиком [3]: если максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{r-1}{r}} r^{n-2}, \tag{2}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то $\chi(H) \leqslant r$. Отметим, что в частном случае $r = 2$ данный результат был ранее доказан Дж Радхакришнаном и А. Сринивасаном в [4]. Однако, как легко видеть, при $r > n$, оценка (2) становится хуже классической оценки (1). Данное недоразумение было исправлено в работе И.А. Акользина и Д.А. Шабанова [5], которые показали, что если $r > n$ и максимальная степень ребра n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$\Delta(H) \leqslant c \frac{n}{\ln n} r^{n-1}, \tag{3}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то H является r-раскрашиваемым.

В своей работе [1] Эрдеш и Ловас доказали существование n-однородных простых гиперграфов со сколь угодно большим хроматическим числом и поставили вопрос о нахождении количественной связи хроматического числа простого гиперграфа и его максимальной степени ребра. Первый нетривиальный результат здесь был получен в работе З. Сабо [?], который показал, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого n-однородного простого гиперграфа H неравенство $\Delta(H) \leqslant n^{1-\varepsilon} 2^n$ означает 2-раскрашиваемость H, если $n > n_0(\varepsilon)$. Данное утверждение было обобщено А.В. Косточкой и М. Кумбхатом в [6]: для заданных $b \geqslant 1$, $r \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $n > n_0(r, b, \varepsilon)$ любой n-однородный b-простой гиперграф H с условием

$$\Delta(H) \leqslant n^{1-\varepsilon} r^{n-1} \tag{4}$$

является r-раскрашиваемым. Отметим сразу два момента.

- В случае $r = 2$ оценка (4) заметно сильнее (2), которая в данной ситуации принимает вид $(n/\ln n)^{1/2} 2^n$, в то время как (4) дает $n^{1-o(1)} 2^n$.

- Величина $\varepsilon > 0$ в (4) может быть выбрана сколь угодно малой при достаточно большом n, тем самым, ее можно заменить на некоторую функцию $\varepsilon(n)$, стремящуюся к нулю с ростом n.

Последнее наблюдение породило целую серию работ [7], [8], [9] в которых авторы последовательно улучшали оценки на функцию $\varepsilon(n)$. Наконец, Я. Козику и Д.А. Шабанову

[10] удалось показать, что для случая простых гиперграфов можно положить $\varepsilon(n) = 0$, а именно они установили, что если H — простой n-однородный гиперграф с условием

$$\Delta(H) \leqslant c \cdot n\, r^{n-1}, \tag{5}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то H является r-раскрашиваемым.

Целью настоящей работы является обобщение соотношения (5) для класса b-простых гиперграфов. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Для достаточно большого $n \geqslant n_0(b)$ всякий b-простой n-однородный гиперграф H, удовлетворяющий условию*

$$\Delta(H) \leqslant (2e)^{-4} n r^{n-b} \tag{6}$$

является r-раскрашиваемым.

Сравним полученный результат с ранее известными. Ясно, что при $b = 1$ оценка (6) полностью совпадает с (5). При $b > 1$ наилучшим оставался результат Козика из работы [7], где была обоснована оценка

$$\Delta(H) = O\left(\frac{n}{\ln n} r^{n-b-1}\right),$$

обеспечивающая r-раскрашиваемость гиперграфа. Легко видеть, что наша новая оценка заметно лучше. Отметим, однако, что при $b > 1$ оценка (6) будет слабее результата (3), выполненного для всего класса однородных гиперграфов, а не только b-простых, уже при $r > \ln n$.

Насколько результат теоремы 1 далек от максимально возможного? Как показали А.В. Косточка и В. Рёдль в [11] для любых $n, r \geqslant 2$ существует простой n-однородный гиперграф с хроматическим числом больше r и максимальной степенью ребра не более $n^2 r^{n-1} \ln r$. Тем самым, при фиксированных r и b наша оценка не более чем в n раз слабее максимально возможного результата.

1.3 История задачи о справедливых раскрасках в два цвета и новый результат

Во второй главе исследуется известная задача экстремальной комбинаторики, связанная с раскрасками гиперграфов в два цвета.

Гиперграф обладает *свойством B* (в англоязычной литературе используется термин Property B), если найдется раскраска множества его вершин в два цвета, при которой все его ребра неодноцветны. Такие раскраски называют *правильными.*

В 1961 году Эрдеш и Хайнал [12] поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в n-однородном гиперграфе, который не обладает свойством B. Формально,

$$m(n) = min\{|E| : H = (V, E) - n\text{–однородный гиперграф } H, \\ H \text{ не обладает свойством } B\}.$$

На сегодняшний день известно, что

$$0.1\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2}2^n \leqslant m(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n(1+o(1)) \tag{7}$$

Нижняя оценка в (1.1) принадлежит Радхакришнану и Сринивасану [4], а верхняя — Эрдешу [13]. Автор рекомендует читателю обзорную работу [2] для знакомства с историей задачи.

Нами доказано, что что нижняя оценка из (7) обеспечивает возможность не только правильной, но справедливой раскраски в два цвета.

Теорема 2. *Пусть $n > 5$, а $H = (V, E)$ произвольный n–однородный гиперграф с условием*

$$|E| \leq 0.01\sqrt{\frac{n}{\ln n}}2^n. \tag{8}$$

Тогда для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Наличие справедливой раскраски можно исследовать не только при ограничении на число ребер, но и при условии, когда ограничены степени вершин гиперграфа. Так, в 1970 году Хайнал и Семереди [15] доказали знаменитую гипотезу Эрдеша [14]: *любой граф G с максимальной степенью вершины $\Delta(G)$ допускает не только правильную, но и справедливую раскраску в $\Delta(G)+1$ цветов.* Позже, доказательство этого фундаментального факта было значительно упрощено Х. Киерстедом и А.В. Косточкой [16], они же совместно с М. Мидларжем и Е. Семереди отыскали [17] быстрый Алгоритм для получения искомой справедливой раскраски.

В случае n-однородных гиперграфов $\mathcal{H}$ Шабанов [18] показал, что для всякого простого гиперграфа(любые два его ребра имеют не более одной общей вершины) $H \in \mathcal{H}$, а также для всякого гиперграфа $H \in \mathcal{H}$ с большим количеством вершин условие на максимальную степень вершины $\Delta(H)$:

$$\Delta(H) \leq c \cdot 2^{n-1}/\sqrt{n\ln n}$$

обеспечивает возможность справедливой раскраски H в два цвета. Позже, этот результат был улучшен И. Акользиным [20], который доказал, что для больших n верна оценка:

$$\Delta(H) \leq c \cdot 2^{n-1}$$

1.4 Справедливые раскраски в r цветов и новый результат

А.Косточка [21] доказал следующую теорему: если $r < \sqrt{\frac{1}{8}\ln\frac{ln}{2}}$ и число ребер n-однородного гиперграфа H не превосходит

$$|E| \leq e^{-4r^2}\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor log_2(r)/\log_2(r)+1\rfloor} r^n,$$

то H является r-раскрашиваемым.

Легко показать, что тривиальная оценка $|E| < r^{n-1}$ обеспечивает возможность справедливой раскраски H в r цветов. Однако, в отличии от правильных раскрасок, другие оценки на число ребер автом неизвестны.

Наш результат сформулирован в следующей теореме:

Теорема 3. *Пусть $H = (V, E)$ произвольный n-однородный гиперграф с условием*

$$|E| \leq 0.05 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1 \rfloor} r^{n-1},$$

где число цветов $r \leq \sqrt{\frac{\ln n}{-64(\ln c)(\ln \ln n)^3}}$. Тогда для H существует не только правильная, но справедливая раскраска в r цветов.

Таким образом, любой n-однородный гиперграф с ограниченным числом ребер допускает не только правильную раскраску в r цветов, но и справедливую. Эта теорема существенно усиливает ранее известный результат.

2 Доказательство Теоремы 1

Для доказательства Теоремы 1 нам необходимо показать, что любой b-простой гиперграф с ограниченными степенями ребер является r-раскрашиваемыми. Основу доказательства составляет метод случайной перекраски, впервые предложенный Й. Беком [22]. Мы же используем его модификацию, примененную Козиком и Шабановым в [10]. Опишем данный подход более детально.

2.1 Метод случайной перекраски

Пусть $H = (V, E)$ — b-простой n-однородный гиперграф. Наша цель — построить некоторую случайную раскраску множества его вершин в r цветов и показать, что она является правильной с положительной вероятностью. Для построения подобной раскраски зададим случайный порядок на множестве вершин гиперграфа V с помощью отображения $\sigma : V \to [0,1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,1]$. Значение $\sigma(v)$ будем называть весом вершины v. С вероятностью единица отображение σ инъективно на V. Если $\sigma(v) < p$, где p — некоторый параметр нашей конструкции, то вершину v будем называть *свободной*.

Рассмотрим также случайную раскраску вершин $f : V \to \{0, \ldots, r-1\}$, имеющую равномерное распределение на множестве всех раскрасок. Предположим, что нам не повезло и в случайной раскраске f появились одноцветные ребра. Для исправления ситуации мы используем следующий Алгоритм перекраски:

1. если в текущий раскраске имеется одноцветное ребро A цвета $\alpha \in \{0, \ldots, r-1\}$, содержащее еще не перекрашивавшиеся *свободные* вершины, то выберем ту вершину v из них, которая имеет наименьший вес;

2. перекрасим вершину v в цвет $(\alpha + 1)(\mathrm{mod}\ r)$;

3. будем говорить, что вершина v *обвиняет* ребро A;

4. повторяем первый шаг, пока возможно.

Формально, этот Алгоритм может быть описан следующим способом:

Algorithm 1: Алгоритм перекраски

Input: $f : V \to \{0, \ldots, r-1\}$, $\sigma : V \to [0,1]$ инъекция
while *есть одноцветное ребро, в котором первая неперекрашенная вершина v свободна.* **do**
  $f(v)_{mod(r)} \leftarrow (f(v) + 1)_{mod(r)}$
return f

Отметим, что в рамках процедуры перекраски каждая вершина меняет цвет не более одного раза, поэтому Алгоритм не может работать бесконечно и обязательно остановится.

Следующим этапов доказательства является анализ конфигураций, которые получаются, когда Алгоритм не построил правильную раскраску. Козик и Шабанов показали, что такие конфигурации имеют определенный тип. Однако, для получения заявленных результатов нам придется использовать некоторые новые идеи и конструкции, которых не было в [10].

2.2 Конструкция h-дерева

Пусть даже Алгоритм не помог и по итогам его работы гиперграф H все еще содержит одноцветные ребра. Обозначим через A одно из подобных одноцветных ребер. Пусть его цвет в финальной раскраске равен α. Заметим, что ребро A может содержать вершины только двух типов: каждая $v \in A$

- либо несвободная вершина с изначальным цветом $f(v) = \alpha$;
- либо свободная вершина с изначальным цветом $f(v) = \alpha - 1$.

Однако во втором случае вершина v обязана обвинять некоторое другое ребро B, иначе она не смогла бы сменить свой цвет в процессе перекраски.

Начнем построение конфигурации ребер H, которую мы назовем h-деревом.

- В качестве корня мы возьмем ребро A, а его потомками будут все ребра B, которые обвиняются вершинами A (по одному ребру для каждой вершины).
- Далее, в каждом ребре B также могли быть вершины, имевшие изначальный цвет не $\alpha - 1$, а $\alpha - 2$. Подобные вершины также обязаны обвинять некоторые новые ребра C, иначе ребро B не могло бы стать одноцветным и, в свою очередь, никто не смог бы его обвинить. Добавим подобные ребра C в качестве потомков ребра B.
- Продолжим процесс построения, пока будет возможно.

В результате построения мы получим конфигурацию T, вершинами которой выступают ребра гиперграфа H, а связь определяется отношениями обвинения. Для того, чтобы не путать вершины гиперграфа H с вершинами индуцированного графа T, будем называть последние *узлами.* Отметим, что необходимым условием включения произвольного ребра в данную конструкцию является условие его одноцветности на некотором шаге Алгоритма перекраски.

Следствие 1. *Если Алгоритм перекраски не построил правильную раскраску H в r-цветов, то образовалась хотя бы одна T конфигурация.*

Доказательство данного факта можно найти в Утверждении 4 из работы [10].

Докажем, что при определенных ограничениях конфигурация T является деревом.

Лемма 1. *Если в изначальной раскраске гиперграфа H не было одноцветных ребер, в которых все вершины были бы свободными, то либо получается древовидная конфигурация T, либо мы получаем правильную раскраску H в r цветов.*

Доказательство. Действительно, наличие цикла означало бы существование такого узла A, что ребро $e(A)$ обвинила сначала одна вершина, а потом либо его обвинила другая вершина, либо узел A стал корнем. Рассмотрим ситуации подробней. Поскольку обвинять можно только те ребра, которые были одноцветными на некотором шаге Алгоритма перекраски, будем считать, что ребро $e(A)$ было цвета $\alpha_{mod(r)}$. Тогда в результате обвинения ребро $e(A)$ перестало быть одноцветным и стало содержать вершины двух цветов: $\alpha_{mod(r)}$ и $(\alpha+1)_{mod(r)}$. Теперь, чтобы цикл замкнулся на узле A нужно чтобы ребро $e(A)$ снова стало одноцветным, последнее возможно, если в ребре $e(A)$ в изначальной раскраске все вершины были свободные цвета $\alpha_{mod(r)}$. Поэтому если мы запретим существование таких ребер, то у нас не будет циклов в конфигурации T. $\square$

Назовем древесную конфигурацию T h-деревом. Листьями получившегося дерева будут как раз те ребра, которые были одноцветными в исходной случайной раскраске f. Формальное определение h-дерева выглядит следующим образом:

h-дерево — это корневое дерево, пронумерованное по следующему правилу:

1. любому узлу x h-дерева соответствует ребро гиперграфа $e(x)$.
2. каждому ребру f h-дерева соответствует $v(f)$ вершина гиперграфа.
3. для любого ребра $f = (x_1, x_2)$ выполнено что $v(f) \in (e(x_1) \cap e(x_2))$.

2.3 Локальная Лемма

В [9] З.Сабо использововал специальный вариант Локальной Леммы, представляющий обобщение основного варианта, предложенного Й. Беком [22]. Мы же используем следующее обобщение из [7].

Лемма 2. *(Локальная лемма)*

Пусть $\chi = \{X_1, X_2 \ldots, X_m\}$ — независимые случайные величины (или векторы) на произвольном вероятностном пространстве, а $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_k\}$— множество событий, принадлежащих алгебре, порожденной этими случайными величинами. Для каждого A_j обозначим через $vbl(A_j)$ минимальное подмножество случайных величин χ таких, что A_j полностью принадлежит порожденной ими алгебре. Далее, для каждого $X \in \chi$ мы определяем многочлен $w_X(z)$:

$$w_X(z) = \sum_{A \in \mathcal{A}: X \in vbl(A)} Pr(A) z^{|vbl(A)|} \tag{9}$$

Предположим, что существует многочлен $w(z)$, мажорирующий все многочлены $w_X(z)$, т.е. для любого действительно числа $z_0 \geq 1$ выполняется $w(z_0) \geq w_x(z_0)$. Если существует $\tau_0 \in (0,1)$:

$$w(\frac{1}{1-\tau_0}) \leq \tau_0 \tag{10}$$

Тогда, с положительной вероятностью можно избежать все события из $\bar{A}$, т.е.

$$Pr(\cap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}) > 0. \tag{11}$$

Доказательство Локальной Леммы можно посмотреть в [7]. В нашей модели случайные независимые векторы — это пары величин $(f(v), \sigma(v))$, $v \in V$, которые были присвоены каждой вершине v гиперграфа H. Для каждой вершины v мы оцениваем вероятность всех типов всех Плохих событий и далее, суммируем их с соответствующими коэффициентами из (9). Для доказательства мы выбрали следующие параметры:

$$\tau_0 = \frac{1}{n+1}, \quad p = \frac{5 \ln n}{n}. \tag{12}$$

Сейчас мы переходим к анализу Плохих событий.

2.4 Анализ Плохих событий

Предположим, что Алгоритм не помог и по итогам его работы гиперграф H все еще содержит одноцветные ребра. Обозначим через A одно из подобных одноцветных ребер в финальной раскраске. Пусть T — это h-дерево с корнем A. Напомним, что отношение смежности в h-дереве индуцируется отношением обвинения.

2.4.1 Плохое событие 1: много перекрашенных вершин

В качестве первого Плохого события $\mathcal{B}_1$ возьмем событие, когда корень h-дерева содержит хотя бы $20e \ln n$ перекрашенных вершин. Это означает, что есть некоторое ребро C гиперграфа H(корень h-дерева) такое, что выполнены одновременно следующие 4 условия:

- в процессе Алгоритма C стало одноцветным ребром некоторого цвета α;
- каждая вершина $v \in C$ либо имела изначальный цвет $f(v) = \alpha$, либо изначальный цвет — $f(v) = \alpha - 1 \pmod r$;
- число свободных вершин в C хотя бы $20e \ln n$;
- все вершины с изначальным цветом $\alpha - 1$ свободные.

Вероятность события $\mathcal{B}_1(C)$ может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C)) &= r \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-k} \left(\frac{2p}{r}\right)^k = r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \binom{n}{k} (2p)^k \leqslant \\
&\leqslant r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{2enp}{k}\right)^k = r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{5e}{k}\right)^k \leqslant \\
&\leqslant r^{1-n} \sum_{k \geqslant 20e \ln n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant r^{1-n} 2^{1-20e \ln n} \leqslant 2\, r^{1-n} n^{-10}.
\end{aligned}$$

Поэтому, для каждой вершины v, имеет место быть следующая оценка на полином из Локальной Леммы:

$$
\begin{aligned}
w_v^1\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{C\colon v\in C} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|C|} = \\
&\text{(поскольку число ребер инцидентных вершине } v \text{ не превосходит } \Delta(H))\\
&= \sum_{C\colon v\in C} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_1(C))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \Delta(H)\cdot 2\, r^{1-n} n^{-10} e \leqslant \\
&\text{(используя условие 1)}\\
&\leqslant \frac{1}{(2e)^4} r^{n-b} n \cdot 2\, r^{1-n} n^{-10} e = \frac{1}{(2e)^3} r^{1-b} n^{-9} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Будем узел C называть *вырожденным*, если произошло событие $\mathcal{B}_1(C)$. Далее, мы рассматриваем h-деревья без вырожденных узлов.

2.4.2 Удаление повторяющихся ребре

Предположим, что T — это h-дерево с корнем A и в T нет вырожденных узлов. Для каждого узла $C \in T$ введем понятие h-поддерева $N(C)$, состоящего из всех узлов B h-дерева T, кратчайший путь из которых до корня проходит через C.

Отношение смежности в h-дереве индуцируется отношением обвинения. Так, если узел C обвиняет узел F, тогда ребро C содержит вершину $v(F)$, которая обвиняет ребро F, поэтому $v(F) \in C \cap F$. В случае простых гиперграфов такая вершина $v(F)$ однозначно определена для ребер C и F, потому что по определению простого гиперграфа — в пересечении любых двух различных ребер может быть не более одной общей вершины. В случае b-простых гиперграфов такое свойство уже не выполняется, здесь размер $C \cap F$ может быть больше 1. Однако, как утверждает следующая лемма, обвиняющая вершина по-прежнему может быть однозначно определена.

Утверждение 1. *Пусть узлы $F_1, \ldots, F_s$ — потомки первого порядка узла C. Тогда, обвиняющие вершины $v(F_1), \ldots, v(F_s) \in C$ однозначно восстанавливаются по структуре графа T, т.е. существует взаимно-однозначное соответствие между множеством ребер и множеством перекрашенных вершин.*

Доказательство. Узел-предок C был одноцветным некоторого цвета α на некотором шаге Алгоритма перекраски. Поэтому есть вершина $u \in C$, которая была перкрашена в C последней (до того как ребро C стало одноцветным цвета α). В свою очередь, вершина u должна была обвинить некоторое ребро F_i, которое к моменту перекраски u должно было быть одноцветным, цвета $\alpha - 1$. Следовательно, $|C \cap F_i| = 1$ и $u = C \cap F_i = v(F_i)$. Удалим теперь вершину u из C и повторим предыдущие рассуждения для оставшихся вершин. Таким образом мы установим взаимно однозначное соответствие между $F_1, \ldots, F_s$ и $v(F_1), \ldots, v(F_s)$. ∎

Предположим, что C и D различные узлы в T, но $C = D$ как ребра гиперграфа H. Такая ситуация происходит, когда обвиняющие вершины $v(C)$ и $v(D)$ совпадают. В дальнейшем, такие совпадающие ребра C и D будем называть *копиями*. В случае простых гиперграфов такая ситуация может быть разрешена путем рассмотрения простых циклов в гиперграфе H. В случае b-простых гиперграфов такой подход не сработает, потому что у нас нет ограничений на 2-костепени в H. Поэтому будем действовать другим путем.

Заметим, что если узлы C и D совпали, то h- поддеревья $N(C)$ и $N(D)$ тоже совпадают. Таким образом, свойство иметь копию наследуется. Исходя из этого, будем говорить, что вершина v *специальная*, если есть два различных узла C и D в h-дереве T такие, что

- C и D совпадают как ребра гиперграфа;
- $v = v(C)$ и $v = v(D)$;
- родители C и D в h-дереве не совпадают как ребра гиперграфа H.

Определение специальной вершины в h-поддереве абсолютно аналогичное.

Для заданного h-дерева (или h-поддерева) T, определим операцию удаления повторяющихся ребер.

1. Зафиксируем некоторый порядок ζ' на множестве ребер H. Будем нумеровать узлы h-дерева T по возрастанию расстояния до корня A, а если расстояния совпали для каких-то двух узлов, то нумеруем в соответствии с порядком ζ', если приэтом номера ζ' совпали (т.е. мы имеем случай совпадающих ребер), то занумеруем их в соответствии с номерами их предков в h-дереве. Обозначим через ζ финальный порядок на множестве узлов T.

2. Будем теперь рассматривать узлы в соответствии с порядком ζ.

3. Для текущего узла C, если имеется совпадающий узел с ним узел D(назовем его копией C), тогда удаляем из h-дерева все копии C вместе со всеми их потомками (т.е. удаляем D вместе с $N(D)$, если D копия C.).

4. Повторяем предыдущий шаг до тех пор пока возможно.

Обозначим через $O(T)$ новое h-дерево, которое получилось после операции O. Ясно, что в $O(T)$ нет совпадающих ребер. Для удобства, такие h-деревья будем называть *правильными*. Применяя операцию O мы можем сделать все h-деревья правильными. Поэтому всюду далее рассматриваем только правильные h-деревья.

2.4.3 Плохое событие 2: b-непересекающиеся правильные h-деревья

Пусть теперь $T_1 = O(T)$ правильное h-дерево с корнем A. Далее, ребро C будем называть *плохим* ребром, если

$$\left| C \cap \bigcup_{B \in T_1 \setminus N(C)} B \right| \geqslant b+1,$$

т.е. C имеет не менее, чем $b+1$ общую вершину с объединением ребер, которые не входят в поддерево $N()$. Аналогичным образом можно ввести понятие плохого ребра в любом h-поддереве.

Прямым путем в корневом дереве будем называть кратчайший путь, соединяющий вершину с корнем. Возможно 2 случая:

1. В T_1 есть прямой путь, на котором лежат все плохие ребра.

2. В T_1 такого пути нет.

Рассмотрим первую альтернативу: пусть C_m это плохое ребро, которое лежит дальше всех от корня A. Пусть $(C_m, C_{m-1}, \ldots, C_0 = A)$ прямой путь от C_m до A, и все плохие ребра содержатся в этом пути. Предположим также, что для каждого $j = 0, \ldots, m-1$,

$$\left| C_j \cap \bigcup_{i=j+1}^{m} C_i \right| \leqslant b. \tag{14}$$

Правильное h-дереово (или h-поддерево) будем называть *b-непересекающемся* если есть прямой путь , содержащий все плохие ребра h-дерева, и выполняется условие (14). Если в h-дереве нет плохих ребре, то мы можем считать, что прямой путь состоит ровно из одного ребра — корня A. Таким образом в Плохом событии $\mathcal{B}_2(T)$ мы рассматриваем случай b-непересекающихся правильных h-деревьев T.

Пусть величина t — это размер дерева T. Тогда имеет место быть следующее утверждение.

Утверждение 2. *Число вершин гиперграфа H, которые попали в T, не меньше, чем $n + (n-b)(t-1)$.*

Доказательство. Обозначим через $(C_m, \ldots, C_0)$ путь, который содержит все плохие ребра. Для удобства перенумеруем узлы T следующим образом: сначала идут узлы $C_m, \ldots, C_0$, а потом все остальные узлы по возрастанию расстояния до корневого узла C_0. Можно заметить, что каждый узел (кроме узлов $C_m, \ldots, C_0$) имеет номер меньше, чем любой его потомок и каждое ребро гиперграфа, отвечающее этому узлу имеет не более b общих вершин со всеми ребрами, которые отвечают предыдущим узлам. Согласно свойству (14) это же выполняется для узлов $C_m, \ldots, C_0$. Учитывая, что размер T равен t получаем, что общее число вершин гиперграфа хотя бы $n + (n-b)(t-1)$ □

Напомним, что в T нет вырожденных ребер. Поэтому каждое ребро C содержит не больше, чем $10e \ln n$ вершин, которые были перекрашены до того как ребро C стало одноцветным некоторого цвета α . Будем называть такой цвет α *доминантным* цветом C. Заметим, что в изначальной раскраске f хотя бы $n - 10e \ln n$ вершин ребра C уже имеет доминантный цвет α.

Конструкция h-дерева обеспечивает важную вещь: если известен итоговый цвет α корня A h-дерева T_1, то изначальные цвета всех вершин гиперграфа, входящих в T, однозначно определяется по графу T_1. Это непосредственно следует из Алгоритма перекраски. Второе утверждение говорит, что это же верно и для всех h-поддеревьев.

Утверждение 3. *Если зафиксировать доминантный цвет корня A, но изначальные цвета всех вершин гиперграфа, которые попали в $T_1 = O(T)$, однозначно определяются.*

Доказательство. Для фиксированного доминантного цвета корня A, доминантные цвета всех остальных узлов однозначно определены. Согласно операция удаления повторяющихся ребер (операция O) потомки корня A не удаляются. Поэтому согласно доказанному утверждению 1 множество обвиняющих вершин $v(F_1), \dots, v(F_s)$ будет однозначно определено потомками $F_1, \dots, F_s$. Таким образом, цвета A восстанавливаются.

Далее, занумеруем оставшиеся узлы в соответствии с нумерацией ζ и положим $\mathcal{R}(T_1) = \{v(F_1), \dots, v(F_2)\}$. Тогда для каждого следующего узла C,

- нам известны все цвета всех его общих вершин с предками. Добавим их в $\mathcal{R}(T_1)$;
- нам известны все цвета в множестве $\mathcal{R}(T_1) \cap C$;
- изначальные цвета всех оставшихся вершин равны доминантному цвету C.

Действительно, если изначальный цвет вершины w не равен доминантному цвету C, тогда эта вершины обвиняет другое ребро D, и потомки C находятся в h-дереве. Может так оказаться, что D было удалено в результате операции O, но в таком случае T_1 содержит узел D', являющийся копией D. Родители D' содержат вершину w и имеет номер ζ меньше, чем номер C, поэтому $w \in \mathcal{R}(T_1)$. $\square$

Пусть $\mathcal{R}(T_1)$ обозначает множество всех перекрашенных вершин в правильном h-дереве T_1 с корнем A. Приведенное выше утверждение показывает, что это множество однозначно определяется через ребра и их пересечения. Более того, повторяя доказательство утверждения 1 мы можем получить, что для каждого узла $C \neq A$ его обвиняющая вершина $v(C)$ также однозначно определена.

Утверждение 4. *Пусть $A_0 = A, A_1, \dots, A_{t-1}$ — это узлы T_1. Тогда в каждом A_i найдется подмножество вершин $R_i \subset A_i$, такое что*

1. *$|R_i| \geqslant n - 20e \ln n - b$ для любого $i = 1, \dots, t-1$;*
2. *множества $R_0, \dots, R_{t-1}$ попарно не пересекаются , $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$;*
3. *все вершины в R_i в изначальной раскраске f покрашены в доминантный цвет ребра A_i ;*
4. *вершина $v(A_i)$ принадлежит R_i и это первая вершина в R_i (в соответствии с нумерацией σ) для каждого $i > 0$;*

Доказательство. Без потери общности, предположим, что $(A_m, \dots, A_0)$ прямой путь, который содержит все плохие ребра. Определим множество R_i для $i = 0, \dots, m$, следующим образом:

$$R_i = \{v(A_i)\} \cup A_i \setminus \left(\mathcal{R}(T_1) \cup \bigcup_{j=i+1}^{m} A_j \right). \tag{15}$$

Здесь мы предполагаем, что $\{v(A_0)\}$ равно пустому множеству. Для всех $i > m$, определим

$$R_i = \{v(A_i)\} \cup A_i \setminus \left(\mathcal{R}(T_1) \cup \bigcup_{F \in T_1 \setminus N(A_i)} F \right). \tag{16}$$

Так как каждое ребро A_i невырожденное, то для A верно, что $|A_i \cap \mathcal{R}(T_1)| \leqslant 20e \ln n$. Для $i > m$, A_i не плохое ребро, поэтому $|A_i \cap \bigcup_{F \in T_1 \setminus N(A_i)} F| \leqslant b$. Таким образом, $|R_i| \geqslant n - 20e \ln n - b$. Для $i \leqslant m$, необходимое соотношение следует из (14).

Предположим, что узлы $A_{m+1}, \ldots, A_{t-1}$ занумерованы по возрастанию их расстояния до корня. Обозначим через $R'_i = R_i \setminus \{v(A_i)\}$. Для $j < i$, множество R'_i может иметь непустое пересечение с A_j только тогда, когда A_j родитель A_i. Но R'_j не имеет пересечений с детьми A_j, потому что все их обвиняющие вершины попадают в $\mathcal{R}(T_1)$. Множества $R'_1, \ldots, R'_m$ также не пересекаются, это следует из определения (15). Если $i \leqslant m < j$, тогда A_i не могут быть потомками A_j, отсюда R'_i и R'_j не могут пересекаться. Следовательно, все множества $R'_0, \ldots, R'_{t-1}$ не пересекаются. Из определения (15) и (16) следует, что все эти множества не пересекаются с $\mathcal{R}(T_1)$, поэтому добавив вершины $v(F_i)$ в непересекающиеся множества $\mathcal{R}(T_1)$ мы по-прежнему будем иметь непересекающиеся множества $R_0, \ldots, R_{t-1}$.

Поскольку R_i не пересекается с детьми A_i, в изначальной раскраске f все вершины R_i должны окрашены в доминантный цвет ребра A. Более того, Алгоритм говорит, что вершина $v(A_i)$ может обвинить A_i тогда и только тогда, когда она является первой неперекрашенная вершиной в момент, когда A_i стало одноцветным. Итак, $v(A_i)$ — это первая вершины в R_i. □

Сейчас мы уже можем оценить вероятность событий $\mathcal{B}_2(T_1)$, т.е. события когда T_1 это b-непересекающееся правильное h-дерево без вырожденных ребер.

Утверждение 5. *Для каждого b-непересекающегося правильного h-дерева T размера t без вырожденных ребер,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_2(T)\right) \leqslant r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n - 20e \ln n - b}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e \ln n}. \tag{17}$$

Доказательство. Согласно доказанному утверждению 3 вероятность того, что для данного зафиксированного доминантного цвета корня все остальные вершины гиперграфа из T_1 будут иметь заранее определенные цвета, равна to r^{-m}, где m это число вершин в T_1. Из утверждения 2 следует, что $m \geqslant n + (n-b)(t-1)$.

Пусть A_0 это корень. Согласно утверждению 4, для любого $A_i \in T_1$, $A_i \neq A_0$, вершина $v(A_i)$ первая в множестве R_i, размер которого хотя бы $n - 20e \ln n - b$. ВСе такие множества являются попарно непересекающимися, поэтому данные события независимы и вероятность может быть оценена следующим образом $(1/(n - 20e \ln n - b))^{t-1}$.

Наконец, все вершины из специального множества $R_0 \subset A_0$ в изначальной раскраске f имеют доминантный цвет α и все они несвободные. С другой стороны, Алгоритм не закончился и ребро A_0 не может быть одноцветным в финальной раскраске. Вероятность этого события равна $(1-p)^{|R_0|} \leqslant (1-p)^{n-20e \ln n - b}$. Для завершения доказательства остается заметить, что R_0 не пересекается с остальными множествами R_i.

Все три события независимы и вместе составляют событие $\mathcal{B}_2(T)$. Поэтому, имеет место быть оценка (17). □

Последнее утверждение этого параграфа дает оценку на число конфигураций, содержащих фиксированную вершину и образующих h-дерево. Для обоснования этого факта мы повторим доказательство утверждение 6 в [10].

Утверждение 6. *Пусть $H = (V, E)$ — некоторый гиперграф с максимальной степенью ребра $\Delta(H)$ и пусть $v \in V$ произвольная вершина. Тогда число h-деревьев размера t, содержащих вершину v не превосхоит $(4\Delta(H))^t$.*

Доказательство. Воспользуемся верхней оценкой числа корневых деревьев с непронумерованными вершинами:

$$4^t/t \tag{18}$$

После того как выбрана структура (выбрано корневое дерево) есть t способов выбрать узел h-дерева, который будет содержать фиксированную вершину v гиперграфа H. После этого остается поставить в соотвествие каждому узлу дерева ребро гиперграфа. Достаточно действовать по следующему правилу: для каждого непоределенного еще узла X, который смежен с уже поределенным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Ясно, что v принадлежит не больше чем $(\Delta(H) + 1)$ ребру гиперграфа, а выбор каждого следующего ребра возможен не более чем $\Delta(H)$ способами. Таким образом, получаем

$$t \cdot (\Delta(H))^{t-1} \cdot (\Delta(H) + 1) \cdot \frac{4^t}{t} \sim (4\Delta(H))^t \tag{19}$$

□

Теперь все готово для того, чтобы получить нужную оценку на локальный полином для Плохого события 2.

$$w_v^2\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{T_1\colon v\in T_1} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_2(T_1)) \left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T_1))|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \sum_{T_1\colon v\in T_1,\, |T_1|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_2(T_1)) \left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T))|} \leqslant$$

(используя (17) и оценку $|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_2(T_1))| \leqslant nt$)

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \sum_{T_1\colon v\in T_1,\, |T_1|=t} r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n-20e\ln n - b}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e\ln n - b} e^t \leqslant$$

(предполагая n достаточно большим и используя Утверждение 6 с условием (1))

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} (4\Delta(H))^t r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} (1-p)^{n-20e\ln n - b} e^t \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{|E|} \left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^t n^t \left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} \left(1-\frac{5\ln n}{n}\right)^{n-20e\ln n} e^t \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot n^{-5+o(1)} \sum_{t=1}^{|E|} \left(\frac{8e}{(2e)^4}\right)^t = n^{-4+o(1)} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}. \tag{20}$$

2.4.4 Плохое событие 3: большое b-непересекающееся правильное h-поддерево

Сейчас мы предполагаем, что правильное h-дерево $T_1 = O(T)$ не является b-непересе- -кающемся, но однако имеет h-поддерево T', такое что $T_1' = O(T')$ является b-непересе- -кающемся правильным h-поддеревом размера хотя бы $\ln n$, $t = |T_1'| \geqslant \ln n$. Пусть $\mathcal{B}_3(T_1')$ соответствующее событие. Ранее сформулированные утверждения 2–4 также применимы к h-поддеревьям. Единственным отличием является оценка вероятности.

Утверждение 7. *Для каждого b-непересекающегося без вырожденных ребер правильного h-поддерева T' размера t,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_3(T_1')\right) \leqslant r^{1-n-(n-b)(t-1)} \left(\frac{1}{n - 20e\ln n - b}\right)^{t-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Первые два события из $\mathcal{B}_2(T_1)$ уже доказаны в утверждении 5. Но теперь мы не можем сказать, что большинство вершин корня должны быть несвободными (известно только, что хотя бы одна свободная), поэтому мы пропускаем третье событие для $\mathcal{B}_2(T_1)$. Объединение первых двух событий из (21) дает требуемую оценку вероятности (21). □

Число h-поддеревьев фиксированного размера, которые содержат фиксированную вершину может быть оценено также как в утверждении 6. Итак, мы выписываем оценку на локальный полином для Плохого события 3.

$$\begin{aligned}
w_v^3\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) &= \sum_{T_1'\colon v\in T_1'} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_3(T_1'))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))|} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\ \sum_{T_1'\colon v\in T_1',\ |T_1'|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_3(T_1'))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (21) и оценку } |\mathrm{vln}(\mathcal{B}_3(T_1'))| \leqslant nt) \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\ \sum_{T_1'\colon v\in T_1',\ |T_1'|=t} r^{1-n-(n-b)(t-1)}\left(\frac{1}{n-20e\ln n-b}\right)^{t-1} e^t \leqslant \\
&\text{(предполагая } n \text{ достаточно большим и пользуясь условием (1))} \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n} (4\Delta(H))^t r^{1-n-(n-b)(t-1)}\left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} e^t \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\geqslant \ln n}\left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^t n^t\left(\frac{2}{n}\right)^{t-1} e^t \leqslant n\cdot\sum_{t\geqslant \ln n}\left(\frac{8e}{(2e)^4}\right)^t \leqslant \\
&\leqslant n\cdot(2e^3)^{1-\ln n} \leqslant n^{-3+o(1)} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}.
\end{aligned} \tag{22}$$

2.4.5 Плохое событие 4: маленькое b-непересекающееся правильное h-поддерево

Пусть T — это такое h-дерево, что $O(T)$ не является b-непересекающемся. Рассмотрим в нем наименьшее поддерево Y, такое что $Y' = O(Y)$ также не является b-непересекающемся.

Пусть A — это корень Y и пусть $F_1, \dots, F_s$ — это дети Y. Тогда любое поддерево $N(F_i)$ обладает тем свойством, что $O(N(F_i))$ является b-непересекающемся. (иначе бы Y не было наименьшим). Если размер $O(N(F_i))$ больше, чем $\ln n$ тогда мы попадает в уже разобранный случай Плохого события 3. Поэтому будем считать, что размер $O(N(F_i))$ меньше, чем $\ln n$. Поскольку $s \leqslant 20e \ln n$ (напомним, что у нас нет вырожденных ребер в T), размер Y' также ограничен:

$$|Y'| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |O(N(F_i))| + 1 \leqslant (20e \ln n) \ln n + 1 \leqslant 30e(\ln n)^2. \tag{23}$$

В данном случае соотношение (23) может и не выполняться, поскольку некоторые ребра Y могли быть удалены в $O(Y)$.

Если Y' не является b-непересекающемся, тогда

(a) либо есть прямой путь $C_m, \dots, C_1, C_0 = A$, который содержит все плохие ребра, и при этом соотношение (14) не выполняется;

(b) либо такого пути нет и поэтому найдутся два плохих ребра C и D, такие что $C \notin N(D)$ и $D \notin N(C)$.

Обозначим данное событие через $\mathcal{B}_4(Y')$. Тогда верна следующая оценка вероятности для $\mathcal{B}_4(Y')$.

Утверждение 8. *Пусть размер Y' равен t. Тогда,*

$$\mathsf{Pr}\left(\mathcal{B}_4(Y')\right) \leqslant r^{1-t(n-bt)}. \tag{24}$$

Доказательство. Узлы Y' не совпадают как ребра гиперграфа H, т.к. мы удалили все копии с помощью операции $O(Y)$. Ввиду того, что H является b-простым гиперграфом, каждый узел как ребро гиперграфа H содержит хотя бы $n - bt$ вершин, которые присутствуют только в нем. Поэтому, общее число вершин хотя бы $t(n - bt)$. Конструкция h-поддерева обеспечивает то, что для данного доминантного цвета, цвета всех остальных вершин однозначно определяются. Аналогичные рассуждения верно и после проведения операции O (смотрите утверждение (4)). Отсюда следует оценка (24). $\square$

Далее мы получим оценку на число h-поддеревьев, которые не являются b-непересе- -кающимися и содержат некоторую фиксированную вершину v гиперграфа H.

Утверждение 9. *Число b-непересекающихся h-поддеревьев размера t, в которых нет вырожденных ребер и которые содержат некоторую фиксированную вершину v, не превосходит*

$$2 \cdot 4^t t^2 (\Delta(H))^{t-1} \binom{nt}{b+1}.$$

Доказательство. Количество корневых деревьев размера t оценивается числом $4^t/t$.

Рассмотрим случай (a). Напомним, что мы имеем прямой путь $C_m, \dots, C_1, C_0$, с корнем C_0, который содержит все плохие ребра. В нашем случае условие (14) не выполнено.

Мы рассмотрим три конкретных узла: узел D, который содержит вершину v, узел C_m и какой-нибудь узел C_j, $j < m$, для которого условие (14) не выполняется (зафиксировать такие три ребра можно не более, чем t^3 способов). Напомним, что C_m — это плохое ребро. Узел D может быть выбран не более, чем $\Delta(H)$ способами. Теперь, если C_m не входит в прямой пусть, содержащий D и корень C_0, тогда, до определения C_m (т.е. до сопостовления узлу C_m некоторого ребра гиперграфа H), мы можем определить все узлы, которые не принадлежат $N(C_m)$. Достаточно действовать по следующему правилу: для каждого непоределенного еще узла X, который смежен с уже пореденным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Каждый раз мы имеем не более, чем $\Delta(H)$ вариантов . После этого мы выбраем C_m. Поскольку наш гипепрграф b-простой и C_m плохое ребро, то такое ребро однозначно определяется выбором $b+1$ вершины из множества $\bigcup_{F \in Y' \setminus N(C_m)} F$. Это множество уже определено и его размер не больше, чем nt, поэтому C_m может быть определено не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами. Все оставшиеся узлы в $N(C_m)$ могут быть определены используя обычное правило, и это дает не более, чем $\Delta(H)$ вариантов.

Если C_m содержится в прямом пути, содержащем D и корень C_0, тогда мы можем определять узлы пути по обычному правилу до тех пор пока не достигнем C_j. Согласно сделанному дополнению к (14) узел C_j может быть определен не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами, потому что это ребро должно содержать хотя бы $b + 1$ общую вершину с уже выбранными ребрами $C_m, \dots, C_{j+1}$.

В случае (b) у нас есть два плохих ребра C и F, которые не лежат ни в одном прямом пути, идущем до корня.Снова мы можем рассмотреть три конкретных узла: узел D, который содержит вершину v, узел C и узел F. Тогда либо мы можем определить все узлы, которые не попадают в $N(C)$ до того как потребуется определить C, либо мы можем определить все узлы, которые не попадают в $N(F)$ до того как потребуется определить F. Действительно, хотя бы один из узлов C или F не лежит на прямом пути, соединяющем другой узел с корнем. Пусть это будет узел C. Снова мы пользуемся обычное правило: для каждого неопределенного еще узла X, который смежен с уже определенным узлом Z выбираем ребро, которое пересекает Z. Каждый раз мы имеем не более, чем $\Delta(H)$ вариантов . После этого мы выбраем C. Поскольку наш гиперграф b-простой и C плохое ребро, то такое ребро однозначно определяется выбором $b + 1$ вершины из множества $\bigcup_{F' \in Y' \setminus N(C)} F'$. Это множество уже определено и его размер не больше, чем nt, поэтому C может быть определено не более, чем $\binom{nt}{b+1}$ способами. Все оставшиеся узлы в $N(C)$ могут быть определены используя обычное правило, и это дает не более, чем $\Delta(H$ вариантов. $\square$

Итак, мы получаем следующую оценку для локального полинома Плохого события 4:

$$
\begin{aligned}
w_v^4\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) &= \sum_{Y'\colon v\in Y'} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_4(Y'))\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (23))} \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2}\ \sum_{Y'\colon v\in Y',\ |Y'|=t} \mathsf{Pr}(\mathcal{B}_4(Y'))\left(1+\frac{1}{n}\right)^{|\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))|} \leqslant \\
&\text{(используя (24) и оценивая } |\mathrm{vln}(\mathcal{B}_4(Y'))| \leqslant nt) \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2}\ \sum_{Y'\colon v\in Y',\ |Y_1'|=t} r^{1-t(n-bt)}e^t \leqslant \\
&\text{(предполагая } n \text{ достаточо большим и используя условие (1))} \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 2\cdot 4^t(\Delta(H))^{t-1}t^2\binom{nt}{b+1}r^{1-t(n-bt)}e^t \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8\left(\frac{4}{(2e)^4}\right)^{t-1} t^2n^te^t(nt)^{b+1}r^{(n-b)(t-1)+1-t(n-bt)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8e\left(\frac{1}{4e^3}\right)^{t-1} t^2n^t(nt)^{b+1}r^{b(t^2-t+1)+1-n} \leqslant \\
&\text{(поскольку } t=O((\ln n)^2) \text{ и } n \text{ велико по сравнению с } b) \\
&\leqslant \sum_{t\leqslant 30e(\ln n)^2} 8e\left(\frac{1}{4e^3}\right)^{t-1} e^{O((\ln n)^3)}r^{O((\ln n)^2)-n} \leqslant \\
&\leqslant 2^{O((\ln n)^3)-n} \leqslant \frac{1}{10(n+1)}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

2.5 Завершение доказательства Теоремы 1

Для применения Локальной Леммы мы должны проверить выполнимость достаточных условий (10). А именно, для каждой вершины v, имеют место быть оценки (13), (20), (22), (25) для локальных полиномов. Поэтому их сумма $w_v(z) = \sum_{i=1}^4 w_v^i(z)$ также ограничена

$$
w_v\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) = \sum_{i=1}^{4} w_v^i\left(\frac{1}{1-\tau_0}\right) \leqslant \frac{4}{10(n+1)} < \frac{1}{n+1} = \tau_0.
$$

Из Локальной леммы следует, что с положительной вероятностью не произойдет ни одно из указанных Плохих событий. Следовательно, с положительной вероятностью Алгоритм построит правильную раскраску в r-цветов. Теорема 1 доказана.

3 Следствия

3.1 Максимальная степень вершины

Первое следствие устанавливает связь между максимальной степенью вершины b-простого гиперграфа и его хроматического числа.

Следствие 2. *Пусть фиксированы числа r и b. Тогда существует число $n_0(b)$, такое, что всякий b-простой n-однородный гиперграф H с $\chi(H) > r$ и $n > n_0(b)$ имеет максимальную степень вершины не меньше, чем $1/(2e)^4 r^{n-b}$.*

Доказательство. Из Теоремы 1 следует, что H содержит ребро A степени хотя бы $1/(2e)^4 n \cdot r^{n-b}$. Следовательно, в A есть вершина у которой степень хотя бы $1/(2e)^4 r^{n-b}$. □

3.2 Число ребер

В [23] Косточка, Мубай, Рёдль и Тетали предложили рассматривать задачу об оценке минимально возможного числа ребер в b-простом n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше, чем r. . Данную величину принято обозначать через $m(n, r, b)$ Авторы [23] показали, что при фиксированных n и b, функция $m(n, r, b)$ имеет порядок $\Theta_{n,b}((r \ln r)^{1+1/b})$ как функция от r. В данном работе мы рассмотрим противоположную ситуацию: r, b фиксированы, а n растет. Для данного случая Косточка и Кумбхат KostKumb показали, что

$$r^{n(1+1/b)} n^{-\varepsilon(n)} \leqslant m(n, r, b) \leqslant c_1\, r^{n(1+1/b)} n^{2(1+1/b)}, \tag{26}$$

где $\varepsilon(n) > 0$ медленно убывает к нулю при $n \to +\infty$ и $c_1 = c_1(b, r) > 0$ не зависит от n. Позже, верхняя оценка в (26) была улучшена Косточкой и Рёдлем [?], они доказали, что

$$m(n, r, b) \leqslant c_2\, r^{n(1+1/b)} n^{1+1/b}, \tag{27}$$

где $c_2 = c_2(b, r) > 0$ не зависит от n. Наилучшей нижней оценкой на сегодняшней день является оценка Козика [7]:

$$m(n, r, b) \geqslant \Omega_{r,b}\left(\left(\frac{r^n}{\ln n}\right)^{1+1/b}\right). \tag{28}$$

Мы улучшили оценку (28) следующим образом.

Следствие 3. *При фиксированных $r \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ и при достаточно большом $n > n_0(b)$,*

$$m(n, r, b) \geqslant c \cdot r^{n(1+1/b)}, \tag{29}$$

где $c = c(r, b) > 0$ зависит только от depends r и b.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения мы повторим рассуждения из [7]. Доказательство базируется на идеи, впервые предложенные Ловасом и Ердёшем и доработанные Косточкой и Кумбхатом. Пусть $H = (V, E)$ b-простой n однородный гиперграф, который нельзя правильно раскрасить в r цветов. Рассмотрим вспомогательный гиперграф $F^b(H) = (V, E')$, который получается из исходного гиперграфа удалением из каждого ребра первых b вершин наибольшей степени. Полученный новый гиперграф является $(n-b)$ однородным, но по-прежнему остается r-нераскрашиваемым и b-простым.

Полагая параметр n достаточно большим и используя доказанное следствие 3 мы можем , что в $F^b(H) = (V, E')$, а значит и в исходном гиперграфе $H = (V, E)$, существует вершина v со степенью не меньше, чем $d = 1/(2e)^4 r^{n-2b}$. Обозначим множество инцидентных v ребер за F, а множество всех удаленных вершин из F за Y. Мощность множества Y можно оценить через d. Для этого нужно заметить, что любое b подмножество вершин из Y вместе с вершиной v содержится не больше чем в одном ребре и любое ребро из F содержит некоторое b-подмножество Y.

$$d \leqslant \binom{|Y|}{b} \leqslant |Y|^b.$$

откуда следует, что $|Y| \geq d^{1/b}$ Для удобства будем считать, что $m = \lceil d^{1/b} \rceil$. Для вершин $v_1, v_2, ..., v_m$ из множества $|Y|$ определим последовательно числа $d_1, d_2, ..., d_m$, где d_i равно общему числу всех ребер, которые содержат v_i и которые имеют не больше , чем $(b-1)$ общую вершину с множеством $\{v_1, v_2, ...v_{i-1}\}$. Нетрудно заметить, что выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \geqslant \sum_{j=1}^{m} \left(d - \binom{j-1}{b} \right) \geqslant dm - \binom{m}{b+1} \geqslant d^{1+1/b} - \frac{m^{b+1}}{(b+1)!} \geqslant c_0 \, d^{1+1/b},$$

, где $c_0 = c_0(b) > 0$ зависит только от b. Поделив последнее значение на b, так как каждое ребро может участвовать не больше чем в b суммах, мы получим искомый результат.

$$|E| \geqslant \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m} d_j \geqslant \frac{c_0}{b} \, d^{1+1/b} \geqslant c(r, b) r^{n(1+1/b)}.$$

□

Заметим, что нижняя оценка (29) is only $n^{1+1/b}$ раз меньше, чем верхняя оценка (27) для фиксированных r, b и большого n.

4 Доказательство Теоремы 2

Пусть $n > 5$, а $H = (V, E)$ — n–однородный гиперграф. Для удобства будем считать, что число вершин m четно, а число ребер меньше, чем $c\sqrt{n/\ln n}2^n$. Под случайной раскраской $C = C(K_1, K_2)$ будем понимать случайное разбиение множества вершин гиперграфа на две равные доли: $V = K_1 \sqcup K_2, |K_1| = |K_2|$.

Лемма 3. *Пусть $H = (V, E)$ произвольный n–однородный гиперграф, в котором выполнены следующие соотношения:*

$$|E| < c\sqrt{n/\ln n}2^n, \qquad |V| < n(n-1)/\ln n.$$

Тогда при $c < 1/2$ для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску C гиперграфа H. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) &\leq \sum_{e \in E} \frac{2\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \\
&= |E| \frac{2^{-n+1}(1-2/m)...(1-2(n-1)/m)}{(1-1/m)...(1-(n-1)/m)} \leq \\
&\leq 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \frac{\exp(\ln(1-2/m)+...+\ln(1-2(n-1)/m))}{\exp(\ln(1-1/m)+...+\ln(1-(n-1)/m))} = \\
&= 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \prod_{x=1}^{n-1} \exp\left(\ln(1-2x/m) - \ln(1-x/m)\right).
\end{aligned}$$

Из разложения натурального логарифма в ряд Тейлора следует, что $\ln(1-2x/m) - \ln(1-x/m) < -x/m$ при $x \in (0;1)$. Поэтому, складывая показатели степеней у произведения экспонент, окончательно получаем:

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) \leq 2c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} e^{-n(n-1)/2m} \leq 2c\frac{1}{\sqrt{\ln n}} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная раскраска C является справедливой раскраской. Лемма 6 доказана. □

Таким образом, нам остается рассмотреть гиперграфы, в которых число вершин m больше, чем $n(n-1)/\ln n$.

Рассмотрим случайную величину X, равную числу одноцветных ребер в раскраске C. Оценим математическое ожидание X:

$$\mathsf{E}X = \frac{2|E|\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \leqslant \frac{2|E|\binom{m}{m/2}(\frac{m/2}{m})^n}{\binom{m}{m/2}} \leq 2c\sqrt{n/\ln n}.$$

Следовательно, с вероятностью не меньше чем $(1-2/x)$ в случайной раскраске гиперграфа $H = (V, E)$ будет не больше, чем $cx\sqrt{n/\ln n}$ одноцветных ребер.

Следующим шагом в доказательстве теоремы 2 является применение модифицированной версии Алгоритма перекраски Радакришнана-Сринивасана. Алгоритм Радакришнана-Сринивасана описан в [4], а наша модификация состоит в том, что вместо того, чтобы красить вершины случайно и независимо в 2 цвета, мы случайно делим множество вершин пополам и одну половину вершин красим в один цвет, а другую — в противоположный. Целью нашего Алгоритма перекраски является построение из раскраски C правильной раскраски в два цвета.

4.1 Алгоритм построения правильной раскраски из случайной раскраски C

Наша цель — построить из случайной раскраски C некоторую новую случайную раскраску и показать, что она является правильной с положительной вероятностью. Для построения подобной раскраски зададим случайный порядок на множестве вершин гиперграфа V с помощью отображения $\sigma : V \to [0,1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,1]$. Также определим отображение $b : V \to \{0,1\}$, где $b(v), v \in V$, — независимые бернуллиевские случайные величины с параметром $p = (1/2)\ln n/n$.

Предположим, что нам не повезло и в изначальной случайной раскраске C есть одноцветные ребра. Пусть $v_1, v_2, ..., v_m$ — вершины гиперграфа, заданные в порядке σ, т.е. $\sigma(v_1) \le \sigma(v_2) \le ... \le \sigma(v_m)$. Положим $\chi_0 = C$. Обозначим через $\mathcal{M}(v_k, \chi_0)$ число инцидентных v_k вершине одноцветных ребер в раскраске χ_0. Для исправления ситуации мы используем следующий Алгоритм перекраски:

1. Если $\mathcal{M}(v_1, \chi_0) \neq 0$ и $b(v_1) = 1$, перекрашиваем вершину v_1, получая раскраску χ_1.

2. Если хотя бы одно ребро из $\mathcal{M}(v_2, \chi_0)$ продолжает быть одноцветным в раскраске χ_1 и $b(v_2) = 1$, перекрашиваем вершину v_2, получая раскраску χ_2.

i. Если хотя бы одно ребро из $\mathcal{M}(v_i, \chi_0)$ продолжает быть одноцветным в раскраске χ_{i-1} и $b(v_i) = 1$, перекрашиваем вершину v_i, получая раскраску χ_i.

Обозначим финальную раскраску через χ^*, а множество одноцветных ребер в раскраске χ^* через $\mathcal{M}(\chi^*)$.

4.2 Анализ ситуаций, в которых не получается правильная раскраска

Пусть f — произвольное ребро гиперграфа H. Оценим вероятность того, что ребро f стало одноцветным в финальной раскраске χ^*. Возможны две ситуации, когда ребро f стало одноцветным в χ^*.

1. Ребро f было одноцветным в χ_0 и осталось одноцветным того же цвета в χ^*. Обозначим данное событие через $\mathcal{A}(f)$. Заметим, что в этом случае для каждой вершины

ребра f выполнено $b(v_i)=0$. Отсюда,

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}(f)) \le \frac{2\binom{m-n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}}(1-p)^n \le \frac{2\binom{m}{m/2}\left(\frac{m/2}{m}\right)^n}{\binom{m}{m/2}}(1-p)^n \le 2^{-n+1}(1-p)^n$$

2. Ребро f не было одноцветным в χ_0, но стало одноцветным в χ^*. Предположим, что в ребре f перекрашена $l+1$ вершина. Рассмотрим вершину v^*, которая была перекрашена в f последней. В силу Алгоритма перекраски для v^* существовало инцидентное одноцветное в раскраске χ_0 ребро f', в котором номер $\sigma(v^*)$ меньше номеров всех остальных вершин z из f', для которых $b(z)=1$. Нетрудно заметить, что для такого ребра f' будет верно, что $|f\cap f'|=1$.

   Обозначим множество оставшихся перекрашенных вершин ребра f за S, $v^*\notin S$. Заметим, что для каждой вершины $w\in S$ выполнено, что $b(w)=1$ и $\sigma(w)<\sigma(v^*)$.

   Обозначим через $\mathcal{B}(f,f',S)$ событие, заключающееся в том, что два конкретных ребра f и f' и множество вершин $S, S\subset f$, обладают соотвествующими, вышеперечисленными свойствами. Еще нам понадобиться событие $\mathcal{B}(f,f')$, отличающееся от $\mathcal{B}(f,f',S)$ тем, что множество S заранее не фиксировано.

$$\mathsf{P}(\mathcal{B}(f,f',S)|\sigma(v^*)=x) \le \frac{2\binom{m-2n+1}{m/2-(n-l-1)}}{\binom{m}{m/2}}p^{l+1}x^l(1-xp)^{n-1} \le$$

$$\le 2\cdot 2^{-2n+2}p^{l+1}x^l(1-xp)^{n-1}, \tag{30}$$

$$\mathsf{P}(\mathcal{B}(f,f')) \le 2^{-2n+3}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^{l+1}\int_0^1 x^l(1-xp)^{n-1}dx \le 2\cdot 2^{-2n+2}p.$$

Второе неравенство в (2.1) вытекает из следующих оценок комбинаторных функций:

$$\frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}e^{-1/(4p)} < \binom{2p}{p} < \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}},$$

$$\frac{\binom{m-2n+1}{m/2-(n-l-1)}}{\binom{m}{m/2}} \le \frac{2\binom{m-2n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \le 2^{-2n+1}e^{1/(2m-2n)}\sqrt{\frac{1}{1-2n/m}} \le 2^{-2n+1}\cdot 2, \tag{31}$$

при $n>5$ и $m>n(n-1)/\ln n$, причем, в (2.2) при достаточно большом n множитель 2 можно заменить на $(1+\epsilon(n))$, где $\epsilon(n)$ сколь угодно мало.

В итоге,

$$\mathsf{P}(\mathcal{M}(\chi^*)\neq\emptyset) \le 2\cdot 2^{-n}|E|(1-p)^n + 2\cdot 2\cdot 2^{-2n+1}|E|^2p \le$$

$$\le 2c\sqrt{n/\ln n}\cdot\left(1-\frac{\ln n}{2n}\right)^n + 8c^2n/\ln n\cdot\frac{\ln n}{2n} \le \frac{2c}{\sqrt{\ln n}} + 4c^2.$$

А при достаточно большом n,

$$\mathsf{P}(\mathcal{M}(\chi^*)\neq\emptyset) \le 2\cdot 2^{-n}|E|(1-p)^n + 4(1+\epsilon(n))2^{-2n}|E|^2p \le 2c^2(1+\epsilon(n)). \tag{32}$$

4.3 Построение справедливой раскраски C^* из правильной раскраски χ^*

Обозначим через $M^i(\chi^*)$, $i = 1, 2$, множество вершин, перекрашенных в цвет i в результате Алгоритма перекраски.

Обозначим через $D^i(C, j)$, $i = 1, 2$, $j \geq 1$, множество ребер E, каждое из которых имеет ровно j неперекрашенных вершин цвета i в финальной раскраске χ^*.

$$D^1(C, j) = \begin{cases} e : e \in E(H) : \\ (e \setminus (M^2(\chi^*)) \cap K_1(C) = j, \end{cases}$$

$$D^2(C, j) = \begin{cases} e : e \in E(H) : \\ (e \setminus (M^1(\chi^*)) \cap K_2(C) = j. \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть $H = (V, E)$ n-однородный гиперграф с $|E| \leqslant c\sqrt{n/\ln n}2^n$. Тогда с вероятностью не меньше, чем $(1 - 2c(6 \cdot e^2 - 2)/\alpha - 2c(e-1)/\alpha\sqrt{\ln n})$, в случайной раскраске C выполнено:*

$$|D^i(C, j)| < \alpha n^{j+1/2}$$

для всех $1 \leq j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor$ и $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть в ребре e ровно k вершин, перекрашенных в цвет $i (\mathrm{mod}\ 2) + 1$. Обозначим через $D^i(C, j, k)$, $i = 1, 2$, $j \geq 1$, $k \geq 0$, множество ребер $D^i(C, j)$, в которых в финальной раскраске χ^* ровно k вершин перекрашенных в цвет $i (\mathrm{mod}\ 2) + 1$.

Случай 1: $k = 0$. Тогда,

$$\mathsf{P}(e \in D^i(C, j, 0)) \leq \binom{n}{j} \frac{\binom{m-n}{m/2-j}}{\binom{m}{m/2}},$$

$$\mathsf{E}|D^i(C, j, 0)| \leq |E| \cdot \binom{n}{j} \frac{\binom{m-n}{m/2-j}}{\binom{m}{m/2}} \leq |E| \cdot \frac{n^j}{j!} \frac{\binom{m-n}{m/2-(n/2)}}{\binom{m}{m/2}} \leq$$
$$\leq |E| \cdot \frac{2^{-n} n^j}{j!} \leq c \frac{n^{j+1/2}}{\sqrt{\ln n} j!},$$

$$\mathsf{P}(\exists j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor : |D^i(C, j, 0))| \geqslant \alpha n^{j+1/2}) \leqslant$$
$$1/\alpha \sum_{1 \leq j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n} \rfloor} \frac{c}{\sqrt{\ln n} j!} \leq \frac{c(e-1)}{\alpha\sqrt{\ln n}}.$$

Случай 2: $k \geq 1$.

Рассмотрим вершину, которая была перекрашена в ребре e последней. Согласно Алгоритму для этой вершины v^* выполнено следующее условие: $\exists f \in E : |f \cap e| \leq (j+1), v \in (f \cap e)$, f одноцветно в изначальной раскраске C.

Таким образом, событие $\{e \in D^i(C,j,k)\}$ подразумевает, что кроме v^* в ребре e было ровно $j+k-1$ вершин цвета i, а вершина v принадлежала пересечению одноцветного, цвета i, ребра f с e. Всего же вершин во вместе взятых ребрах f и e не меньше, чем $(2n-j-1)$. Отсюда,

$$p(k,e) = \mathsf{P}(e \in D^i(C,j,k),\ \text{в } e \text{ перекрашено } k \text{ вершин}) \leqslant$$
$$\leq |E|\binom{j+1}{1}\left(\binom{n}{j+k-1}\binom{j+k-1}{k-1}p^k\right)\frac{\binom{m-(2n-j-1)}{m/2-(n-j-k)}}{\binom{m}{m/2}}.$$

Поскольку, $\frac{\binom{m-(2n-j-1)}{m/2-(n-j-k)}}{\binom{m}{m/2}} \leq \frac{\binom{m-2n+j+1}{m/2-n+j+1}}{\binom{m}{m/2}} \leq \frac{2^{j+1}\binom{m-2n}{m/2-n}}{\binom{m}{m/2}} \leq 2\cdot 2^{-2n+j+1}$ (см. (4)), вероятность события $\{e \in D^i(C,j)\}$ может быть оценена следующим образом:

$$\mathsf{P}(e \in D^i(C,j)) = \sum_{k\geq 1} p(k,e) < 4|E|(j+1)\left(\sum_k \frac{n!}{(n-(j+k-1))!(k-1)!j!}p^k\right)2^{-2n+j},$$

$$\mathsf{E}|D^i(C,j)| \leq |E|\cdot\max_e \mathsf{P}(e \in D^i(C,j)) < c\cdot(n/\ln n)\frac{(j+1)2^{j+2}n^{j-1}}{j!}\sum_{k\geq 1}\frac{(np)^k}{(k-1)!} =$$
$$= cn\cdot\frac{(j+1)2^{j+1}n^{j-1}}{j!}\sum_{k\geq 0}\frac{(np)^k}{k!} \leq cn^j\cdot\frac{2^{j+1}(j+1)e^{1/2\ln n}}{j!} < c\cdot n^{j+1/2}\cdot\frac{2^{j+1}(j+1)}{j!}$$

$$\mathsf{P}(\exists j \leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor : |D^i(C,j))| \geqslant \alpha n^{j+1/2}) \leqslant$$
$$\leq \sum_{1\leq j\leq \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \mathsf{P}\left(D^i(C,j) \geqslant \frac{\alpha\cdot j!}{c\cdot 2^{j+1}(j+1)}\cdot \mathrm{E}D^i(C,j)\right) \leq$$
$$\leq (c/\alpha)\sum_{j\geq 1}\frac{2^{j+1}(j+1)}{j!} \leq \frac{c(6e^2-2)}{\alpha}.$$

□

Теперь мы хотим показать, что найдется подмножество неперекрашенных вершин цвета i, перекрасив вершины которого мы не получим одноцветных ребер.

Напомним, что мы обозначили через $D^i(C,j)$, $i=1,2$, $j \geq 1$, множество ребер гиперграфа H, каждое из которых имеет ровно j неперекрашенных вершин цвета i в финальной раскраске χ^*. Для всякого ребра e из $D^i(C,j)$ определим множество $A^i(C,j,e)$, состоящее из j неперекрашенных вершин ребра e, которые имеют цвет i в финальной раскраске χ^*.

Лемма 5. *Во множестве неперекрашенных вершин цвета i существует множество T', такое что:*

(1.) $|T'| = \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor$,

(2.) для любого $j \in \{1, 2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor\}$ и всякого $e \in D^i(C, j)$ выполнено, что $A^i(C, j, e) \not\subset T'$.

Доказательство. Мы доказали, что с вероятностью не меньше, чем $(1-2/x)$ в случайной раскраске гиперграфа $H = (V, E)$ будет не больше, чем $cx\sqrt{n/\ln n}$ одноцветных ребер. Поскольку перекрашенных вершин не больше, чем было изначально одноцветных ребер, число неперекрашенных вершин цвета i не меньше, чем $m/2 - cx\sqrt{n/\ln n}$. Для удобства вычислений исключим из множества неперекрашенных вершин те вершины, которые попали в $D^i(C, 1)$. По лемме 4 с некоторой положительной вероятностью $|D^i(C, j)| < \alpha n^{j+1/2}$ для любого $j \in \{1, 2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor\}$. Поэтому далее считаем, что мы выбираем множество T' из такого множества, в котором хотя бы $(m/2 - cx\sqrt{n/\ln n} - \alpha n^{1+1/2})$ вершин.

Выберем множество $|T'|$ случайно. Тогда,

$$\mathsf{P}(\exists j \in \{2, ..., \lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor\}, \exists e \in D^i(C, j) : A^i(C, j, e) \subset T') \leqslant$$

$$\leq \sum_{2\leq j<\lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \alpha n^{j+1/2} \frac{\binom{m/2-\alpha n^{3/2}-cx\sqrt{n/\ln n}-j}{|T'|-j}}{\binom{m/2-\alpha n^{3/2}-cx\sqrt{n/\ln n}}{|T'|}} \leq$$

$$\leq \sum_{2\leq j<\lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \alpha n^{j+1/2} \left(\frac{|T'|}{m/2}\right)^j \leq \sum_{2\leq j<\lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \alpha n^{j+1/2} \left(\frac{cx\sqrt{n/\ln n}}{n(n-1)/(2\ln n)}\right)^j =$$

$$= \sum_{2\leq j<\lfloor cx\sqrt{n/\ln n}\rfloor} \alpha n^{1/2} \left(\frac{2cx\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}\right)^j \leq \frac{\alpha(2cx)^2\ln n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 2cx\sqrt{\ln n})}.$$

□

4.4 Завершение доказательства Теоремы 2

Окончательно положим $c = 0.01$, $\alpha = 8$, $x = 5$. Тогда,

$$1 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2c}{\sqrt{\ln n}} + 4c^2 + \frac{2c(6\cdot e^2 - 2)}{\alpha} + \frac{2c(e-1)}{\alpha \ln n} + \frac{\alpha(2cx)^2\ln n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 2cx\sqrt{\ln n})}\right) > 0 \qquad (33)$$

Следовательно, с положительной вероятностью для гиперграфа из условия теоремы 2 одновременно выполнены следующие события: в случайной раскраске C мало одноцветных ребер, модифицированный Алгоритм из раскраски C построил правильную раскраску χ^*, существует множество, перекраска которого, с одной стороны, уровняет мощности обоих цветовых классов, а с другой стороны, не создаст новых одноцветных ребер. Теорема 2 доказана.

Следствие 4. *При достаточно большом n всякий n-однородный гиперграф с числом ребер, не превосходящем $0.7\sqrt{n/\ln n}2^n$, допускает справедливую раскраску в два цвета*

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия следствия 4. При достаточно большом n достаточно в (2.4) положить $c = 0.7, \alpha = x = 10000$ и заменить $4c^2$ оценкой из (2.3) для того чтобы показать, что H можно справедливо раскрасить в два цвета. □

5 Доказательство Теоремы 3

5.1 Построение справедливой раскраски: Алгоритмы перекраски

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия теоремы 3. Для удобства будем считать, что число вершин m кратно r. Под сбалансированной раскраской $C = C(K_1, K_2, ..., K_r)$ будем понимать некоторое разбиение множества вершин гиперграфа на r равных долей: $V = K_1 \sqcup K_2 ... \sqcup K_r, |K_1| = |K_2| = ... = |K_r|$.

Лемма 6. *Пусть $H = (V, E)$ произвольный n-однородный гиперграф, в котором выполнены следующие соотношения:*

$$|E| < c\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1 \rfloor} r^{n-1}, \qquad |V| < \frac{n(n-1)(r-1)\lfloor \frac{log_2(r)+1}{\log_2(r)} \rfloor}{2\ln(n)}.$$

Тогда при $c < 1$ для H существует справедливая раскраска в r цветов.

Доказательство. Рассмотрим случайную сбалансированную раскраску C гиперграфа H.

Тогда,

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) \leq \sum_{e \in E} \frac{r\binom{m-n}{m/r-n} \cdot \binom{m-m/r}{m/r} \cdot ... \cdot \binom{m/r}{m/r}}{\binom{m}{m/r} \cdot \binom{m-m/r}{m/r} \cdot ... \cdot \binom{m/r}{m/r}} = |E| \frac{r\binom{m-n}{m/r-n}}{\binom{m}{m/r}} =$$

$$= |E| \frac{r^{-n+1}(1 - r/m)...(1 - r(n-1)/m)}{(1 - 1/m)...(1 - (n-1)/m)} \leq$$

$$\leq c\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \frac{\log_2(r)}{\log_2(r)+1} \rfloor} \frac{\exp(\ln(1 - r/m) + ... + \ln(1 - r(n-1)/m))}{\exp(\ln(1 - 1/m) + ... + \ln(1 - (n-1)/m))} =$$

$$= c\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \frac{log_2(r)}{\log_2(r)+1} \rfloor} \prod_{x=1}^{n-1} \exp\left(\ln(1 - rx/m) - \ln(1 - x/m)\right)$$

Из разложения натурального логарифма в ряд Тейлора следует, что $\ln(1 - rx/m) - \ln(1 - x/m) < -x(r-1)/m$ при $x \in (0; 1)$. Поэтому, складывая показатели степеней у произведения экспонент, окончательно получаем:

$$\mathsf{P}(\text{есть одноцветное ребро в } C) \leq c\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \frac{log_2(r)}{\log_2(r)+1} \rfloor} e^{-n(n-1)(r-1)/2m} \leq \frac{c}{n^{\log_2(r)/\log_2(r)+1}} < 1$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная сбалансированная раскраска C является справедливой раскраской. Лемма 1 доказана. □

Таким образом, нам остается рассмотреть гиперграфы, в которых число вершин m больше, чем $n(n-1)(r-1)\lfloor \frac{log_2(r)+1}{\log_2(r)} \rfloor / 2\ln(n)$.

5.1.1 Алгоритм 1: построение правильной раскраски

Следующим шагом в доказательстве Теоремы 3 является применение модифицированной версии Алгоритма перекраски А. Косточки. Алгоритм А. Косточки описан в [21], а наша модификация состоит в том, что, значение случайной величины, которая отвечает за то, что вершина из одноцветного ребра будет перекрашена, фиксируется вначале и не меняется в процессе работы Алгоритма.

Наша цель — построить из случайной раскраски C^0 некоторую новую случайную раскраску и показать, что она является правильной с положительной вероятностью. Для построения подобной раскраски зададим случайный порядок на множестве вершин гиперграфа V с помощью отображения $\sigma : V \to [0, 1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$. Если $\sigma(v) < p$, где p — некоторый параметр нашей конструкции, то вершину v будем называть свободной. Пусть $x = \lfloor \log_2 r \rfloor$.

Предположим, что в раскраске C^0 есть одноцветные ребра. Для исправления ситуации мы используем следующий Алгоритм перекраски:

Этап $l, 0 < l \leq x$. Для каждой вершины v проверяем выполнимость двух условий:

1. она никогда не меняла свой цвет и является свободной,
2. в текущий раскраске имеется инцидентное v одноцветное ребро $A, v \in A$ некоторого цвета $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$, и никакая из его вершин не была перекрашена на этапе l.

Если выполнены оба условия, перекрашиваем вершину v в цвет $(\alpha + 2^{l-1}) (\mathrm{mod}\ r)$. В этом случае будем говорить, что перекрашенная вершина v обвиняет ребро A.

Если какое-то из условий 1.-2. не выполняется, то переходим к следующей вершине. Если мы перебрали все вершины, то переходим на этап $(l + 1)$.

Отметим, что в рамках процедуры перекраски каждая вершина меняет цвет не более одного раза, поэтому Алгоритм не может работать бесконечно и обязательно остановится.

5.1.2 Алгоритм 2: восстановления равенства мощностей цветовых классов

Мощности цветовых классов могут отличаться от m/r. Определим для каждого цветового класса K_i неотрицательные целые числа ex_i и sh_i, где ex_i — величина избытка, т.е. на сколько вершин цвета r_i больше чем m/r, аналогично для недостатка. Ясно что, если $ex_i > 0$, то $sh_i = 0$, и наоборот.

Выберем случайно в каждом цветовом классе K_i подмножество вершин V_i, размера q. Значение параметра q определим позже. А пока предположим, что $q > 2ex_i$ для любого i.

Data: набор чисел ex_i и $sh_i, i = 1, 2, ..., r$.

for $(i = 1; i < r; i++)$ **do**

  if $(sh_i! = 0)$ **then**

    {берем минимальное $t : ex_1 + ex_2 + ... + ex_t \geq sh_i$

    В каждом множестве $V_s, s < t$ перекрашиваем в цвет i первые ex_s вершин.
    А в последнем множестве V_t перекрашиваем в цвет i первые
    $sh_t - (ex_1 + ex_2 + ... + ex_{t-1})$ вершин.

  $ex_1 = 0, ex_2 = 0, ..., ex_t = ex_t - (sh_t - (ex_1 + ex_2 + ... + ex_{t-1})).$}

Комментарии:

- Шаг 1. Пусть цвет i — это первый цвет, который в недостатке. Берем минимальное $t : ex_1 + ex_2 + ... + ex_t \geq sh_i$. В каждом множестве $V_s, s < t$ перекрашиваем в цвет i первые ex_s вершин. А в последнем множестве V_t перекрашиваем в цвет i первые $sh_t - (ex_1 + ex_2 + ... + ex_{t-1})$ вершин. После перекраски мощности цветовых классов $K_1, ..., K_{t-1}, K_i$ становятся равными m/r. Теперь цвета $1, ..., t-1$ больше не нужны и мы кладем $ex_1 = 0, ex_2 = 0, ..., ex_t = ex_t - (sh_t - (ex_1 + ex_2 + ... + ex_{t-1}))$. На этом шаг 1 заканчивается.

- Шаг 2. Берем следующий цвет, который в недостатке. Проделываем тоже самое, что и в шаге 1. Множества из которых мы теперь набираем вершины отличаются от $V_1, ..., V_{t-1}$, за исключением множества V_t.

Ясно, что Алгоритм 2 сделает все цветовые классы равные m/r. Если при этом, мы сможем выбирать вершины для перекраски таким образом, чтобы не появлялись новые одноцветные ребра, то мы получим справедливую раскраску.

5.2 T-деревья

Обозначим через C^1 раскраску, которая получилась после работы Алгоритма 1, а через C^2 — финальную раскраску, т.е. раскраску после работы Алгоритма 2. Нас интересует количество одноцветных ребер, которые получились в раскрасках C^1 и C^2.

Начнем с одноцветных ребер в раскраске C^1. Обозначим через A одно из подобных одноцветных ребер некоторого цвета α. Ясно, что в силу Алгоритма перекраски каждая вершина v ребра A в раскраске C^0 могла быть только следующих цветов: $\alpha, \alpha - 2^0, \alpha - 2^2, ..., \alpha - 2^{k-1} (\mathrm{mod}\ r)$. Предположим, что $\{i_1^A, i_2^A, ..., i_s^A\}$ — это цвета, которые были у вершин ребра A в C^0. Определим через $a_{i_1^A}, a_{i_2^A}, ..., a_{i_s^A}$ набор вершин ребра A, где каждая вершина $a_{i_k^A}$ обладает самым большим весом среди всех вершин цвета i_k^A ребра A. Для сокращения записи, будем называть такой набор вершин доминантным набором — $Dominant(A)$ ребра A, а вершины набора доминантными.

Начнем построение конфигурации ребер H, которую мы назовем *T-деревом* с корнем A.

- В качестве корня мы возьмем ребро A, а его потомками будут все ребра B, которые обвиняют доминантные вершины $a_{i_1^A}, a_{i_2^A}, ..., a_{i_s^A}$ (по одному ребру для каждой вершины).

- Далее, в каждом ребре B есть свой набор цветов $\{i_1^B, i_2^A, ..., i_t^B\}$ и соответствующий ему доминантный набор вершин $b_{i_1^B}, b_{i_2^B}, ..., b_{i_t^B}$, которые были перекрашены до того, как ребро B стало одноцветным. Подобные вершины обязаны обвинять некоторые новые ребра C, иначе ребро B не могло бы стать одноцветным и, в свою очередь, никто не смог бы его обвинить. Добавим подобные ребра C в качестве потомков ребра B

- Продолжим процесс построения, пока будет возможно.

В результате мы получим T-дерево, вершинами которого выступают ребра гиперграфа H, а связь определяется отношениями обвинения. Листьями получившегося T-дерева будут как раз те ребра гиперграфа H, которые являлись одноцветными в исходной сбалансированной случайной раскраске C^0. Корнем T-дерева является одноцветное ребро в раскраске C^1.

Введем понятие T-поддерева с корнем A. Для этого рассмотрим вершину $A \in T$. Пусть $N(A)$ множество всех предков A в T-дереве. Тогда A вместе с $N(A)$ будем называть *T-поддеревом*. Корнем T-поддерева является ребро, которое было одноцветным на некотором этапе работы Алгоритма 1. Соответственно, под *высотой* $h(A)$ T-поддерева с корнем A будем понимать наибольшую длину пути из корня A в лист.

Следствие 5. *Пусть заданы σ и случайная раскраска C^0. Предположим, что Алгоритм 1 не сработал, т.е. не построил правильную раскраску, тогда появилось хотя бы одно T-дерево.*

5.2.1 T-сложные деревья

Вернемся к рассмотрению одноцветных ребер в раскраске C^2. Зафиксируем некоторый цвет i и рассмотрим все одноцветные ребра цвета i в раскраске C^2. Каждое такое ребро A может содержать вершины только двух типов: каждая $v \in A$

- либо была цвета i уже после завершения работы Алгоритма 1.

- либо получила цвет i во время работы Алгоритма 2. Обозначим через $U(A)$ множество вершин ребра A, имеющих тип 2.

Рассмотрим вершины w, которые имеют цвет i уже после Алгоритма 1. Как и в предыдущем случае среди этих вершин w мы можем выбрать доминантный набор вершин $Diominant(A)$, а для этого доминантного набора набор ребер $B_1, ..., B_s$, которые обвиняют доминантные вершины.

Начнем построение конфигурации ребер H, которую мы назовем *T-сложным деревом*. Зафиксируем ребро A и неупорядоченный набор ребер $B_1, ..., B_s$. Теперь в качестве корня мы возьмем ребро A, а его потомками будут все ребра $B_1, ..., B_s$. После этого мы строим уже обычные T–поддеревья: $T(B_1), ..., T(B_s)$. На этом процесс построения заканчивается. Обозначим получившееся T–сложное дерево через $T(A, B_1, ..., B_s)$.

Рассмотрим теперь в ребре A те вершины u, которые получили цвет i во время работы Алгоритма 2. Если $u \in A \cap T(B_t)$, то изначальный цвет такой вершины уже известен. Поэтому рассмотрим те вершины u, которые не попадают в такие пересечения. Согласно Алгоритму 2 каждая такая вершина принадлежит некоторому подмножеству V_i и имеет в C^0 цвет i.

5.2.2 Вспомогательные утверждения о T-деревьях

Лемма 7. *T-дерево — это граф без циклов, в котором для любых двух вершин x_1 и x_2*

- *либо $e(x_1) \cap e(x_2) = \emptyset$,*
- *либо $|e(x_1) \cap e(x_2)| = 1$ и x_1, x_2 смежные вершины T-дерева.*

Доказательство. Докажем сначала, что в графе T нет циклов. Предположим обратное: пусть $f_1, f_2, ..., f_k, f_1$ — цикл. Пусть f_1 начало цикла и главный цвет ребра $e(f_1)$ равен α. Для того чтобы цикл замкнулся на вершине f_1 ребро $e(f_1)$ должно снова стать одноцветным. Посчитаем цвет, который должен получиться у ребра $e(f_1)$: обозначим через $h(v)$ высоту поддерева с корнем v, тогда главные цвета ребер $f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1} = f_1$ будут равны соответственно $\alpha, (\alpha + 2^{h(f_2)-1}) (\mathrm{mod}\ r), ..., (\alpha + 2^{h(f_2)-1} + ... + 2^{h(f_{k+1})-1}) (\mathrm{mod}\ r)$.

С другой стороны, в ребре $e(f_1)$ есть перекрашенная вершина, которая согласно Алгоритму 1 не может уже поменять свой цвет — $(\alpha + 2^{h(f_2)-1}) (\mathrm{mod}\ r)$. Числа $(\alpha + 2^{h(f_2)-1}) (\mathrm{mod}\ r)$ и $(\alpha + 2^{h(f_2)-1} + ... + 2^{h(f_{k+1})-1}) (\mathrm{mod}\ r) = (\alpha + 2^{h(f_2)-1} \cdot (2^{k+1} - 1)) (\mathrm{mod}\ r)$ не могут совпасть, поскольку тогда должно быть выполнено следующее сравнение по модулю r:

$$2^{h(f_2)-1} \equiv 2^{h(f_2)-1} \cdot (2^{k+1} - 1) \pmod r$$
$$2^{h(f_2)} \equiv 2^{h(f_2)+k} \pmod r$$

Последнее не может быть выполнено, поскольку $h(f_2) + k < \lfloor \log_2 r \rfloor$. В итоге мы получили противоречие, что $f_1, f_2, ..., f_k, f_1$ цикл.

Докажем второе утверждение. Пусть сначала x_1 и x_2 смежные вершины. Тогда если в пересечение $e(x_1) \cap e(x_2)$ больше одной вершины, то получается, что в C^0 есть две доминантные вершины одного цвета, чего не может быть. Пусть теперь $|e(x_1) \cap e(x_2)| \geq 1$ для двух несмежных вершин. Тогда, есть два ребра f_i и f_j (мы допускаем возможность, что $f_i = f_j$), у которых совпадают главные цвета. Пусть их главный цвет равен β. Рассмотрим два пути:

$$P_1 = (C_0 = root, C_1, ..., C_t = f_i, ..., C_k)$$
$$P_2 = (C_0 = root, \tilde{C}_1, ..., \tilde{C}_s = f_i, ..., \tilde{C}_l),$$

где C_k и $\tilde{C}_l$ — листья. Согласно Алгоритму 1, главный цвет ребра $e(C_0)$ равен $(\beta + 2^{k-t} + 2^{k-t+1} + ... 2^{k-1}) (\mathrm{mod}\ r) = (\beta + 2^{k-t} \cdot (2^t - 1)) (\mathrm{mod}\ r)$ и $(\beta + 2^{l-s} + 2^{l-s+1} + ... + 2^{l-1}) (\mathrm{mod}\ r) =$

$(\beta+2^{l-s}\cdot(2^s-1))(\mathrm{mod}\ r)$ одновременно. Ввиду того, что числа 2^t-1 и 2^s-1 нечетные при $s,t>1$, сравнение выполнено только при $s=t$ и $l=k$. Но это противоречит Алгоритму 1, так как у корня T-дерева будут две доминантные вершины одного цвета. □

Следствие 6. *Если в T-дереве известен итоговый цвет α корня A, то изначальные цвета всех доминантных вершин гиперграфа H, входящих в T-дерево, однозначно определяются по структуре графа T.*

Лемма 8. *Из ребер гиперграфа H можно составить не более, чем $m\cdot\binom{|E|}{m}$ T–деревьев размера m.*

Доказательство. Возьмем произвольный неупорядоченный набор из m ребер гиперграфа H. Выберем среди одно ребро, которое будет соответствовать корню A. Обозначим его через A. Среди оставшихся ребер рассмотрим все такие ребра — $B_1,...,B_s$, которые пересекаются с ребром A. Добавим их в качестве предков A. Далее, среди оставшихся ребер ищем те, которые смежны с ребрами $B_1,...,B_s$, они будут потомками вершин $B_1,...,B_s$. Продолжая действовать таким образом мы в итоге получим граф G. Если он удовлетворяет условию леммы 1 и в нем m вершин, то мы построили T-дерево, иначе делаем вывод, что из данного набора ребер нельзя составить T-дерево. Таким образом, число T-деревьев не превосходит $m\cdot\binom{|E|}{m}$. □

Лемма 9. *Из ребер гиперграфа H можно составить не более, чем $\binom{|E|}{m}m2^{m-1}$ T-сложных деревьев размера m.*

Доказательство. Зафиксируем число s — число предков первого порядка у вершины A. Возьмем произвольный неупорядоченный набор из m ребер гиперграфа H. Выберем среди них ребро, которое будет соответствовать корню A, среди оставшихся ребер выберем ребра, которые будут соответствовать предкам $B_1,...,B_s$. Это можно сделать не более, чем $m\binom{m-1}{s}$ способами. Далее, для каждого T-поддерева $T(B_k), k=1,2,...,s$ будем набирать ребра так как мы делали в лемме 3. Таким образом, общее число T-сложных деревьев не превосходит $\binom{|E|}{m}m\sum_{s=0}\binom{m-1}{s}$. □

5.3 Оценка числа одноцветных ребер, образовавшихся после работы Алгоритма 1

Во всех дальнейших вычислениях мы будем предполагать, что есть некоторый n-однородный гиперграф H, в котором $|E|\le c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor\log_2(r)/\log_2(r)+1\rfloor}r^{n-1}$, а число цветов $r\le\sqrt{\frac{\ln n}{\tilde{c}(\ln\ln n)^3}}$.

Лемма 10. *Пусть σ и C^0 заданы случайно, тогда с положительной вероятностью Алгоритм 1 построит правильную раскраску C^1 в r цветов.*

Доказательство. Рассмотрим событие заключающееся в том, что Алгоритма 1 не сработал, когда σ и C^0 были заданы случайно. Согласно следствию 1, это событие могло произойти только тогда, когда появилось хотя бы одно T-дерево. Мы переберем все возможные T-деревья, оценивая для каждого T-дерева вероятность события, заключающегося в том, что в результате процесса случайной перекраски нашелся набор ребре гиперграфа H, который образовал это T-дерево.

Итак, пусть мы зафиксировали некоторое T-дерево с корнем A. Пусть α — цвет ребра A в раскраске C^1. Предположим, что доминантный набор вершин ребра A состоит из s вершин, которые обвиняют ребра $B_1, ..., B_s$. Согласно следствию 2 изначальные цвета этих s вершин однозначно определяются по структуре графа T. Обозначим через $x_1, ..., x_s$ соответствующие веса вершин доминантного набора ребра A. Теперь, согласно Алгоритму 1 цвет любой $v \in A : v \notin \mathcal{D}(\mathcal{A})$

- либо равен α
- либо равен цвету одной из доминантных вершин $\{a^A_{i_j} : \sigma(v) \leq \sigma(a^A_{i_j})\}$

Рассмотрим теперь ребро B_1. Пусть у B_1 ровно t доминантных вершин, а их веса равны $y_1, ..., y_t$. Тогда цвет любой $v \in B_1 : v \notin \mathcal{D}(B_1)$ равен либо главному цвету ребра B_1, либо равен цвету одной из доминантных вершин $\{b^{B_1}_{i_j} : \sigma(v) \leq \sigma(b^{B_1}_{i_j})\}$.Повторяя рассуждения для всех вершин T-дерева, мы ограничим множество цветов, которые могут быть у вершин гиперграфа H.

Тем не менее вероятность появления T-дерева сильно зависит от номера этапа l на котором завершилось образование T-дерева. Поэтому мы рассмотрим два случая и проведем вычисления для каждого случая отдельно.

1. Образовалось дерево за $l < x = \lfloor \log_2 r \rfloor$ этапов.

Обозначим данное событие через $\mathcal{A}$. В этом случае все вершины $v \in A$ цвета α имеют вес больше p. Пользуясь леммой 3 о числе T-деревьев мы можем оценить вероятность событие $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}) \leq r \sum_{m=1} m \cdot |E|^m \underbrace{\iint ... \int}_{[0;p]^{m-1}} \left(\frac{x_1}{r} + ... \frac{x_s}{r} + \frac{1-p}{r} \right)^{n-s} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{y_1}{r} + ... \frac{y_t}{r} + \frac{1-x_1}{r} \right)^{n-t-1} \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^{m-1}$$

Оценим числитель подынтегрального выражения:

$$(x_1 + ... x_s + 1 - p)^{n-s} \cdot (y_1 + ... + y_t + 1 - x_1)^{n-t-1} \cdot ... \cdot \leq$$
$$\leq [(x_1 + ... x_s + 1 - p)(y_1 + ... + y_t + 1 - x_1) \cdot ... \cdot]^n \cdot (1-p)^{-s} \cdot (1-p)^{-t-1} \cdot ... \cdot \leq$$
$$\leq \left(1 - \frac{p}{m}\right)^{mn} \cdot (1-p)^{-2(m-1)}$$

С учетом полученной оценки на числитель,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathcal{A}) \leq r\sum_{m=1} m\cdot |E|^m p^{m-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m+1}\left(1-\frac{p}{m}\right)^{mn}\cdot(1-p)^{-2(m-1)} \leq \\
\leq \sum_{m=1}\left[\left(\frac{2cn}{\ln n}\right)^{\lfloor\frac{\log_2(r)}{log_2(r)+1}\rfloor}\right]^m p^{m-1}\left(1-\frac{p}{m}\right)^{mn}\cdot(1-p)^{-2(m-1)} \leq \\
|\ p=\gamma\frac{\ln n}{n}| \\
\leq 2c\sum_{m=1}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor\frac{\log_2(r)}{log_2(r)+1}\rfloor}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{m-1}{\log_2(r)+1}}\frac{1}{n^\gamma} \leq \frac{2cn^{1-\gamma}}{\ln n}\sum_{m=1}\exp\left(-\frac{\ln\frac{n}{\ln n}}{\log_2(r)+1}(m-1)\right)
\end{aligned}
$$

Ряд $\sum_{m=1}\exp(-\alpha m)$ сходится при $\alpha \geq 1$. Таким образом, когда число цветов невелико и $\gamma \geq 1$, вероятность события $\mathcal{A}$ будет стремится к нулю при $n \to \infty$, при этом $\mathsf{P}(\mathcal{A})$ заведомо меньше, чем $4c$.

2. Образовалось дерево на последнем этапе Алгоритма 1. $l = x = \lfloor \log_2 r \rfloor$.

Обозначим данное событие через $\mathcal{B}$. В этом случае мы не можем ничего сказать о вершинах $v \in A$ цвета α. Однако, за счет того, что T-дерево построилось в конце, мы можем утверждать, что в нем много вершин, а именно $m \geq \lfloor \log_2 r \rfloor$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathcal{B}) \leq r\sum_{m>\lfloor\log_2 r\rfloor} m\cdot|E|^m \underbrace{\iint\ldots\int}_{[0;p]^{m-1}}\left(\frac{x_1}{r}+\ldots\frac{x_s}{r}+\frac{1}{r}\right)^{n-s}\cdot \\
\cdot\left(\frac{y_1}{r}+\ldots\frac{y_t}{r}+\frac{1-x_1}{r}\right)^{n-t-1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}
\end{aligned}
$$

С учетом того, что числитель подынтегрального выражения не превосходит 1,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathcal{B}) \leq r\sum_{m>\lfloor\log_2 r\rfloor} m\cdot|E|^m p^{m-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m+1} \leq \\
\leq \sum_{m>\lfloor\log_2 r\rfloor}\left[\left(\frac{2cn}{\ln n}\right)^{\lfloor\frac{\log_2(r)}{log_2(r)+1}\rfloor}\right]^m p^{m-1} \leq \\
\leq 2c\sum_{m>\lfloor\log_2 r\rfloor}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor\frac{\log_2(r)}{log_2(r)+1}\rfloor}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{m-1}{\log_2(r)+1}} \leq 2c\sum_{m=1}\exp\left(-\frac{\ln\frac{\ln n}{n}}{\log_2(r)+1}(m-1)\right) < 4c
\end{aligned}
$$

при ограничении на число цветов.

□

5.3.1 Оценка на максимальный избыток

В этом параграфе мы получим явное соотношение на параметр q из Алгоритма 2. Напомним, что мы хотим, чтобы $q \geq 2\max_i ex_i$. Поэтому следующим действием будет оценка сверху величины ex_i.

Пусть σ и C^0 заданы случайно. Обозначим через $Rec(\alpha)$ случайную величину равную числу вершин v, перекрашенных в цвет α в результате Алгоритма 1. Также, для каждого цветового класса K_α рассмотрим случайную величину X_{K_α} , равную число вершин цвета α в C^0. Ясно, что X_{K_α} имеет биномиальное распределение $Bin(m, 1/r)$.

Таким образом, суммируя вышесказанное, заметим, что для каждого цвета α, который в избытке, выполнено, что

$$ex_\alpha \leq Rec(\alpha) + \left(X_{K_\alpha} - \frac{m}{r}\right).$$

Используя неравенство Чернова, которое утверждает, что для случайной величины $X \sim Bin(n,p)$

$$\mathsf{P}(X > EX + t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(EX + t/3)}\right)$$

с $t = \sqrt{\frac{2m\ln r/c}{r}}$, получаем оценки

$$\mathsf{P}\left(\exists\alpha : X_{K_\alpha} > \frac{m}{r} + t\right) \leq r\exp\left(-\frac{t^2}{2(\frac{m}{r} + t/3)}\right) < \frac{cr}{r} = c$$

Получим теперь оценку на величину $Rec(\alpha)$. Для этого заметим, что каждой v, перекрашенной в цвет α, соответствует некоторое T-поддерево — $T(A)$. Соответствие заключается в том, что вершина v обвиняет ребро A. При этом, доминантный цвет ребра A в T-поддереве $T(A)$ однозначно определяется по структуре графа T. Действительно, чтобы вершина v перекрасилась в цвет α необходимо, чтобы доминантный цвет ребра A был равен в точности $(\alpha - 2^{h(A)-1}) (\mathrm{mod}\ r)$, где $h(A)$ — высота дерева T. Таким образом, нам остается оценить число T-поддеревьев, у которых доминантный цвет корня заранее определен.

По аналогии с уже проделанными вычислениями для T-деревьев, математическое ожидание числа T-поддеревьев, а следовательно, и $\mathsf{E}\mathsf{Rec}(\alpha)$ оценивается как

$$\mathsf{E}Rec(\alpha) \leq \sum_{m=1} p^{m-1} m \cdot \binom{|E|}{m} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m+1}$$

Для сокращения записи обозначим через k следующее выражение : $\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1 \rfloor}$. Тогда, при $p = \gamma\frac{\ln n}{n}$ и $r < \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\ln 2}$.

$$\sum_{m=1} p^{m-1} m \cdot \binom{|E|}{m} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m+1} \leq \frac{2c}{r} \sum_{m=1} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor \frac{\log_2(r)}{log_2(r)+1} \rfloor} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{m-1}{\log_2(r)+1}} \leq \frac{4ck}{r}$$

Окончательно получаем, что с положительной вероятностью для каждого цвета α

$$Rec(\alpha) \leq \frac{k}{2}.$$

Положим параметр q равным

$$q = \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1 \rfloor} + 2\sqrt{\frac{2m \ln r/c}{r}}. \tag{34}$$

Таким образом, с положительной вероятностью

$$max_i ex_i \leq q/2. \tag{35}$$

А повторяя предыдущие рассуждения для sh_i, можно получить, что с положительной вероятностью

$$max_i sh_i \leq q/2. \tag{36}$$

5.4 Оценка числа одноцветных ребер, образовавшихся после работы Алгоритма 2

В предыдущей главе мы доказали, что с большой вероятностью после завершения работы Алгоритма 1 все ребра гиперграфа H будут неодноцветными. Поэтому предположим, что все одноцветные ребра, которые мы имеем в финальной раскраске C^2, появились во время работы Алгоритма 2. В силу данного предположения, каждое такое одноцветное ребро имеет хотя бы одну вершину, которая поменяла свой цвет во время работы Алгоритма 2.

Нам удобно ввести следующее обозначение: Пусть σ и C^0 заданы случайно. Обозначим через X случайную величину равную числу одноцветных ребер в раскраске C^2.

Лемма 11. *Пусть $\tilde{p} = \frac{q}{m/r - q/2}$, где q — параметр из Алгоритма 2. Тогда,*

$$\mathsf{E}X < ck(1 + \tilde{p}(r-1))^n.$$

Доказательство. Как и прежде, зафиксируем некоторое $T(A, T(B_1), ..., T(B_s))$ —

T-сложное дерево с корнем A и потомками первого порядка: $B_1, ..., B_s, s \in \{1, ..., \log_2 r\}$. Обозначим через t_i число вершин в пересечении $A \cap T(B_i)$, а через m_i — размер T-поддерева $T(B_i)$. Пусть α цвет ребра A в раскраске C^2.

Как и в случае T-деревьев, по структуре графа T однозначно определяются цвета всех доминантных вершин в раскраске C^0. Заметим, что $T(B_1), ..., T(B_s)$ являются непересекающимися T-поддеревья, и поэтому для вершин гиперграфа H, попадающих в эти T-поддеревья выполняются все соотношения из Леммы 10.

Рассмотрим теперь вершины ребра A:

1. Если $u \in A \cap (\cup_t T(B_t))$, то изначальный цвет такой вершины уже известен.

2. Если $w \in A \setminus (\cup_t T(B_t))$, то она либо цвета α , либо она попала в одно из множеств $V_i, i = 1, ..., r$ и имеет в C^0 цвет i.

Для удобства введем обозначения для некоторых событий. Обозначим через $\mathcal{F}_A(n-t)$, событие, заключающееся в том, что вершины w корня A, покрашены так, что $T(A, T(B_1), ..., T(B_s))$ — T-сложное дерево. Соответственно, через $\mathcal{F}_{B_i}(t_i)$ — событие, заключающееся в том, что вершины u раскрашены соответствующим образом. Тогда,

$$\mathsf{P}(T(A, B_1, ..., B_s)) \leq \left(\prod_{i=1}^{s} \mathsf{P}(T(B_i))\right) \left(\prod_{i=1}^{s} \mathsf{P}(\mathcal{F}_{B_i}(t_i))\right) \mathsf{P}(\mathcal{F}_A(n-t)) \tag{37}$$

Выпишем оценки для каждого множителя:

$$\mathsf{P}(T(B_i)) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m_i+1} p^{m_i-1}, \tag{38}$$

$$\mathsf{P}(\mathcal{F}_{B_i}(t_i)) \leq t_i \cdot p \cdot \tilde{p}^{(t_i-1)} = r^{-(t_i-1)} \cdot (r\tilde{p})^{(t_i-1)} \cdot t_i \cdot p, \tag{39}$$

$$\mathsf{P}(\mathcal{F}_A(n-t)) \leq r \left(\frac{1+\tilde{p}(r-1)}{r}\right)^{n-t} \leq r^{t+1-n} \left(1+\tilde{p}(r-1)\right)^n \tag{40}$$

Оценки (3) и (4) получены из того факта, что если подмножество вершин V_i размера q выбирается случайно, то для любого набора $\{v_{i_1}, ..., v_{i_l}\}$ совместная вероятность $\mathsf{P}(\{v_{i_1}, ..., v_{i_l}\} \in V_i) \leq \prod_t \mathsf{P}(v_{i_t} \in V_i \leq \prod_t \left(\frac{q}{m/r-q/2}\right)$, где $m/r - q/2$ — минимально возможный размер цветового класса K_i, из которого выбирается подмножество V_i(см.36). Отсюда, в частности, следует, что

$$\tilde{p}r = \frac{r \cdot q}{m/r - q/2} \leq \frac{r \cdot \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1 \rfloor} + 2r\sqrt{\frac{2m \ln r/c}{r}}}{m/r - q/2} \to 0$$

при $n \to \infty$ и $r < \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\ln 2}$.

Подставим в (1) оценки (2), (3) и (4).

$$\mathsf{P}(T(A, B_1, ..., B_s)) \leq r \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m+1} \cdot p^{m-1} \cdot (1+\tilde{p}(r-1))^n \cdot \prod_{i=1}^{s} (r\tilde{p})^{(t_i-1)} \cdot t_i$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (r\tilde{p})^{(x-1)} \cdot x$ на $[1; \infty)$. Ее можно переписать в виде $f(x) = \exp(-\beta(x-1)) \cdot x$, где $\beta = \ln\left(\frac{1}{r\tilde{p}}\right) > 1$. Функция $f(x)$ убывает на $[1; \infty)$, так как ее производная $f'(x) = (1-\beta x)\exp(-\beta(x-1))$ равна нулю при $x = 1/\beta < 1$ и отрицательна при $x > 1/\beta$. Поэтому, наибольшее значение $f(x)$ на $[1; \infty)$ равно 1 при $x = 1$.

С учетом полученной оценки на $f(x)$:

$$\mathsf{P}(T(A,B_1,...,B_s)) \le p^{m-1}\cdot(1+\tilde p(r-1))^n\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m}$$

Суммируя по всем m произведения $\mathsf{P}(T(A,B_1,...,B_s))m\cdot\binom{|E|}{m}2^{m-1}$,

$$\mathsf{E}X \le \sum_{m=1} p^{m-1}m\cdot\binom{|E|}{m}\cdot 2^{m-1}\cdot(1+\tilde p(r-1))^n\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)m} \le ck(1+\tilde p(r-1))^n.$$

$\square$

Следствие 7. *Пусть раскраска C^0 и отображение σ заданы случайно, тогда с положительной вероятностью одноцветных ребер в раскраске C^2 будет меньше, чем $q/2$.*

Доказательство. Согласно лемме 6,

$$\mathsf{E}X \le ck(1+\tilde p(r-1))^n,$$

поэтому с положительной вероятностью

$$X < \frac{k(1+\tilde p(r-1))^n}{2}$$

Оценим $2X$:

$$2X \le k(1+\tilde p(r-1))^n \le k\exp\{n\tilde p(r-1)\} = k\exp\left\{n(r-1)\frac{q}{m/r-q/2}\right\}$$

(используя явные соотношения (1) на q и k, а также оценку на m из леммы 1)

$$\le k\exp\left\{n(r-1)\frac{\left(k+2\sqrt{2(\ln r/c)m/r}\right)}{m/r-q/2}\right\} \le k\exp\left\{n(r-1)\frac{\left(4\sqrt{2(\ln r/c)m/r}\right)}{m/r-q/2}\right\} \leqslant$$

$$\le k\exp\left\{4(r-1)\sqrt{2(\ln n)2\ln r/c}\right\} \leqslant k\exp\left\{(\ln n)\cdot 8r\sqrt{\frac{\ln r/c}{\ln n}}\right\}$$

(предположим, что $\frac{8r\sqrt{\ln r/c}}{\sqrt{\ln n}} \le \frac{1}{\log_2 r+1}$)

$$\leqslant k\cdot\exp\left\{\frac{\ln n}{\log_2 r+1}\right\} \le k\cdot n^{\frac{1}{\log_2 r+1}} = \frac{n}{(\ln n)^{\frac{\log_2 r}{\log_2 r+1}}} \le q = \left(k+2\sqrt{\frac{2m(\ln r/c)}{r}}\right).$$

Осталось показать, что действительно верно соотношение

$$\frac{8r\sqrt{\ln r/c}}{\sqrt{\ln n}} \le \frac{1}{\log_2 r+1},$$

когда $r \le \sqrt{\frac{\ln n}{\tilde c(\ln\ln n)^3}}$

$$\frac{8r(\log_2 r+1)\sqrt{\ln r/c}}{\sqrt{\ln n}} \le \frac{8\cdot\sqrt{\frac{\ln n}{\tilde{c}(\ln\ln n)^3}}(\ln\ln n+1)\sqrt{\ln\ln n+\ln 1/c}}{\sqrt{\ln n}} \le$$

(подставляя оценку на r)

$$\le 8\cdot\sqrt{\frac{1}{\tilde{c}(\ln\ln n)^3}}(\ln\ln n+1)\sqrt{\ln\ln n\cdot\ln 1/c} < 1$$

(уже при $\tilde{c} \ge 64\ln\frac{1}{c}$)

□

6 Завершение доказательство Теоремы 3

Пусть $H=(V,E)$ n-однородный гиперграф H, в котором $|E| \le c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\lfloor \log_2(r)/\log_2(r)+1\rfloor} r^{n-1}$, а число цветов $r \le \sqrt{\frac{\ln n}{\tilde{c}(\ln\ln n)^3}}$.

Докажем, что H можно справедливо раскрасить в r цветов. Согласно лемме 1, мы можем считать что число вершин $m > \frac{n^2(r-1)}{2\ln n}$. Рассмотрим случайную раскраску C^0 и отображения $\sigma : V \to [0,1]$, где $\sigma(v), v \in V$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,1]$. Применим к гиперграфу H Алгоритм 1 для построение правильной раскраски. Алгоритм 1, согласно Лемме 5 построит из C^0 некоторую правильную раскраску C^1 с вероятностью не меньше, чем $1-8c$.

После работы Алгоритма 1 мощности цветовых классов K_i могут отличаться от m/r, но с вероятностью не меньше, чем $1-10c$ выполнено, что $q/2 \le |K_i| - m/r \le q/2$. Выберем случайно в каждом цветовом классе K_i подмножество вершин V_i размера q и применим Алгоритм 2. Алгоритм 2 сделает все цветовые классы равными m/r. Если при этом, мы сможем выбирать из множеств V_i вершины для перекраски таким образом, чтобы не появлялись новые одноцветные ребра, то мы получим справедливую раскраску.

Следствие 3 утверждает, что с вероятностью не меньше, чем $1-2c$ число всех одноцветных ребер будет меньше, чем $q/2$. Тогда если мы не будем брать по одной вершине из каждого такого ребра, то в каждом V_i останется еще хотя бы $q/2$ вершин. Этого числа достаточно, чтобы Алгоритм 2 уровнял мощности цветовых классов.

Выбор параметров: вероятность того, что у нас не получилось справедливой раскраски не превосходит $8c+10c+2c=20c<1$ уже при $c<0.05$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[2] A.M. Raigorodskii, D.A. Shabanov, “The Erdős–Hajnal problem, its generalizations and related problems”, *Russian Mathematical Surveys*, **66**:5 (2011), 933–1002.

[3] D. Cherkashin, J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

[4] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring”, *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[5] I.A. Akolzin, D.A. Shabanov, “Colorings of hypergraphs with large number of colors”, *Discrete Mathematics*, **339**:12 (2016), 3020–3031.

[6] A.V. Kostochka, M. Kubmhat, “Coloring uniform hypergraphs with few edges”, *Random Structures and Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

[7] J. Kozik, “Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **48**:1 (2016), 125–146.

[8] A.B. Kupavskii, D.A. Shabanov, “Colorings of uniform hypergraphs with large girth and applications”, *Doklady Akademii Nauk*, **443**:4 (2012), 422–426.

[9] Д. А. Шабанов "Об обобщении теоремы Хайнала-Семереди для однородных гиперграфов"/ Доклады Академии Наук, т.459 №1 (2014), с. 22-26

[10] J. Kozik, D.A. Shabanov, “Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116** (2016), 312–332.

[11] A.V. Kostochka, V. Rödl, “Constructions od sparse uniform hypergraphs with high chromatic number”, *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.

[12] P. Erdős, A.Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Math. Acad.Sci. Hungar.*,**1**:1-2 (1961), 87–123.

[13] P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3-4 (1964), 445–447.

[14] P. Erdős , “Theory of Graphs and Its Applications” (M. Fieldler, Ed.) Czech. Acad. Sci. Publ., Prague, **9** (1964), 159.

[15] A. Hajnal, E. Szemeredi, “Proof of a conjecture of P. Erdős”, *Combinatorial theory and its applications*, North-Holland, London, **II** (1969), 601-–623

[16] H. A. Kierstead, A. V. Kostochka, “A short proof of the Hajnal-Szemeredi Theorem on equitable coloring”, *Combinatorics, Probability and Computing*, **17** (2008), 265–270.

[17] A. V. Kostochka, M. Mydlarz, E. Szemeredi, H.A. Kierstead, “A fast algorithm for equitable coloring”, *Combinatorica*, **30(2)** (2010), 217–224.

[18] D.A. Shabanov, “Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász”, *Random Structures and Algorithms*, **40**:2 (2012), 227–253.

[19] D. A. Shabanov "Equitable two-colorings of uniform hypergraphs"/ European Journal of Combinatorics, т.43 (2015), с. 185-203

[20] И. А. Аколзин "О справедливых раскрасках простых гиперграфов"/ ТРУДЫ МФТИ, т.9, №4 (2017), с. 161–173

[21] A. Kostochka, “Coloring uniform hypegraphs with few colors”, *Random Structures and Algorithms*, **24** (2010), 1–10.

[22] J. Beck, “A remark concerning arithmetic progressions”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **29** (1980), 376–379.

[23] A.V. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, “On the chromatic number of set systems”, *Random Structures and Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.