В. Д. Ногин

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

Аксиоматический подход

2016

УДК 519.8
ББК 22.18
Н 72

Н о г и н В. Д. **Сужение множества Парето: аксиоматический подход**. –
М. ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 249 с. – ISBN 978-5-9221-1638-1.

Рассматриваются вопросы выбора решений при наличии нескольких числовых критериев. Излагается оригинальный общий подход к решению многокритериальных задач при наличии количественной информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение.

Считаются выполненными четыре аксиомы «разумного» выбора. Вводится понятие кванта информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение. Исследуется вопрос сужения множества Парето на основе конечного набора квантов информации. Показывается, что с помощью предлагаемого подхода можно достаточно хорошо аппроксимировать множество выбираемых вариантов многокритериальной задачи. Рассматриваются задачи как с четким, так и нечетким отношением предпочтения. Изучается возможность комбинирования аксиоматического подхода с другими известными методами.

Предназначена всем, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач – исследователям, инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т.п. Может быть использована студентами старших курсов и аспирантами не только математических, но и экономических, а также технических специальностей.

Библиогр. 71 назв.

Оглавление

Предисловие

Практически любой вид человеческой деятельности связан с ситуациями, когда имеется несколько возможностей и человек волен из этих возможностей выбрать любую, наиболее ему подходящую.

Задачи наилучшего выбора изучает теория принятия решений. С ее помощью можно научиться осуществлять выбор более обоснованно, эффективно используя имеющуюся в наличии информацию о предпочтениях. Эта теория помогает избежать принятия заведомо негодных решений и учесть возможные отрицательные последствия непродуманного выбора.

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач выбора составляют задачи многокритериального выбора, в которых качество принимаемого варианта (решения) оценивается сразу по нескольким критериям. При наличии набора критериев, как правило, используют принцип Эджворта-Парето, согласно которому в качестве «наилучших» следует выбирать только парето-оптимальные варианты. Однако множество Парето обычно достаточно широкое, и окончательный выбор из него оказывается затруднительным. По этой причине возникает так называемая «проблема сужения множества Парето». Решение этой проблемы, т.е. обоснованное сужение множества Парето, невозможно без использования сведений о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР). При этом одним из главных источников таких сведений является информация об отношении предпочтения ЛПР. Простейшая информация подобного типа содержит указание на то, какой именно из двух данных парето-оптимальных вариантов предпочтительнее для ЛПР по сравнению с другим. Такого рода информация (так называемый квант информации) позволяет исключить из двух вариантов один и, тем самым, несколько облегчить последующий выбор «окончательного» варианта. Если же принять некоторые довольно естественные требования (аксиомы), определенным образом регламентирующие процесс выбора ЛПР, то наличие указанного кванта информации может привести к сокращению значительно большего количества парето-оптимальных вариантов. При наличии же целого набора квантов можно рассчитывать на получение сравнительно узкого множества, окончательный выбор из которого не будет вызывать непреодолимых трудностей.

Избрав строгую форму изложения материала, автор стремился не потерять связи теории с практикой и использовал все доступные ему средства для неформального обсуждения и наглядной иллюстрации вводимых понятий и полученных результатов.

Предлагаемая книга, для чтения которой вполне достаточно владения курсом математики обычного вуза, рассчитана прежде всего на специалистов в области принятия решений. Несомненно, она будет полезна всем тем, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач – инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т.п. Кроме того, книга может быть успешно использована студентами старших курсов и аспирантами математических, экономических, а также технических специальностей вузов.

Разд. 5.4 написан Басковым О.В, разд. 5.2 и 8.4, а также п. 3 разд. 7.4 написаны Захаровым А.О., разд. 5.1 основан на работах Климовой О.Н., а разд. 5.3 написан автором совместно с Прасоловым А.В. Всем перечисленным коллегам автор приносит искреннюю благодарность за участие в написании книги.

Для формул, рисунков и утверждений принята двойная нумерация, причем первый номер означает номер главы.

Символом □ отмечается начало доказательства утверждения, тогда как знак ■ означает его конец.

Автор выражает признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, который начиная с 1998 г. по настоящее время, осуществляет финансовую поддержку исследований автора в данном направлении.

Обозначения

$A \setminus B$ – теоретико-множественная разность множеств A и B
$A \times B$ – декартово произведение множеств A и B
R^m – евклидово пространство m-мерных векторов с вещественными компонентами
$0_m = (0,0,...,0) \in R^m$ – начало координат (нуль) пространства R^m
R_+^m – неотрицательный ортант пространства R^m (т.е. множество всех векторов с неотрицательными компонентами без начала координат)
R_+ – множество положительных вещественных чисел
N^m – множество всех векторов пространства R^m, у которых имеется по крайней мере одна положительная и хотя бы одна отрицательная компоненты
$|A|$ – число элементов конечного множества A
$\sup Z$ – точная верхняя грань числового множества Z
$\inf Z$ – точная нижняя грань числового множества Z
$[z]$ – целая часть числа z
$\langle a,b \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ – скалярное произведение векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$
$\|a\| = \sqrt{\langle a,a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2}$
$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i,\ i = 1, 2, ..., m$
$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i, \quad i = 1,2,...,m$
$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b$ и $a \neq b$
$\mathrm{cone}\{a^1, a^2, ..., a^k\}$ – выпуклый конус, порожденный векторами $a^1, a^2, ..., a^k$ (т.е. множество всех линейных неотрицательных комбинаций данных векторов)

m – число критериев
$I = \{1,2,...,m\}$ – множество номеров критериев
X – множество возможных вариантов (решений)
$f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ – векторный критерий
$Y = f(X)$ – множество возможных векторов
$\succ_X$ – отношение предпочтения ЛПР, заданное на множестве X
$\succ_Y$ – отношение предпочтения ЛПР, индуцированное отношением $\succ_X$ и заданное на множестве Y
$\succ$ – продолжение отношения $\succ_Y$ на все пространство R^m
$C(X)$ – множество выбираемых вариантов (решений)
$C(Y)$ – множество выбираемых векторов
$\mathrm{Ndom}\, X$ – множество недоминируемых вариантов (решений)
$\mathrm{Ndom}\, Y$ – множество недоминируемых векторов
$P_f(X)$ – множество парето-оптимальных вариантов (решений)
$P(Y)$ – множество парето-оптимальных векторов

Введение

Любая задача оптимизации (экстремальная задача) содержит два объекта – множество возможных решений (вариантов) X и числовую функцию (критерий) f, заданную на этом множестве. В качестве решения экстремальной задачи выступает такой элемент множества X, который реализует наибольшее (или наименьшее значение) данной функции. Таким образом, экстремальная задача – это задача максимизации либо задача минимизации, причем все результаты, полученные для задач одного типа, могут быть легко переформулированы для задач другого типа. К настоящему времени теория экстремальных задач изучена достаточно подробно, предложено значительное количество различных методов и алгоритмов решения того или иного класса подобных задач.

Что касается многокритериальных задач, в которых присутствует не один числовой критерий, а сразу несколько $f_1,..., f_m$, то, по-видимому, в неявном виде они впервые появились в XVII в. в форме задач голосования. А вместе с зарождением математической экономики в XIX в. они стали находить успешное применение при решении различного рода экономических задач. К этому времени относится и появление понятия парето-оптимального решения, обладающее тем свойством, что оно не может быть улучшено, т.е. увеличено или уменьшено (в зависимости от того имеем мы дело с задачами максимизации или с задачами минимизации) хотя бы по одному критерию, без ухудшения значений по всем остальным критериям. Это понятие для случая двух критериев в середине XIX века ввел Френсис Эджворт, а в конце XIX - начале XX века общем случае – Вильфредо Парето. Подавляющее большинство исследователей полагают, что «наилучший» выбор следует осуществлять именно среди парето-оптимальных вариантов. Это утверждение именуется принципом Эджворта-Парето. Следует, однако, заметить, что данный принцип получил строгую формулировку и обоснование лишь сравнительно недавно [29], а до этого принимался, по существу, как некая очевидная аксиома.

К сожалению, в подавляющем числе многокритериальных задач множество Парето оказывается довольно широким, и конкретный выбор в его пределах не является очевидным. По этой причине и возникает проблема сужения множества Парето, связанная с поиском того или иного конкретного парето-оптимального варианта в качестве «наилучшего». Положительное решение этой проблемы представляет большой интерес для практики, поскольку в конкретных прикладных задачах выбора, как правило, следует ограничиться одним или же сравнительно узким количеством выбранных вариантов.

К настоящему времени для решения указанной проблемы предложено множество самых различных подходов – от эвристических до аксиоматических. Однако следует признать, что какого-то одного, «безупречного» метода нет и, по-видимому, быть не может. Каждый их них наряду с несомненными достоинствами обладает и явными недостатками.

Абстрактная задача выбора состоит в указании одного или нескольких вариантов из имеющегося исходного множества возможных (допустимых) вариантов (решений) X, которые называют выбираемыми. Будем обозначать множество всех выбираемых вариантов через $C(X)$. Это множество подлежит нахождению в процессе решения задачи. Очевидно, что $C(X) \subset X$. В частности, оно может быть одноэлементным. Зафиксируем некоторое множество A, содержащее X. Функция, ставящая в соответствие каждому множеству $X \subset A$ его подмножество $C(X)$, называется *функцией выбора* на A. Тем самым, функция выбора в общем случае задается на одноэлементных, двухэлементных и т.д. (в том числе на X) подмножествах A. В частном случае значением функции выбора на каком-то множестве может оказаться и пустое множество (так называемый «отказ от выбора»). Разработана теория выбора

[1], которая изучает общие свойства функции выбора в зависимости от вариации множества X (и $C(X)$) в пределах какого-то фиксированного множества A.

Между тем, в отличие от теории выбора нас будут интересовать задачи с фиксированным множеством X при наличии набора числовых функций, образующих векторный критерий $f = (f_1,..., f_m)$. Предполагается, что выбор производится неким лицом, принимающим решение (ЛПР), в роли которого может выступать как отдельный человек, так и целый коллектив, подчиненный достижению определенной цели. Для того чтобы совершаемый выбор в наибольшей степени соответствовал достижению цели (т.е. был «наилучшим» или «оптимальным» для данного ЛПР), необходимо в процессе выбора учитывать «вкусы» и «предпочтения» ЛПР, которые в той или иной мере раскрывали бы смысл «наилучшего» решения. Нередко «предпочтения» ЛПР удается выразить с помощью бинарного отношения (предпочтения) $\succ_X$, заданного на множестве X. Запись $x' \succ_X x''$ читается как «первый вариант предпочтительнее второго». Это означает, что из указанных двух вариантов ЛПР выберет первый и не выберет второй. По существу, задание отношения предпочтения $\succ_X$ можно рассматривать как сужение функции выбора на двухэлементные подмножества множества X. Заметим, что в общем случае это отношение неполное, и могут существовать пары решений, которые не связаны отношением $\succ_X$. Содержательно это означает, что при предъявлении подобных пар ЛПР не может отдать предпочтение ни одному варианту этой пары.

Тройка $\langle X, f, \succ_X \rangle$ именуется *моделью многокритериального выбора*. Классическая модель многокритериальной оптимизации [46] не содержит отношения предпочтения $\succ_X$, тогда как в общей теории выбора отсутствует векторный критерий. Следует отметить, что в рамках классической многокритериальной модели, содержащей лишь X и f, не удается строго сформулировать саму постановку этой задачи. Например, когда исследователи говорят, что критерии желательно максимизировать (или минимизировать), то тем самым они неявно предполагают наличие некоторого бинарного отношения, придающего строгий смысл сказанному. Поэтому включение в многокритериальную модель бинарного отношения предпочтения обязательно, хотя многие авторы до сих пор этого не делают. Возможно, это происходит из-за того, что в отличие от X и f отношение предпочтения, которым руководствуется ЛПР в процессе выбора, полностью, как правило, не известно.

В соответствии с принципом Эджворта-Парето выбираемые варианты $C(X)$ не могут оказаться за пределами множества Парето, и при этом выбранным может оказаться любой парето-оптимальный вариант. Располагая множеством X и векторным критерием f, можно построить множество Парето, хотя при этом могут возникнуть серьезные трудности вычислительного характера. Далее следует выбирать в пределах множества Парето или, иначе говоря, сужать это множество до приемлемых размеров. Таким образом, при выполнении принципа Эджворта-Парето задача многокритериального выбора может быть сформулирована как задача сужения множества Парето до множества выбираемых вариантов $C(X)$. Эта задача оказалась настолько сложной, что ее нередко именуют *проблемой сужения множества Парето* [25,32].

Сужение множества Парето может быть осуществлено только при наличии той или иной дополнительной информации (помимо X и f) о решаемой многокритериальной задаче. Нередко подобную информацию авторы заменяют какими-либо эвристическими соображениями или определенными «правдоподобными» предположениями, позволяющими сузить область поиска «наилучших» (выбираемых) вариантов. Характерным признаком эвристических методов является невозможность четкого описания того класса задач многокритериального выбора, при решении которых данный эвристический метод будет гарантированно приводить к желаемому результату. С этой точки зрения аксиоматические подходы можно считать более обоснованными, поскольку используемая в них аксиоматика строго отделяет класс задач, для решения которых она предназначена, от всех остальных, где применение данного аксиоматического подхода не гарантирует получения желаемого результата.

Отдельные авторы считают, что окончательный выбор должно осуществлять само ЛПР после непосредственного анализа всего представленного ему множества Парето или какой-то его существенной части. Действительно, когда имеется лишь небольшое число парето-оптимальных вариантов (лучше всего – два), выбор из них в принципе может быть произведен после сравнительного сопоставления этих вариантов и анализа достоинств и недостатков каждого из них. Правда, даже в случае двух вариантов ЛПР может оказаться в затруднительном положении, когда, например, число критериев велико. Если же множество Парето достаточно широкое, а тем более − бесконечное, непосредственный анализ парето-оптимальных вариантов становится затруднительным и для успешного решения задачи выбора следует иметь в распоряжении какую-либо формализованную процедуру. Краткое описание и критический анализ различного типа подобных процедур, разработанных к настоящему времени, можно найти, например, в [25].

В этой книге принято последовательное изложение, и основывается оно на формальном определении и дальнейшем использовании понятия *кванта информации* об отношении предпочтения. Наличие кванта информации означает готовность ЛПР идти на компромисс, состоящий в том, что ЛПР согласно уступить по одной группе критериев ради определенного выигрыша по другой группе критериев. Примечательно, что предлагаемое определение имеет настолько простую логику, что понятно не только специалистам, но и лицам, ответственным за принятие решений и не располагающим знаниями в области математики. Последнее обстоятельство немаловажно, если учесть, что подобная информация поступает чаще всего именно от этих лиц.

Располагая определением кванта информации и изучив простейшие его свойства, можно приступить к решению главного вопроса, ради которого это понятие вводилось: каким образом учитывать эту информацию? Оказывается, если несколько ограничить класс задач многокритериального выбора, для которых справедлив принцип Эджворта-Парето, добавлением нескольких достаточно разумных требований (аксиом) к отношению предпочтения ЛПР, то учет квантов информации можно производить очень просто: нужно лишь в соответствии с выведенной несложной формулой пересчитать исходный векторный критерий по определенным формулам и найти множество Парето относительно нового векторного критерия. Оно в общем случае будет у́же множества Парето исходной задачи, причем ни одно выбираемое решение исходной задачи не окажется за пределами нового множества Парето. Иначе говоря, при переходе от старого множества Парето к новому произойдет сужение области компромиссов и при этом не будет потеряно ни одно выбираемое (потенциально-оптимальное) решение. Область поиска выбираемых решений после указанного учета информации об отношении предпочтения станет более узкой и, тем самым, задача выбора упростится.

Вышесказанное составляет содержание первых трех глав. В четвертой главе вводится понятие непротиворечивого набора квантов информации и приводятся три утверждения (критерия), с помощью которых всегда можно проверить является ли заданный набор квантов информации непротиворечивым. Далее выясняется, каким образом производить учет так называемых простейших наборов квантов информации.

В пятой главе анализируется использование различных конечных наборов квантов информации и указываются, каким образом их можно использовать для сужения множества Парето. В частности, здесь описаны два алгоритма (геометрический и алгебраический) учета произвольного конечного числа непротиворечивых квантов информации.

Шестая глава содержит исследование полноты набора квантов информации. Здесь выясняется, что, используя лишь конечный набор указанных квантов, можно получить в определенном смысле сколь угодно точное приближение к неизвестному множеству недоминируемых решений в виде множества Парето некоторой новой многокритериальной задачи. Полученные результаты свидетельствуют о важной роли, которую играет информация об отношении предпочтения в форме квантов. Эта информация полна в том смысле, что для достаточно широкого класса задач многокритериального выбора с конечным множеством возможных решений информации подобного типа достаточно для того, чтобы получить точное представление о неизвестном множестве недоминируемых решений.

В седьмой главе введено определение кванта информации в случае нечеткого отношения предпочтения (квант нечеткой информации), сформулированы соответствующие аксиомы «разумного» нечеткого выбора и получены результаты, на основе которых можно производить учет различных нечетких квантов информации.

Результаты, представленные в предыдущих главах, аккумулируются в восьмой главе, где в доступной форме описывается общий *аксиоматический метод сужения множества Парето* на основе информации об отношении предпочтения в форме квантов информации. Изложение начинается с рассмотрения психологических аспектов принятия решений человеком. Далее формулируется и обсуждается сам метод. Принцип его работы наглядно можно пояснить при помощи сравнения с творческим приемом Микеланджело. Как известно, когда великого скульптора спросили, как ему удается из бесформенной каменной глыбы создавать шедевры, он ответил: «Нужно отсечь от камня все лишнее». Та же идея лежит в основе аксиоматического подхода: из исходного множества возможных решений на основе информации об отношении предпочтения в виде набора квантов последовательно удаляются все парето-оптимальные решения, которые не могут быть выбранными согласно имеющейся информации. Удаление осуществляется до тех пор, пока не будет получено множество решений, удовлетворяющее ЛПР.

Одно их главных достоинств предлагаемого аксиоматического подхода заключается в том, что при помощи аксиом удается очертить класс задач многокритериального выбора, для которых в результате применения данного метода на каждом шаге сужения заведомо не будет удалено ни одно выбираемое решение. Тем самым, используемый набор аксиом четко указывает возможные границы его применимости.

Кроме того, следует отметить, что данный подход можно использовать в комбинации с некоторыми другими известными приемами решения многокритериальных задач. Так например в конце восьмой главы обсуждается возможность комбинирования метода последовательного сужения области компромиссов вместе с методом целевого программирования и методом достижимых целей. Анализируются возможности использования весьма популярной линейной свертки критериев, а также некоторых нелинейных функций для сужения множества Парето. Здесь же намечаются пути обобщения аксиоматического подхода, т.е. ослабления используемых аксиом.

Глава 1. Принцип Эджворта-Парето

В этой главе вводятся и обсуждаются базисные понятия, связанные с принятием решений в многокритериальной среде – множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение. Дается постановка задачи многокритериального выбора. Кроме того, здесь определяются такие принципиально важные для дальнейшего изложения понятия, как множество недоминируемых решений и множество Парето, без которых невозможна формулировка и строгое обоснование принципа Эджворта-Парето.

Именно формулировка и обоснование этого принципа составляют центральный результат первой главы. Устанавливается, что принцип Эджворта-Парето следует применять лишь для решения задач многокритериального выбора из некоторого, хотя и достаточно широкого класса. Этот класс составляют такие задачи, которые удовлетворяют определенным двум требованиям (аксиомам), выражающим «разумность» поведения лица, принимающего решение. За пределами указанного класса использование принципа Парето сопряжено с риском и может привести к далеко не лучшим результатам.

1.1. Задача многокритериального выбора

1. Множество возможных и множество выбираемых решений. Человек в своей деятельности постоянно сталкивается с ситуациями, в которых ему приходится осуществлять выбор. Например, зайдя в магазин, мы выбираем тот или иной товар. Чтобы добраться до нужного места в городе или стране мы выбираем маршрут и соответствующий вид транспорта. Выпускник школы выбирает вуз, в котором он собирается учиться или же место работы, если он намерен работать. Руководители различных уровней и рангов постоянно вынуждены заниматься формированием персонала, возглавляемых ими подразделений, выбирать ту или иную стратегическую линию поведения, принимать конкретные хозяйственные и экономические решения. Специалисты в самых различных областях науки и техники, занимающиеся разработкой всевозможных устройств и приспособлений, проектированием тех или иных сооружений, конструированием новых моделей и типов автомобилей, самолетов и т.п. также всякий раз стремятся выбрать наилучшее инженерное, конструкторское или проектное решение. Работники банков выбирают объекты для инвестирования, экономисты предприятий и фирм планируют оптимальную экономическую программу и т.д. и т.п.

Приведенный список практических задач выбора можно было бы продолжать и дальше. Ограничимся сказанным и выявим общие элементы, присущие всякой задаче выбора.

Прежде всего, должен быть задан набор решений (вариантов), из которого следует осуществлять выбор. Обозначим его X и будем называть *множеством возможных решений* (*вариантов*). Минимальное число элементов этого множества – два, чтобы действительно был выбор. Ограничений сверху на количество возможных решений нет, оно может быть как конечным, так и бесконечным. При этом природа самих решений не играет никакой роли; это могут быть проектные решения, варианты поведения, политические или экономические стратегии, сценарии развития, краткосрочные или долгосрочные планы и т.п.

Собственно выбор состоит в указании среди всех возможных такого решения, которое объявляется выбранным. Следует заметить, что нередко происходит выбор не одного, а целого набора решений, являющегося определенным подмножеством множества возможных решений X . Простейший пример – конкурсный отбор абитуриентов при приеме в вузы.

Обозначим *множество выбираемых вариантов* $C(X)$. Оно представляет собой решение задачи выбора и им может оказаться любое подмножество множества X . Таким образом, решить задачу выбора – означает найти множество $C(X)$, $C(X) \subset X$. Когда множество выбираемых вариантов не содержит ни одного элемента (т.е. пусто), собственно выбора не происходит, так как ни одно решение не оказывается выбранным. Подобная ситуация не представляет практического интереса, поэтому указанное множество должно содержать по крайней мере один элемент. В некоторых задачах оно может оказаться бесконечным.

Специфика многокритериальных задач выбора заключается в том, что в отличие от обычной (однокритериальной) теории оптимизации здесь нет единого на все случаи жизни определения решения данной задачи и, видимо, быть не может. Это объясняется тем, что решение (т.е. множество $C(X)$) строится в процессе выбора с использованием различного рода дополнительной информации (помимо X и f) и в значительной степени зависит от лица, принимающего решение.

Обращаем внимание читателя на то, что мы лишь ввели обозначение для множества выбираемых вариантов, а соответствующего определения не приводим. Подобного определения просто не существует. Как будет видно из дальнейшего изложения, указанное обстоятельство ни в коей мере не снижает строгости рассматриваемого подхода. Единственное требование, которое далее предъявляется к этому множеству, содержится в аксиоме 1, согласно которой не выбираемое в какой-то паре решение не должно выбираться и из исходного допустимого множества. При этом все важнейшие теоремы, в которых присутствует множество выбираемых вариантов, имеют вид включения *произвольного* множества $C(X)$, удовлетворяющего аксиоме 1, в множество Парето определенного вида. Тем самым, в этих теоремах указывается лишь некоторая оценка сверху для целого класса неизвестных множеств выбираемых вариантов, ограниченных рамками указанной аксиомы.

2. Лицо, принимающее решение. Процесс выбора невозможен без наличия того, кто осуществляет этот выбор, преследуя свои цели. Человека, который производит выбор и несет полную ответственность за его последствия, называют *лицом, принимающим решение* (*ЛПР*).

Сама природа ЛПР при решении задачи выбора, как правило, не имеет особого значения. Например, если в качестве ЛПР выступает человек, то он, очевидно, представляет собой сложное биологическое и социальное существо. Это существо имеет тело определенного строения, и в этом теле протекают различные возможно, до конца не изученные, биохимические, психофизические, физиологические и психические процессы. Однако для принятия, например, решения о выборе той или иной экономической стратегии фирмы совсем не обязательно учитывать строение черепа или состояние позвоночника этого человека. В процессе выбора важно, насколько богатым опытом в области экономики он обладает, каким представляет будущее своей фирмы, какие интересы, связанные с фирмой, старается удовлетворить и т.п. Таким образом, говоря о ЛПР в контексте задачи выбора, мы будем иметь в виду не всего человека, а лишь ту его «часть», те его характеристики, которые так или иначе связаны с процессом выбора.

Если различные индивиды в одних и тех же ситуациях выбора ведут себя одинаковым образом, то с точки зрения теории принятия решений они ничем не отличаются друг от друга, т.е. представляют собой одно и то же ЛПР.

3. Векторный критерий. Обычно считается, что выбранным (наилучшим) является такое возможное решение, которое наиболее полно удовлетворяет желаниям, интересам или целям данного ЛПР. Стремление ЛПР достичь определенной цели нередко в математических терминах удается выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве X. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу с несколькими функциями. Так будет, например, когда исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения и для формализации каждой точки зрения используется соответствующая функция. Если явление изучается в динамике, поэтапно и для оценки каждого этапа приходится вводить отдельную функцию, то в этом случае также приходится учитывать несколько функциональных показателей.

Рассмотрение данной книги посвящено ситуации, когда имеется сразу несколько числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, $m \geqq 2$, определенных на множестве возможных вариантов X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции называют *критериями оптимальности, критериями эффективности, целевыми функциями, показателями* или *критериями качества*. Обращаем внимание читателя на то, что критериями выступают именно числовые функции, т.е. функции, принимающие значения в множестве вещественных чисел.

Проиллюстрируем введенные термины, рассмотрев *задачу выбора наилучшего проектного решения*. В этой задаче множество X состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость реализации проекта f_1 и величина прибыли f_2, которую обеспечит данное проектное решение (т.е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, осуществление самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия, и т.д. Что касается ЛПР, то в данной задаче таковым является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие – частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ образуют *векторный критерий*

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m), \tag{1.1}$$

который принимает значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют *критериальным пространством*, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$ критерия f при определенном $x \in X$ именуют *возможным вектором,* отвечающим решению x. Все возможные векторы образуют *множество возможных векторов*

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Наряду с упомянутым ранее множеством выбираемых вариантов удобно ввести в рассмотрение *множество выбираемых векторов*

$$C(Y) = f(C(X)) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in C(X)\},$$

представляющее собой некоторое подмножество критериального пространства R^m.

4. Многокритериальная задача. Задачу выбора, содержащую множество возможных решений X и векторный критерий f, обычно называют *многокритериальной задачей*. Изучению свойств таких задач посвящена многочисленная литература (см., например, [5, 25, 46, 57, 71]).

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т.е. построение множества X и векторного критерия f) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон, а именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой - построенная модель не должна быть чрезмерно сложной, чтобы для ее решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон. Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов.

Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для выражения целей ЛПР. При этом ясно, что построить модель, в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам, невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Предположим, что указанные две компоненты задачи выбора сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что в терминах критерия f чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью векторного критерия лишь намечаются некоторые локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели одновременно, как правило, достигнуты быть не могут, и поэтому требуется дополнительная информация для осуществления компромисса. Иначе говоря, если ограничиться лишь указанными выше двумя компонентами – множеством возможных решений и векторным критерием, - то задача выбора оказывается «недоопределенной». Эта «недоопределенность» сказывается затем в слабой логической обоснованности выбора наилучшего решения.

Для того чтобы осуществить обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью предлагается включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

5. Отношение предпочтения. Рассмотрим два возможных варианта: x' и x''. Предположим что после предъявления ЛПР этой пары вариантов, оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут

$$x' \succ_X x''.$$

Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР и называется *отношением строгого предпочтения*, или, короче, *отношением предпочтения*.

Следует отметить, что не всякие два возможных варианта x' и x'' связаны соотношением $x' \succ_X x''$ либо соотношением $x'' \succ_X x'$. Иначе говоря, не из любой пары вариантов ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному варианту из данной пары, даже если это пара различных вариантов. Описанная ситуация вполне соответствует реальному положению вещей. Более того, если бы от ЛПР требовалась способность в произвольной паре возможных вариантов выделять предпочтительный вариант, то в таком случае теория, построенная на указанном «жестком» требовании к ЛПР не представляла бы практического интереса. Подобные «всемогущие» ЛПР в жизни встречаются крайне редко.

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных вариантов, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \qquad\qquad \text{для } x', x'' \in X\,^*$$

индуцирует (порождает) отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов Y. Тем самым, вектор $y' = f(x')$ является предпочтительнее вектора $y'' = f(x'')$ (т.е. $y' \succ_Y y''$) тогда и только тогда, когда вариант x' предпочтительнее варианта x'' (т.е. $x' \succ_X x''$).

6. Задача многокритериального выбора. Теперь можно сформулировать все основные элементы задачи многокритериального выбора. Итак, постановка всякой *задачи многокритериального выбора* включает

- множество возможных вариантов (решений) X
- числовой векторный критерий f вида (1.1)
- отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных вариантов.

Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения.

Следует, однако, заметить, что приведенный список основных компонентов задачи многокритериального выбора в дальнейшем при необходимости может быть расширен за счет добавления каких-то новых объектов, с помощью которых дополнительно удастся учесть интересы, мотивацию и пристрастия ЛПР, однако подобная ситуация в книге не рассматривается.

Приведенная выше задача многокритериального выбора сформулирована в терминах вариантов. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта

- множество возможных векторов $Y, Y \subset R^m$,
- отношение предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов.

1.2. Бинарные отношения

1. Определение бинарного отношения. Для описания и изучения введенного выше отношения предпочтения существует специальное математическое понятие – бинарное отношение. Настоящий раздел содержит вспомогательный математический аппарат, связанный

---

* Некоторые различные варианты могут иметь одинаковые векторные значения, поэтому точнее вместо «для $x', x'' \in X$» писать «для всех $x_1 \in \tilde{x}_1, x_2 \in \tilde{x}_2$; $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$ на множестве *X*.» Здесь $\tilde{x}_i$ – класс эквивалентности, порожденный элементом x_i, $i = 1,2$.

с бинарными отношениями. Читатель, знакомый с бинарными отношениями, может бегло просмотреть его и переходить к следующему разделу.

Прежде всего напомним понятие декартова произведения двух множеств. Пусть имеются два произвольных множества A и B. Их *декартовым произведением* называется множество, обозначаемое $A \times B$ и определяемое равенством

$$A \times B = \{(a,b) \mid \text{ при некоторых } a \in A, b \in B\} .$$

Иными словами, декартово произведение образуется из всех возможных пар элементов данных двух множеств, причем первым элементом пары является элемент первого множества, а вторым – элемент второго множества.

Например, декартово произведение двух конечных числовых множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ содержит шесть элементов и имеет вид

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} .$$

Бинарным отношением $\mathfrak{R}$, заданным на множестве A, называется подмножество декартова произведения $A \times A$, т.е. $\mathfrak{R} \subset A \times A$. Другими словами, всякое множество пар, составленных из элементов множества A, образует некоторое бинарное отношение. В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\mathfrak{R} = A \times A$, совпадающее с данным декартовым произведением.

Если имеет место включение $(a, b) \in \mathfrak{R}$, то обычно пишут $a \mathfrak{R} b$ и говорят, что *элемент* a *находится в отношении* $\mathfrak{R}$ *с элементом* b, или что *элемент a доминирует над элементом b по отношению* $\mathfrak{R}$. Когда не верно ни $a \mathfrak{R} b$, ни $b \mathfrak{R} a$, говорят, что *данные элементы несравнимы* по отношению $\mathfrak{R}$.

Заметим, что в общем случае из $a \mathfrak{R} b$ не следует выполнение соотношения $b \mathfrak{R} a$.

Приведем примеры некоторых бинарных отношений. Из школьного курса арифметики известен целый ряд бинарных отношений, определенных на множестве вещественных чисел: =, ≧, ≦, > и <. В теории множеств рассматривается бинарное отношение включения $\subset$, заданное на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества.

Введем следующие активно используемые в дальнейшем бинарные отношения для произвольных векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ критериального пространства R^m:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i, \quad i = 1,2,...,m$$
$$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i, \quad i = 1,2,...,m$$
$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b \text{ и } a \neq b.$$

Выполнение последнего соотношения $a \geq b$ означает, что каждая компонента вектора a больше либо равна соответствующей компоненты вектора b, причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора. Бинарное отношение ≥ нередко именуют *отношением Парето*.

2. Типы бинарных отношений. В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, производят их типизацию. Приведем определения некоторых распространенных типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\mathfrak{R}$, заданное на множестве A, называют

- *рефлексивным*, если соотношение $a \mathfrak{R} a$ имеет место для всех $a \in A$;

- *иррефлексивным*, если соотношение $a\Re a$ не выполняется ни для одного $a \in A$;
- *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения $a\Re b$ для элементов $a, b \in A$ следует выполнение соотношения $b\Re a$;
- *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a\Re b$ для некоторых элементов $a, b \in A$ всегда следует, что соотношение $b\Re a$ места не имеет;
- *антисимметричным*, если всякий раз из выполнения соотношений $a\Re b$, $b\Re a$ для некоторых элементов $a, b \in A$ вытекает их равенство $a = b$;
- *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a, b, c \in A$ из выполнения соотношений $a\Re b$, $b\Re c$ всегда следует справедливость соотношения $a\Re c$;
- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для любых трех элементов $a, b, c \in A$ и произвольного положительного числа α из выполнения соотношения $a\Re b$ всегда вытекает соотношение $(\alpha \cdot a + c)\Re(\alpha \cdot b + c)$ (здесь считается, что $A = R^m$);
- *полным*, если для любой пары элементов $a, b \in A, a \neq b$, выполняется соотношение $a\Re b$, либо соотношение $b\Re a$;
- *частичным*, если это отношение не является полным; в этом случае найдется пара элементов множества A, несравнимых по отношению $\Re$.

Отношения равенства $=$ и нестрогого неравенства $\geqq$ дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства $>$ и отношение $\geq$ – иррефлексивных отношений на R^m. Отношения равенства и нестрогого неравенства являются симметричным и антисимметричными, а отношения $>$ и $\geq$ – асимметричны. Все указанные отношения $=, \geq, >, \geqq$ транзитивны и инвариантны относительно линейного положительного преобразования. Отношение равенства на множестве чисел или векторов, а также отношение включения, очевидно, являются частичными. Если же отношение нестрогого неравенства рассмотреть на множестве векторов R^m при $m > 1$, то оно тоже окажется лишь частичным.

Нетрудно проверить, что *всякое асимметричное отношение иррефлексивно*.

□ Действительно, если напротив, некоторое асимметричное отношение $\Re$ не является иррефлексивным, то для некоторого $a \in A$ выполнено соотношение $a\Re a$. Но благодаря асимметричности данного отношения последнее соотношение не должно иметь места. Полученное противоречие устанавливает иррефлексивность $\Re$ ■

3. Отношения порядка. Комбинации некоторых типов бинарных отношений играют важную роль в теории множеств. Введем соответствующие определения.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют

- *нестрогим порядком* (*отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- *строгим порядком* (*отношением строгого порядка*), если оно является иррефлексивным и транзитивным;
- *линейным порядком*, если оно является полным нестрогим или полным строгим порядком.

Отношения неравенств $\geqq$ и $>$ на множестве вещественных чисел представляют собой линейный порядок, тогда как на множестве векторов это не имеет места. Отношение $\geq$, рассматриваемое на множестве векторов, является строгим частичным порядком.

Лемма 1. 1. *Всякое отношение строгого порядка является асимметричным.*

□ Предположим противное: некоторое отношение $\Re$ иррефлексивно и транзитивно, но не является асимметричным. Это означает, что найдется пара элементов $a, b \in A$, для которой выполнены соотношения $a\Re b$ и $b\Re a$ одновременно. На основании транзитивности отсюда следует $a\Re a$, что несовместимо с условием иррефлексивности отношения $\Re$ ■

Еще один пример строгого линейного порядка, заданного на пространстве R^m, дает лексикографическое отношение порядка, задаваемое следующим образом. Вектор $y' = (y'_1, y'_2, ..., y'_m)$ *лексикографически больше* вектора $y'' = (y''_1, y''_2, ..., y''_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено какое-либо одно из следующих условий

1) $y'_1 > y''_1$
2) $y'_1 = y''_1, \quad y'_2 > y''_2$
3) $y'_1 = y''_1, \quad y'_2 = y''_2, \; y'_3 > y''_3$

………………………………………..

m) $y'_i = y''_i, \quad i = 1,2,...,m-1; \quad y'_m > y''_m$.

Можно проверить, что любые два вектора пространства R^m либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора. Это означает, что лексикографическое отношение является полным. Кроме того, лексикографическое отношение транзитивно.

1.3. Аксиома исключения и множество недоминируемых решений

1. Требование асимметричности отношения предпочтения. Рассмотрим задачу многокритериального выбора, включающую множество возможных вариантов X, векторный критерий f и отношение предпочтения $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных вариантов, то, как нетрудно понять, оно представляет собой некоторое бинарное отношение.

В основу предлагаемого подхода положено отношение предпочтения $\succ_X$, которое по своей сути является отношением строгого предпочтения в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_X x'$ отрицает возможность выполнения обратного соотношения $x' \succ_X x$. В терминах бинарных отношений, рассмотренных в предыдущем разделе, это означает, что отношение предпочтения должно быть асимметричным. Тем самым, далее при изучении задач выбора будут рассматриваться только такие отношения предпочтения, на которые наложено требование асимметричности. Многие исследователи полагают (см. [54]-[55]), что асимметричность – это минимальное требование к отношению предпочтения, которое обязательно должно присутствовать среди прочих требований или условий, связанных с отношением предпочтения ЛПР.

2. Аксиома исключения. Рассмотрим два произвольных возможных варианта x' и x''. В силу асимметричности имеет место один и только один случай из следующих трех:

- справедливо соотношение $x' \succ_X x''$, но соотношение $x'' \succ_X x'$ не выполняется;
- справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$, но соотношение $x' \succ_X x''$ не выполняется;
- не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$.

В первом случае, т.е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что вариант x' *доминирует* вариант x'' (по отношению $\succ_X$). Во втором случае x'' *доминирует* x'. Если же реализуется третий случай, то говорят, что варианты x' и x'' *не сравнимы* по отношению предпочтения.

Вернемся к задаче выбора. Пусть для некоторого варианта x'' найдется такой вариант x', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары вариантов ЛПР выберет первый. Тогда второй вариант x'' не может быть выбранным из данной пары x' и x'', так как это означало бы выполнение соотношения $x'' \succ_X x'$, противоречащее вместе с $x' \succ_X x''$ условию асимметричности отношения $\succ_X$. Сказанное в терминах множества выбираемых вариантов можно выразить в виде следующей эквивалентности

$$x' \succ x'' \Leftrightarrow C(\{x', x''\}) = \{x'\}$$

для всех $x', x'' \in X$.

Если второй вариант x'' не выбирается из пары в силу того, что для него в этой паре есть лучший вариант, то, рассматривая x'' в пределах всего множества возможных вариантов X, разумно предположить, что x'' в таком случае не должно оказаться выбранным и из всего множества возможных вариантов, так как для него в X существует, по крайней мере, один заведомо более предпочтительный вариант x'.

Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого варианта из пары x', x'' естественно считать, что второй вариант не может оказаться выбранным и из всего множества X. Тем самым, всюду далее будет предполагаться выполненным следующее требование.

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых вариантов)**.** *Если для некоторой пары вариантов* $x', x'' \in X$ *имеет место соотношение* $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin C(X)$*.

В аксиоме 1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым руководствуется ЛПР в процессе принятия решений, но и множество $C(X)$. Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений, с которым мы будем иметь дело. А именно, любое множество выбираемых вариантов не должно содержать ни одного такого элемента, для которого может найтись более предпочтительный вариант.

Нетрудно привести простой содержательный пример, в котором аксиома исключения не выполняется. Рассмотрим задачу выбора из трех возможных претендентов на два вакантных места. При этом считается, что оба вакантных места обязательно должны быть заполнены. Предположим, что при сравнении претендентов выяснилось, что первый является предпочтительнее второго и третьего, а второй предпочтительнее третьего. Поскольку согласно условию из трех кандидатов обязательно следует выбрать двоих, то, очевидно, ими окажутся первый и второй. Таким образом, второй претендент из пары первых двух не выбирается. Тем не менее, из всего множества трех возможных претендентов он оказывается выбранным. Следовательно, аксиома исключения доминируемых вариантов в этом примере нарушается.

3. Множество недоминируемых решений. В соответствии с аксиомой 1 любой доминируемый вариант следует исключать из списка варинтов, претендующих на роль выбираемых. Исключение всех доминируемых вариантов приводит к множеству, которое играет важную роль в дальнейшем изложении.

Множество недоминируемых решений (*вариантов*) обозначается $\operatorname{Ndom} X$ и определяется равенством

$$\operatorname{Ndom} X = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X \text{, что } x \succ_X x^*\}.$$

---

* Можно проверить , что *обратное условие Кондорсе* [1] влечет выполнение аксиомы 1, но не наоборот.

Таким образом, $\operatorname{Ndom} X$ представляет собой определенное подмножество множества возможных вариантов X. В зависимости от вида множества X и конкретного типа отношения предпочтения $\succ_X$ множество недоминируемых вариантов может

- оказаться пустым, т.е. не содержать ни одного элемента
- состоять в точности из одного элемента
- содержать некоторое конечное число элементов
- состоять из бесконечного числа элементов.

Лемма 1. 2. *Для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$C(X) \subset \operatorname{Ndom} X. \tag{1.2}$$

□ Для пустого множества $C(X)$ включение (1.2) выполняется. Если предположить, что включение (1.2) не имеет места для некоторого непустого множества $C(X)$, то среди элементов этого множества найдется элемент $x'' \in C(X)$, для которого выполнено соотношение $x'' \notin \operatorname{Ndom} X$. Тогда по определению множества недоминируемых вариантов существует такой вариант $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Отсюда, используя аксиому 1, получаем $x'' \notin C(X)$. Это противоречит начальному предположению о том, что x'' – выбранный вариант ■

Включение (1.2) устанавливает, что для достаточно широкого класса задач (а именно, для тех задач, для которых выполнена аксиома 1) ***выбор следует производить только среди недоминируемых вариантов***. Кроме того, поскольку все последующие требования (аксиомы), предъявляемые к рассматриваемому здесь классу задач многокритериального выбора, как мы увидим далее, не содержат множества выбираемых вариантов (и выбираемых векторов), включение (1.2) показывает, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых вариантов.

Когда $C(X) \neq \varnothing$ и множество недоминируемых вариантов состоит из одного элемента, задача выбора в принципе решена, поскольку этот единственный недоминируемый вариант в силу включения (1.2) должен оказаться выбранным. Следует, однако, заметить, что подобного рода ситуации на практике встречаются крайне редко.

Тем не менее, даже неполные, фрагментарные сведения об отношении предпочтения ЛПР позволяют из всего множества возможных вариантов исключить доминируемые (как заведомо непригодные для выбора) и, тем самым, упростить последующий выбор.

Наряду с множеством недоминируемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество недоминируемых векторов*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ndom} Y = f(\operatorname{Ndom} X) = \{ f(x^*) \in Y \mid \text{не существует такого } x \in X\text{, что } x \succ_X x^* \} =\\ = \{ y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y\text{, что } y \succ_Y y^* \}.\end{aligned}$$

Для введенного множества недоминируемых векторов аксиому 1 и лемму 1.2 можно переформулировать следующим образом.

Аксиома 1 (исключение доминируемых векторов). *Если для некоторой пары векторов* $y', y'' \in Y$ *выполнено соотношение* $y' \succ_Y y''$, то $y'' \notin C(Y)$.

Лемма 1. 2. (в терминах векторов). *Для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$, *удовлетворяющего аксиоме исключения, справедливо включение*

$$C(Y) \subset \text{Ndom } Y.$$

1.4. Принцип Эджворта-Парето

1. Аксиома Парето. Заинтересованность ЛПР в получении по возможности бóльших значений всех компонент векторного критерия f можно выразить в терминах так называемой аксиомы Парето.

Аксиома Парето (в терминах решений). *Для всех пар решений* $x', x'' \in X$, *для которых имеет место неравенство* $f(x') \geq f(x'')$, *справедливо* $x' \succ_X x''$.

Напомним (см. разд. 1.3), что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех $i = 1,2,...,m$, причем $f(x') \neq f(x'')$.

2. Множество и принцип Парето. Если для некоторой пары возможных векторов имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, то благодаря аксиоме Парето первый вариант будет предпочтительнее второго, т.е. $x' \succ_X x''$. Тогда в соответствии с аксиомой 1 второй вариант ни при каких обстоятельствах не может оказаться выбранным и его можно исключить из последующего учета в процессе принятия решений. Исключение всех подобного рода вариантов приводит к множеству Парето.

Множество парето-оптимальных вариантов (*решений*) обозначается $P_f(X)$ и определяется равенством

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X \text{, что } f(x) \geq f(x^*)\},$$

а *множество парето-оптимальных векторов* $P(Y)$ задается равенством

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{f(x^*) \in Y \mid \text{ при некотором } x^* \in P_f(X)\},$$

где *Y*, как и раньше, означает множество возможных векторов, т.е. $Y = f(X)$.

Принцип Эджворта-Парето. *В условиях выполнения аксиом исключения и Парето для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *справедливо включение*

$$C(X) \subset P_f(X). \tag{1.2}$$

□ Если предположить противное, т.е. $x \in C(X)$ и $x \notin P_f(X)$, то по определению парето-оптимального варианта найдется $x' \in X$, такой что $f(x') \geq f(x)$. Согласно аксиоме Парето отсюда следует $x' \succ_X x$, а применение к этому соотношению аксиомы исключения дает $x \notin C(X)$, что несовместимо с начальным предположением $x \in C(X)$ ■

Включение (1.2) выражает собой *принцип Эджворта-Парето* (*принцип Парето*), согласно которому

если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т.е. в соответствии с аксиомами исключения и Парето), то выбираемые им варианты обязательно должны быть парето-оптимальными, и с другой стороны, – любой парето-оптимальный вариант может оказаться выбранным при тех или иных обстоятельствах.

Этот принцип демонстрирует особую, исключительно важную роль множества Парето в теории принятия многокритериальных решений. В частности, включение (1.2) говорит о том, что множество выбираемых вариантов $C(X)$ является сужением множества Парето. Таким образом, за границами множества Парето, выбираемых вариантов нет, а значит, поиск «наилучших» вариантов можно сразу ограничить пределами множества Парето. Вот почему и возникает *проблема сужения множества Парето*, т.е. проблема нахождения выбираемых вариантов в множестве Парето.

Следует заметить, что указанный принцип справедлив для очень широкого класса задач многокритериального выбора, рамки которого ограничиваются лишь упомянутыми двумя аксиомами. В частности, он не требует транзитивности отношения предпочтения, которая обычно присутствует во многих исследованиях в рамках теории принятий решений.

3. Свойство минимальности аксиом исключения и Парето. Если отказаться от выполнения хотя бы одной из указанных выше двух аксиом, то этот принцип может потерять свою силу. Как показывают приведенные ниже два примера, аксиомы исключения и Парето образуют минимальный набор требований, гарантирующих выполнение принципа Эджворта-Парето.

Пример 2.1. $Y=\{y^1,y^2\}$, $y^1=(a,a)$, $y^2=(b,a)$, $a>b$, $y^2\succ y^1$. Пусть $C(Y)=\{y^2\}$. Аксиома исключения выполнена и $P(Y)=\{y^1\}$. Тогда как принцип Эджворта-Парето $C(Y)\subset P(Y)$ нарушен, поскольку не выполняется аксиома Парето.

Пример 2.2. $Y=\{y^1,y^2\}$, $y^1=(a,a)$, $y^2=(b,a)$, $a>b$, $y^1\succ y^2$. Здесь $P(Y)=\{y^1\}$. Пусть $C(Y)=\{y^2\}$. Аксиома Парето выполнена, но включение $C(Y)\subset P(Y)$ не имеет места из-за нарушения аксиомы исключения.

Большинство исследователей включение (1.2) не доказывают. Они, по-существу, полагают, что это включение и есть аксиома, которую необходимо принять. При таком подходе используется лишь одна указанная аксиома. Однако подобная «аксиома» (в форме принципа Эджворта-Парето) не представляет собой аксиому в обычном смысле, т.е. «интуитивно очевидное утверждение, принимаемое на веру». Для этого она слишком «сложна». Между тем, аксиомы исключения и Парето, формулируемые в терминах пар решений и векторов, значительно проще для восприятия любым человеком, в том числе и ЛПР, а потому их легче проверять на практике.

Далее, тот факт, что аксиом не одна, а две, является полезным в следующем отношении. Дело в том, что некоторые процедуры выбора предполагают (а соответствующие авторы считают), что совсем необязательно делать свой выбор внутри множества Парето. В этой связи, в случае окончательного выбора варианта, не являющегося парето-оптимальным, о б я з а т е л ь н о будет нарушаться либо одна из аксиом исключения или Парето, либо обе эти аксиомы одновременно. Это обстоятельство должно приниматься в расчет всеми, кто допускает возможный выбор за пределами множества Парето.

1. 5. Аксиомы транзитивности и согласования

1. Аксиома транзитивности. Рассмотрим ситуацию, когда один вариант предпочтительнее второго, а он, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего. В таком положении здравомыслящий человек при сравнении первого и третьего вариантов всегда выберет первый. Здесь происходит примерно то же самое, что и при сравнении чисел с помощью отношения строгого неравенства. Например, если $5>3$ и $3>1$, то непременно выполнено $5>1$. В терминах возможных вариантов это свойство может быть сформулировано следующим образом: для любой тройки возможных вариантов x',x'',x''' из выполнения соотношений $x'\succ_X x''$ и $x''\succ_X x'''$ обязательно следует справедливость соотношения $x'\succ_X x'''$. На языке бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения, используемое в задачах многокритериального выбора, должно быть подчинено требованию транзитивности.

Ранее уже говорилось о том, что мы будем предполагать асимметричность отношения предпочтения. В соответствии с приведенными выше рассуждениями сформулируем условие (требование), которому должно удовлетворять рассматриваемое в данной книге бинарное отношение предпочтения: *отношение предпочтения* $\succ_X$ *, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, является асимметричным и транзитивным*. Заметим, что поскольку иррефлексивное и транзитивное отношение всегда асимметрично, то в последнем требовании требование асимметричности можно ослабить и заменить его на транзитивность и иррефлексивность.

Напомним, что отношения предпочтения $\succ_X$ и $\succ_Y$ связаны друг с другом в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_X x'$ для возможных решений имеет место тогда и только тогда, когда имеет место соотношение $f(x) \succ_Y f(x')$ для соответствующих векторов.

Далее, мы несколько «расширим» гипотетические возможности ЛПР сравнивать векторы друг с другом, т.е. предположим, что ЛПР в принципе может сравнивать любые два вектора критериального пространства, а не только элементы множества Y.

Таким образом, всюду далее будем считать выполненным следующее допущение, формулируемое в терминах векторов критериального пространства.

Аксиома 2 (аксиома транзитивности отношения предпочтения) *. *Отношение* $\succ_Y$ (*а значит, и отношение* $\succ_X$) *является транзитивным. Кроме того, будем считать, что существует продолжение* $\succ$ *отношения* $\succ_Y$ *на все критериальное пространство* R^m*, которое также является транзитивным*.

В соответствии с этой аксиомой для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений

- $y' \succ y''$
- $y'' \succ y'$
- не имеет места ни $y' \succ y''$, ни $y'' \succ y'$.

При этом отношение предпочтения $\succ$ на множестве возможных векторов Y совпадает с отношением $\succ_Y$ (в таком случае еще говорят, что $\succ_Y$ есть сужение $\succ$ на множество Y).

Необходимо заметить, что может существовать не одно, а целое множество указанных в аксиоме 2 продолжений. Внимательный анализ всего последующего изложения показывает, что полученные результаты не зависят от того, какое именно продолжение в них участвует.

2. Аксиома согласования. В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$. Каждая компонента f_i векторного критерия, как правило, характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в условии максимизации (или минимизации) функции f_i на множестве X.

Необходимо отметить, что в некоторых задачах могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать или минимизировать. Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его значения в определенных пределах и т.п. В таких случаях более гибким инструментом являются не критерии f_i, а

* В этом требовании для обеспечения справедливости формулируемого ниже варианта принципа Эджворта-Парето можно предполагать существование продолжения отношения $\succ$ не на все пространство R^m, а лишь на декартово произведение множеств, являющихся значениями имеющихся критериев.

так называемые «частные» отношения предпочтения $\succ_i$ (см. [54,55]). Однако, как установлено, например, в [54], во многих важных с практической точки зрения случаях (т.е. при некоторых «разумных» требованиях к $\succ_i$ и X) существует функция полезности u_i, адекватно описывающая данное «частное» отношение предпочтения: для всех $x', x'' \in X$ верна эквивалентность $x' \succ_i x'' \;\Leftrightarrow\; u_i(x') > u_i(x'')$. Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизация (или минимизация) критериев, могут быть, по крайней мере теоретически, сведены к подобного рода экстремальным задачам*.

Совершенно очевидно, что в задаче многокритериального выбора отношение предпочтения, равно как и критерии оптимальности выражают интересы одного и того же ЛПР. Поэтому они должны быть каким-то образом взаимосвязаны (сопряжены) друг с другом. Настало время обсудить эту взаимосвязь.

Будем говорить, что i-й *критерий* f_i *согласован с отношением предпочтения* $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, .., y'_m), \; y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \qquad y'_i > y''_i,$$

выполнено $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения как раз и означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности бóльших значений этого критерия.

Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПР с критериями оптимальности выразим в виде следующего требования.

Аксиома 3 (аксиома согласования критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$.

Ясно, что аксиома Парето влечет выполнение аксиомы согласования, но не наоборот. Если же к аксиоме 3 добавить аксиому о транзитивности, то в таком случае, как показывает следующий результат, можно гарантировать выполнение аксиомы Парето.

Лемма 1. 3. *Принятие аксиом* 2 *и* 3 *влечет выполнение аксиомы Парето*.

□ Пусть неравенство $f(x') \geq f(x'')$ справедливо для двух произвольных возможных вариантов $x', x'' \in X$. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что здесь строгие неравенства $f_k(x') > f_k(x'')$ имеют место для всех индексов $k = 1,...,l$ при некотором $l \in \{1,2,...,m\}$. Для всех последующих индексов k, $k > l$, (при условии, что такие найдутся, т.е. при $l < m$), будем предполагать выполненными соответствующие равенства.

Используя согласованность первых l критериев и указанные выше строгие неравенства, получаем

$$(f_1(x'), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')),$$
$$(f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''), f(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$
$$(f_1(x''), f_2(x''), ..., f_{l-1}(x''), f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''), ..., f_l(x''), f_{l+1}(x'), ..., f_m(x')).$$

Отсюда на основании транзитивности отношения $\succ$ следует

* Следует заметить, что последующее изложение данной главы можно обобщить на случай «частных» отношений предпочтения.

$$(f_1(x'), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''),..., f_l(x''), f_{l+1}(x')..., f_m(x')) \quad (1.3)$$

Благодаря сделанному в начале доказательства предположению имеют место равенства $f_k(x') = f_k(x'')$, $k = l+1,...,m$. Поэтому соотношение (1.3) влечет

$$f(x') = (f_1(x'), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''),..., f_l(x''),..., f_m(x'')) = f(x''),$$

откуда, в свою очередь, по определению отношения $\succ$ вытекает требуемое соотношение $x' \succ_X x''$ ■

Как установлено ранее, принятие аксиом исключения и Парето обеспечивает выполнение принципа Эджворта-Парето**.** Следовательно, на основании последней леммы можно сформулировать еще один вариант этого принципа, в котором участвуют не две, а три аксиомы. С учетом того, что образ подмножества является подмножеством образа исходного множества, приходим к следующему результату.

Теорема 1. 1 (принцип Эджворта-Парето). *В условиях выполнения аксиом* 1–3 *для любых множеств выбираемых решений* $C(X)$ *и векторов* $C(Y)$ *справедливы включения* (1.2) *и*

$$C(Y) \subset P(Y),$$

соответственно.

Сформулируем еще один полезный результат.

Лемма 1. 4. *При выполнении аксиом* 2 *и* 3 *множество недоминируемых вариантов* $\mathrm{Ndom}\, X$ *удовлетворяет включению*

$$\mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X). \quad (1.4)$$

□ Пусть, напротив, для некоторого недоминируемого элемента $x \in \mathrm{Ndom}\, X$ выполнено соотношение $x \notin P_f(X)$. Тогда по определению множества парето-оптимальных ариантов существует такой вариант $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x)$. На основании леммы 1.3 в условиях доказываемого утверждения справедлива аксиома Парето. Поэтому полученное неравенство в силу аксиомы Парето влечет соотношение $x' \succ_X x$, которое не совместимо с начальным предположением $x \in \mathrm{Ndom}\, X$ ■

Взаимосвязь между введенными выше различными подмножествами множества возможных вариантов при выполнении аксиом 1 –3 имеет вид включений

$$C(X) \subset \mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X) \subset X. \quad (1.5)$$

Из четырех участвующих в соотношении (1.5) множеств самым широким является множество возможных решений, а самым узким – множество выбираемых решений. Наглядно эта взаимосвязь изображена на рис. 1.1.

В терминах векторов включения (1.5) принимают вид

$$C(Y) \subset \mathrm{Ndom} Y \subset P(Y) \subset Y. \quad (1.6)$$

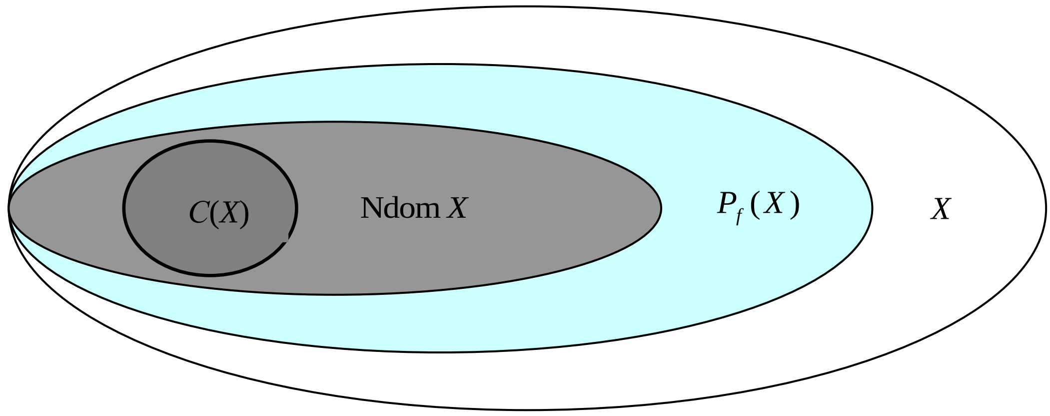

Рис. 1.1.

1. 6. Свойства множества Парето

1. Множества парето-оптимальных вариантов и векторов. Равенство $P(Y) = f(P_f(X))$ связывает множество парето-оптимальных вариантов и парето-оптимальных векторов. В соответствии с ним, зная множество парето-оптимальных решений, можно найти соответствующее множество парето-оптимальных векторов. Справедливо и в определенном смысле обратное утверждение. А именно, располагая множеством парето-оптимальных векторов $P(Y)$ по формуле $P_f(X) = f^{-1}(P(Y))$, где в правой части равенства записан прообраз множества $P(Y)$, можно пытаться строить соответствующее множество парето-оптимальных вариантов. Таким образом, в идейном отношении эти два множества полностью определяют друг друга, хотя попытка построения одного из них на основе второго может натолкнуться на определенные вычислительные трудности (в большей степени это относится к построению множества парето-оптимальных вариантов).

Необходимо отметить, что в отличие от произвольной природы элементов множества $P_f(X)$ элементами множества Парето $P(Y)$ являются хорошо известные математические объекты, а именно, – числовые векторы, размерность которых совпадает с количеством критериев m. По этой причине с точки зрения исследователя множество парето-оптимальных векторов является более удобным.

2. Нахождение множества Парето. Хорошо известно (см., например, [44]), что в общем случае множество Парето имеет довольно сложную структуру, а потому его построение нередко наталкивается на непреодолимые вычислительные трудности.

Во многих прикладных задачах множество возможных векторов Y (а также возможных вариантов X) насчитывает лишь конечное число элементов. В этом случае для построения множества Парето $P(Y)$ можно просто попарно сравнить элементы Y по отношению $\geq$ и удалить все доминируемые. В итоге останется множества Парето $P(Y)$. При этом $P(Y)$ обязательно будет содержать хотя бы один элемент.

□ Установим справедливость последнего высказывания. В самом деле, если каждый из элементов множества Y доминируется некоторым элементом из $Y_1 \subset Y$, то, в свою очередь, каждый из элементов Y_1 должен доминироваться некоторым элементом из $Y_2 \subset Y_1$. И т.д. Поскольку данное рассуждение можно продолжать неограниченно, должна найтись бесконечная последовательность элементов $\{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$, каждый из которых (не считая первого) доминирует предыдущий. Из-за конечности множества Y в этой последовательности должны присутствовать одинаковые элементы. Пусть, например, $y^1 = y^k$ при некотором k. Равенство $k = 1$ исключается в силу асимметричности отношения Парето $\geq$. Равенство $k = 2$ невозможно, поскольку второй вектор доминирует первый, а значит, они не совпадают. Если же $k > 2$, то благодаря транзитивности отношения Парето, придем к неравенству $y^k \geq y^1$, несовместимому с исходным равенством $y^1 = y^k$ ■

В итоге установлен следующий результат.

Теорема 1. 3. *В случае конечного множества векторов Y (в частности, если конечно множество возможных вариантов X) существует хотя бы одно парето-оптимальный вариант и, соответственно, хотя бы один парето-оптимальный вектор, т.е.* $P_f(X) \neq \varnothing, \;\; P(Y) \neq \varnothing$.

Проиллюстрируем процесс построения множества Парето на следующем примере в задаче с четырьмя критериями.

Пример 1. 3. Пусть $m = 4$ и $Y = \{y^1, y^2, ..., y^5\}$, где возможные векторы, записанные в виде строк, представлены в табл. 1.1.

Табл. 1.1.

y^1	4	0	3	2
y^2	5	0	2	2
y^3	2	1	1	3
y^4	5	0	1	2
y^5	3	1	2	3

Сначала для отыскания множества парето-оптимальных векторов полагаем $Y_1 = Y$ и сравниваем первую оценку с остальными. При этом, как легко видеть, все пары

$$y^1, y^2; \quad y^1, y^3; \quad y^1, y^4; \quad y^1, y^5$$

оказываются несравнимыми по отношению $\geq$. Поэтому вектор y^1 запоминаем как парето-оптимальный и после этого удаляем его из множества Y_1 .

Получаем множество $Y_2 = \{y^2, y^3, y^4, y^5\}$. На втором шаге сравниваем вектор y^2 с остальными элементами множества Y_2. Пара y^2, y^3 не сравнима по отношению $\geq$. Поскольку $y^2 \geq y^4$, вектор y^4 удаляем из множества Y_2. Оставшаяся пара векторов y^2, y^5 не сравнима по отношению $\geq$. Так как вектор y^2 оказался недоминируемым, то его следует запомнить как парето-оптимальный, а затем удалить из множества Y_2.

Приходим к множеству $Y_3 = \{y^3, y^5\}$. Поскольку $y^5 \geq y^3$, удаляется вектор y^3 и в результате остается один вектор y^5, который также является парето-оптимальным.

В итоге получено следующее множество парето-оптимальных векторов $P(Y) = \{y^1, y^2, y^5\}$.

3. Алгоритм построения множества Парето. Несколько иначе в удобном для программирования виде алгоритм построения множества Парето можно сформулировать следующим образом. Пусть множество возможных векторов Y состоит из конечного числа N элементов и имеет вид

$$Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}.$$

Алгоритм построения множества парето-оптимальных векторов $P(Y)$ состоит из следующих семи шагов.

Шаг 1. Положить $P(Y) = Y$, $i = 1$, $j = 2$. Тем самым образуется так называемое *текущее множество парето-оптимальных векторов*, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y, а в конце – составит искомое множество парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество парето-оптимальных векторов получается из Y последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $y^i \geq y^j$. Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

Шаг 3. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^j, так как он не является парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j+1$ и вернуться к Шагу 2. В противном случае – перейти к Шагу 7.

Шаг 5. Проверить справедливость неравенства $y^j \geq y^i$. В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае – вернуться к Шагу 4.

Шаг 6. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^i и перейти к Шагу 7.

Шаг 7. Проверить выполнение неравенства $i < N-1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i+1$, а затем $j = i+1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т.е. когда $i \geqq N-1$) вычисления закончить. Множество парето-оптимальных векторов построено полностью.

4. Геометрия двумерного множества Парето. Рассмотрим простейший случай, когда число критериев равно двум, т.е. $m = 2$. В этом случае множество Y представляет собой некоторое множество точек на плоскости.

Все точки y, для которых выполняется неравенство $y \geq y^*$, составляют угол с вершиной в точке y^* и сторонами, параллельными координатным осям. При этом сама вершина y^* этому углу не принадлежит, так как $y \neq y^*$ (см. рис. 1.2).

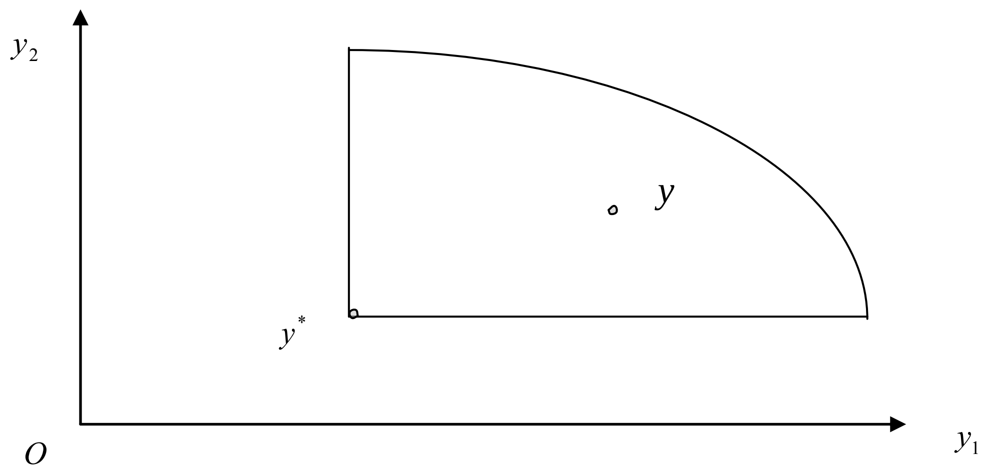

Рис. 1.2.

Рассмотрим пример, в котором множество возможных точек Y имеет вид замкнутой ограниченной фигуры, изображенной на рис. 1.3.

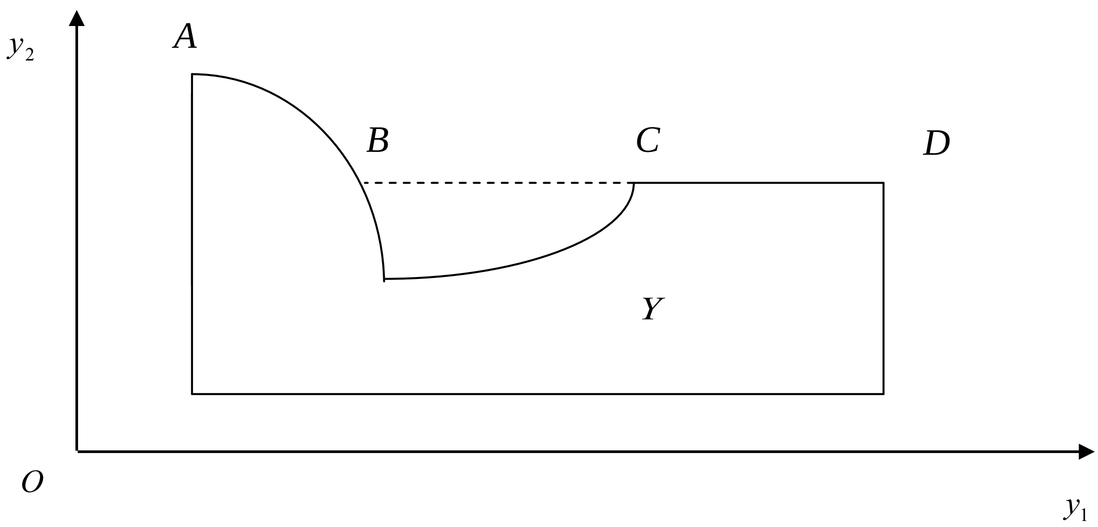

Рис 1.3.

Для того чтобы построить множество парето-оптимальных точек $P(Y)$, можно воспользоваться геометрическим соображением, заимствованным из рис. 1.2. А именно, по определению парето-оптимального вектора y^* для него не должно существовать такой точки y, что выполняется неравенство $y \geq y^*$. Геометрически все такие точки y представляют собой угол с вершиной в y^*. Следовательно, точка $y^* \in Y$ парето-оптимальна тогда и только тогда, когда соответствующий угол, имеющий вершину в точке y^* и стороны, параллельные координатным осям, не содержит ни одной точки множества векторов Y. Отсюда ясно, что ни одна внутренняя точка множества Y не может быть парето-оптимальной. А из граничных точек множества Y на роль парето-оптимальных могут претендовать лишь те, которые располагаются в ее «северо-восточной» части (т.е. линия *ABCD*). При этом та часть границы, которая находится в «провале» (имеется в виду дуга *BC*) также не может принадлежать множеству Парето. Наконец, из частей северо-восточной границы, которые параллельны координатным осям, парето-оптимальными могут быть лишь крайние точки – среди точек отрезка *CD* таковой будет точка *D*. В итоге приходим к следующему множеству парето-оптимальных точек – это дуга *AB* (без точки *B*) и отдельная точка *D*.

В случае, когда число критериев три и более, указанным геометрическим путем множество парето-оптимальных точек построить не удастся. Тем не менее, к настоящему времени разработаны современные *методы визуализации* (графического представления данных на экране компьютера), позволяющие для относительно небольших m получить наглядное представление о множестве возможных и множестве парето-оптимальных векторов (см. [18]—[19]).

Глава 2. Сужение множества Парето с использованием простейшего кванта информации

В этой главе закладываются основы аксиоматического подхода. Прежде всего, вводится последняя, четвертая аксиома об инвариантности отношения предпочтения. Устанавливается, что в условиях принятой аксиоматики отношение предпочтения ЛПР является конусным с острым выпуклым конусом. Это дает возможность использовать аппарат выпуклого анализа.

Приводится определение простейшего кванта информации о неизвестном отношении предпочтения ЛПР. Центральный результат главы – теорема 2.5, которая показывает, каким образом простейший квант информации позволяет производить сужение множества Парето.

Здесь также обсуждаются различные типы шкал и обосновывается применимость упомянутой теоремы 2.5 к любым задачам многокритериального выбора с критериями, значения которых измеряются в произвольных количественных шкалах.

2.1. Требование инвариантности отношения предпочтения

2.1.1. Отношения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования. Напомним определение инвариантного отношения, данное в разд. 1.2. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m, называют *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, любого вектора $c \in R^m$ и всякого положительного числа α из выполнения $y' \Re y''$ следует соотношение $(\alpha\, y' + c) \Re (\alpha\, y'' + c)$.

Отношения неравенств $>$, $\geqq$, $\geq$, заданные на пространстве R^m, дают простейшие примеры инвариантных бинарных отношений. Нетрудно понять, что лексикографическое отношение (см. разд. 1.2) также относится к классу инвариантных бинарных отношений.

Во многих практически важных задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ можно считать инвариантным относительно линейного положительного преобразования. В соответствии с этим в дополнение к сформулированным выше аксиомам 1 – 3 добавим еще одну, которая потребуется для построения содержательной математической теории.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности отношения предпочтения). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Признаком инвариантности отношения $\succ$ является наличие у него свойств аддитивности и однородности. Иными словами, для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, связанных соотношением $y' \succ y''$, должно выполняться как соотношение $(y' + c) \succ (y'' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$, так и соотношение $\alpha\, y' \succ \alpha\, y''$ для любого положительного числа α.

Лемма 2.1. *Благодаря транзитивности и инвариантности отношения предпочтения $\succ$ соотношения $y \succ y'$ и $z \succ z'$ для произвольных векторов $y, y' z, z' \in R^m$ можно почленно складывать, т.е.*

$$y \succ y', \ \ z \succ z' \quad \Rightarrow \quad y + z \succ y' + z'.$$

□ Прибавим к обеим частям соотношения $y \succ y'$ вектор z, Благодаря аддитивности отношения $\succ$ получим $y + z \succ y' + z$. Аналогично из соотношения $z \succ z'$ следует

$z+y' \succ z'+y'$. Теперь, используя транзитивность отношения $\succ$, из полученных соотношений $y+z \succ y'+z$ и $z+y' \succ z'+y'$ приходим к требуемому результату $y+z \succ y'+z'$ ■

2.1.2. Конусные отношения. Важный с точки зрения последующего изложения пример инвариантных бинарных отношений дает класс конусных отношений. Однако прежде чем формулировать определение конусного отношения необходимо ввести некоторые вспомогательные определения из выпуклого анализа.

Множество $A, A \subset R^m$, называют *выпуклым*, если оно вместе с каждой парой своих точек содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Иными словами, подмножество A пространства R^m выпукло, если для всех пар точек $y', y'' \in A$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено соотношение $\lambda y' + (1-\lambda)y'' \in A$. Множество $K, K \subset R^m$, называется *конусом*, если для каждой точки $y \in K$ и любого положительного числа α выполняется включение $\alpha y \in K$. Конус, являющийся выпуклым, именуют *выпуклым конусом.* Иначе говоря, выпуклое множество является выпуклым конусом, если оно вместе с каждой своей точкой содержит и весь луч, исходящий их начала координат (в общем случае без самого начала) и проходящий через данную точку. При этом начало координат (вершина конуса) может как принадлежать, так и не принадлежать данному конусу. Можно проверить, что сумма любых двух (и более) элементов выпуклого конуса всегда принадлежит данному конусу. Конус K называют *острым*, если не существует такого ненулевого вектора $y \in K$, для которого выполняется включение $-y \in K$. Не являющийся острым конус обязательно содержит, по крайней мере, одну прямую, проходящую через начало координат (вместе с самим началом или же без него).

Множество L всех решений (векторов $x \in R^m$) однородного линейного неравенства $\langle c, x\rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \geqq 0$, где c − фиксированный ненулевой вектор пространства R^m, представляет собой некоторый выпуклый конус (его называют *замкнутым полупространством*).

□ Действительно, из $\langle c, x\rangle \geqq 0$ следует справедливость неравенства $\alpha\langle c, x\rangle = \langle c, \alpha x\rangle \geqq 0$ для любого положительного множителя α. Значит, L – конус. Убедимся, что это выпуклый конус. С этой целью возьмем две произвольные точки x' и x'' конуса L. Для них выполнены неравенства $\langle c, x'\rangle \geqq 0$ и $\langle c, x''\rangle \geqq 0$. Умножим первое неравенство на произвольное число $\lambda \in [0,1]$, а второе – на $1-\lambda$. Складывая почленно полученные неравенства, придем к неравенству $\lambda\langle c, x'\rangle + (1-\lambda)\langle c, x''\rangle = \langle c, \lambda x' + (1-\lambda)x''\rangle \geqq 0$, устанавливающему выпуклость конуса L ■

Следует отметить, что замкнутое полупространство не является острым конусом, поскольку вместе с ненулевым вектором $\bar{x}$, удовлетворяющим равенству $\langle c, \bar{x}\rangle = 0$, содержит и вектор $-\bar{x}$, так как умножение указанного равенства на -1 не нарушает его выполнение.

Если же вместо одного неравенства рассматривать некоторую систему, содержащую определенное конечное число подобного рода неравенств, то множеством решений этой системы однородных линейных неравенств также будет выпуклый конус, представляющий собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Его называют *многогранным* (*полиэдральным*) *конусом*. В общем случае этот конус не является острым.

Пусть задан некоторый набор векторов $a^1, a^2, ..., a^p \in R^m$. Нетрудно проверить, что совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций данных векторов (т.е. все векторы вида $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_p a^p$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ неотрицательны), образует некоторый выпуклый (*конечнопорожденный*) конус K в пространстве R^m. В этом случае говорят, что набор векторов $a^1, a^2, ..., a^p$ *порождает* выпуклый конус K и пишут

$K = \text{cone}\{a^1, a^2, ..., a^p\}$. Начало координат принадлежит этому конусу. На основании теории двойственности выпуклого анализа (см. [49], [53]) любой конечнопорожденный конус представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т.е. является многогранным конусом.

Векторы выпуклого конуса, которые невозможно представить в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами двух других векторов данного конуса, называют *ребрами* (или *образующими*) этого конуса. Известно [53], что любой острый выпуклый замкнутый конус, не совпадающий с началом координат, порождается своими ребрами.

Если выпуклый конус задан в виде множества решений некоторой однородной системы линейных неравенств, то все его ребра в принципе можно найти, например, методом перебора, рассматривая все возможные подсистемы определенного числа линейных уравнений, получающиеся из исходной системы неравенств заменой всех знаков неравенств равенствами (см. [6]).

Неотрицательный ортант R_+^m пространства R^m, определяемый равенством

$$R_+^m = \{y \in R^m \mid y \geq 0_m\},$$

представляет собой выпуклый острый конус (без вершины), который порождается единичными ортами этого пространства. На плоскости (т.е. при $m = 2$) этот ортант имеет вид прямого угла, совпадающего с первой четвертью (рис. 2.1). Он порождается единичными ортами $e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$ и является результатом пересечения правой и верхней замкнутых полуплоскостей (без начала координат).

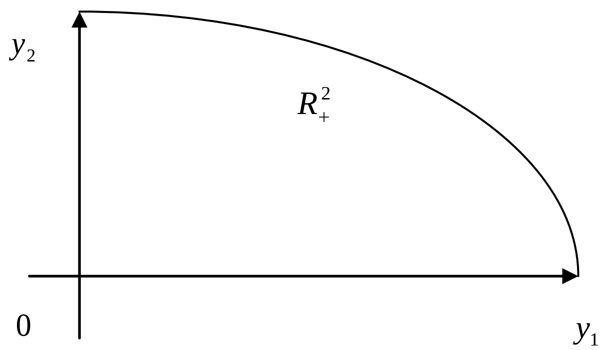

Рис.2.1.

Еще некоторые два острых плоских конуса K_1 и K_2 изображены на рис 2.2.

Верхняя полуплоскость представляет собой замкнутое полупространство, т.е. выпуклый конус, не являющийся острым. Более подробно с выпуклыми множествами и конусами можно ознакомиться в [6, 49, 53].

Определение 2.1. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m (т.е. $\Re \subset R^m \times R^m$), называют *конусным отношением*, если существует такой конус $K, K \subset R^m$, что для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ справедлива эквивалентность

$$y' \Re y'' \iff y' - y'' \in K.$$

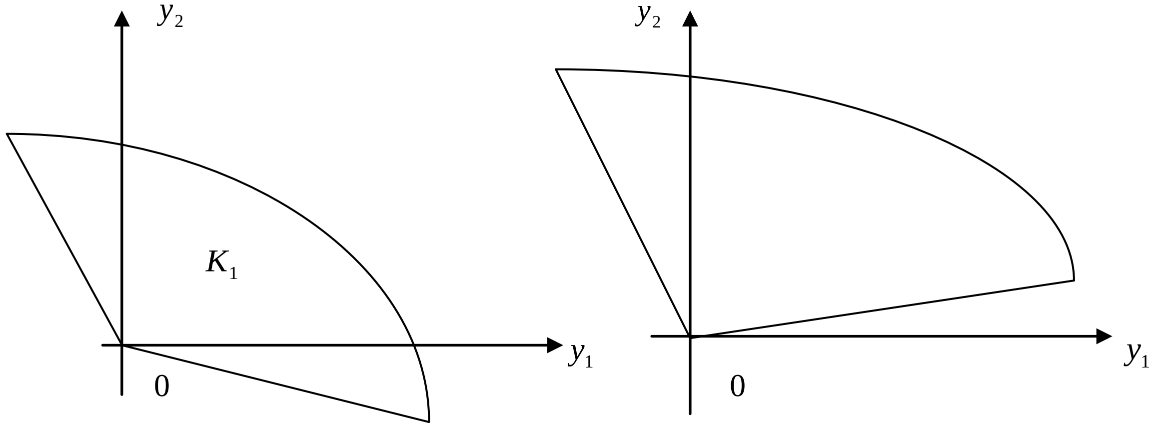

Рис. 2.2.

Нередко правую часть эквивалентности записывают в виде $y' \in y'' + K$ (см. рис. 2.3).

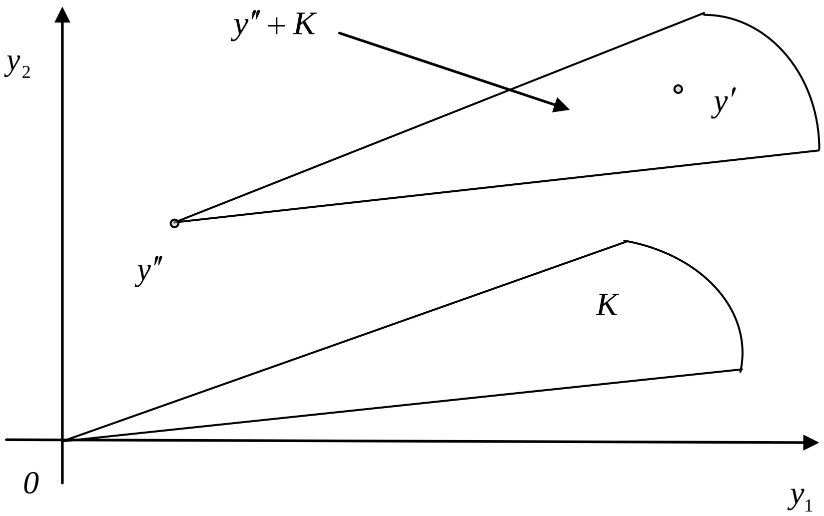

Рис. 2.3.

Отношения неравенств $>$ и $\geq$, рассматриваемые на пространстве R^m, представляют собой некоторые конусные отношения с конусами $R^m_> = \{y \in R^m \mid y > 0_m\}$ и R^m_+ соответственно.

Оказывается, всякое бинарное отношение, удовлетворяющее аксиомам 2 и 4, будет конусным. На это указывает следующий результат.

Лемма 2.2. *Любое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное относительно линейного положительного преобразования бинарное отношение* $\Re$*, заданное на пространстве* R^m*, является конусным отношением с острым выпуклым конусом, не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования отношением, заданным на* R^m.

□ Пусть $\Re$ является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования бинарным отношением, заданным на R^m. Докажем, что $\Re$ – конусное отношение. Для этого введем множество

$$K = \{y \in R^m \mid y \Re 0_m\}.$$

Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ множество K является конусом. Кроме того, для произвольной пары векторов $y', y'' \in R^m$ на основании свойства аддитивности имеем

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \Re 0_m \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \in K.$$

Таким образом, отношение $\Re$ действительно является конусным с конусом K. Необходимо проверить, что конус K – выпуклый, острый и не содержит начало координат.

Если $0_m \in K$, то по определению конуса K выполнено $0_m \Re 0_m$, что не совместимо с требованием иррефлексивности отношения $\Re$. Значит, конус K не содержит начало координат.

Для доказательства выпуклости конуса K выберем произвольно два вектора $y', y'' \in K$ и число $\alpha \in (0,1)$ (заметим, что значения $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ можно исключить из последующей проверки). Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ из соотношений $y' \Re 0_m$ и $y'' \Re 0_m$ получаем $\alpha y' \Re 0_m$ и $(1-\alpha) y'' \Re 0_m$ соответственно. Из первого соотношения в силу аддитивности имеем $(\alpha y' + (1-\alpha) y'') \Re (1-\alpha) y''$. Теперь на основании транзитивности $\Re$ из второго и последнего соотношений получаем $(\alpha y' + (1-\alpha) y'') \Re 0_m$, или $(\alpha y' + (1-\alpha) y'') \in K$, что устанавливает выпуклость конуса K.

Для того чтобы убедиться, что конус K является острым, предположим противное: существует ненулевой вектор $y \in K$, для которого выполняется соотношение $-y \in K$. Для этого вектора имеем $y \Re 0_m$ и $-y \Re 0_m$. Складывая почленно последние два соотношения, приходим к противоречию $0_m \Re 0_m$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\Re$ – произвольное конусное отношение с острым выпуклым конусом K, не содержащим начало координат. Убедимся в том, что оно является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Это отношение действительно иррефлексивно, так как в противном случае конус K содержал бы начало координат.

Проверим транзитивность отношения предпочтения. Для этой цели выберем произвольную тройку векторов $y', y'', y''' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям $y' \Re y''$ и $y'' \Re y'''$. Последние два соотношения можно переписать в виде $y' - y'' \in K$ и $y'' - y''' \in K$, откуда следует, что имеется два определенных элемента конуса K. Поскольку сумма любых двух элементов выпуклого конуса принадлежит данному конусу, из двух последних соотношений получаем $y' - y''' \in K$, или, что то же самое, $y' \Re y'''$. Полученное устанавливает транзитивность отношения $\Re$.

Инвариантность отношения $\Re$ вытекает из соотношений

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad y' - y'' \in K \quad \Leftrightarrow \quad (y' + c) - (y'' + c) \in K \quad \Leftrightarrow \quad (y' + c) \Re (y'' + c),$$

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad y' - y'' \in K \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(y' - y'') \in K \quad \Leftrightarrow \quad \alpha y' - \alpha y'' \in K \quad \Leftrightarrow \quad \alpha y' \Re \alpha y''$$

для всех векторов $c \in R^m$ и любых положительных чисел α ■

Теорема 2.1. *Любое бинарное отношение* $\succ$, *удовлетворяющее аксиомам* 2, 3 *и* 4, *является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант* R_+^m *и не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа удовлетворяет аксиомам* 2, 3 *и* 4.

□ Бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2 – 4, является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Необходимость. На основании леммы 2.2 остается убедиться, что конус K данного бинарного отношения $\succ$ включает неотрицательный ортант. В силу леммы 1.3 из предыдущей главы выполняется аксиома Парето (в терминах векторов)

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y'',$$

которую можно переписать в виде импликации

$$y' - y'' \in R_+^m \quad \Rightarrow \quad y' - y'' \in K.$$

Поскольку разность $y' - y''$ может быть любым вектором неотрицательного ортанта R_+^m, то указанная импликация означает выполнение включения $R_+^m \subset K$.

Достаточность. Если конусное отношение порождается острым выпуклым конусом (без нуля), то, в силу леммы 2.2, соответствующее ему конусное отношение является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования (т.е. аксиомы 2 и 4 выполнены). А так как этот конус содержит неотрицательный ортант R_+^m, то соответствующее конусное отношение, кроме того, удовлетворяет аксиоме Парето. Нетрудно понять, что из справедливости аксиомы Парето вытекает выполнение аксиомы 3. Следовательно, рассматриваемое конусное отношение удовлетворяет всем аксиомам 2 – 4 ■

В соответствии с теоремой 2.1, бинарные отношения, удовлетворяющие аксиомам 2 – 4 (напоминаем, что эти аксиомы всюду далее предполагаются выполненными), допускают простую геометрическую интерпретацию – они являются конусными отношениями с острыми, выпуклыми конусами без начала координат, причем эти конусы разве что шире неотрицательного ортанта R_+^m.

Благодаря теореме 2.1, для сужения множества Парето оказывается возможным использование результатов выпуклого анализа.

2.2. Определение простейшего кванта информации

2.2.1. Исходная задача многокритериального выбора. Последующее рассмотрение будет посвящено задаче многокритериального выбора, включающей

- множество возможных вариантов X
- векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$
- отношение предпочтения $\succ_X$.

Следует отметить, что многие вопросы приобретают более простой вид, если их формулировать и решать в терминах векторов. Как было отмечено в предыдущей главе, практически все результаты, полученные в терминах вариантов можно легко переформулировать в терминах векторов и обратно. Поэтому в дальнейшем изложении часто будет рассматриваться *задача многокритериального выбора в терминах векторов*, содержащая

- множество возможных векторов $Y, Y \subset R^m$,
- отношение предпочтения $\succ$, заданное на пространстве R^m.

Напомним, что множество возможных векторов определяется равенством

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\},$$

а отношение предпочтения $\succ$ представляет собой продолжение на все пространство R^m отношения предпочтения $\succ_Y$, связанного естественным образом с отношением предпочтения $\succ_X$, заданном на множестве возможных вариантов X.

Всюду далее будем предполагать выполненными аксиомы 1 – 4, сформулированные ранее. В этих условиях, как показывает лемма 1.3, выполняется аксиома Парето, согласно которой (в терминах векторов) для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, таких что $y' \geq y''$[2], имеет место соотношение $y' \succ y''$, т.е.

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''. \tag{2.1}$$

При сделанных выше предположениях ЛПР имеет возможность сравнивать любые два вектора y', y'' критериального пространства R^m с помощью иррефлексивного и транзитивного отношения $\succ$. При этом может реализоваться один и только один из следующих трех случаев

- $y' \succ y''$, т.е. y' предпочтительнее y''
- $y'' \succ y'$, т.е. y'' предпочтительнее y'
- не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$.

2.2.2. Мотивация определения простейшего кванта информации. Введем множество номеров критериев

$$I = \{1, 2, ..., m\}$$

и рассмотрим наиболее простую задачу выбора из двух векторов $y', y'' \in R^m$ с минимальным числом различных компонент.

Если векторы y' и y'' имеют лишь одну различную компоненту, например, $y'_i \neq y''_i$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s \in I \setminus \{i\}$, то справедливо соотношение $y' \geq y''$, либо $y'' \geq y'$. Отсюда на основании аксиомы 3 соответственно следует $y' \succ y''$, либо $y'' \succ y'$. Таким образом, в данном простейшем случае выбор из двух векторов однозначно определяется аксиомой 3.

---

[2] Напомним, что неравенство $y' \geq y''$ означает одновременное выполнение неравенств $y' \geqq y'', y' \neq y''$.

Теперь предположим, что векторы y' и y'' имеют не одну, а две различные компоненты:

$$y'_i \neq y''_i,\ y'_j \neq y''_j; \qquad y'_s = y''_s \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

причем одновременное выполнение равенств $y'_i = y'_j$, $y''_i = y''_j$ невозможно. Тогда реализуется один и только один из следующих четырех случаев:

$$1)\ y'_i > y''_i,\ y'_j > y''_j \qquad 2)\ y''_i > y'_i,\ y''_j > y'_j$$

$$3)\ y'_i > y''_i,\ y''_j > y'_j \qquad 4)\ y''_i > y'_i,\ y'_j > y''_j.$$

Предположим, что ЛПР из двух данных векторов сделало свой выбор в пользу одного из них, т.е. имеет место одно и только одно их следующий двух соотношений $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$. Без ограничения общности в силу симметричности можно считать, что верно первое соотношение $y' \succ y''$. Спрашивается, каким образом можно объяснить сделанный ЛПР выбор?

Если реализовался первый из указанных выше четырех случаев, то истинность соотношения $y' \succ y''$ вытекает из аксиомы Парето. Второй вариант невозможен, так как в этом случае, благодаря аксиоме Парето, выполнено соотношение $y'' \succ y'$, несовместимое в силу асимметричности $\succ$ с соотношением $y' \succ y''$.

Разберем оставшиеся две возможности. Благодаря симметричности двух последних вариантов ограничимся рассмотрением третьего. Выполнение неравенства $y'_i > y''_i$ означает, что по i-му критерию вектор y' для ЛПР выгоднее, чем y''. С другой стороны, с точки зрения j-го критерия в силу $y''_j > y'_j$ вектор y'' предпочтительнее вектора y'. В итоге имеется два взаимопротиворечивых условия и возникает вопрос: почему в указанной ситуации наличия противоречащих друг другу высказываний все-таки был сделан выбор в пользу вектора y' против y''? Что послужило причиной такого выбора?

По-видимому, наиболее разумным объяснением этому факту может служить следующее: в рассматриваемом противоречивом случае ЛПР готово пойти на компромисс, уступив некоторое значение по j-му критерию для того, чтобы получить определенную прибавку по более значимому i-му критерию.

2.2.3. Определение простейшего кванта. Приведенные выше рассуждения, относящиеся к простейшей задаче выбора из произвольной пары векторов, обосновывают введение следующего определения.

Определение 2. 2. Пусть $i, j \in I,\ \ i \neq j$. Будем говорить, что задан *простейший квант информации об отношении предпочтения ЛПР с заданными положительными параметрами* w_i^*, w_j^*, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполняется

$$\begin{aligned} &y'_i > y''_i,\ y''_j > y'_j,\ y'_s = y''_s \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\} \\ &y'_i - y''_i = w_i^*,\ y''_j - y'_j = w_j^* \end{aligned} \tag{2.2}$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Замечание 2. 1. Отметим инвариантность введенного определения относительно умножения параметров на произвольные числа. А именно, в силу однородности отношения

$\succ$, задание простейшего кванта информации с параметрами w_i^*, w_j^* влечет наличие аналогичного кванта с параметрами $\alpha w_i^*, \alpha w_j^*$ при любом положительном α.

В случае, когда имеется простейший квант информации, ЛПР всякий раз при выборе из пары векторов вида (2.2) готово пожертвовать количеством w_j^* по j-у критерию ради увеличения на величину w_i^* значение более значимого i-го критерия при условии сохранения значений всех остальных критериев.

При этом отношение между числами w_i^* и w_j^* позволяет количественно оценить указанную степень компромисса. Для этого можно ввести в рассмотрение, например, число w_j^* / w_i^*, которое принимает любые положительные значения. Однако удобнее оперировать с нормированным значением в пределах от нуля до единицы, и потому применим к указанному отношению преобразование $y = x/(1+x)$. Тем самым, приходим к следующему определению.

Определение 2. 3. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$, и имеется простейший квант информации с положительными параметрами w_i^* и w_j^*. В этом случае число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} = \frac{1}{w_i^* / w_j^* + 1} \in (0,1)$$

будем именовать *коэффициентом* (или *степенью*) *компромисса ЛПР* для указанной пары критериев.

Очевидно, $0 < \theta_{ij} < 1$. Этот коэффициент показывает долю потери по j-у критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой потери и прибавки по i-у критерию. Если коэффициент θ_{ij} близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по i-у критерию готово платить довольно большой потерей по j-у критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда i-й критерий имеет сравнительно высокую степень значимости по сравнению с j-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по j-му критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более значимому критерию. Это означает, что степень значимости i-го критерия в сравнении с j-м относительно невысока; данное положение и находит свое выражение в малом значении коэффициента компромисса. Если $\theta_{ij} = 1/2$, то ЛПР готово согласиться на определенную прибавку по более важному критерию за счет потери по менее значимому критерию при условии, что величина потери в точности совпадает с величиной прибавки.

Необходимо добавить, что количественно отмеченная выше степень компромисса находится в прямой зависимости от типа шкалы, в которой измеряется тот или иной критерий. Подробнее об этом пойдет речь в разд. 2.4.

2.2.4. Свойства простейшего кванта информации. Изучим свойства введенного выше определения простейшего кванта информации.

Теорема 2. 2. *Задание простейшего кванта информации с положительными параметрами w_i^*, w_j^* влечет наличие простейшего кванта информации с любой парой положительных параметров w_i', w_j', удовлетворяющих неравенствам $w_i' > w_i^*$, $w_j' < w_j^*$. Иначе говоря, из того, что степень компромисса ЛПР равна θ_{ij}, следует, что данное ЛПР обладает любой степенью компромисса, меньшей, чем θ_{ij}.*

□ Выберем произвольно два положительных числа $w_i^{'}, w_j^{'}$ и два вектора $y', y'' \in R^m$, для которых выполнены соотношения

$$y_i' - y_i'' = w_i' > w_i^*, \quad y_j'' - y_j' = w_j' < w_j^*, \quad y_s' = y_s'' \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

и докажем, что $y' \succ y''$.

Введем положительные числа z_i и z_j следующим образом

$$z_i - y_i'' = w_i^*, \quad y_j'' - z_j = w_j^*.$$

В силу $w_i^{'} > w_i^*$, $w_j^{'} < w_j^*$ имеем $y_i' > z_i$ и $y_j' > z_j$. Кроме того, очевидно, $y_j'' > z_j$.

Рассмотрим вектор $z' \in R^m$ вида

$$z_i' = z_i, \quad z_j' = z_j, \qquad z_s' = y_s' \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Для этого вектора выполнено

$$y_i' > z_i', \quad y_j' > z_j', \qquad y_s' = z_s' \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Отсюда, согласно аксиоме Парето, получаем $y' \succ z'$.

Далее, из соотношений

$$z_i' - y_i'' = w_i^*, \quad y_j'' - z_j' = w_j^*, \qquad z_s' = y_s'' \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

на основании того, что критерий i-й критерий более значим, чем j-й критерий с параметрами w_i^*, w_j^*, приходим к соотношению $z' \succ y''$. Это соотношение вместе с полученным ранее $y' \succ z'$, благодаря транзитивности отношения $\succ$, ведет к требуемому результату $y' \succ y''$.

Проверим вторую часть теоремы. Пусть $\theta_{ij}' < \theta_{ij}$. На основании замечания 2.1, можно ввести параметры

$$w_i' = 1 - \theta_{ij}', \; w_j' = \theta_{ij}'; \; w_i^* = 1 - \theta_{ij}, \; w_j^* = \theta_{ij}.$$

Для них имеем

$$\frac{w_j'}{w_i' + w_j'} = \theta_{ij}', \; \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j'^*} = \theta_{ij}$$

и, кроме того,

$$w_i' > w_i^*, \qquad w_j' < w_j^*.$$

В таком случае, применяя доказанную выше первую часть теоремы, получаем, что в наличии имеется простейший квант информации с параметрами w_i', w_j', а значит со степенью компромисса θ_{ij}' ■

Содержание теоремы 2.2 вполне согласуется с интуитивными представлениями о компромиссе. А именно, если ЛПР готово пойти на потерю в размере w_j^* по j-му критерию ради получения выигрыша в размере w_i^* по i-му критерию, то это ЛПР, очевидно, должно согласиться как на меньшие потери w_j' $(w_j' < w_j^*)$, так и на больший выигрыш w_i' $(w_i' > w_i^*)$.

Опираясь на определение простейшего кванта информации и теорему 2.2, проанализируем возникающие возможности для произвольной упорядоченной пары критериев f_i, f_j. Для данной пары критериев каждое число из интервала (0,1) либо является коэффициентом компромисса, либо не является таковым. Поэтому может иметь место один и только один из следующих трех случаев:

1) хотя бы одно положительное число из интервала $(0,1)$ представляет собой степень компромисса для i-го и j-го критериев и хотя бы одно – не является таковым;
2) ни одно положительное число из интервала $(0,1)$ не является степенью компромисса для i-го и j-го критериев. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий ни в коей мере не является более значимым, чем j-й критерий*;
3) любое положительное число из интервала $(0,1)$ является степенью компромисса для i-го и j-го критериев. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий несравнимо более значим j-го критерия.*

Разберем первый случай более подробно. Если хотя бы одно число $\theta_{ij} \in (0,1)$ является коэффициентом компромисса, то в соответствии с теоремой 2.2 любое меньшее число в пределах указанного интервала также является коэффициентом компромисса для рассматриваемой пары критериев. Образуем два непересекающихся множества A и B. К первому из них причислим все числа интервала $(0,1)$, которые являются коэффициентами компромисса для данной упорядоченной пары критериев, второе составим из всех чисел указанного интервала, которые не являются коэффициентами компромисса. По условию, об множества непустые. Имеем $A \cup B = (0,1)$, причем на основании теоремы 2.2 неравенство $a < b$ выполняется для всех $a \in A, b \in B$. Это означает, что множества A и B образуют с е ч е н и е интервала $(0,1)$. В таком случае в соответствии с п р и н ц и п о м Д е д е к и н д а существует единственное число $\bar{\theta}_{ij} \in (0,1)$, производящее указанное сечение. Это число будем называть *предельным коэффициентом компромисса*.

Следует отметить, что само число $\bar{\theta}_{ij}$ может оказаться коэффициентом компромисса, но может и не быть таковым. Иначе говоря, возможна реализация любого из двух случаев $\bar{\theta}_{ij} \in A$ или $\bar{\theta}_{ij} \notin A$.

2.2.5. Связь с лексикографическим отношением. Между отношением предпочтения $\succ$, удовлетворяющим аксиомам 2-4, и лексикографическим[3] отношением имеется определенная связь, которая в терминах упорядоченного набора несравнимо более значимых критериев раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 2.3. *Заданное на пространстве R^m иррефлексивное, транзитивное и инвариантное отношение $\succ$, является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо более значим второго, второй – несравнимо более значим третьего и т.д. $(m-1)$-й критерий несравнимо более значим m-го критерия.*

□ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. В этом случае для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ истинны высказывания

---

[3] Определение лексикографического отношения можно найти в разд. 1.2.

1) $y_1' > y_1'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$
2) $y_1' = y_1'',\ y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$
3) $y_1' = y_1'',\ y_2' = y_2'',\quad y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$
………………………………………………..
m) $y_i' = y_i'',\ i = 1,2,...,m-1;\quad y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из первого высказывания следует, что для двух произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполнено $y_1' > y_1'',\ y_2' < y_2'',\ y_3' = y_3'',..., y_m' = y_m''$, имеет место соотношение $y' \succ y''$. Это означает, что первый критерий несравнимо более значим второго критерия.

Аналогично из второго высказывания можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо более значим третьего критерия и т.д. из предпоследнего высказывания вытекает несравнимо бóльшая значимость $(m-1)$-го критерия по сравнению с m-м критерием.

Достаточность[4]. Пусть для каждого $i = 1,2,...,m-1$ критерий f_i несравнимо более значим, чем критерий f_{i+1}. Докажем, что в таком случае отношение $\succ$ является лексикографическим.

Рассмотрим два произвольных вектора $y', y'' \in R^m$. Если они совпадают, то ни один из них не может быть лексикографически больше другого, что соответствует определению лексикографического отношения.

Пусть $y' \neq y''$. Обозначим через i минимальный номер, при котором $y_i' \neq y_i''$. Не уменьшая общности, будем считать, что $y_i' < y_i''$. Докажем $y'' \succ y'$. Доказательство носит алгоритмический характер. Опишем шаги этого алгоритма.

Шаг 1. Сравним числа y_m' и y_m''. Если $y_m' = y_m''$, то переходим на Шаг 2, полагая $z^1 = y'$. Если $y_m' < y_m''$, то вводим вектор $z^1 = (y_1',..., y_{m-1}', y_m'')$, для которого в силу аксиомы согласования выполнено соотношение $z^1 \succ y'$. После чего переходим на Шаг 2.

Если $y_m' > y_m''$, то фиксируем произвольное $\alpha > y_{m-1}'$ и вводим вектор $z^1 = (y_1',..., y_{m-2}', \alpha, y_m'')$. Поскольку критерий f_{m-1} несравнимо более значим, чем f_m, имеем $z^1 \succ y'$. Далее – Шаг 2.

Шаг 2. Аналогично продолжаем сравнение компонент z_{m-1}^1 и y_{m-1}''.

И т. д. до шага $k = m-i-1$. наконец: переходим к последнему шагу.

Шаг k+1. На этом шаге имеем $z_j^k = y_j'',\ j = i+2,...,m$. Сравниваем z_{i+1}^k и y_{i+1}''. Если $z_{i+1}^k = y_{i+1}''$, то, в соответствии с аксиомой согласования, $y'' \succ z^k$. В случае $z_{i+1}^k < y_{i+1}''$ получаем $y'' \geq z^k$. Благодаря аксиоме Парето, отсюда следует $y'' \succ z^k$. Если же $z_{i+1}^k > y_{i+1}''$, то, в силу $y_i' = z_i^k < y_i''$ и несравнимо большей значимости критерия f_i по сравнению с f_{i+1}, вновь имеем $y'' \succ z^k$.

В результате приходим к цепочке соотношений $y'' \succ z^k \succ \ldots z^1 \succ y'$, в которой где-то (но не всюду) вместо символа предпочтения могут присутствовать равенства. Отсюда на основе транзитивности отношения предпочтения приходим к требуемому соотношению $y'' \succ y'$ ■

[4] Доказательство предложено Басковым О.В.

2.3. Использование простейшего кванта информации для сужения множества Парето

2.3.1. Упрощение определения простейшего кванта. Определение 2.2 раскрывает точный смысл простейшего кванта информации об отношении предпочтения ЛПР. В этом определении присутствуют два числовых параметра, с помощью которых измеряется степень компромисса.

Для того чтобы проверить на практике, действительно ли i-й критерий более значим, чем j-й, в соответствии с определением 2.2 необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} y_i' > y_i'',\ y_j'' > y_j',\ y_s' = y_s'' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\} \\ y_i' - y_i'' = w_i^*,\ y_j'' - y_j' = w_j^* \end{gathered} \tag{2.3}$$

при некоторых положительных параметрах w_i^*, w_j^*. Если для любой пары указанных векторов первый вектор y' всякий раз оказывается предпочтительнее второго y'', то по определению 2.2 это будет означать, что задан простейший квант информации с соответствующими параметрами.

Совершенно очевидно, что в действительности подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения и не требуется. Все может быть сведено к сравнению лишь одной пары векторов y', y'', для которой выполнено (2.3). Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 2.4. *В определении* 2.2 *можно считать, что векторы* y', y'' *фиксированы. В частности, в этом определении можно положить*

$$y_i' = w_i^*,\ y_j' = -w_j^* \ \text{ и } \ y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\};\ y'' = 0_m, \tag{2.4}$$

или

$$y_i' = 1 - \theta_{ij},\ y_j' = -\theta_{ij} \quad \text{и} \quad y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\};\ y'' = 0_m, \tag{2.4$'$}$$

где θ_{ij} – *степень компромисса.*

□ Рассмотрим два произвольных вектора y' и y'', для которых выполнены соотношения (2.3). Очевидно,

$$\begin{gathered} y_i' > y_i'' \quad \Leftrightarrow \quad y_i' - y_i'' > 0 \\ y_j'' > y_j' \quad \Leftrightarrow \quad y_j'' - y_j' > 0. \end{gathered}$$

Обозначим $\bar{y}_i = y_i' - y_i'' = w_i^*$, $\bar{y}_j = y_j' - y_j'' = -w_j^*$, $y_s' = 0$ для всех $s \in I \setminus \{i, j\}$. В силу аддитивности отношения предпочтения $\succ$, справедливо

$$y' \succ y'' \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \succ 0_m \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} \succ 0_m.$$

где вектор $\bar{y}$ имеет только две отличные от нуля компоненты – i -ю и j -ю, которые равны $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$ соответственно. Полученное означает, что общее определение 2.2 эквивалентно «упрощенному» определению 2.2, в котором зафиксированы векторы $y' = \bar{y}$ и $y'' = 0_m$.

Из полученного сразу следует, что в определении 2.2 векторы y', y'' можно считать фиксированными.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ для указанного выше вектора $\bar{y}$, благодаря свойству однородности отношения предпочтения $\succ$, эквивалентно соотношению $\alpha \bar{y} \succ 0_m$ для любого положительного числа α. В частности, если взять $\alpha = -\theta_{ij}/\bar{y}_j$ и обозначить $\hat{y} = \alpha \bar{y}$, то получим

$$\hat{y}_i = \alpha \bar{y}_i = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_i}{\bar{y}_j} = \frac{\theta_{ij} w_i^*}{w_j^*} = \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} = 1 - \theta_{ij},$$

$$\hat{y}_j = \alpha \bar{y}_j = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_j}{\bar{y}_j} = -\theta_{ij},$$

$$\hat{y}_s = \alpha \bar{y}_s = \alpha 0 = 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Поэтому соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ эквивалентно соотношению $\hat{y} \succ 0_m$, где компоненты

$$\hat{y}_i = 1 - \theta_{ij},\ \hat{y}_j = -\theta_{ij};\ \ \hat{y}_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

вектора $\hat{y}$ такие же, что и у вектора y' из (2.4) ■

Как указано выше, отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Опираясь на теорему 2.4, сформулируем новое, более простое (упрощенное) определение простейшего кванта информации.

Определение 2.4. Пусть $i, j \in I, i \neq j$. Будем говорить, что *задан простейший квант информации с положительными параметрами* w_i^*, w_j^* (*со степенью компромисса* $\theta_{ij} \in (0,1)$) если для вектора $y' \in R^m$ вида (2.4) (соответственно, вида (2.4′)) выполнено соотношение $y' \succ 0_m$.

В соответствии с определением 2.4 для того чтобы проверить, действительно ли i-й критерий более значим критерия j со степенью компромисса $\theta_{ij} \in (0,1)$, достаточно убедиться, что вектор y' вида (2.4) предпочтительнее нулевого вектора, т.е. достаточно проверить справедливость одного соотношения $y' \succ 0_m$. Например, если вектор $(0.7, -0.3, 0)$ оказывается для ЛПР более предпочтительным, чем $(0, 0, 0)$, то первый критерий для этого ЛПР более значим, чем второй со степенью компромисса $\theta_{12} = 0.3$.

2.3.2. Сужение множества Парето на основе простейшего кванта информации. Следующая теорема показывает, каким образом информация об отношении предпочтения в форме простейшего кванта позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Теорема 2.5 (в терминах векторов). *Предположим, что имеется простейший квант информации с положительными параметрами* w_i^* и w_j^* (*с коэффициентом компромисса* $\theta_{ij} \in (0,1)$). *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{2.5}$$

где $\hat{P}(Y)$ *– множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$ *(т.е.* $\hat{P}(Y) = f(P_{\hat{f}}(X))$*), компоненты которого вычисляются по формулам*

$$\hat{f}_j = w_j^* f_i + w_i^* f_j, \ \hat{f}_s = f_s \quad \textit{для всех } s \in I \setminus \{j\}, \tag{2.6}$$

или

$$\hat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (1-\theta_{ij}) f_j, \ \hat{f}_s = f_s \quad \textit{для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.6'}$$

□ Обозначим через K острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$. По условию доказываемой теоремы и в соответствии с определением 2.4 для вектора y', определяемого равенствами (2.4), выполнено соотношение $y' \succ 0_m$. Это соотношение равносильно включению $y' \in K$.

Введем в рассмотрение набор единичных ортов $e^1, e^2, ..., e^m$ пространства R^m; s-я компонента вектора e^s равна единице, а все остальные – нулю, $s = 1,2,...,m$. Обозначим через M выпуклый конус (без нуля), порожденный набором линейно независимых[5] векторов

$$e^1, ..., e^{i-1}, y', e^{i+1}, ..., e^m. \tag{2.7}$$

Конус M совпадает с множеством всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций

$$\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda_i y' + \lambda_{i+1} e^{i+1} + ... + \lambda_m e^m$$

векторов набора (2.7) с неотрицательными, одновременно не равными нулю числовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Проверим, что конус M – острый. Если это не так, то должен найтись ненулевой вектор $y \in M$, для которого $-y \in M$. В соответствии со сказанным выше имеем

$$y = \lambda_1' e^1 + ... + \lambda_{i-1}' e^{i-1} + \lambda_i' y' + \lambda_{i+1}' e^{i+1} + ... + \lambda_m' e^m,$$

$$-y = \lambda_1'' e^1 + ... + \lambda_{i-1}'' e^{i-1} + \lambda_i'' y' + \lambda_{i+1}'' e^{i+1} + ... + \lambda_m'' e^m,$$

причем все коэффициенты линейных комбинаций неотрицательны и каждый из наборов чисел $\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_m'$ и $\lambda_1'', \lambda_2'', ..., \lambda_m''$ одновременно в нуль не обращается. Поскольку сумма двух элементов конуса принадлежит данному конусу, то, складывая два последних равенства, получим

$$0_m = (\lambda_1' + \lambda_1'')e^1 + ... + (\lambda_{i-1}' + \lambda_{i-1}'') e^{i-1} + (\lambda_i' + \lambda_i'')y' + (\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+1}'')e^{i+1} + ... + (\lambda_m' + \lambda_m'') e^m,$$

[5] Набор векторов (2.7) действительно образует линейно независимую систему, так как ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен m.

где среди коэффициентов линейной комбинации, записанных в скобках, по крайней мере один обязательно отличен от нуля. Однако, благодаря линейной независимости векторов (2.7) из последнего равенства следует, что все коэффициенты указанной линейной комбинации равны нулю. Полученное не соответствует начальному предположению и свидетельствует о том, что конус M – действительно острый.

Теперь докажем, что конус M совпадает с множеством ненулевых решений следующей системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &y_s \geqq 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\} \\ &w_j^* y_i + w_i^* y_j \geqq 0\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

С этой целью найдем фундаментальную совокупность решений[6] системы неравенств (2.8) и убедимся, что она совпадает с набором векторов (2.7).

Для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) рассмотрим соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &y_s = 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\} \\ &w_j^* y_i + w_i^* y_j = 0\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

которая может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &\langle e^s, y\rangle = 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\} \\ &\langle \tilde{y}, y\rangle = 0\,^7, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_m)$, причем

$$\tilde{y}_i = w_j^*,\ \tilde{y}_j = w_i^*,\ \tilde{y}_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}\,.$$

Число уравнений системы (2.10) равно m. Вследствие линейной независимости произвольного набора из $m-1$ векторов, полученного из $e^1,...,e^{j-1}, \tilde{y}, e^{j+1},...,e^m$ удалением какого-то одного вектора, для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) достаточно просмотреть ненулевые решения каждой подсистемы из $m-1$ уравнений системы (2.10). При этом среди них следует отобрать векторы, удовлетворяющие системе линейных неравенств (2.8).

Станем удалять из системы (2.10) по одному уравнению и искать ненулевые решения получающейся в результате такого удаления «укороченной» системы. Если из (2.10) удалить последнее уравнение, то, например, вектор e^j будет ненулевым решением полученной «укороченной» системы. Удаляя уравнение $\langle e^s, y\rangle = 0$ (при $s \neq i$), в качестве ненулевого решения

---

[6] *Общее* (т.е. произвольное) *решение* системы линейных неравенств имеет вид линейной комбинации определенной конечной совокупности решений этой системы с неотрицательными коэффициентами (см.[6], с. 243). При этом *фундаментальная совокупность решений* системы линейных неравенств – это минимальная (по количеству) подобная совокупность решений.

[7] Напомним, что символ $\langle a, b\rangle$ для m-мерных векторов a и b означает их *скалярное произведение*, т.е. $\langle a, b\rangle = \sum_{l=1}^{m} a_l b_l$.

«укороченной» системы можно взять вектор e^s. Если же удалить уравнение $\langle e^i, y\rangle = 0$, то, как легко проверить, получающаяся «укороченная» система имеет ненулевое решение y'. В итоге приходим к фундаментальной совокупности решений $e^1,...,e^{i-1}, y', e^{i+1},...,e^m$ системы линейных неравенств (2.8). Эта фундаментальная совокупность совпадает с набором векторов (2.7), порождающих конус M конусного отношения предпочтения $\succ$. Следовательно, конус M представляет собой множество ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8).

Как было указано в начале доказательства теоремы, имеет место включение $y' \in K$. В силу теоремы 2.1, справедливо соотношение $R_+^m \subset K$. Конус R_+^m порождается набором единичных векторов $e^1, e^2,..., e^m$. Так как K – выпуклый конус, то он вместе с векторами (2.7) заведомо содержит и все ненулевые неотрицательные линейные комбинации векторов (2.7), т.е. $M \subset K$. В итоге приходим к включениям

$$R_+^m \subset M \subset K,$$

из которых следует

$$\text{Ndom}Y \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{2.11}$$

где

$$\hat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

– множество недоминируемых элементов множества Y относительно конусного отношения с конусом M.

Выберем произвольно два элемента $x, x^* \in X$, $y = f(x), y^* = f(x^*)$ и $f(x) \neq f(x^*)$. На основании доказанного выше совпадения конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8), включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $y = f(x) - f(x^*)$ является ненулевым решением системы (2.8), т.е.

$$\begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(x^*) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_{j-1}(x) - f_{j-1}(x^*) \\ w_j^*(f_i(x) - f_i(x^*)) + w_i^*(f_j(x) - f_j(x^*)) \\ f_{j+1}(x) - f_{j+1}(x^*) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_m(x) - f_m(x^*) \end{pmatrix} \geq 0_m.$$

Последнее неравенство компактно можно переписать в виде $\hat{f}(x) - \hat{f}(x^*) \in R_+^m$, или $\hat{f}(x) \geq \hat{f}(x^*)$. Следовательно, соотношение $y - y^* \in M$ для векторов $y = f(x), y^* = f(x^*)$ равносильно неравенству $\hat{f}(x) \geq \hat{f}(x^*)$. Отсюда следует, что $\hat{P}(Y) = f(P_{\hat{f}}(X))$.

В условиях доказываемой теоремы на основании леммы 1.2 верно включение $C(Y) \subset \mathrm{Ndom}\, Y$. С учетом этого из включений (2.11) вытекают включения (2.5), которые требовалось установить.

Что касается векторного критерия (2.6′), то он получается из (2.6) делением j-й компоненты последнего на положительное число $w_i^* + w_j^*$. Такая операция, очевидно, не изменяет множества Парето $\hat{P}(Y)$ ■

В соответствии с принципом Эджворта-Парето, все выбираемые векторы должны содержаться во множестве Парето. Если в задаче многокритериального выбора имеется дополнительная информация о том, что ЛПР готово идти на определенный компромисс при сравнении значений некоторых двух критериев, то, в соответствии с теоремой 2.5, на основе этой информации множество Парето может быть сужено без потери выбираемых векторов. Иначе говоря, некоторые векторы из множества Парето можно удалить, так как они заведомо не должны оказаться выбранными. Осуществленное таким образом *сужение множества Парето* на основе простейшего кванта информации в некоторых задачах может облегчить последующий поиск выбираемых векторов.

Справедливости ради следует отметить, что в определенных случаях (в особенности, когда коэффициент компромисса близок к нулю, а значит, критерии f_j и $\hat{f}_j$ почти совпадают друг с другом) указанного выше сужения может и не произойти из-за совпадения множеств Парето относительно «старого» и «нового» векторных критериев, т.е. $\hat{P}(Y) = P(Y)$. Можно сказать, что в таких случаях имеющаяся информация об отношении предпочтения не является содержательной.

В терминах вариантов доказанная теорема принимает следующий вид.

Теорема 2.5 (в терминах вариантов). *Предположим, что задан простейший квант информации с положительными параметрами* w_i^*, w_j^* *(с коэффициентом компромисса* $\theta_{ij} \in (0,1)$). *Тогда для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеют место включения*

$$C(X) \subset \hat{P}_f(X) \subset P_f(X) \qquad (2.12)$$

где $P_{\hat{f}}(X)$ *– множество парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$, *компоненты которого вычисляются по формулам* (2.6) *или* (2.6′).

Рис. 2.4 иллюстрирует доказанную теорему. Комментируя последнюю теорему, прежде всего, следует обратить внимание на ее универсальность, проявляющуюся в том, что в ней отсутствуют какие бы то ни было требования к множеству возможных вариантов X и векторному критерию f. Это говорит о том, что она применима к любой задаче многокритериального выбора, в которой выполнены аксиомы 1 – 4. При этом множество возможных вариантов (и векторов) может состоять как из конечного, так и бесконечного числа элементов, а функции $f_1, f_2, ..., f_m$ могут быть какими угодно – нелинейными, невыпуклыми, невогнутыми и даже не обладать свойством непрерывности. Ограничения в условиях теоремы 2.5 накладываются лишь на поведение ЛПР – оно должно в процессе выбора вести себя «достаточно разумно» в том смысле, что его отношение предпочтения обязано удовлетворять аксиомам 1 – 4.

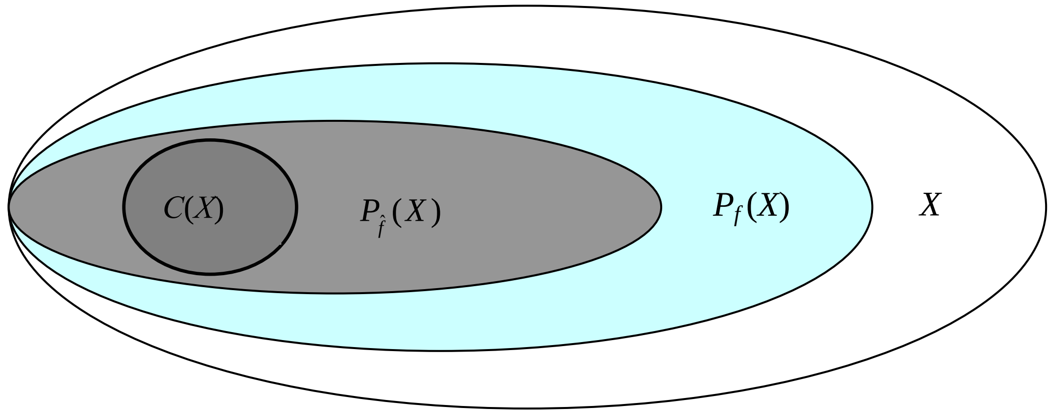

Рис. 2.4.

Далее, формула (2.6) для пересчета «нового» критерия $\hat{f}$ на основе «старого» f чрезвычайно проста. В соответствии с ней «новый» векторный критерий из «старого» получается заменой менее значимого критерия f_j на положительную линейную комбинацию критериев f_i и f_j с параметрами w_i^*, w_j^*. Все остальные «старые» критерии сохраняются. Нетрудно видеть, что при подобном «пересчете» j-го критерия многие полезные с точки зрения оптимизации свойства критериев f_i и f_j сохраняются. Например, если указанные критерии являются непрерывными, вогнутыми, выпуклыми или линейными, то новый критерий $\hat{f}_j$ так же будет обладать соответствующими свойствами.

Наиболее простой вид формула пересчета менее значимого критерия принимает в случае линейных критериев. Сформулируем соответствующий результат.

Следствие 2.2. *Если дополнительно к предположениям теоремы* 2.5 *добавить условие* $X \subset R^n$ *и требование линейности критериев* f_i *и* f_j, *т.е.*

$$f_k(x) = \langle c^k, x \rangle = \sum_{l=1}^{n} c_l^k x_l, \qquad k = i, j,$$

где $c^k = (c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k)$, *то новый* j*-й критерий будет иметь вид* $\hat{f}_j(x) = \langle \hat{c}, x \rangle$, *где* $\hat{c} = w_j^* c^i + w_i^* c^j$, *или*

$$\hat{c} = \theta_{ij} c^i + (1 - \theta_{ij}) c^j. \qquad (2.13)$$

Этот результат немедленно вытекает из формулы (2.6) с учетом линейности скалярного произведения векторов пространства R^m.

Равенство (2.13) имеет наглядную интерпретацию в случае, когда множеством возможных вариантов является подмножество двумерного векторного пространства, т.е. когда $X \subset R^2$ (рис. 2.5).

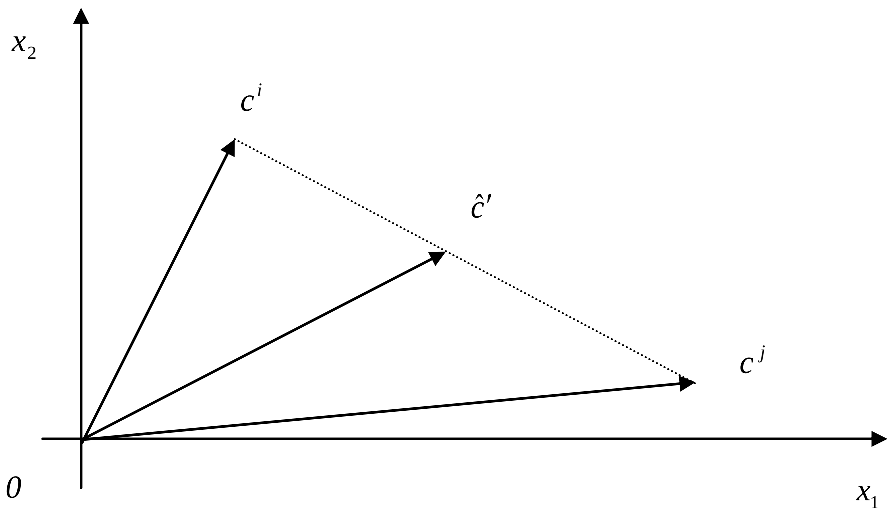

Рис. 2.5.

Чем ближе коэффициент компромисса θ_{ij} к нулю, тем ближе конец вектора $\hat{c}'$ к концу вектора c^j. При увеличении θ_{ij} в пределах интервала $(0,1)$ вектор как бы «притягивает» к себе вектор $\hat{c}'$, соответствующий новому j-у критерию. В случае $\theta_{ij} = 0.5$ конец вектора $\hat{c}'$ будет располагаться точно в центре отрезка соединяющего концы двух векторов c^i и c^j. Если же коэффициент компромисса близок к единице, то вектор $\hat{c}'$ будет мало отличаться от c^i, а значит, векторный критерий $\hat{f}'$ будет содержать два почти одинаковых критерия f_i. В этом случае влияние менее значимого критерия f_j, которому соответствует вектор c^j, на решение задачи многокритериального выбора практически исчезнет.

2.3.3. Геометрические аспекты. В задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, как правило, полностью не известно. В настоящей книге считается, что оно лишь подчиняется аксиомам 1 – 4. В этих условиях, согласно теореме 2.3, отношение предпочтения $\succ$ является конусным с (неизвестным) острым выпуклым конусом K, не содержащим начало координат. Более того, в силу теоремы 2.1 конус K содержит неотрицательный ортант, т.е. $R_+^m \subset K$. Отсюда вытекает включение $\mathrm{Ndom}Y \subset P(Y)$, которое вместе с $C(Y) \subset \mathrm{Ndom}Y$ дает

$$C(Y) \subset P(Y). \tag{2.14}$$

Последнее включение выражает собой принцип Эджворта-Парето, согласно которому выбор следует производить в пределах множества Парето. Как было указано в первой главе, этот принцип применúм в любой задаче многокритериального выбора, удовлетворяющей аксиомам 1 – 3. Иначе его можно сформулировать так: *множество Парето представляет собой определенную оценку сверху для множества выбираемых векторов*.

Теперь предположим, что помимо аксиом 1 – 4 , которым удовлетворяет рассматриваемая задача многокритериального выбора, имеется дополнительная информация о том, что i-й критерий более значим, чем j-й критерий с коэффициентом компромисса $\theta_{ij} \in (0,1)$. Наличие такой информации на геометрическом языке означает, что указан вектор $y' \in R^m$ вида (2.4), для которого выполняется включение $y' \in K$. Таким образом, теперь известно, что конус K кроме неотрицательного ортанта содержит еще и вектор y', расположенный за пределами неотрицательного ортанта.

Рассмотрим конус M, совпадающий с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций векторов $e^1,...,e^{i-1}, y', e^{i+1},...,e^m$, который был введен при доказательстве теоремы 2.5. В ходе доказательства были установлены включения $R_+^m \subset M \subset K$, причем $M \neq R_+^m$. Из этих включений следует

$$C(Y) \subset \mathrm{Ndom} Y \subset \mathrm{Ndom}_M Y \subset P(Y),$$

где

$$\mathrm{Ndom} Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y - y^* \in K\},$$

$$\mathrm{Ndom}_M Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y - y^* \in M\},$$

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y - y^* \in R_+^m\}.$$

Отсюда получаем новую, более точную, чем (2.14), оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов:

$$C(Y) \subset \mathrm{Ndom}_M Y .$$

При этом чем более широким по сравнению с неотрицательным ортантом R_+^m является конус M, тем более узким можно ожидать множество $\mathrm{Ndom}_M Y$ по сравнению с $P(Y)$.

Итак, наличие простейшего кванта информации позволяет выделить в неизвестном конусе K более широкую часть, чем R_+^m (рис. 2.6), и на основании этого построить более точную оценку сверху для множества выбираемых векторов по сравнению с той, которая гарантируется принципом Эджворта-Парето.

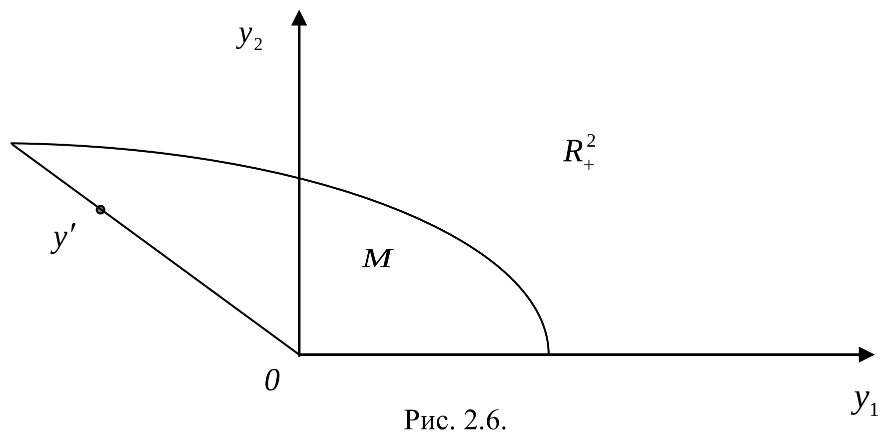

Рис. 2.6.

Пример 2.1. Пусть $m = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$, причем

$$y^1 = (4,1),\ y^2 = (3,2),\ y^3 = (1,3).$$

Здесь все три возможных вектора являются парето-оптимальными, т.е. принцип Эджворта-Парето не позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Предположим, что первый критерий более значим, чем второй с коэффициентом компромисса 0.5. На геометрическом языке это означает, что $y' = (0.5, -0.5) \in K$.

На рис. 2.7 изображены данные три возможных вектора и конус M , транслированный в точки, соответствующие второму и третьему возможным векторам.

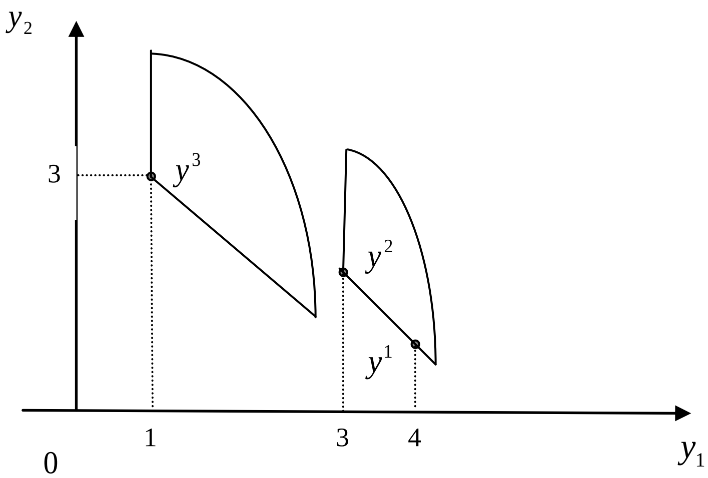

Рис. 2.7.

Видно, что ни второй, ни третий векторы не могут оказаться выбранными, так как для них существуют доминирующие их векторы:

$$y^2 \in y^3 + M,\ \ y^1 \in y^2 + M \ .$$

Следовательно, единственным выбранным может оказаться первый вектор y^1. Иными словами, если множество выбираемых векторов в данной задаче не пусто, то оно состоит из единственного первого вектора.

К этому же выводу можно прийти, если воспользоваться результатом теоремы 2.5. В самом деле, согласно формуле (2.6), новый второй критерий принимает вид $0.5y_1 + 0.5y_2$ и, как легко найти,

$$\hat{f}(X) = \{(4,\ 2.5),\ (3,\ 2.5),\ (1,\ 2)\}\,.$$

Парето-оптимальным в этом множестве является только один первый вектор. Ему соответствует вектор y^1. Значит, он (и только он) может оказаться выбранным из Y при условии, что выбираемые векторы существуют.

2.4. Шкалы критериев и инвариантность измерений

2.4.1. Количественные и качественные шкалы. Как было указано ранее, все критерии $f_1, f_2, ..., f_m$, участвующие в постановке задачи многокритериального выбора, принимают числовые значения. Тем самым, включение $y_i = f_i(x) \in R$ выполняется для любого $x \in X$ и каждого $i = 1,2,...,m$. Для строгой постановки математической задачи многокритериального выбора этих сведений о критериях вполне достаточно.

Однако когда речь идет о той или иной прикладной задаче, числовые значения критериев представляют собой результаты измерения в некоторой шкале. Например, если рассматриваемый критерий выражает стоимость проекта, прибыль или затраты, то все эти величины могут быть выражены в рублях, миллионах рублей, долларах, евро или каких-то других денежных единицах. При измерении длин предметов результаты, как известно, получают в метрах, дюймах, футах, ярдах и т.п. Для указания временного промежутка используют часы, секунды, годы, миллионы лет и т.д. Таким образом, при решении конкретных прикладных задачи значения критериев измеряются в пределах той или иной шкалы и выражаются в определенных единицах измерения.

Существуют различные типы шкал измерения. Когда требуется подсчитать число предметов, людей, вещей и т.п., используется так называемая *абсолютная шкала*. В этой шкале жестко зафиксировано начало отсчета (нуль) и масштаб измерения (единица). Два разных (измеряющих) человека, независимо друг от друга выполнив измерения (подсчет) в этой шкале одних и тех же количеств, должны получить абсолютно идентичные результаты. Можно также сказать, что в этой шкале существует единственная для всех измеряющих единица измерения.

При измерении такой физической характеристики, как масса предмета, используют различные единицы измерения. Как известно, масса предмета может быть выражена в килограммах, фунтах, тоннах, пудах и т.д. Здесь фиксированным для всех измеряющих оказывается лишь начало отсчета – нуль, который соответствует отсутствию какой-либо массы, тогда как масштаб измерения может оказаться различным для разных измеряющих. Тем самым, результаты измерений y_i' и y_i'' одного и того же предмета для двух различных измеряющих, пользующихся разными единица измерений, могут отличаться на некоторый фиксированный положительный множитель α_i, т.е. $y_i' = \alpha_i y_i''$. В этом случае говорят, что результаты измерений определяются с точностью до преобразования вида $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$. Шкала подобного типа называется *шкалой отношений*. Название этой шкалы связано с тем, что при измерении в этой шкале независимо от единицы измерения отношения измерений будут одинаковыми для различных измеряющих. Действительно, пусть один измеряющий для двух объектов получил два числа y_i' и y_i'', а другой для тех же объектов – $\tilde{y}_i'$ и $\tilde{y}_i''$ соответственно. Поскольку $\tilde{y}_i' = \alpha_i y_i'$ и $\tilde{y}_i'' = \alpha_i y_i''$ при некотором $\alpha_i > 0$, то выполняются равенства

$$\frac{\tilde{y}_i'}{\tilde{y}_i''} = \frac{\alpha_i y_i'}{\alpha_i y_i''} = \frac{y_i'}{y_i''},$$

которые и означают сохранение отношений измерений для различных измеряющих в шкале отношений. Таким образом, если какой-то измеряющий пришел к выводу, что, например, масса одного предмета в два раза больше массы другого, то и другой измеряющий (использующий другие единицы измерения) должен прийти к тому же самому выводу. Это свидетельствует о том, что, при сравнении результатов измерения в шкале отношений, высказывание «во столько-то раз больше (меньше)» является осмысленным.

Нетрудно понять, что измерение таких величин, как прибыль, затраты и т.п., выраженных в единицах какой-либо валюты, также следует производить в шкале отношений.

Еще одна шкала измерений характеризуется заданием масштаба измерений и нефиксированным (для различных измеряющих) началом отсчета. Примером такой шкалы может служить шкала летоисчисления – переход от одного летоисчисления к другому осуществляется изменением начала отсчета. Говоря более точно, *шкалой разностей* называется такая шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразования $\phi_i(y_i) = y_i + c_i$, где c_i – фиксированное число. Измерения в этой шкале характеризуются сохранением разностей между двумя разными измерениями, выполненными различными измеряющими. Другими словами, для измерений, выполненных в шкале разностей, осмысленным является высказывание «на столько-то больше (меньше)». Например, продолжительность правления Николая II, вычисленная как в Григорианском, так и юлианском (или каком-то другом) календаре будет одна и та же.

Шкалой интервалов называется шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до (инвариантны относительно) линейного положительного преобразования $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i + c_i$, где $\alpha_i > 0$ и c_i – фиксированные числа. Типичным примером такой шкалы может служить шкала температур. Как известно, для измерения температуры имеются, например, шкалы Цельсия и Фаренгейта. Переход от результатов измерений в одной шкале к результатам в другой происходит по формулам вида $\tilde{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$.

Шкала интервалов характеризуется тем, что у каждого измеряющего может быть свое начало отсчета и свой масштаб измерения. При этом для измерений, выполненных в шкале интервалов различными измеряющими, будут сохраняться отношения разностей:

$$\frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}'_i}{\tilde{y}''_i - \tilde{y}'''_i} = \frac{\alpha_i y_i + c_i - (\alpha_i y'_i + c_i)}{\alpha_i y''_i + c_i - (\alpha_i y'''_i + c_i)} = \frac{y_i - y'_i}{y''_i - y'''_i}.$$

Все перечисленные выше шкалы – абсолютную, отношений, разностей и интервалов относят к *количественным шкалам*. Понятно, что результаты измерения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования общего вида $\tilde{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$, будут инвариантны и относительно преобразований $\tilde{y}_i = a_i y_i$ или $\tilde{y}_i = y_i + c_i$. По этой причине среди количественных шкал наиболее «общей» оказывается шкала интервалов. В этой связи все утверждения, полученные для измерений, выполненных в шкале интервалов, будут иметь место и для измерений в шкалах отношений и разностей (тем более, для абсолютной шкалы).

Кроме количественных существуют *качественные шкалы*. Типичным представителем качественной шкалы является *порядковая шкала*, в которой результаты измерений определяются с точность до преобразований вида $\phi_i(y_i)$, где ϕ_i – произвольная строго возрастающая функция. Примерами такой шкалы могут служить шкала твердости минералов Мосса, шкала упорядочения по важности выполнения работ, различные балльные шкалы. В порядковых шкалах не фиксируется начало отсчета, может быть различным масштаб измерений, причем, образно говоря, даже величина деления при переходе от одной отметки к другой у различных измеряющих может оказаться разной. Для результатов измерений в порядковой шкале лишены смысла высказывания «во столько-то раз больше (меньше)», «на столько-то единиц больше (меньше)». Здесь имеет смысл только отношение «больше-меньше». Следует отметить, что существуют и другие качественные шкалы (см., например, [48])

Все утверждения, полученные для результатов измерений, выполненных в качественной шкале, имеют место и для количественных шкал, тогда как обратное не верно. Поэтому количественные шкалы по сравнению с качественными оказываются «богаче» в том смысле, что для них могут быть получены более богатые по содержанию утверждения, хотя и для менее широкого класса задач.

2.4.2. Инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев. Напомним определение множества парето-оптимальных векторов:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y\text{, что } y \geq y^*\}.$$

Выполнение неравенства $y \geq y^*$, участвующего в определении множества Парето, означает справедливость покомпонентных неравенств $y_i \geqq y_i^*$ для всех $i = 1,2,...,m$, причем по крайней мере для одного номера i последнее неравенство является строгим.

Пусть ϕ_i – строго возрастающая числовая функция одной переменной, заданная на всей числовой оси, т.е.

$$y_i > y_i' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$$

для всех $y_i, y_i' \in R$. Очевидно, выполнение равенства $y_i = y_i'$ для строго возрастающей функции ϕ_i равносильно выполнению равенства $\phi_i(y_i) = \phi_i(y_i')$. Далее, для такой функции, в соответствии с ее определением, неравенство $y_i > y_i'$ имеет место тогда и только тогда, когда верно неравенство $\phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$.

Полученное означает, что определение множества Парето по существу не изменится, если к значениям критериев применить строго возрастающее преобразование. Иными словами, множество Парето оказывается инвариантным относительно указанного преобразования, а значит, *понятие множества Парето можно использовать во всех тех случаях, когда измерения критериев производятся, по крайней мере, в порядковой (тем более, – в любой количественной) шкале.*

2.4.3. Инвариантность результатов теоремы 2.5 относительно линейного положительного преобразования критериев. Центральный результат второй главы – теорема 2.5, которая показывает, каким образом простейший квант информации можно использовать для сужения множества Парето. Как было указано в предыдущем разделе, основой этого сужения являются включения

$$C(X) \subset P_{\hat{f}}(X) \subset P_f(X), \tag{2.12}$$

где $P_{\hat{f}}(X)$ – множество парето-оптимальных варианетов в многокритериальной задаче с исходным множеством X и «новым» векторным критерием $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$\hat{f}_j = w_j^* f_i + w_i^* f_j, \qquad \hat{f}_s = f_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.6}$$

Поскольку рассматриваемый в книге количественный подход предполагает измерение значений критериев в количественных шкалах, то несомненный практический интерес представляет установление инвариантности включений (2.12) относительно линейного положительного преобразования критериев. Заметим, что если бы такой инвариантности на самом деле не было, то это означало бы невозможность применения предлагаемого подхода при решении практических многокритериальных задач с количественными критериями.

Теорема 2.6. *Включения* (2.12) (*а также* (2.5)) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев.*

□ Прежде всего, заметим, что в условиях теоремы 2.5 для любого множества выбираемых вариантов справедливы включения $C(X) \subset \mathrm{Ndom}\,X$, причем в определении множества $\mathrm{Ndom}\,X$ не содержится никакого упоминания о критериях. Значит, оно не зависит от выбора шкал критериев и является инвариантным относительно любого преобразования критериев.

В предыдущем пункте была установлена инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования. Линейное положительное преобразование является частным случаем строго возрастающего преобразования. Поэтому множество Парето $P_f(X)$ из (2.12) инвариантно относительно линейного положительного преобразования критериев. Для доказательства инвариантности множества $P_{\hat{f}}(X)$ достаточно убедиться в инвариантности строгого неравенства $\hat{f}_j = w_j^* y_i + w_i^* y_j > w_j^* \bar{y}_i + w_i^* \bar{y}_j = \bar{f}_j$, содержащего новый j-й критерий, поскольку проверка инвариантности соответствующих неравенств для произвольного критерия f_i, $i \neq j$, производится так же элементарно, как в предыдущем пункте.

Сначала напомним, что

$$w_i^* = y_i' - y_i'', \quad w_j^* = y_j'' - y_j',$$

где $y_k' = f_k(x'), y_k'' = f_k(x'')$ $(k = i, j)$, причем w_i^*, w_j^* – фиксированные положительные числа.

Заменим y_k на $\tilde{y}_k = \alpha_k y_k + c_k$ $(\alpha_k > 0)$, $k = i, j$, в формуле (2.6), задающей новый j-й критерий. В результате этой замены получим преобразованный критерий вида

$$\tilde{\hat{f}}_j = (\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j) \cdot (\alpha_i y_i + c_i) + (\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i)(\alpha_j y_j + c_j).$$

После упрощения приходим к выражению

$$\tilde{\hat{f}}_j = \alpha_i \alpha_j w_j^* y_i + \alpha_i \alpha_j w_i^* y_j + C, \tag{2.15}$$

где константа

$$C = \alpha_j w_j^* c_i + \alpha_i w_i^* c_j$$

не зависит от y_i, y_j.

Теперь предположим, что неравенство

$$\hat{f}_j = w_j^* y_i + w_i^* y_j > w_j^* \bar{y}_i + w_i^* \bar{y}_j = \bar{f}_j \tag{2.16}$$

выполняется для произвольных фиксированных чисел $y_i, y_j, \bar{y}_i, \bar{y}_j$. Принимая во внимание (2.15), после умножения на положительное число $\alpha_i \alpha_j$ и прибавления константы C к обеим частям неравенства (2.16), получим

$$\tilde{\hat{f}}_j > \tilde{\bar{f}}_j = \alpha_i \alpha_j w_j^* \bar{y}_i + \alpha_i \alpha_j w_i^* \bar{y}_j + C. \tag{2.17}$$

Следовательно, из неравенства (2.16) вытекает неравенство (2.17). Нетрудно понять, что из неравенства (2.17) аналогичным образом можно прийти к неравенству (2.16). Это означает, что рассматриваемые два неравенства эквивалентны ■

Необходимо заметить, что коэффициент компромисса θ_{ij} не является инвариантным относительно линейного положительного преобразования критериев. Более того, можно проверить, что он не является инвариантным и относительно преобразований вида $\tilde{y}_k = a_k y_k$ и

$\tilde{y}_k = y_k + c_k$, $k = i, j$. Это свидетельствует о том, что *для различных измеряющих* (*различных ЛПР*) *коэффициенты компромисса могут быть различными, даже если они отвечают одной и той же задаче выбора, имеют одинаковые предпочтения и выполняют измерения в шкале одного и того же типа*. И в этом нет никакого противоречия, поскольку указанные ЛПР могут использовать различные единицы измерения для одних и тех же критериев.

В самом деле, пусть, например, два лица, принимающие решения, производят измерения значений первого критерия в единицах валюты и с точки зрения предпочтений ведут себя совершенно одинаковым образом, но одно из них производит расчет в долларах, а другое – в рублях. Предположим далее, что измерение значений второго критерия осуществляется обоими ЛПР в абсолютной шкале (например, число штук выпускаемых заводом изделий). Для ЛПР, работающего с долларами и готового за добавку в $1000 пожертвовать 10 изделиями, коэффициент компромисса первого критерия в сравнении со вторым составит

$$\theta'_{12} = \frac{10}{1000 + 10} \approx 0.01.$$

Второе ЛПР, оперирующее с рублями (если оно ведет себя так же как первое ЛПР), должно быть готово за 65000 руб. добавки по первому критерию пожертвовать тем же самым количеством изделий (10 штук) по второму критерию, поскольку один доллар (на момент принятия решения) считаем равным 65 рублям. Поэтому для второго ЛПР коэффициент компромисса будет равен

$$\theta''_{12} = \frac{10}{65000 + 10} \approx 0.00015,$$

что значительно меньше, чем у первого. Но именно так и должно быть, поскольку для первого ЛПР единица валюты является существенно более «дорогой», чем для второго.

Глава 3. Сужение множества Парето на основе общего кванта информации

Предложенное в предыдущей главе понятие простейшего кванта информации для двух критериев здесь распространяется на общий случай двух групп критериев. Изучаются свойства общего кванта информации и показывается, каким образом его следует использовать для сужения множества Парето. Оказывается, для этого требуется построить множество Парето относительно нового векторного критерия, размерность которого может оказаться существенно выше размерности исходного критерия.

Приведены геометрические иллюстрации для задачи выбора с тремя критериями.

3.1. Определение и свойства общего кванта информации

3.1.1. Основные определения. Рассмотрим два парето-оптимальных вектора y', y''. По определению оптимальности по Парето, не имеет место ни одно из соотношений $y' \geq y''$ и $y' \leq y''$. В таком случае должны найтись два подмножества номеров критериев $A, B \subset I$, $A \cap B = \varnothing$, таких, что $y'_i > y''_i$ для всех $i \in A$, $y''_j > y'_j$ для всех $j \in B$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s \in I \setminus (A \cup B)$. Если ЛПР из этой пары отдает предпочтение одному из векторов, например, первому, т.е. $y' \succ y''$, то благодаря аксиоме исключения второй вектор не должен оказаться выбранным и, тем самым, множество Парето сокращается на один вектор y''.

Определение 3. 1. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Будем говорить, что *задан квант информации об отношении предпочтения ЛПР с двумя заданными группами критериев* A *и* B *вместе с наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$\begin{aligned} &y'_i - y''_i = w_i^* > 0 \text{ для всех } i \in A \\ &y''_j - y'_j = w_j^* > 0 \text{ для всех } j \in B \\ &y'_s = y''_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B) \end{aligned} \tag{3.1}$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Другими словами, при наличии указанного кванта ЛПР всякий раз при выборе из пары векторов готово пожертвовать определенным количеством в размере не более, чем w_j^* по каждому менее значимому j-му критерию f_j $(j \in B)$ ради получения дополнительного количества в размере не менее, чем w_i^* по каждому более значимому i-му критерию f_i $(i \in A)$ при дополнительном условии сохранения значений всех остальных критериев.

Нетрудно видеть, что в частном случае $A = \{i\}$ и $B = \{j\}$ определение 3.1 совпадает с определением 2.2 простейшего кванта информации.

Соотношение между числами w_i^* и w_j^*, как и в случае простейшего кванта, позволяет количественно оценить степень компромисса одной группы критериев по сравнению с другой группой.

Определение 3. 2. Пусть задан квант информации с двумя группами критериев A, B и двумя наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Положительные числа

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \quad \text{для } i \in A \text{ и } j \in B \tag{3.2}$$

будем называть *коэффициентами* (*степенью*) *компромисса* для указанной пары групп критериев.

Если через $|A|$ и $|B|$ обозначить число элементов множеств A и B соответственно, то число всех коэффициентов компромисса, вводимых определением 3.2, равно произведению $|A| \cdot |B|$. Например, если $A = \{i\}$, т.е. $|A| = 1$, то указанное число указанных коэффициентов будет равно $|B|$ – количеству элементов менее значимых критериев.

3.1.2. Свойства кванта информации. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. 1. *Пусть задан квант информации с двумя наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$. *Тогда*

- *имеется квант информации с группами критериев* $A \cup \{k\}$ *при* $k \in I \setminus (A \cup B)$ *и* B *с положительными параметрами* w_i^* *для всех* $i \in A$, w_j^* *для всех* $j \in B$ *и произвольным положительным параметром* w_k^*;
- *имеется квант информации с группами критериев* $A \cup \{k\}$ *при* $k \in B$ *и* $B \setminus \{k\}$ *с положительными параметрами* w_i^* *для всех* $i \in A$, w_j^* *для всех* $j \in B \setminus \{k\}$ *и произвольным положительным параметром* w_k^*;
- *имеется квант информации с группами критериев* A *и* $B \setminus \{k\}$ *с положительными параметрами* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B \setminus \{k\}$.

□ Пусть в соответствии с определением 3.1 для векторов y', y'', удовлетворяющих (3.1), выполнено соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим при $k \in I \setminus (A \cup B)$ произвольный вектор $y \in R^m$, для которого выполнено

$$y_k > y'_k, \quad y_s = y'_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Очевидно, $y \geq y'$. Отсюда, согласно аксиоме 3, следует соотношение $y \succ y'$, которое вместе с $y' \succ y''$, в силу транзитивности отношения предпочтения, влечет $y \succ y''$. Поскольку

$$\begin{aligned} &y_i - y''_i = w_i^* > 0 \text{ для всех } i \in A \\ &y_k > y'_k = y''_k \\ &y''_j - y_j = w_j^* > 0 \text{ для всех } j \in B \\ &y_s = y''_s \text{ для всех } s \in I \setminus (A \cup B \cup \{k\}) \end{aligned}$$

и разность $w_k^* = y_k - y''_k$ может быть любым положительным числом, то доказательство первого утверждения завершено.

Для проверки истинности второго утверждения при $k \in B$ введем вектор y с компонентами

$$y_k > y''_k, \quad y_s = y'_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Для этого вектора аналогично рассмотренному выше получим соотношение $y \succ y''$, которое устанавливает справедливость второго утверждения.

Доказательство третьего утверждения проводится по той же самой схеме и не составляет труда ■

В соответствии с доказанным, группу *B* менее значимых критериев всегда можно сокращать, а группу более значимых критериев A − расширять. При этом новые параметры, отвечающие добавленным критериям, могут принимать любые положительные значения.

Из общих соображений ясно, что в случае, когда ЛПР готово за определенный прирост по более значимой группе критериев пожертвовать некоторым количеством по критериям менее значимой группы, то это ЛПР должно согласиться как на больший прирост по тем же самым критериям, так и на меньшую потерю по менее значимым критериям. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. 2. *Пусть имеется квант информации с группами критериев A и B вместе с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Тогда будет задан и квант информации с теми же самыми группами критериев A и B вместе с любой парой наборов положительных параметров w'_i для всех $i \in A$ и w'_j для всех $j \in B$, удовлетворяющих неравенствам*

$$w'_i > w_i^* \text{ для всех } i \in A, \qquad w'_j < w_j^* \text{ для всех } j \in B.$$

Иначе говоря, если группа критериев A является более значимой, чем группа критериев B с коэффициентами компромисса θ_{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, то первая группа будет более значима и с любыми коэффициентами компромисса θ'_{ij}, меньшими, чем θ_{ij}, т.е. $\theta'_{ij} < \theta_{ij}$ для всех $i \in A$ и всех $j \in B$.

Доказательство теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству теоремы 2.1; поэтому здесь приводится.

Кроме того, можно определить и отношение несравнимо большей значимости одной группы критериев по сравнению с другой группой. А именно, если любое положительное число $\theta_{ij} \in (0,1)$ (при всех $i \in A$ и $j \in B$) является коэффициентом компромисса для группы критериев A по сравнению с группой критериев B, то в таком случае будем говорить, что *первая группа критериев несравнимо более значима, чем вторая группа*.

Во второй главе уже была получена характеризация лексикографического отношения в терминах последовательного несравнимо более значимых критериев (см. теорему 2.2). Ниже формулируется новая характиризация в терминах групп критериев.

Теорема 3. 3. *Заданное на пространстве R^m бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2 и 3, является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо более значим группы $\{2,3,...,m\}$ всех остальных критериев, второй критерий несравнимо более значим группы $\{3,...,m\}$ всех последующих критериев и т.д. $(m-1)$-й критерий несравнимо более значим m–го критерия.*

□ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. По определению лексикографического отношения для произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполнены следующие *m* высказываний

4) $y'_1 > y''_1 \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$

5) $y_1' = y_1'',\ y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$

6) $y_1' = y_1'',\ y_2' = y_2'',\quad y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$

……………………………………………………..

m) $y_i' = y_i'',\ i = 1,2,...,m-1;\quad y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из высказывания 1) следует, что первый критерий несравнимо более значим группы всех остальных критериев. Действительно, согласно высказыванию 1) для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, у которых разности $y_2'' - y_2', ..., y_m'' - y_m'$ положительны, все числа

$$\theta_{12} = \frac{y_2'' - y_2'}{y_1' - y_1'' + y_2'' - y_2'},$$

$$\theta_{13} = \frac{y_3'' - y_3'}{y_1' - y_1'' + y_3'' - y_3'},$$

…………………………..

$$\theta_{1m} = \frac{y_m'' - y_m'}{y_1' - y_1'' + y_m'' - y_m'},$$

являются коэффициентами компромисса. Причем поскольку указанные выше разности вместе с $y_1' - y_1''$ могут принимать все возможные значения в пределах от 0 до $+\infty$, выписанные коэффициенты компромисса являются произвольными числами, сплошь заполняющими интервал $(0,1)$. Это означает, что первый критерий несравнимо более значим группы всех остальных критериев.

Аналогично, из высказывания 2) можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо более значим группы всех последующих критериев $\{3,...,m\}$ и т.д. из $m-1)$ -го высказывания следует несравнимая большая значимость $(m-1)$-го критерия по сравнению с m-м критерием.

Достаточность. Пусть первый критерий несравнимо более значим группы $\{2,3,...,m\}$ всех остальных критериев, второй – несравнимо более значим группы $\{3,...,m\}$ всех последующих критериев и т.д. Выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^m$, для которых верно неравенство $y_1' > y_1''$. Для доказательства высказывания 1) следует убедиться в том, что имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Если дополнительно к неравенству $y_1' > y_1''$ выполнено $y_i' \geqq y_i''$, $i = 2...,m$, то благодаря аксиоме Парето получаем соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим случай, когда вместе с неравенством $y_1' > y_1''$ имеет место неравенство $y_s' < y_s''$ для некоторого (или некоторых) $s \in \{2,...,m\}$. Введем в рассмотрение вектор y, у которого $y_1 = y_1'$, для всех указанных номеров s выполнено равенство $y_s = y_s' - 1$, а все остальные компоненты имеют вид $y_k = y_k'' - 1$. Очевидно, справедливо неравенство $y' \geq y$. Следовательно, согласно аксиоме Парето, верно соотношение $y' \succ y$. У вектора y только первая компонента больше первой компоненты вектора y'', а все остальные – меньше соответствующих компонент y''. Поэтому, благодаря тому, что первый критерий несравнимо более значим набора всех остальных критериев, получаем $y \succ y''$. В силу транзитивности отношения $\succ$, из соотношений $y' \succ y$ и $y \succ y''$ приходим к требуемому результату $y' \succ y''$.

Точно так же, используя аксиому Парето и тот факт, что второй критерий несравнимо более значим, чем группа $\{3,...,m\}$ всех последующих критериев, проверяется истинность высказывания 2) и т.д.

Действуя подобным образом, в конце концов получим справедливость высказывания $m-1)$. Высказывание $m)$ вытекает из аксиомы 3 ■

3. 2. Использование кванта информации для сужения множества Парето

3.2.1. Упрощение определения кванта информации. Для того чтобы в соответствии с определением 3.1 проверить действительно ли имеется квант информации, необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям (3.1) при некоторых положительных параметрах w_i^*, w_j^*. Очевидно, на практике подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле, как и в случае двух критериев (см. теорему 2.4), такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения не требуется. Достаточно убедиться в выполнении соотношений (3.1) лишь для некоторой одной фиксированной пары векторов y', y''. Об этом свидетельствует следующий результат, который доказывается по той же схеме, что и теорема 2.4.

Теорема 3. 4. *В силу инвариантности отношения предпочтения* $\succ$, *можно считать, что в определении* 3. 1 *векторы* y', y'' *фиксированы. В частности, в нем можно положить*

$$\begin{aligned} &y'_i = w_i^* \ \text{для всех} \ i \in A \\ &y'_j = -w_j^* \ \text{для всех} \ j \in B \\ &y'_s = 0 \ \text{для всех} \ s \in I \setminus \{A \cup B\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

и $y'' = 0_m$.

Поскольку отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования, на основании сформулированной теоремы 3.4 приведем более простое определение кванта информации, которое эквивалентно определению 3.1.

Определение 3. 3. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Будем говорить, что *задан квант информации об отношении предпочтения ЛПР с двумя заданными группами критериев* A *и* B *вместе с наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$, если для вектора y' вида (3.3) верно соотношение $y' \succ 0_m$.

В соответствии с данным определением, если, например, вектор $(0.7, -0.3, 1)$ оказывается для ЛПР предпочтительнее нулевого вектора $(0, 0, 0)$, то группа из первого и третьего критериев будет более значимой, чем группа, состоящая из одного второго критерия, причем соответствующие коэффициенты компромисса равны

$$\theta_{12} = \frac{0.3}{0.7+0.3} = 0.3, \qquad \theta_{32} = \frac{0.3}{1+0.3} \approx 0.23.$$

3.2.2. Сужение множества Парето на основе кванта информации. Если в наличии имеется квант информации, то при помощи следующей теоремы в процессе принятия решений из множества всех парето-оптимальных векторов можно удалять те, которые заведомо не могут оказаться выбранными.

Введем следующее вспомогательное определение. Для заданного набора векторов $a^i \in R^m$ и чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, под *N-комбинацией* будем понимать вектор вида $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i$ при условии, что $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \geq 0_n$.

Теорема 3. 5 (в терминах векторов**).** *Предположим, что* $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$ *и имеется квант информации об отношении предпочтения ЛПР с двумя заданными группами критериев* A *и* B *вместе* с *наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеют место включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{3.4}$$

где $P(Y)$ *есть множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с множеством вариантов* X *и исходным векторным критерием* f, *а* $\hat{P}(Y)$ *– множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в задаче выбора с множеством* X *и новым* p*-мерным,* $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$, *векторным критерием* g (*т.е.* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$), *составленном из всех тех компонент* f_i *векторного критерия* f, *для которых* $i \in I \setminus B$, *а также компонент вида*

$$g_{ij} = w_j^* f_i + w_i^* f_j \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B, \tag{3.5}$$

или

$$g'_{ij} = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B. \tag{3.5$'$}$$

□ Через K обозначим острый выпуклый конус конусного отношения $\succ$. По условию для вектора y' вида (3.3) выполняется соотношение $y' \succ 0_m$, а значит $y' \in K$. В соответствии с теоремой 2.1, справедливо включение $R_+^m \subset K$.

Введем в рассмотрение множество M – совокупность всех N-комбинаций конечного набора векторов $e^1, e^2, ..., e^m, y'$, где $e^1, e^2, ..., e^m$ – единичные орты пространства R^m. Множество M является выпуклым m-мерным конусом, не содержащим начало координат (так как коэффициенты линейных комбинаций одновременно в нуль не обращаются). В силу включений $e^1, e^2, ..., e^m \in R_+^m \subset K$ и $y' \in K$ введенное множество M представляет собой подмножество конуса K.

Более того, M – острый конус. В самом деле, если предположить противное, то найдутся две N-комбинации $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \lambda_{m+1} y'$ и $-y = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i e^i + \lambda'_{m+1} y'$, сумма которых

$$y - y = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda'_i) e^i + (\lambda_{m+1} + \lambda'_{m+1}) y' = 0_m$$

также является N-комбинацией. Если в равенстве, приведенном выше, имеет место $\lambda_{m+1} + \lambda'_{m+1} = 0$, то $\lambda_i + \lambda'_i = 0$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, что невозможно, так как $y - y$ есть N-комбинация. В случае $\lambda_{m+1} + \lambda'_{m+1} > 0$ также получаем невозможное $\lambda_i + \lambda'_i < 0$ для некоторого i.

Введем *двойственный*[8] *конус* (без нуля) по отношению к конусу M , т.е.

$$C = \{y \in R^m \mid \langle z, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа ([53] , с.175) образующими конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса M , и обратно: образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса C .

Возможны два случая: $|A|>1$ и $|A|=1$. В первом случае образующими конуса M являются все векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y'$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этого набора. Во втором случае (т.е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор e^i можно представить в виде положительной линейной комбинации вектора y' и всех векторов e^s при $s \in B$. Значит во втором случае образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y'$ без вектора e^i. Далее сначала рассматривается первый случай, а затем – второй.

Так как образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y'$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } i \in I \\ &\langle y', y\rangle \geqq 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

совпадает с двойственным конусом C .

Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6). Это должна быть такая система векторов, множество линейных неотрицательных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (3.6). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Сначала укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (3.6). Прежде всего, заметим, что каждый единичный орт e^i пространства R^m при $i \in I \setminus B$ является решением (3.6). Далее, введем векторы

$$e^{ij} = w_j^* e^i + w_i^* e^j \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B.$$

Компоненты этих векторов неотрицательны, и потому все они удовлетворяют неравенству $\langle e^i, y\rangle \geqq 0$ для каждого $i \in I$. Более того, они удовлетворяют и последнему неравенству $\langle y', y\rangle \geqq 0$ системы (3.6), так как

$$\langle y', e^{ij}\rangle = y'_i w_j^* + y'_j w_i^* = 0 \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и } j \in B.$$

Таким образом, набор, состоящий из векторов e^i для всех $i \in I \setminus B$ и векторов e^{ij} для всех $i \in A$ и $j \in B$, принадлежит двойственному конусу C . При этом, как нетрудно убедиться, ни один из векторов указанной совокупности невозможно представить в виде неотрица-

[8] О двойственном конусе см. также п. 4.3.

тельной линейной комбинации остальных векторов. Общее число p всех векторов данного набора равно $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$.

Для того чтобы проверить, что этот набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (3.6), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (3.6) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов упомянутого набора. С этой целью наряду с системой (3.6) рассмотрим соответствующую ей систему из $m+1$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y \rangle = 0 \ \text{ для всех } \ i \in I \\ &\langle y', y \rangle = 0 \,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (3.6) содержится среди (одномерных) ненулевых решений подсистем системы линейных уравнений (3.7).

Среди набора векторов $e^1, e^2, ..., e^m, y'$, отвечающих системе (3.7), нас интересуют поднаборы с рангом, равным m – 1. Именно подсистемы, отвечающие указанным поднаборам, будут иметь одномерные решения. Среди всех найденных одномерных решений отберем те, которые удовлетворяют системе неравенств (3.6). Полученные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (3.6).

Поскольку исключение любой пары векторов из набора $e^1, e^2, ..., e^m, y'$ приводит к подсистеме ранга m – 1, начнем удалять из системы (3.7) по два уравнения.

Если в число удаляемых входит последнее уравнение системы (3.7), то для того чтобы получить одномерные решения, необходимо удалить какое-то еще одно из уравнений $\langle e^i, y \rangle = 0$. В качестве решений получающихся подсистем с точностью до положительного множителя получим единичные орты $e^1, e^2, ..., e^m$. Как легко видеть, из этого набора лишь те векторы, для которых номера не принадлежат B, удовлетворяют системе неравенств (3.6).

Пусть последнее уравнение системы (3.7) сохраняется в подсистеме. Если при этом исключаются пары уравнений из числа $\langle e^i, y \rangle$=0 при $i \in A$ и $\langle e^j, y \rangle$=0 при $j \in B$, то получающиеся в результате такого удаления «укороченные» подсистемы среди ненулевых будут иметь только одномерные решения, из которых можно выбрать векторы e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Все эти векторы, как было установлено ранее, удовлетворяют системе неравенств (3.6). Удаление пар уравнений $\langle e^i, y \rangle$=0, в которых номер i принадлежит только одному из множеств A или B, не приведет к подсистемам, имеющим ненулевые решения. Если же в число удаляемых входят только уравнения $\langle e^i, y \rangle$=0 при $i \in I \setminus (A \cup B)$, то дополнительных ненулевых одномерных решений, которые невозможно представить в виде ненулевой неотрицательной комбинации уже приведенных векторов, получено не будет.

Это означает, что система векторов, составленная из e^i для всех $i \in I \setminus B$ и e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6) и любое решение системы (3.6) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Указанную совокупность далее будем обозначать $a^1, a^2, ..., a^p$. Рассмотрение первого случая завершено.

Несколько слов о втором случае. Когда $A = \{i\}$, рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из m уравнений, которая отличается от (3.7) отсутствием уравнения $\langle e^i, y \rangle = 0$, соответствующего единичному орту e^i. По этой причине в данном случае необходимо удалять лишь по одному уравнению из системы (3.7), чтобы получить ту же самую фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6), что и в первом случае.

Итак, в силу доказанного выше, множество решений системы линейных неравенств (3.6), т.е. конус C (вместе с нулем), совпадает с множеством всех линейных неотрицательных комбинаций векторов $a^1, a^2, ..., a^p$. Поэтому включение $z \in C$ для вектора z имеет место тогда и только тогда, когда этот вектор можно представить в виде некоторой ненулевой линейной неотрицательной комбинации векторов указанного набора.

Благодаря последнему обстоятельству, неравенство

$$\langle z, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in C \tag{3.8}$$

для произвольного фиксированного вектора $y \neq 0_m$ оказывается эквивалентным неравенству

$$\langle a^i, y\rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{3.9}$$

где, знак $\geq$ указывает, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, ..., p\}$ неравенство строгое. В самом деле, если вектор y удовлетворяет неравенствам (3.9), то так как всякий вектор $z \in C$ можно представить в виде некоторой ненулевой неотрицательной линейной комбинации векторов $a^1, a^2, ..., a^p$, например, $z = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_p a^p$, умножая неравенства (3.9) на соответствующие одновременно не равные нулю неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ и почленно складывая полученные таким образом неравенства, придем к неравенству

$$\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^i, y\rangle = \langle z, y\rangle \geqq 0$$

из (3.8). Обратно, из (3.8) вытекает (3.9), так как $a^i \in C$ для всех $i = 1,2,..., p$. При этом одновременно все неравенства (3.9) как равенства выполняться не могут. Действительно, если для некоторого ненулевого вектора y неравенства (3.9) выполняются как равенства, то эти же равенства будут иметь место и для противоположного вектора $-y$. Отсюда следует, что конус, двойственный по отношению к C, не является острым. Но этот двойственный конус есть

$$M = \{y \in R^m \mid \langle z, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in C\} \setminus \{0_m\},$$

так как C является двойственным по отношению к конусу M [9]. Тем самым приходим к противоречию: конус M не является m-мерным. Полученное означает, что для ненулевого вектора y одновременно все неравенства (3.9) как равенства выполняться не могут.

На основании установленной эквивалентности неравенств (3.6) и (3.9) заключаем, что включение $y \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливы неравенства (3.9), и поэтому

$$y \in M \Leftrightarrow \langle a^i, y\rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., p. \tag{3.10}$$

---

[9] В случае многогранного конуса M двойственным по отношению к двойственному конусу C является исходный конус M [49].

Переходим к завершающему этапу доказательства теоремы. Из включений

$$R_+^m \subset M \subset K$$

следует

$$\mathrm{Ndom}Y \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{3.11}$$

где

$$\hat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества Y, упорядоченного конусным отношением с острым выпуклым конусом M.

Выберем произвольно $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при некоторых $x, x^* \in X$. Благодаря эквивалентности (3.10) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\langle a^i, f(x) - f(x^*)\rangle \geq 0, \qquad i = 1,2,..., p,$$

или, что то же самое,

$$\langle a^i, f(x)\rangle \geq \langle a^i, f(x^*)\rangle, \qquad i = 1,2,..., p.$$

Если вспомнить конкретный вид векторов $a^1, a^2,..., a^p$, то последние неравенства можно переписать в виде

$$g(x) \geq g(x^*),$$

где g – p-мерная векторная функция, участвующая в формулировке доказываемой теоремы. Следовательно, $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, т.е. $\hat{P}(Y)$ – это множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных вариантов X и векторным критерием g.

Для завершения доказательства включений (3.4) остается к (3.11) добавить включение $C(Y) \subset \mathrm{Ndom}\,\mathrm{Y}$, которое имеет место в силу леммы 1.2.

Наконец, в (3.4) вместо функций g_{ij} вида (3.5) можно взять g'_{ij} вида (3.5′), поскольку вторые получаются из первых делением на положительную константу $w_i^* + w_j^*$ ■

Полученный результат можно легко переформулировать в терминах вариантов. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. 5 (в терминах вариантов). *Предположим, что задан квант информации об отношении предпочтения ЛПР с двумя группами критериев* A *и* B *и наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$. *Тогда для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеют место включения*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{3.12}$$

где $P_f(X)$ *есть множество парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и векторным критерием* f, *а* $P_g(X)$ *– множество парето-оптимальных вариантов в задаче с исходным множеством* X *и новым* p*-мерным векторным критерием* g, *который описан в формулировке предыдущей теоремы.*

Согласно полученному результату, новый векторный критерий g состоит из $p = m - |B| + |A| \cdot |B| \geqq m$ компонент. Значит, число новых критериев может совпадать с числом «старых» критериев, но может и превосходить его.

Следствие 3. 1. *В условиях теоремы* 3.5 *равенство* $p = m$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $|A| = 1$.

□ Пусть $p = m - |B| + |A| \cdot |B| = m$. Тогда $|A| \cdot |B| = |B|$, а значит $|A| = 1$.

Обратно, если $|A| = 1$, то $p = m - |B| + 1 \cdot |B| = m$ ■

Пример 3.1. Пусть в задаче многокритериального выбора имеется десять критериев, т.е. $m = 10$, и некоторая половина критериев более значима оставшейся половины, т.е. $|A| = |B| = 5$. В этом случае согласно теореме 3.5 имеем $p = 10 - 5 + 5 \cdot 5 = 30$. Следовательно, новый векторный критерий g в данном случае будет содержать пять старых критериев и двадцать пять новых, которые можно вычислить на основе старых, используя формулу (3.5).

Следующий результат показывает, при каких условиях число компонент нового векторного критерия оказывается наибольшим возможным.

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.5 *максимальное значение* p *достигается в случае*

$$|A| = \left[\frac{m+1}{2}\right], \; |B| = m - |A|,$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

□ Обозначим $x = |A|$, $y = |B|$ и рассмотрим задачу максимизации

$$p = m - y + xy \to \max$$

при условии $x + y \leqq m$. Нетрудно понять, что максимум в сформулированной задаче может достигаться лишь при выполнении равенства $x + y = m$. Выразив из этого равенства y через x и подставив его в выражение для p, получим $p = m - (m - x) + x(m - x) = x(m + 1 - x)$. Эта квадратичная функция одной переменной x принимает наибольшее значение в точке $x = \dfrac{m+1}{2}$. Если m является нечетным числом, полученный результат представляет целое число. Когда число критериев m – четное, максимум в целочисленной точке будет достигаться на ближайшем целом $|A| = \left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ (равно как и при $|A| = \left[\dfrac{m+2}{2}\right]$) ■

Следствие 3.2 показывает, что в приведенном выше примере 3.1 (где $m = 10$) максимальное возможное число компонент нового векторного критерия равно 30 и может достигаться в случае, когда одна половина критериев более значима, чем другая половина (либо когда некоторая группа из шести критериев более значима оставшейся группы из четырех критериев).

В теореме 2.7 была установлена инвариантность включений (2.12) и (2.15) относительно линейного положительного преобразования критериев в случае простейшего кванта информации. Поскольку формулы для определения коэффициентов компромисса и пересчета новых критериев абсолютно идентичны как в случае двух критериев, так и в случае двух групп критериев, то рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.7, можно применить и в случае двух групп критериев. В итоге придем к следующему результату.

Теорема 3.6. *Включения* (3.4) *и* (3.12) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$, *а значит, результаты теоремы* 3.5 *могут быть использованы для всех задач многокритериального выбора, в которых значения указанных критериев вычисляются в количественных шкалах* (*т.е. шкалах интервалов, отношений и разностей*).

3.3. Геометрические иллюстрации к задаче с тремя критериями

3.3.1. Трехкритериальная задача общего вида. В двухкритериальной задаче информация об отношении предпочтения в форме кванта может иметь только такую форму, когда участвующие в ней группы критериев одноэлементны. В этом случае число новых критериев (число p) будет совпадать с числом «старых» критериев, т.е. $p = 2$. Таким образом, в двухкритериальной задаче учет кванта информации на основе теоремы 3.5 не приведет к увеличению числа критериев (собственно говоря, этот же вывод следует и из результатов предыдущей главы).

Рассмотрим задачу с тремя критериями, т.е. $m = 3$. Пусть имеется квант информации, в котором в качестве A участвует группа из первых двух критериев f_1, f_2, а в качестве B – третий критерий f_3. Согласно определению 3.3, это означает, что включение $y' \succ 0_3$ имеет место для некоторого вектора $y' = (w_1^*, w_2^*, -w_3^*) = OD$ при определенных положительных параметрах w_1^*, w_2^*, w_3^* (рис. 3.1). Конкретные значения данных параметров в дальнейшем изложении существенной роли не играют.

Неотрицательный ортант (в данном случае – октант) R_+^3 – это острый выпуклый конус (без нуля) $OABC$, порожденный единичными ортами $e^1 = OA$, $e^2 = OB$ и $e^3 = OC$. Этот конус имеет три двумерные грани, представляющие собой соответствующие части координатных плоскостей: OBC, OAC и OAB. Выпуклый конус M, порожденный единичными ортами пространства R^3 и вектором y' – это острый выпуклый конус (без нуля), имеющий уже четыре двумерные грани: OBC, OAC, OAD и OBD. Нормальные векторы этих граней (направленные внутрь конуса M), а именно векторы a^1, a^2, a^3, a^4, являются образующими двойственного (по отношению к M) конуса C. Здесь

$$a^1 = e^1 \perp OBC, \quad a^2 = e^2 \perp OAC, \quad a^3 \perp OAD, \quad a^4 \perp OBD$$

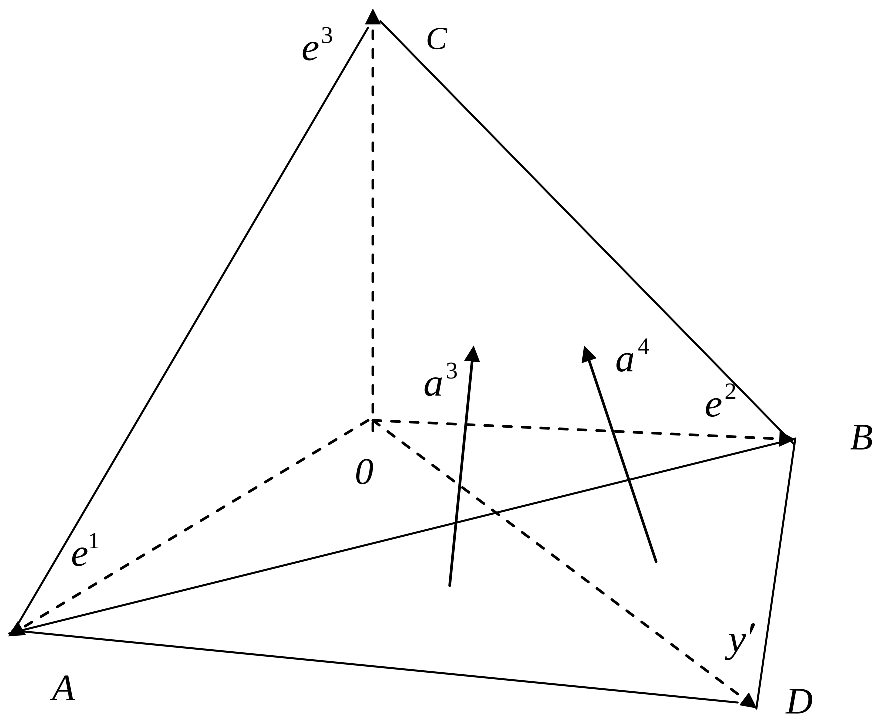

Рис. 3.1.

.

Поскольку трехмерный конус M имеет четыре двумерные грани, то двойственный конус C порождается четырьмя векторами e^1, e^2, a^3, a^4, а значит, новый векторный критерий g в данном случае должен содержать четыре компоненты. Действительно, как утверждает теорема 3.5, выполняется равенство $p = 3 - 1 + 2 \cdot 1 = 4$.

В рассмотренном примере число критериев $m = 3$ при учете кванта информации увеличилось на одну единицу.

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть один из критериев значимее группы из двух оставшихся. Как легко вычислить, $p = 3 - 2 + 1 \cdot 2 = 3$, т.е. число новых критериев совпадает с числом «старых» критериев. То же самое произойдет и в случае, когда один из критериев более значим, чем другой.

Никаких других возможностей разделения критериев по значимости не существует, поэтому можно сделать следующий вывод: *в трехкритериальной задаче учет кванта информации на основе теоремы* 3.5 *может привести к увеличению критериев лишь на одну* *единицу и только в том случае, когда группа из двух критериев более значима, чем оставшийся третий критерий.*

3.3.2. Случай линейных критериев. Рассмотрим трехкритериальную задачу, в которой, кроме того, множеством возможных варианетов служит подмножество векторного пространства R^3, т.е. $X \subset R^3$, а все критерии являются линейными:

$$f_1(x) = \langle c^1, x \rangle, \quad f_2(x) = \langle c^2, x \rangle, \quad f_3(x) = \langle c^3, x \rangle,$$

где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$. Конус, порожденный векторами c^1, c^2, c^3 (градиентами линейных целевых функций f_1, f_2, f_3), называют *конусом целей*. Пусть эти векторы не компланарны и имеют вид, изображенный на рис. 3.2. Они порождают некоторый трехмерный трехгранный конус.

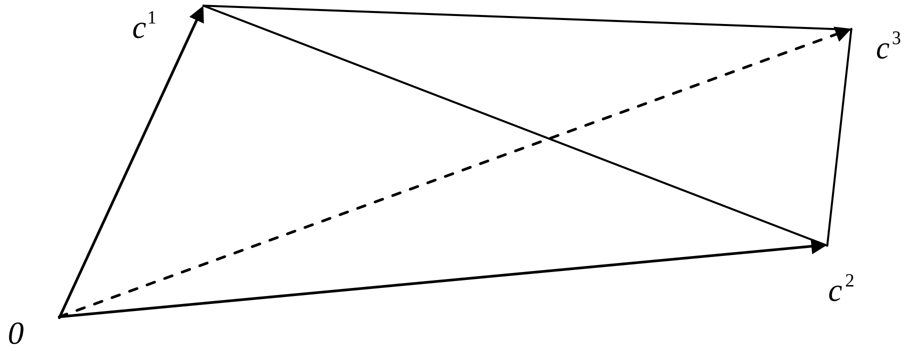

Рис. 3.2.

Допустим, что первый критерий более значим, чем группа, состоящая из второго и третьего критериев с коэффициентами компромисса $\theta_{12} = \theta_{13} = 0.5$. В этом случае, согласно теореме 3.5, при учете подобного рода информации следует рассмотреть новую многокритериальную задачу, в которой первый критерий остается прежним, а вместо двух менее значимых второго и третьего критериев будут участвовать два новых критерия вида $g_{12}(x) = \langle c_н^2, x \rangle$ и $g_{13}(x) = \langle c_н^3, x \rangle$ (рис. 3.3). Тем самым, конус целей, который образуется градиентами целевых функций в новой многокритериальной задаче, так же как и в исходной, имеет три ребра и три грани, но он существенно у́же исходного конуса, образованного векторами c^1, c^2 и c^3.

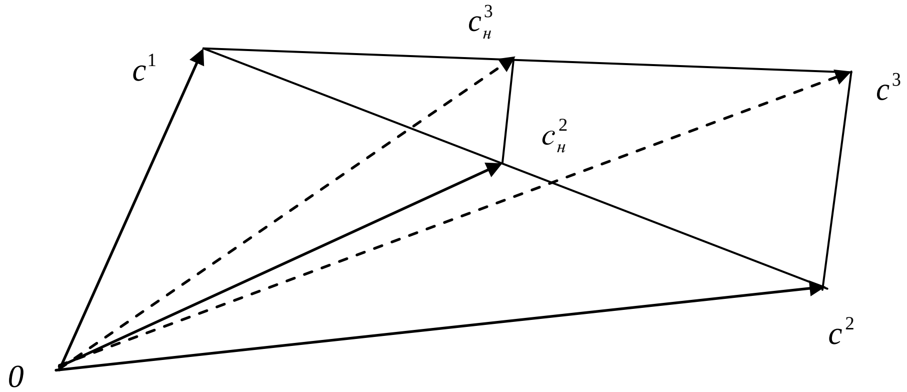

Рис. 3.3.

А теперь предположим, что группа, состоящая из второго и третьего критериев, более значима первого критерия, причем $\theta_{21} = \theta_{31} = 0.5$. Тогда в соответствии с теоремой 3.5 при учете этого кванта информации следует рассмотреть новую многокритериальную задачу, в которой остаются прежними второй и третий критерий, а вместо первого образуются два новых: $g_{21} = \langle c^{11}, x \rangle$ и $g_{31} = \langle c^{12}, x \rangle$ (рис. 3.4).

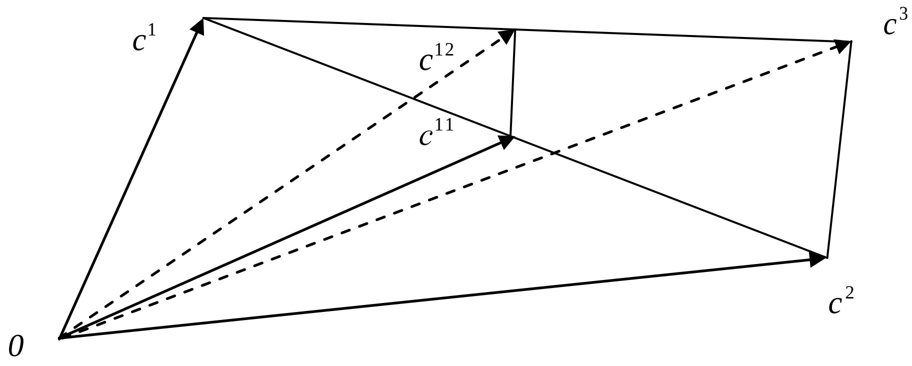

Рис. 3.4.

При этом, как нетрудно видеть, конус целей, образуемый градиентами c^{11}, c^{12}, c^3, c^4 компонент нового векторного критерия, имеет четыре образующие и является четырехгранным.

Глава 4. Сужение множества Парето при помощи простейших наборов квантов информации

В главе исследуется использование некоторых «несложных» наборов квантов информации. Устанавливается, что определенные наборы могут оказаться противоречивыми. Поэтому сначала решается вопрос о непротиворечивости информации, затем вводится соответствующее определение и устанавливаются критерии непротиворечивости в различных формах.

Вводится понятие взаимно зависимых и взаимно независимых квантов информации, а также формулируются результаты, на основе которых можно осуществлять сужение множества Парето при использовании некоторых непротиворечивых наборов квантов информации.

4.1. Непротиворечивость набора квантов информации

4.1.1. Предварительное рассмотрение. Пусть $A, B \subset I, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A \cap B = \varnothing$. В соответствии с определением 3.3, задание пары векторов $y', y'' \in R^m$ с компонентами

$$y'_i - y''_i = w^*_i \quad \text{для всех } i \in A$$
$$y''_j - y'_j = -w^*_j \quad \text{для всех } j \in B$$
$$y'_s = y''_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B),$$

для которых верно соотношение $y' \succ y''$, означает, что группа критериев A более значима, чем группа критериев B с двумя наборами положительных параметров w^*_i для всех $i \in A$ и w^*_j для всех $j \in B$. Поскольку $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, вектор $y' - y''$ имеет по крайней мере одну положительную и одну отрицательную компоненты. Введем множество всех подобного рода векторов:

$$N^m = R^m \setminus [R^m_+ \cup (-R^m_+) \cup \{0_m\}].$$

Предположим, что в результате прямого опроса ЛПР или же на основе анализа действий, ранее предпринимавшихся данным ЛПР, была выявлена такая пара различных векторов $u, v \in R^m$, что вектор u предпочтительнее вектора v, т.е. $u \succ_Y v$. Согласно аксиоме транзитивности, последнее соотношение эквивалентно $u \succ v$. Пусть $u - v \in N^m$. Обозначим множество номеров положительных компонент вектора $u - v$ через A, а множество номеров отрицательных компонент – через B. Очевидно, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A \cap B = \varnothing$. Поэтому задание произвольной пары векторов $u, v \in R^m$, для которых выполнены соотношения $u \succ v$ и $u - v \in N^m$, можно рассматривать как наличие информации о том, что группа критериев A более значима, чем группа критериев B (с соответствующими двумя наборами положительных параметров). Тем самым, любая пара векторов $u, v \in R^m$, для которой справедливо соотношение $u - v \in N^m$, может при определенном условии (т.е. при выполнении соотношения $u \succ v$) задавать некоторый квант информации об отношении предпочтения ЛПР.

Теперь допустим, что имеется конечный набор пар подобных векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \quad u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1,2,\dots,k. \tag{4.1}$$

Возникает вопрос: могут ли эти пары векторов участвовать в задании некоторого набора квантов информации? Простые примеры показывают, что в общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным.

Пример 4.1. Пусть $m = 2,\ k = 2$ и

$$u^1 = (1,\ -3),\ u^2 = (-2,\ 1),\ v^1 = v^2 = 0_2.$$

Допустим, что данный набор из двух пар векторов задает два простейших кванта информации, так что имеют место соотношения $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$. Складывая эти соотношения почленно, получим $u^1 + u^2 \succ v^1 + v^2$, или, что то же самое, $(-1, -2) \succ 0_2$. С другой стороны, справедливо соотношение $0_2 \succ (-1, -2)$, так как $0_2 \geq (-1, -2)$. Полученные два соотношения $(-1, -2) \succ 0_2$ и $0_2 \succ (-1, -2)$ не совместимы с асимметричностью отношения $\succ$. Следовательно, одновременное выполнение соотношений $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$ для указанных выше пар векторов невозможно ни для какого бинарного отношения, удовлетворяющего аксиомам 2 – 4.

4.1.2. Определение непротиворечивого набора векторов.

Определение 4.1. Пусть имеется набор пар векторов (4.1). Будем называть этот набор *непротиворечивым* (*совместным*), если существует хотя бы одно бинарное отношение $\succ$, подчиненное аксиомам 2 – 4 и такое, что выполняются соотношения $u^s \succ v^s,\ s = 1,2,\dots,k$.[10] Если непротиворечивые пары векторов задают соответствующий набор квантов информации, то такую информацию также будем называть непротиворечивой (совместной).

Непротиворечивость пар векторов (4.1) является необходимым условием того, чтобы он задавал набор квантов информации хотя бы в какой-то одной задаче многокритериального выбора (по крайней мере, для какого-то одного ЛПР).

При решении прикладных задач многокритериального выбора, когда в наличии имеется целое семейство различного рода квантов, может оказаться так, что векторы, участвующие в задании совокупности квантов, образуют противоречивый набор. Это связано с тем, что информация об отношении предпочтения, как правило, не точна и чаще всего отражает лишь желательную, а не действительную картину предпочтений ЛПР. Кроме того, ЛПР, само того не желая, иногда может несколько отклоняться от класса задач многокритериального выбора, ограниченных аксиомами 2 – 4, и в таком случае его поведение следует подкоррек-

[10] На основе аддитивности отношения $\succ$ в этом определении и во всём последующем рассмотрении, связанном с непротиворечивостью информации, можно было бы положить $v^s = 0_m,\ s = 1, 2, .., k$.

тировать, объявив о противоречивости его предпочтений, выраженных в форме набора квантов информации.

Так или иначе, если в процессе выбора на основе информации об отношении предпочтения в форме квантов присутствует набор квантов информации, то его обязательно следует проверять на непротиворечивость. А для осуществления такой проверки необходимо располагать соответствующим инструментарием, поскольку использовать для этой цели лишь определение 4.1 не представляется возможным.

4.1.3. Критерии непротиворечивости. Здесь будут даны три критерия непротиворечивости конечного набора векторов, задающих совокупность квантов информации. Один из них имеет геометрическую форму, второй представляет собой алгебраический вариант, а третий – алгоритмический, удобный для реализации в среде программирования.

Теорема 4.1 (геометрический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.1) *был непротиворечивым необходимо и достаточно, чтобы конус, порожденный векторами*

$$e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, ..., u^k - v^k \tag{4.2}$$

являлся острым.

□ На основе определения 4.1 и следствия 2.1 можно заключить, что набор векторов (4.1) будет непротиворечивым тогда и только тогда, когда существует конусное отношение с острым выпуклым конусом K (без нуля), для которого выполняются соотношения

$$R_+^m \subset K, u^s - v^s \in K, \ s = 1,2,...,k. \tag{4.3}$$

Необходимость. Пусть набор пар векторов (4.1) является непротиворечивым. Тогда в силу сказанного в начале доказательства существует острый выпуклый конус K (без нуля), для которого верно (4.2). Разности векторов $u^s - v^s, s = 1,2,...,k$, принадлежат конусу K и порождают в общем случае некоторый выпуклый подконус конуса K. Поскольку подконус острого конуса сам является острым, то набор указанных разностей векторов порождает острый выпуклый конус.

Достаточность. Рассмотрим выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами (4.2). Обозначим его K. По условию он – острый. Поскольку все единичные векторы $e^1, e^2, ..., e^m$ входят в набор векторов, порождающих K, то $R_+^m \subset K$. Следовательно, для этого конуса справедливы соотношения (4.3). ■

Условимся вектор x^* именовать *N-решением* системы линейных уравнений $Ax = b$, если выполнены соотношения $Ax^* = b$ и $x^* \geq 0_m$.

Теорема 4.2 (алгебраический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.1) *был непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы однородная система линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u^s - v^s) = 0_m \tag{4.4}$$

не имела ни одного N - решения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ [11].

□ Необходимость. Если напротив, система (4.4) имеет *N*-решение (λ, μ), где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k)$, то $-(\lambda, \mu)$ также является *N*-решением. Отсюда следует, что конус, порожденный векторам (4.2), не является острым.

Согласно теореме 4.2, набор векторов (4.1) является противоречивым.

Достаточность. Если набор векторов (4.1) противоречив, тог в соответствии с теоремой 4.1 конус *M*, порожденный векторами (4.2), не является острым. В этом случае существует ненулевой вектор $y \in R^m$, для которого

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u^s - v^s) \in M, \quad -y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' e^i + \sum_{s=1}^{k} \mu_s' (u^s - v^s) \in M,$$

где $(\lambda, \mu) \geq 0_{m+k}$, $(\lambda', \mu') \geq 0_{m+k}$. Так как $y + (-y) = 0_m \in M$, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_i') e^i + \sum_{s=1}^{k} (\mu_s + \mu_i')(u^s - v^s) = 0_m$$

для вектора $(\lambda + \lambda', \mu + \mu') \geq 0_{m+k}$. Таким образом, этот вектор есть *N*-решение системы (4.4).

■

Замечание 4.1. Из последних двух теорем следует, что конус *M*, порожденный векторами (4.2), является острым тогда и только тогда, когда система (4,4) не имеет *N*-решения.

Рассмотрим самую простую ситуацию, когда имеется информация в форме одного кванта (т.е. $k = 1$). Соответствующая этому случаю система линейных уравнений (4.4) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i = -\mu_1 (u^1 - v^1). \tag{4.5}$$

Допустим, что эта система имеет *N*-решение $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1$. Если $\mu_1 = 0$, то (4.5) превращается в равенство $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ строго положителен. Но тогда это равенство является ложным.

Пусть $\mu_1 \neq 0$. Вектор $u^1 - v^1$ имеет хотя бы одну положительную компоненту и поэтому вектор $-\mu_1(u^1 - v^1)$, записанный в правой части равенства (4.5) и имеющий по крайней мере одну отрицательную компоненту, невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации единичных векторов $e^1, e^2, ..., e^m$. Следовательно, равенство (4.5) вновь невозможно, а значит система (4.4) не имеет ни одного *N*-решения.

В итоге приходим к следующему результату.

Следствие 4.1. *Если k =1, то пара векторов, порождающих соответствующий квант, всегда образует непротиворечивый набор. Набор пар векторов* (4.1) *может ока-*

---

[11] Отсутствие *N*-решений означает, что либо данная однородная система имеет лишь нулевое решение, либо среди компонент ненулевого решения имеется хотя бы одна отрицательная.

заться противоречивым лишь в том случае, когда число пар векторов данного набора более одной.

Тот факт, что уже при $k = 2$ противоречивая ситуация возможна, демонстрирует рассмотренный ранее пример 4.1, для которого система уравнений (4.4) принимает вид

$$\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2(-2) = 0$$
$$\lambda_2 + \mu_1(-3) + \mu_2 = 0$$

и, как нетрудно в том убедиться, имеет, например, следующее *N*-решение $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

Следствие 4.2. *Для того чтобы информация в виде двух квантов, состоящая в том, что* i *-й критерий является более значимым, чем* j *-й критерий с параметрами* w_i, w_j *и одновременно* j *-й критерий значимее* i *-го критерия с параметрами* w'_j, w'_i*, была непротиворечивой, необходимо и достаточно выполнение неравенства* $w_i / w_j > w'_i / w'_j$.

□ Доказательство достаточно провести для двумерных векторов, компоненты которых будем обозначать символами i и j . Тот факт, что имеется информация в виде указанных выше квантов, означает выполнение соотношений $(w_i, -w_j) \succ 0_2$, $(-w'_i, w'_j) \succ 0_2$. Согласно теореме 4.2, этот набор будет противоречивым тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\lambda_1 + \mu_1 w_i - \mu_2 w'_i = 0,$$
$$\lambda_2 - \mu_1 w_j + \mu_2 w'_j = 0,$$

имеет *N*- решение $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Очевидно, равенства $\mu_1 = \mu_2 = 0$ влекут равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что невозможно. Поэтому, не уменьшая общности последующих рассмотрений, можно считать, что, например, $\mu_2 \neq 0$. В таком случае выписанная выше система равенств равносильна системе неравенств

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \geqq \frac{w'_i}{w_i},\ \frac{w'_j}{w_j} \leqq \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

которая эквивалентна неравенству $\dfrac{w'_j}{w_j} \leqq \dfrac{w'_i}{w_i}$, или $\dfrac{w_i}{w_j} \leqq \dfrac{w'_i}{w'_j}$. Последнее неравенство противоположно требуемому $w_i / w_j > w'_i / w'_j$, что и должно иметь место, поскольку в начале доказательства мы предположили противоречивость набора из двух квантов информации ■

Геометрический смысл последнего следствия лучше всего раскрывается в случае, когда критерии линейные. Пусть $m = 2, n = 2$, $f_1(x) = \langle c^1, x \rangle$, $f_2(x) = \langle c^2, x \rangle$, где $c^1, c^2, x \in R^2$ (рис. 4.1).

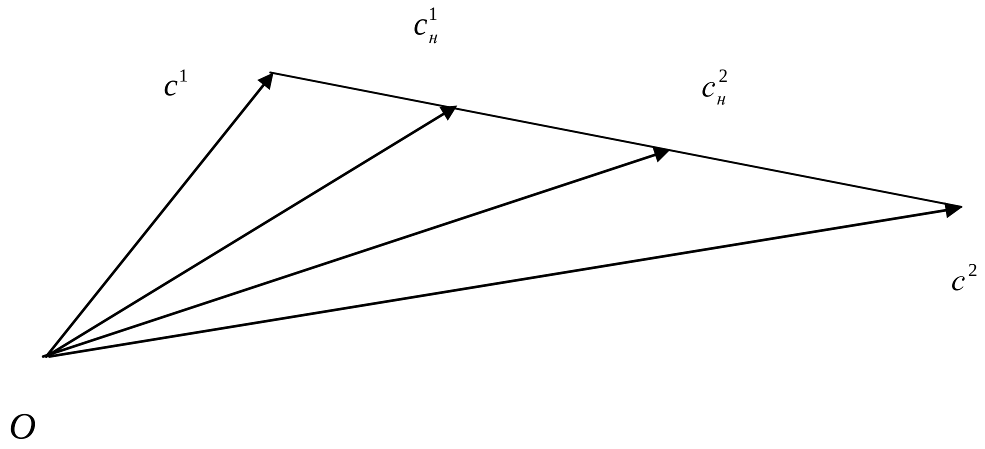

Рис. 4.1.

Поскольку первый критерий значимее второго (допустим, что $\theta_{12} \approx 0.4$), то вместо второго критерия в новой многокритериальной задаче, множество Парето которой является оценкой сверху для искомого множества выбираемых вариантов (векторов), будет участвовать новый второй критерий, градиент которого обозначен $c_н^2$. Конец этого вектора представляет собой результат перемещения конца вектора c^2 по прямой, соединяющей концы векторов c^1 и c^2, в направлении конца вектора c^1 на 40% длины отрезка, соединяющего концы двух данных векторов. С другой стороны, поскольку второй критерий значимее первого (пусть $\theta_{21} \approx 0.25$), то новый первый критерий будет иметь градиент $c_н^1$, конец которого будет располагаться на расстоянии 25% длины указанного выше отрезка от конца вектора c^1 в направлении конца вектора c^2. Новый векторный критерий будет иметь вид $(\langle c_н^1, x\rangle, \langle c_н^2, x\rangle)$. Таким образом, при учете набора указанной информации происходит взаимное изменение направлений градиентов обоих критериев, которое можно трактовать как «сближение целей».

Следствие 4.3. *Пусть имеются две группы номеров критериев* $i_s \in I$, $j_s \in I$, $s = 1,2,...,k$, $\{i_1,...,i_k\} \cap \{j_1,...,j_k\} = \varnothing$, *причем среди номеров первой группы* (*так же, как среди номеров второй группы*) *могут быть* (*и даже все*) *одинаковые. Непротиворечивым является набор пар таких векторов* (4.1), *что у каждого вектора* $u^s - v^s$ *компонента с номером* i_s *положительна, с номером* j_s *отрицательна, а все остальные компоненты – равны нулю,* $s = 1,2,...,k$.

□ Предположим противное: система линейных уравнений (4.4) обладает *N*- решением $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2,..., \mu_k$. Сначала рассмотрим случай, когда среди чисел $\mu_1, \mu_2,..., \mu_k$ имеется, по крайней мере, одно положительное. В этом случае у вектора $\sum_{s=1}^{k} \mu_s (u^s - v^s)$ существует хотя бы одна положительная компонента среди тех, которые принадлежат номерам первой группы. Отсюда получаем противоречие начальному предположению о том, что сумма $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s)$ равна нулевому вектору.

Если же все коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ равны нулю, то система (4.4) превращается в $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля. Но такая система ненулевых решений не имеет, что вновь противоречит начальному предположению. ■

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве последнего следствия, можно получить следующий более общий результат.

Следствие 4.4. *Набор пар векторов* (4.1) *является непротиворечивым, если он удовлетворяет следующим условиям*: *у каждого вектора* $u^s - v^s$ *все компоненты, номера которых принадлежат множеству* A_s, $A_s \subset I$, *положительны, все компоненты, номера которых принадлежат множеству* B_s, $B_s \subset I$, *отрицательны, а все остальные компоненты равны нулю,* $s = 1,2,...,k$, *причем для любой пары различных номеров* $i, j \in \{1,2,...,k\}$ *выполняется равенство* $A_i \cap B_j = \varnothing$.

Теперь сформулируем еще один критерий для проверки непротиворечивости (точнее говоря, противоречивости) набора векторов.

Теорема 4.3 (алгоритмический критерий противоречивости). *Для того чтобы набор векторов* (4.1) *был противоречивым, необходимо и достаточно, чтобы в задаче линейного программирования*

$$
\begin{gathered}
\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m + \xi_{m+1} \to \min \\
\lambda_1 + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u_1^s - v_1^s) + \xi_1 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_m + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u_m^s - v_m^s) + \xi_m = 0 \\
\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k + \xi_{m+1} = 1
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geqq 0;\ \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, \xi_{m+1} \geqq 0;\ \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \geqq 0,$$

оптимальное значение целевой функции было равно нулю.

□ Нетрудно видеть, что система ограничений в форме равенств в задаче линейного программирования (4.6) без учета искусственных переменных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m+1}$ и равенства $\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k = 1$ полностью совпадает с системой линейных уравнений (4.4). В силу теоремы 4.3 набор пар векторов (4.1) является противоречивым тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений (4.4) имеет по крайней мере одно *N*-решение. Это, в свою очередь, справедливо тогда и только тогда, когда в задаче линейного программирования (4.6) существует допустимое решение, в котором все искусственные переменные равны нулю: $\xi_i = 0$, $i = 1,2,...,m,m+1$. Последнее равносильно тому, что оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования (4.6) равно нулю ■

Замечание 4.2. Следует отметить, что задача линейного программирования (4.6) всегда имеет оптимальное решение, так как значения ее целевой функции ограничены снизу нулем. Поэтому оптимальное значение целевой функции в этой задаче всегда существует и либо равно нулю, либо строго больше нуля.

4.1.4. Существенность информации об отношении предпочтения. Выше уже отмечалось, что на практике процесс получения информации в форме квантов нередко носит последовательный характер, т.е. сначала получают один квант, затем второй и т.д. В этом случае важно уметь распознавать очередные кванты, противоречащие полученным ранее. Кроме того, крайне полезно уметь отличать существенную информацию от несущественной. Например, если уже было известно, что i-й критерий значимее j-го с коэффициентом относительной важности 0.5, то аналогичное сообщение с меньшим коэффициентом не вносит ничего нового, существенного по сравнению с первым сообщением и поэтому его можно просто проигнорировать.

Пусть имеется непротиворечивый набор пар векторов (4.1). Добавим к нему еще одну такую пару векторов u^{k+1}, v^{k+1}, что $u^{k+1} - v^{k+1} \in N^m$. В результате получим «расширенный» набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \quad u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1,2,...,k+1. \tag{4.7}$$

Определение 4.2. Для непротиворечивого набора пар векторов (4.1) пару u^{k+1}, v^{k+1} будем называть *существенной*, если выпуклый конус, порожденный единичными векторами $e^1, e^2, ..., e^m$ вместе с векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k+1$, не совпадает с выпуклым конусом, порожденным теми же самыми единичными векторами и векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k$.

Смысл введенного определения состоит в том, что существенная дополнительная информация об отношении предпочтения ЛПР должна изменять имеющееся конусное отношение предпочтения. Нетрудно понять, что несовпадение конусов, в которых участвуют наборы (4.1) и (4.7), может произойти лишь за счет того, что конус, порожденный расширенным набором векторов, будет шире конуса, образованного исходным набором k векторов.

Теорема 4.4 (критерий непротиворечивости и существенности). *Пусть набор пар векторов* (4.1) *является непротиворечивым. Для того чтобы расширенный набор* (4.7) *одновременно был непротиворечивым, а пара векторов* u^{k+1}, v^{k+1} *являлась существенной необходимо и достаточно, чтобы обе системы неоднородных линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u^s - v^s) = \pm (u^{k+1} - v^{k+1}) \tag{4.8}$$

не имели ни одного неотрицательного решения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$.

□ Сначала решим вопрос с непротиворечивостью. Согласно алгебраическому критерию непротиворечивости расширенный набор векторов (4.7) будет совместным тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) + \mu_{k+1}(u^{k+1} - v^{k+1}) = 0_m \tag{4.9}$$

не имеет ни одного N-решения. Проверим, что это равносильно тому, что система уравнений (4.8–), т.е. система (4.8), в правой части которой взят знак минус, не имеет неотрицательного решения. Действительно, если система уравнений (4.9) не имеет N-решений, то система (4.8–) не может иметь неотрицательного решения. Обратно, если вторая из указанных систем (т.е.(4.8–)) не имеет неотрицательного решения, а первая обладает N-решением $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$, то нетрудно прийти к противоречию. В самом деле, случай $\mu_{k+1} = 0$ невозможен из-за того, что набор векторов (4.1) является непротиворечивым. Значит, $\mu_{k+1} > 0$. В таком случае, разделив обе части равенства (4.9) на μ_{k+1}, придем к тому, что система линейных уравнений (4.8–) имеет неотрицательное решение. Это противоречит начальному предположению. Тем самым, первая часть теоремы, посвященная непротиворечивости, доказана.

Перейдем к доказательству второй части, связанной с существенностью пары векторов u^{k+1}, v^{k+1}. Согласно определению 4.2, эта пара векторов является существенной тогда и только тогда, когда вектор $u^{k+1} - v^{k+1}$ не принадлежит выпуклому конусу, порожденному векторами $e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, ..., u^k - v^k$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений (4.8+) не имеет ни одного неотрицательного решения ■

Замечание 4.3. В доказанной теореме есть две части – одна относится к непротиворечивости, а вторая – существенности пары векторов u^{k+1}, v^{k+1}. Из доказательства видно, что в первой части теоремы речь идет о существовании неотрицательного решения системы уравнений (4.8–), тогда как вопрос существенности решается в терминах решений системы уравнений (4.8+).

4.2. Учет двух простейших квантов информации

4.2.1. Случай двух взаимно независимых квантов. Пусть даны четыре непустых набора номеров критериев A_1, B_1, A_2, B_2, таких что $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, $A_2 \cap B_2 = \varnothing$. Предположим, что группа критериев A_1 более значима, чем группа B_1 с определенными наборами параметров и одновременно группа критериев A_2 более значима, чем группа B_2 с соответствующими наборами параметров. Тем самым, имеются два кванта информации. Будем говорить, что эти кванты *взаимно независимы*, если

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ B_1 \cap B_2 = \varnothing.\ A_1 \cap B_2 = \varnothing,\ A_2 \cap B_1 = \varnothing.$$

Аналогичным образом можно ввести понятие взаимной независимости для произвольного конечного числа квантов информации, потребовав попарную непересекаемость всех участвующих групп критериев.

Для того чтобы использовать два взаимно независимых кванта информации для сужения множества Парето, следует просто дважды воспользоваться теоремой 3.5, в которой приводятся формулы для пересчета векторного критерия. Сначала эту теорему можно применить, например, для учета первого кванта, т.е. к группам критериев A_1 и B_1. В результате вместо критериев менее значимой группы B_1 в соответствии с формулой (3.5) необходимо вычислить новые критерии. Затем эта же теорема применяется ко второй группе критериев A_2 и B_2, что ведет к пересчету критериев группы B_2 по той же самой формуле (3.5). В итоге будет получен новый векторный критерий, множество парето-оптимальных вариантов (векторов) относительно которого будет оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов $C(X)$ (выбираемых векторов $C(Y)$).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда i-й критерий более значим, чем j-й, а он, в свою очередь, является значимее некоторого k-го критерия, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$. Здесь также имеется два простейших кванта информации, но они не являются взаимно независимыми. Тем не менее, для учета этого набора информации и формирования нового векторного критерия также можно дважды применить теорему 2.5, в которой идет речь об учете простейшего кванта информации. Сначала следует пересчитать k-й критерий для того, чтобы воспользоваться информацией о том, что j-й критерий значимее k-го. Затем необходимо пересчитать j-й критерий для учета информации о том, что i-й критерий более значим, чем j-й. В результате будет образован новый векторный критерий, у которого все компоненты за исключением j-й и k-й остались прежними. Множество парето-оптимальных вариантов (парето-оптимальных векторов) относительно нового векторного критерия будет представлять собой уточненную оценку сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов (выбираемых векторов), отвечающую данным квантам информации.

4.2.2. Случай, когда один критерий более значим, чем два других. Если для сужения множества Парето используется сразу несколько квантов, то следует учитывать следующее обстоятельство. Пусть i-й критерий значимее j-го с коэффициентом компромисса θ_{ij} и, кроме того, i-й критерий значимее k-го ($k \neq j$) с коэффициентом компромисса θ_{ik}. Тем самым, имеется набор из двух указанных простейших квантов информации, причем эта ситуация внешне напоминает ту, в которой i-й критерий более значим, чем группа критериев $\{j,k\}$ с коэффициентами компромисса θ_{ij} и θ_{ik}.

На основании теоремы 3.1, *если i-й критерий значимее группы критериев $\{j,k\}$ с коэффициентами компромисса θ_{ij} и θ_{ik}, то i-й критерий будет значимее каждого из критериев j и k в отдельности с теми же самыми коэффициентами компромисса*.

Теперь пусть i-й критерий значимее j-го и k-го по отдельности с коэффициентами компромисса θ_{ij} и θ_{ik}. В этом случае ЛПР за прирост по i-му критерию в размере w_i^* единиц готово пожертвовать отдельно w_j^* единиц по j-му критерию, либо w_k^* единиц по k-му критерию. Нетрудно понять, что отсюда, вообще говоря, не следует, что ЛПР согласится в качестве компенсации за прирост w_i^* единиц по i-му критерию потерять одновременно и по j-му и по k-му критерию w_j^* единиц и w_k^* единиц соответственно. Это свидетельствует о том, что *если i-й критерий значимее j-го и k-го критериев по отдельности с коэффициентами компромисса θ_{ij} и θ_{ik} соответственно, то отсюда в общем случае не следует бóльшая значимость i-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j,k\}$ с теми же самыми коэффициентами компромисса*.

Следует, однако, обратить внимание на то, что *из бóльшей значимости i-го критерия по сравнению с j-м и k-м критериями по отдельности с коэффициентами компромисса θ_{ij} и θ_{ik} соответственно, вытекает бóльшая значимость i-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j,k\}$, но с меньшими коэффициентами компромисса*.

□ В самом деле, складывая почленно соотношения $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, где векторы y' и y'' определяются равенствами

$$y_i' = w_i^*, \quad y_j' = -w_j^*, \quad y_s' = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$y_i'' = \overline{w}_i, \quad y_k'' = -\overline{w}_k, \quad y_s'' = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$

получим соотношение $y = y' + y'' \succ 0_m$, где вектор y имеет компоненты

$$y_i = w_i^* + \overline{w}_i, \quad y_j = -w_j^*, \quad y_k = -\overline{w}_k, \quad y_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\}.$$

Полученное означает, что i-й критерий является более значимым, чем группа критериев $\{j,k\}$ с коэффициентами компромисса

$$\theta_{ij}' = \frac{w_j^*}{w_i^* + \overline{w}_i + w_j^*} < \theta_{ij}, \qquad \theta_{ik}' = \frac{\overline{w}_k}{w_i^* + \overline{w}_i + \overline{w}_k} < \theta_{ik} \;\blacksquare$$

Следующий результат показывает, каким образом следует производить пересчет векторного критерия для того, чтобы учесть набор информации, состоящей из двух рассматриваемых квантов информации.

Теорема 4.5. *Пусть имеются два кванта информации, состоящие в том, что i-й критерий значимее j-го критерия с параметрами w_i, w_j, а также i-й критерий значимее k-го критерия с параметрами w_i', w_k'. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{4.10}$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и новым* $(m+1)$*-мерным векторным критерием* g*, имеющим компоненты*

$$\begin{aligned} &g_j = w_j f_i + w_i f_j, \quad g_k = w'_k f_i + w'_i f_k, \\ &g_{m+1} = w_j w'_k f_i + w_i w'_k f_j + w'_i w_j f_k, \\ &g_s = f_s \quad \textit{для всех } s \in I \setminus \{j,k\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

□ Символом K обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$.

Согласно определению 2.4 наличие указанных квантов информации в данном случае означает справедливость соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, что равносильно выполнению включений $y' \in K$ и $y'' \in K$ для векторов y' *и* y'' с компонентами

$$\begin{aligned} &y'_i = w_i, \quad y'_j = -w_j, \quad y'_s = 0 \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}, \\ &y''_i = w'_i, \quad y''_k = -w'_k, \quad y''_s = 0 \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{i,k\}. \end{aligned}$$

Благодаря следствию 4.3, данный набор из двух простейших квантов информации является непротиворечивым. Обозначим через M острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1,...,e^m, y', y''$. Этот конус порождается тем же самым набором, но без вектора e^i, так как последний можно представить, например, в виде линейной комбинации векторов e^j, y' с положительными коэффициентами. Таким образом, конус M совпадает с множеством всех *N*-комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda'_i y' + \lambda''_i y'' + \lambda_{i+1} e^{i+1} + ... + \lambda_m e^m.$$

Установим совпадение конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &y_s \geqq 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j,k\}, \\ &w_j y_i + w_i y_j \geqq 0, \\ &w'_k y_i + w'_i y_k \geqq 0, \\ &w_j w'_k y_i + w_i w'_k y_j + w'_i w_j y_k \geqq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

С этой целью найдем общее решение этой системы неравенств, введя в рассмотрение соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y \rangle = 0 \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{j,k\},$$

$$\langle \bar{y}', y \rangle = 0,$$
$$\langle \bar{y}'', y \rangle = 0, \qquad (4.13)$$
$$\langle \bar{y}, y \rangle = 0,$$

где компоненты векторов $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$ определяются равенствами

$$\bar{y}_i' = w_j,\ \bar{y}_j' = w_i,\ \bar{y}_s' = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$\bar{y}_i'' = w_k',\ \bar{y}_k'' = w_k',\ \bar{y}_s'' = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$
$$\bar{y}_i = w_j w_k',\ \bar{y}_j = w_i w_k',\ \bar{y}_i = w_i' w_j,\ \bar{y}_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\}.$$

Система (4.13) содержит m +1 линейное уравнение, причем любая подсистема из $m-1$ векторов набора $e^s, s \in I \setminus \{j,k\}, \bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$, участвующих в образовании этой системы, является линейно независимой. Поэтому для отыскания общего решения системы линейных неравенств (4.12) достаточно просмотреть одномерные ненулевые решения всех возможных подсистем системы (4.13), получающихся из (4.13) удалением каких либо двух ее уравнений. При этом найденные таким способом решения должны удовлетворять системе неравенств (4.12).

Начнем удалять из системы (4.13) по два уравнения. Сначала рассмотрим случай, когда в каждую такую удаляемую пару уравнений входит последнее уравнение. При удалении двух последних уравнений получаем систему с ненулевым решением e^k. Если вместе с последним удалить (m –1)-е уравнение, то придем к системе с решением e^j. Исключение из (4. 13) последнего уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y \rangle = 0$ для всех $s \neq i$ приводит к системе, обладающей решением e^s. Если же к последнему удаляемому уравнению добавить
$\langle e^i, y \rangle = 0$, то полученная таким образом система уравнений не будет иметь ни одного ненулевого решения, удовлетворяющего системе неравенств (4.12).

Перейдем к разбору случая, когда из системы линейных уравнений (4.13) удаляется пара уравнений, одним из которых является предпоследнее уравнение. Если вместе с предпоследним удалить предшествующее ему уравнение, то получим систему, среди ненулевых решений которых нет ни одного, удовлетворяющего системе неравенств (4.12). Исключая предпоследнее уравнение вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y \rangle = 0$ при $s \neq i$, получим систему с решением e^s. Если же вместе с предпоследним удалить уравнение $\langle e^i, y \rangle = 0$, то придем к системе с решением y'.

Аналогично разбирается случай удаления (m –1)-го уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y \rangle = 0$. При этом будет найдено еще одно ненулевое решение y'' при $s = i$, удовлетворяющее системе линейных неравенств (4.12).

Исключение из системы уравнений (4.13) пары уравнений вида $\langle e^s, y \rangle = 0$ не приведет к новым решениям.

В итоге получаем совокупность векторов $e^1,...,e^{i-1},y',y'',e^{i+1},...,e^m$, порождающих конус решений системы линейных неравенств (4.12). Полученная совокупность совпадает с системой векторов, порождающих конус M. Тем самым, установлено, что множество ненулевых решений системы линейных неравенств (4.12) совпадает с конусом M.

Из включений $R_+^m \subset M \subset K$ очевидным образом вытекают включения

$$\text{Ndom}Y \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{4.14}$$

где

$$\hat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества *Y*, упорядоченного конусным отношением с конусом M.

Выберем произвольно векторы $y = f(x),\ y^* = f(x^*),\ f(x) \neq f(x^*)$ при $x, x^* \in X$. Благодаря доказанному выше совпадению множества решений системы линейных неравенств (4.12) и конуса M, включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j,k\},\\
&w_j(f_i(x) - f_i(x^*)) + w_i(f_j(x) - f_j(x^*)) \geqq 0,\\
&w_k'(f_i(x) - f_i(x^*)) + w_i'(f_k(x) - f_k(x^*)) \geqq 0,\\
&w_j w_k'(f_i(x) - f_i(x^*)) + w_i w_k'(f_j(x) - f_j(x^*)) + w_i' w_j(f_k(x) - f_k(x^*)) \geqq 0,
\end{aligned}$$

причем здесь хотя бы одно неравенство – строгое. Нетрудно понять, что эти неравенства в терминах векторной функции g, определяемой в условиях теоремы формулами (4.11), можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$. Отсюда следует, что $\hat{P}(Y)$ – это множество векторов, отвечающих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с исходным множеством *X* и новым векторным критерием g, т.е. $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$.

Для завершения доказательства остается учесть включение $C(Y) \subset \text{Ndom}(Y)$, справедливое для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ ■

Теорему 4.2 легко переформулировать в терминах вариантов. В результате она примет следующий вид.

Теорема 4.5. *Пусть имеются два кванта информации о том, что* i*-й критерий значимее* j*-го критерия с параметрами* w_i, w_j*, а также что* i*-й критерий значимее* k*-го критерия с параметрами* w_i', w_k'*. Тогда для любого множества выбираемых вариантов справедливы включения*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{4.15}$$

где $P_g(X)$ *– множество парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и* $(m+1)$*-мерным векторным критерием* g, *определяемым равенствами* (4.11).

Приведем геометрическую иллюстрацию теоремы 4.5 для случая линейных критериев. Пусть $m=n=3$, $f_i(x)=\langle c^i, x\rangle$, $i=1,2,3$, где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$ (см. рис. 4.2). Предположим, что первый критерий значимее второго с параметрами $w_1=1, w_2=3$, а также значимее третьего критерия с параметрами $w_1'=2, w_3=3$. Учет бóльшей значимости первого критерия в сравнении со вторым приводит к трехкритериальной задаче с векторами $c^1, c_н^2, c^3$, являющимися градиентами трех линейных критериев. Аналогично, учет большей значимости первого критерия в сравнении с третьим ведет к трехкритериальной задаче с тремя векторами $c^1, c^2, c_н^3$.

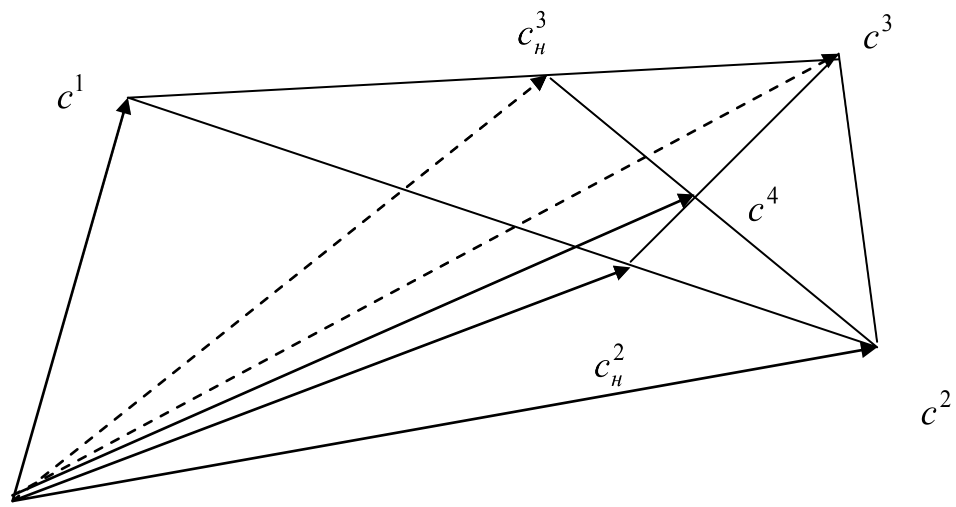

Рис. 4.2.

Тем самым, получаем два конуса целей, соответствующих двум имеющимся квантам информации. Для одновременного учета обоих квантов необходимо рассмотреть пересечение указанных конусов. В итоге приходим к конусу, порожденному четырьмя векторами $c^1, c_н^2, c_н^3, c^4$. Это и есть конус целей новой задачи, множество Парето которой дает оценку сверху для множества выбираемых вариантов.

Следующий результат показывает, что теорему 4.5 можно применять к любым критериям, значения которых вычисляются в количественных шкалах.

Теорема 4.6. *Включения* (4.10) *и* (4.15) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования компонент векторного критерия* g, *определяемого равенствами* (4.11).

□ Учитывая доказательство теоремы 2.7, достаточно проверить инвариантность множеств $\hat{P}(Y)$ и $P_g(X)$ из (4.10) и (4.15) относительно линейного положительного преобразования только последнего критерия g_{m+1}.

Имеем

$$g_{m+1} = w_j w'_k y_i + w_i w'_k y_j + w_j w'_i y_k \,.$$

Заменим y_s на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s$ $(\alpha_s > 0)$, $s = i, j, k$, в формуле, задающей критерий g_{m+1}. При этом будем учитывать упрощенное определение кванта, а также тот факт, что параметры, участвующие в задании квантов, изменяются аналогичным образом. Получим

$$\tilde{g}_{m+1} = \alpha_j \alpha_k w_j w'_k (\alpha_i y_i + c_i) + \alpha_i \alpha_k w_i w'_k (\alpha_j y_j + c_j) + \alpha_i \alpha_j w_j w'_i (\alpha_k y_k + c_k) =$$

$$= \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_j w'_k y_i + \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_i w'_k y_j + \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_j w'_i y_k + C \,,$$

где константа C не зависит от y_i, y_j, y_k.

Нетрудно видеть, что преобразованный критерий $\tilde{g}_{m+1}$ можно получить из g_{m+1} умножением последнего на положительное число $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ и прибавлением константы C. Обратно, вычитая из $\tilde{g}_{m+1}$ константу C и деля полученный результат на число α_i, получим g_{m+1}. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$g_{m+1} = w_j w'_k y_i + w_i w'_k y_j + w_j w'_i y_k > w_j w'_k y_i^* + w_i w'_k y_j^* + w_j w'_i y_k^* = \; g_{m+1}^* \;,$$

и

$$\tilde{g}_{m+1} = w_j w'_k \tilde{y}_i + w_i w'_k \tilde{y}_j + w_j w'_i \tilde{y}_k > w_j w'_k \tilde{y}_i^* + w_i w'_k \tilde{y}_j^* + w_j w'_i \tilde{y}_k^* = \; \tilde{g}_{m+1}^*$$

для критерия g_{m+1} и преобразованного критерия $\tilde{g}_{m+1}$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.10) и (4.15) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия g_{m+1}, а значит и всех компонент векторной функции g ■

4.2.3. Сужение множества Парето на основе информации о том, что два критерия по отдельности значимее третьего. Здесь будет рассмотрен случай, когда имеются два кванта информации, состоящие в том, что i-й критерий значимее k-го с параметрами w_i и w_k, а также что j-й критерий значимее того же самого k-го с параметрами w'_j и w'_k.

Предварительно сравним этот случай с ситуацией, когда имеется один квант о том, что группа критериев $\{i, j\}$ значимее k-го критерия; при этом коэффициенты компромисса в обоих случаях считаются одинаковыми. В силу теоремы 3.1 *если каждый* (*или хотя бы один*) *из критериев* i *и* j *в отдельности значимее* k*-го критерия, то группа* $\{i, j\}$ *более значима* *критерия* k *с теми же самыми коэффициентами компромисса, но не наоборот.* Следовательно, информация из двух данных квантов является содержательнее одного кванта о том, что группа из двух критериев значимее третьего критерия.

Использование указанных выше двух квантов следует осуществлять на основе следующей теоремы.

Теорема 4.7. *Пусть имеются два кванта информации о том, что* i *-й критерий более значим, чем* k *-й с параметрами* w_i *и* w_k*, а также что* j *-й критерий значимее* k *-го с параметрами* w'_j *и* w'_k*. Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы включения* (4.10), *где* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– множество векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в задаче с множеством* X *и векторным критерием* g *с компонентами*

$$
\begin{aligned}
&g_s = f_s \qquad\qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},\\
&g_k = w_k w'_j f_i + w_i w'_k f_j + w_i w'_j f_k .
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

□ Пусть K – выпуклый острый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$.

По определению 2.4 наличие информации о том, что i -й критерий значимее k -го с параметрами w_i и w_k, а также что j -й критерий значимее k -го с параметрами w'_j и w'_k, означает выполнение соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$ для векторов y' и y'' с компонентами

$$
\begin{aligned}
&y'_i = w_i, \quad y'_k = -w_k, \quad y'_s = 0 \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{i,k\},\\
&y''_j = w'_j, \quad y''_k = -w'_k, \quad y''_s = 0 \ \text{ для всех } s \in I \setminus \{j,k\}.
\end{aligned}
$$

В силу следствия 4.3 данные два вектора y' и y'' задают непротиворечивую информация. Пусть M – острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$. Вектор e^i можно представить в виде линейной положительной комбинации векторов e^k и y', а вектор e^j – в виде подобной комбинации векторов e^k и y''. Следовательно, конус M порождается набором векторов

$$
e^1, ..., e^{i-1}, y', e^{i+1}, ..., e^{j-1}, y'', e^{j+1}, ..., e^m, \tag{4.17}
$$

а значит, этот конус совпадает с множеством всех ненулевых линейных неотрицательных комбинаций вида

$$
\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda_i y' + \lambda_{i+1} e^{i+1} + ... + \lambda_{j-1} e^{j-1} + \lambda_j y'' + \lambda_{j+1} e^{j+1} + ... + \lambda_m e^m .
$$

Докажем совпадение конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\} \tag{4.18}$$
$$w_k w'_j y_i + w_i w'_k y_j + w_i w'_j y_k \geqq 0.$$

Для этого найдем общее решение системы (4.18), рассматривая соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y\rangle = 0 \;\; \text{для всех } s \in I \setminus \{k\} \tag{4.19}$$
$$\langle \bar{y}, y\rangle = 0,$$

где $\bar{y}_i = w_k w'_j$, $\bar{y}_j = w_i w'_k$, $\bar{y}_k = w_i w'_j$, $\bar{y}_s = 0$ для всех $s \in I \setminus \{i, j, k\}$.

В системе (4.19) m уравнений. Любая подсистема из m – 1 векторов системы $e^1,...,e^{k-1},\bar{y},e^{k+1},...,e^m$ является линейно независимой. Поэтому для отыскания фундаментальной совокупности решений системы линейных неравенств (4.18) достаточно найти по одному ненулевому решению каждой из подсистем системы (4.19), получающейся из (4.19) удалением какого-то одного из ее уравнений (при этом найденное решение должно удовлетворять системе неравенств (4.18)).

Если из системы уравнений (4.19) удалить последнее уравнение, то полученная система будет иметь решение e^k. Если из системы (4.19) удалить уравнение $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s = i$ (или $s = j$), то соответствующая система уравнений будет обладать решением y' (или y''). Удаление уравнения $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s \in I \setminus \{i, j, k\}$ приводит к подсистеме, имеющей решение e^s.

Таким образом, одна из фундаментальных совокупностей решений системы линейных неравенств (4.18) имеет вид (4.17). Следовательно, конус M совпадает с множеством ненулевых неотрицательных решений системы линейных неравенств (4.8).

Из включений

$$R^m_+ \subset M \subset K$$

вытекают включения

$$\text{Ndom}Y \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{4.19}$$

где

$$\hat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества Y относительно конусного отношения с конусом M.

Выберем произвольно два элемента $x, x^* \in X$, $y = f(x), y^* = f(x^*), f(x) \neq f(x^*)$. На основании установленного выше совпадения конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (4.18) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $f(x) - f(x^*)$ удовлетворяет системе неравенств

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\},$$
$$w_k w'_j (f_i(x) - f_i(x^*)) + w_i w'_k (f_j(x) - f_j(x^*)) + w_i w'_j (f_k(x) - f_k(x^*)) \geqq 0,$$

причем хотя бы одно из неравенств этой системы должно быть строгим (чтобы исключить случай $f(x) = f(x^*)$). Полученную систему неравенств можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$ с векторной функцией g, определяемой равенствами (4.16). Следовательно, $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$.

Для завершения доказательства остается воспользоваться включением $C(Y) \subset \mathrm{Ndom}Y$ для любого множества $C(Y)$ ■

Для геометрической иллюстрации теоремы 4.4 обратимся к задаче выбора с линейными критериями, в которой $m = n = 3$, $f_s(x) = \langle c^s, x \rangle$, $s = 1,2,3$, причем $w_1 = 4, w_3 = 1$, а также $w'_2 = 2, w'_3 = 3$ (см. рис. 4.3). Конус целей, соответствующий новой многокритериальной задаче, является трехгранным и порождается векторами $c^1, c^2, c^3_н$. Этот конус представляет собой пересечение двух трехгранных конусов, один из которых соответствует многокритериальной задаче, в которой учитывается информация о том, что первый критерий

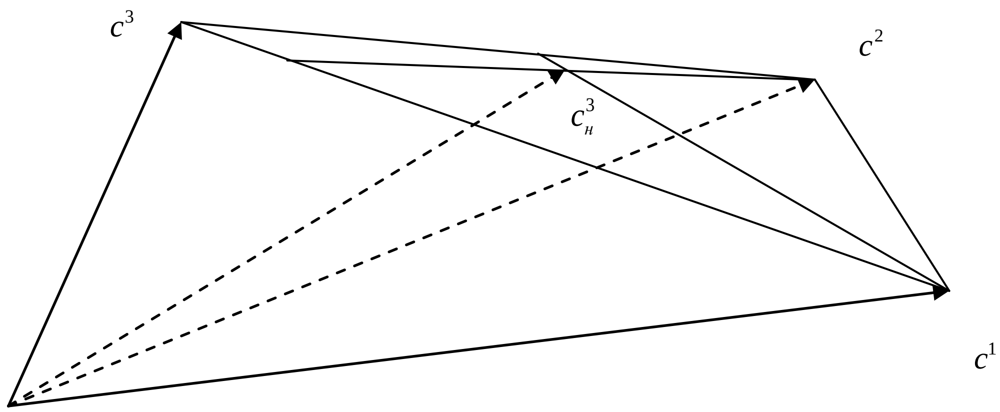

Рис. 4.3.

значимее третьего, а второй – многокритериальной задаче, где учтена информация о большей значимости второго критерия по сравнению с третьим.

Теорема 4.7 применима к любой многокритериальной задаче, значения критериев в которой измеряются в количественной шкале. Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 4.8. *Включения* (4.10) *и* (4.15) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования всех компонент векторного критерия* g *вида* (4.16).

□ Здесь так же, как и при доказательстве теоремы 4.4, достаточно проверить инвариантность множеств $\hat{P}(Y)$ и $P_g(X)$ из (4.10) и (4.15) относительно линейного положительного преобразования только критерия g_k.

Имеем

$$g_k = w_k w'_j y_i + w_i w'_k y_j + w_i w'_j y_k .$$

Заменим в этой формуле y_s на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s \ (\alpha_s > 0),\ s = i, j, k$. При этом будем учитывать упрощенное определение кванта, а также тот факт, что параметры, участвующие в задании квантов, изменяются аналогичным образом. Получим

$$\tilde{g}_k = \alpha_k \alpha_j w_k w'_j (\alpha_i y_i + c_i) + \alpha_i \alpha_k w_i w'_k (\alpha_j y_j + c_j) + \alpha_i \alpha_j w_i w'_j (\alpha_k y_k + c_k) =$$

$$= \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_k w'_j y_i + \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_i w'_k y_j + \alpha_i \alpha_j \alpha_k w_i w'_j y_k + C ,$$

где константа C не зависит от величин y_i, y_j, y_k.

Из последнего представления видно, что преобразованный критерий $\tilde{g}_k$ можно получить из g_k умножением его на положительное число $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ и прибавлением константы C. Обратно, вычитая из $\tilde{g}_k$ константу C и деля полученный результат на число $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$, придем к g_k. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$g_k = w_k w'_j y_i + w_i w'_k y_j + w_i w'_j y_k > w_k w'_j y_i^* + w_i w'_k y_j^* + w_i w'_j y_k^* = g_k^* ,$$

и

$$\tilde{g}_k = w_k w'_j \tilde{y}_i + w_i w'_k \tilde{y}_j + w_i w'_j \tilde{y}_k > w_k w'_j \tilde{y}_i^* + w_i w'_k \tilde{y}_j^* + w_i w'_j \tilde{y}_k^* = \tilde{g}_k^* ,$$

для критерия g_k и преобразованного критерия $\tilde{g}_k$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.10) и (4.15) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия g_k. ■

4.3. Сужение множества Парето на основе конечного числа некоторых квантов информации

4.3.1. **Использование квантов информации точечно-множественного типа.** В теореме 4.5 была рассмотрена ситуация, когда один критерий по отдельности значимее двух других. Ниже изучается общий случай, в котором группа критериев являются более значимой, чем какие-то две другие группы критериев.

Теорема 4. 9. *Пусть заданы три попарно непересекающихся подмножества номеров критериев* $A, B, C \subset I = \{1, 2, \ldots, m\}$ *и имеется информация о том, что* $y' \succ 0_m$ *и* $y'' \succ 0_m$, *где векторы* y' *и* y'' *имеют следующие компоненты*

$y'_i = w'_i$ *для всех* $i \in A$; $y'_j = -w'_j$ *для всех* $j \in B$; $y'_s = 0$ *и всех* $s \in I \setminus (A \cup B)$,

$y''_i = w''_i$ *для всех* $i \in A$; $y''_k = -w''_k$ *для всех* $j \in C$; $y''_s = 0$ *и всех* $s \in I \setminus (A \cup C)$,

причем все w'_i, w'_j, w''_i, w''_j *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *справедливы включения* (4.10), *где* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и новым* p*-мерным векторным критерием* g, $p = m - |B| - |C| + |A| \cdot |B| + |A| \cdot |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|$, *имеющим компоненты*

$$g'_{ij} = w'_j f_i + w'_i f_j \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B$$

$$g''_{ik} = w''_k f_i + w''_i f_k \quad \text{для всех } i \in A, k \in C$$

$$g_{ijk} = w'_j w''_k f_i + w'_i w''_k f_j + w'_j w''_i f_k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B, k \in C \tag{4.21}$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus (B \cup C).$$

□ Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме и разбито на пять этапов.

1^0. Сначала убедимся в непротиворечивости имеющейся информации. В соответствии с теоремой 4.7 данная информация непротиворечива тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \lambda_{m+1} y' + \lambda_{m+2} y'' = 0_m \tag{4.22}$$

относительно $\lambda_1, ..., \lambda_{m+2}$ не имеет N-решений. Здесь e^i означает m-мерный вектор, у которого i-я компонента равна единице, а все остальные равны нулю. В развернутом виде система (4.22) принимает вид

$$\lambda_i + \lambda_{m+1} w'_i + \lambda_{m+2} w''_i = 0 \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$\lambda_j - \lambda_{m+1} w'_j = 0 \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$\lambda_k - \lambda_{m+2} w''_k = 0 \quad \text{для всех } k \in C,$$

$$\lambda_l = 0 \quad \text{для всех } l \in I \setminus (A \cup B \cup C).$$

Из уравнений, записанных в первой строке, следуют равенства $\lambda_i = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$ для всех $i \in A$. В таком случае остальные уравнения влекут равенства $\lambda_j = 0$ для всех остальных номеров $j \in I \setminus A$. Следовательно, система (4.22) в качестве неотрицательного имеет только нулевое решение. Тем самым, непротиворечивость имеющейся информации в форме соотношений $y' \succ 0_m$, $y'' \succ 0_m$ установлена.

2^0. Напомним, что K означает острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Через M обозначим острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, ..., e^m, y', y''$.

Возможны два случая: $|A| > 1$ и $|A| = 1$. В первом случае образующими конуса M являются все векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этого набора (так как порождаемый ими конус M является острым). Во втором случае (т.е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор e^i, очевидно, можно представить в виде линейной положительной комбинации вектора

y' и всех векторов e^s при $s \in B$. Значит во втором случае образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$ без вектора e^i. Далее сначала рассматривается первый случай $|A| > 1$, затем - второй.

Введем двойственный конус (без нуля) C по отношению к многогранному конусу M

$$C = \{y \in R^m \mid \langle u, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } u \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

Образующими многогранного конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса M, и обратно - образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса C.

Так как образующими конуса M служат векторы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$, множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y \rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } i \in I, \\ &\langle y', y \rangle \geqq 0, \\ &\langle y'', y \rangle \geqq 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

совпадает с двойственным конусом C.

3^0. Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.23). Это должна быть такая система векторов, множество линейных неотрицательных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (4.23). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (4.23). Прежде всего, заметим, что каждый единичный орт e^s пространства R^m при $s \in I \setminus (B \cup C)$ является решением (4.23). Далее введем векторы

$$e^{ij} = w'_j e^i + w'_i\, e^j \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B.$$

Компоненты этих векторов неотрицательны, и потому все они удовлетворяют неравенствам (4.23), записанных в первой строке. Они удовлетворяют и неравенству $\langle y', y \rangle \geqq 0$ из второй строки системы (4.23), так как

$$\langle y', e^{ij} \rangle = y'_i w'_j \ + y'_j w'_i \ = 0 \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B.$$

Наконец, очевидно, данные векторы удовлетворяют и неравенству, записанному в третьей строке (4.23).

Аналогично можно убедиться, что векторы

$$\hat{e}^{ik} = w''_k e^i + w''_i e^k \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } k \in C$$

удовлетворяют системе (4.14).

Кроме того, векторы $e^{ijk} = w'_j w''_k e^i + w'_i w''_k e^j + w'_j w''_i e^k$ для всех $i \in A, j \in B, k \in C$ также удовлетворяют системе (4.23), причем неравенства из второй и третьей строк выполняются как равенства.

Таким образом, набор (обозначим его (*)), состоящий из векторов e^s для всех $s \in I \setminus (B \cup C)$, векторов e^{ij} для всех $i \in A$ и $j \in B$, векторов $\hat{e}^{ik}$ для всех $i \in A$ и $k \in C$, а также векторов e^{ijk} для всех $i \in A, j \in B, k \in C$, принадлежит двойственному конусу C. При этом, как нетрудно видеть, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов. Общее число p всех векторов указанного набора равно $p = m - |B| - |C| + |A| \cdot |B| + |A| \cdot |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|$.

Для того чтобы проверить, что указанный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (4.23), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (4.23) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных линейных неотрицательных комбинаций векторов указанного выше набора (*). С этой целью наряду с системой (4.23) рассмотрим соответствующую ей систему из $m+2$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } i \in I, \\ &\langle y', y\rangle = 0, \\ &\langle y'', y\rangle = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Вычисляя ранги соответствующих матриц, можно проверить, что любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (4.23) содержится среди одномерных ненулевых решений подсистем из $m-1$ уравнений системы линейных уравнений (4.24).

Будем удалять из системы (4.24) по три уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (4.23). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (4.23).

Если в число удаляемых входят последние два уравнения системы (4.24), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), единичные орты $e^1, e^2, ..., e^m$. Однако, как легко видеть, из этого набора лишь те векторы e^s, для которых $s \in I \setminus (B \cup C)$, удовлетворяют системе неравенств (4.23).

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (4.24) не удаляется, а предпоследнее удаляется, то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы $\hat{e}^{ik}$ для всех $i \in A$ и всех $k \in C$. Все эти векторы, как было установлено ранее, удовлетворяют системе неравенств (4.23).

Аналогично, если остается предпоследнее уравнение из (4.24), а последнее исключается, то в качестве решений получающихся подсистем можно взять векторы e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, которые удовлетворяют системе неравенств (4.23).

В случае, когда оба последних уравнения остаются в подсистеме, приходим к решениям вида e^{ijk} для всех $i \in A,\ j \in B, k \in C$.

Поскольку все возможные варианты удаления троек уравнений из системы (4.24) рассмотрены, никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из $m-2$ уравнений системы (4.24), удовлетворяющих (4.23), не существует. Это означает, что система векторов (*) образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.23). Следовательно, любое решение системы неравенств (4.23) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Далее для удобства означим эту совокупность $a^1, a^2, ..., a^p$.

В случае $|A|=1$ (т.е. $A=\{i\}$), рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из m+1 уравнений, которая отличается от (4.24) отсутствием уравнения $\langle e^i, y \rangle = 0$. Здесь следует удалять лишь по два уравнения, чтобы получить фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.23).

4^0. В силу доказанного выше, множество решений системы линейных неравенств (4.23), т.е. конус C (с присоединенным к нему нулем), совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1, a^2, ..., a^p$. Поэтому включение $u \in C$ для вектора u имеет место тогда и только тогда, когда этот вектор можно представить в виде некоторой ненулевой линейной неотрицательной комбинации векторов указанного набора.

Благодаря последнему обстоятельству, неравенство

$$\langle u, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } u \in C \tag{4.25}$$

для произвольного фиксированного вектора $y \neq 0_m$ оказывается эквивалентным неравенству

$$\langle a^i, y \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{4.26}$$

где, знак $\geq$ указывает, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, ..., p\}$ неравенство строгое. В самом деле, пусть вектор y удовлетворяет неравенствам (4.26). Всякий вектор $u \in C$ можно представить в виде некоторой ненулевой линейной неотрицательной комбинации векторов $a^1, a^2, ..., a^p$, например, $z = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_p a^p$. Умножая неравенства (4.26) на соответствующие одновременно не равные нулю неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ и, почленно складывая полученные таким образом неравенства, придем к неравенству

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^i, y \right\rangle = \langle u, y \rangle \geqq 0$$

из (4.25). Обратно, из (4.25) вытекает (4.26), так как $a^i \in C$ для всех $i = 1,2,..., p$. При этом одновременно все неравенства (4.26) как равенства выполняться не могут. Действительно, если для ненулевого вектора y неравенства (4.26) выполняются как равенства, то эти же неравенства будут иметь место и для противоположного вектора $-y$. Отсюда следует, что конус, двойственный по отношению к C, не является острым. Но этот двойственный конус есть

$$M = \{y \in R^m \mid \quad \langle u, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } u \in C\} \setminus \{0_m\},$$

так как в случае многогранного конуса M двойственным по отношению к двойственному конусу C является исходный конус M. Тем самым приходим к противоречию: конус M не является острым. Полученное противоречие означает, что для ненулевого вектора y одновременно все неравенства (4.26) как равенства выполняться не могут.

На основании установленной эквивалентности неравенств (4.23) и (4.26) заключаем, что включение $y \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливы неравенства (4.26), и поэтому

$$y \in M \iff \langle a^i, y\rangle \geq 0\,, \quad i = 1, 2,..., p\,.$$

Завершающий пятый этап доказательства теоремы проводится точно так же, как в доказательстве теоремы 3.5; поэтому он не приводится. ■

В соответствии с теоремой 4.9, для того чтобы учесть набор информации о предпочтениях ЛПР в виде двух соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$ и сузить на их основе множество Парето, нужно сформировать новый векторный критерий g по формулам, приведенным в условиях теоремы, после чего построить множество Парето $P_g(X)$ относительно сформированного критерия. Множество векторов, отвечающих новому множеству Парето, т.е. $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, и составит искомую оценку сверху для множества выбираемых векторов.

Используя схему доказательства теоремы 4.9, при помощи аналогичных рассуждений можно установить ее более общий вариант, когда ради увеличения значений по критериям группы *A* ЛПР готово пойти на уменьшение критериев уже не трех, а целого набора групп критериев $B_1, B_2,...,B_k$. А именно, имеет место

Теорема 4.10. *Пусть задан конечный набор* $k+1$ *попарно непересекающихся подмножеств номеров критериев* $A, B_1, B_2,..., B_k \subset I = \{1,2,\ldots, m\}$ *и от ЛПР получена информация о том, что* $y^s \succ 0_m$, $s = 1,...,k$, *где векторы* y^s (*для* $s = 1,...,k$) *имеют компоненты*

$$y_i^s = w_i^s \quad \text{для всех} \quad i \in A;$$

$$y_j^s = -w_j^s \quad \text{для всех} \;\; j \in B_s\,; \quad y_j^s = 0 \;\; \text{для всех} \quad j \in I \setminus (A \cup B_s)\,,$$

причем все w_i^s, w_j^s *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация непротиворечива и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *справедливы включения* (4.1), *в которых* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– подмножество* *возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и новым* r*-мерным векторным критерием* g ,

$r = (m - \sum_{s=1}^{k}|B_s| + |A| \cdot \sum_{s=1}^{k}|B_s| + |A| \cdot \prod_{s=1}^{k}|B_s|)$, *имеющим компоненты*

$$g_{ij}^s = w_j^s f_i + w_i^s f_j \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B_s$$

$$g_{ij_1 \ldots j_k}^s = w_{j_1}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_k}^s f_i + w_i^s \cdot w_{j_2}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_k}^s f_{j_1} + \ldots + w_i^s \cdot w_{j_1}^s \cdot \ldots \cdot w_{j_{k-1}}^s f_{j_k} \quad \text{для всех } i \in A,\ j_s \in B_s$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \bigcup_{s=1}^{k} B_s .$$

4.3.2. Использование набора информации множественно-точечного типа. Теперь рассмотрим ситуацию, когда в соответствии с имеющейся информацией о предпочтениях, ЛПР ради увеличения значений критериев двух групп *A* и *B* готово пожертвовать значениями в третьей группе *C*. Как показывает следующая теорема, подобного рода информация всегда непротиворечива, а ее учет сводится к формированию векторного критерия путем замены в «старом» векторном критерии всех компонент из группы *C* на «новые», вычисляемые по определенным формулам; при этом общее число компонент в образовавшемся «новом» векторном критерии может разве что увеличиться по сравнению с размерностью «старого» векторного критерия.

Теорема 4.11. *Пусть заданы три попарно непересекающихся подмножества номеров критериев* $A, B, C \subset I$ *и имеется информация о том, что* $y' \succ 0_m$ *и* $y'' \succ 0_m$, *где векторы* y' *и* y'' *имеют следующие компоненты*

$$y_i' = w_i' \ \text{для всех } i \in A; \quad y_k' = -w_k' \ \text{для всех } k \in C; \quad y_s' = 0 \ \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup C),$$

$$y_j'' = w_j'' \ \text{для всех } j \in B; \quad y_k'' = -w_k'' \ \text{для всех } k \in C; \quad y_s'' = 0 \ \text{для всех } s \in I \setminus (B \cup C),$$

причем все w_i', w_k', w_j'', w_k'' *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация непротиворечива и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *справедливы включения* (4.1), *где* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– подмножество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и новым* $(m - |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|)$ *-мерным векторным критерием* g , *имеющим компоненты*

$$g_{ijk} = w_i' w_j'' f_k + w_j'' w_k' f_i + w_i' w_k'' f_j \quad \text{для всех } i \in A, j \in B, k \in C, \tag{4.27}$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus C .$$

□ Доказательство разделено на четыре этапа.

I. Сначала убедимся в непротиворечивости имеющейся информации. В соответствии с теоремой 4.7 данная информация непротиворечива тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \lambda_{m+1}y' + \lambda_{m+2}y'' = 0_m \tag{4.28}$$

относительно $\lambda_1,...,\lambda_{m+2}$ не имеет *N*-решений. В развернутом виде система (4.28) принимает вид

$$\lambda_i + \lambda_{m+1}w_i' = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in A,$$
$$\lambda_j + \lambda_{m+2}w_j'' = 0 \quad \text{для всех} \quad j \in B,$$
$$\lambda_k - \lambda_{m+1}w_k' - \lambda_{m+2}w_k'' = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in C,$$
$$\lambda_l = 0 \quad \text{для всех} \ l \in I \setminus (A \cup B \cup C).$$

Из уравнений, записанных в первой и второй строках, благодаря неотрицательности чисел $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}$ следуют равенства $\lambda_i = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = 0$ для всех $i \in A$. В таком случае оставшиеся уравнения влекут равенства $\lambda_j = 0$ для всех остальных номеров $j \in I \setminus (A \cup B)$. Следовательно, система (4.28) в качестве неотрицательного имеет только нулевое решение. Тем самым непротиворечивость имеющейся информации $y' \succ 0_m$, $y'' \succ 0_m$ установлена.

II. Символом *K* обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$, а через *M* − острый выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1,...,e^m, y', y''$.

Возможны четыре случая: $|A| > 1$ и $|B| > 1$; $|A| = 1$ и $|B| > 1$; $|A| > 1$ и $|B| = 1$; $|A| = |B| = 1$. В первом из них образующими конуса *M* являются все векторы $e^1, e^2,...,e^m, y', y''$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этого набора (так как порождаемый ими конус *M* является острым). Во втором случае (т.е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор e^i, очевидно, можно представить в виде линейной положительной комбинации вектора y' и всех векторов e^s при $s \in B$. Значит, во втором случае образующими конуса являются векторы $e^1, e^2,...,e^m, y', y''$ без вектора e^i. Аналогично в третьем случае образующими конуса *M* являются векторы $e^1, e^2,...,e^m, y', y''$ без вектора e^j, тогда как в четвертом случае из числа образующих следует исключить векторы e^i и e^j одновременно.

Сначала рассмотрим первый случай. Введем двойственный конус (без нуля) по отношению к многогранному конусу *M*

$$C = \{y \in R^m \mid \langle u, y \rangle \geqq 0 \ \text{для всех} \ u \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

Так как образующими конуса *M* являются векторы $e^1, e^2,...,e^m, y', y''$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{gathered} \langle e^i, y \rangle \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I, \\ \langle y', y \rangle \geqq 0, \\ \langle y'', y \rangle \geqq 0 \end{gathered} \tag{4.29}$$

совпадает с двойственным конусом C.

III. Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.29). Это должна быть такая минимальная по числу система векторов, множество линейных неотрицательных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (4.29). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (4.29). Легко проверить, что векторы $e^{ijk} = w''_j w'_k e^i + w'_i w''_k e^j + w''_j w'_i e^k$ для всех $i \in A,\ j \in B, k \in C$ удовлетворяют системе (4.29), причем неравенства из второй и третьей строк для этих векторов выполняются как равенства.

Таким образом, набор, состоящий из векторов e^s для всех $s \in I \setminus C$, векторов e^{ijk} для всех $i \in A,\ j \in B, k \in C$ (обозначим этот набор (*)), принадлежит двойственному конусу *C*. При этом, как нетрудно видеть, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов. Общее число *p* всех векторов указанного набора равно $p = m - |C| + |A| \cdot |B| \cdot |C|$.

Для того чтобы проверить, что данный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (4.29), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (4.29) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных линейных неотрицательных комбинаций векторов указанного выше набора (*). С этой целью наряду с системой (4.29) рассмотрим соответствующую ей систему из $m+2$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &\langle e^i, y\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I, \\ &\langle y', y\rangle = 0, \\ &\langle y'', y\rangle = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Вычисляя ранги соответствующих матриц, можно проверить, что любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, e^2, ..., e^m, y', y''$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (4.29) содержится среди ненулевых решений подсистем из $m-1$ уравнений системы линейных уравнений (4.30).

Будем удалять из системы (4.30) по три уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (4.29). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (4.29).

Если в число удаляемых входят последние два уравнения системы (4.30), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), единичные орты $e^1, e^2, ..., e^m$. Однако, как легко видеть, системе неравенств (4.29) удовлетворяют лишь те векторы e^s из этого набора, для которых $s \in I \setminus C$.

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (4.21) не удаляется, а предпоследнее удаляется, то ненулевыми решениями получающихся («сокращенных») подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы, которые не удовлетворяют системе неравенств (4.29).

Аналогично, если остается предпоследнее уравнение из (4.30), а последнее исключается, то среди решений «сокращенных» подсистем также не будет существовать векторов, удовлетворяющих системе неравенств (4.29).

В случае, когда оба последних уравнения остаются в «сокращенной» подсистеме, приходим к всевозможным решениям вида e^{ijk} для всех $i \in A, j \in B, k \in C$.

Поскольку все варианты удаления троек уравнений из системы линейных уравнений (4.30) рассмотрены, никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из m - 2 уравнений системы (4.30), удовлетворяющих системе линейных неравенств (4.29), не существует. Никаких других одномерных решений системы (4.30), удовлетворяющих системе неравенств (4.29), не существует. Это означает, что система векторов (*) образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.29). Следовательно, любое решение системы неравенств (4.29) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Далее для удобства будем означать эту совокупность следующим образом $a^1, a^2, ..., a^p$.

В случае $|A|=1$ (т.е. $|A|=\{i\}$), рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из m+1 уравнений, которая отличается от (4.30) отсутствием уравнения $\langle e^i, y\rangle = 0$. Здесь из указанной системы следует удалять лишь по два уравнения, чтобы получить фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (4.29). То же самое можно сказать и об остальных случаях. Мы на них останавливаться не будем.

IV. Заключительный этап доказательства проводится точно так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы. ■

Используя схему доказательства теоремы 4.11, при помощи аналогичных рассуждений можно установить более общее утверждение, когда ради увеличения значений по критериям группы A ЛПР готово пойти на уменьшение критериев уже не трех, а целого набора групп $B_1, B_2, ..., B_k$. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 4.12. *Пусть задан конечный набор* $k+1$ *попарно непересекающихся подмножеств номеров критериев* $A_1, A_2, ..., A_k, B \subset I$ *и имеется информация о том, что* $y^s \succ 0_m$, $s = 1,...,k$ *, где векторы* y^s (*для* $s = 1,...,k$) *имеют компоненты*

$$y_i^s = w_i^s \text{ для всех } i \in A_s;\ \ y_j^s = -w_j^s \text{ для всех } j \in B;\ \ y_t^s = 0 \text{ для всех } t \in I \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_s \cup B),$$

причем все w_i^s, w_j^s *– фиксированные положительные числа.*

Тогда указанная информация множественно-точечного типа непротиворечива, и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *справедливы включения* (4.10), *в которых* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ *– подмножество возможных векторов, соответствующих множеству* *парето-оптимальных вариантов в многокритериальной задаче с множеством* X *и новым* $(m-|B|+|B|\cdot\prod_{s=1}^{k}|A_s|)$*-мерным векторным критерием* g, *имеющим компоненты*

$$g^s_{ji_1\ldots i_k}=w^s_{i_1}\cdot\ldots\cdot w^s_{i_k}f_j+w^s_j\cdot w^s_{i_2}\cdot\ldots\cdot w^s_{i_k}f_{i_1}+\ldots+w^s_{i_1}\cdot\ldots\cdot w^s_{i_{k-1}}\cdot w^s_j f_{i_k}\ \text{для всех}\ i_s\in A_s,\ j\in B,\ s=1,\ldots,k,$$

$$g_s=f_s\quad \text{для всех}\ s\in I\setminus B.$$

Глава 5. Сужение множества Парето на основе наборов квантов информации

Здесь развиваются исследования предыдущей главы, связанные с сужением множества Парето на основе определенных конечных наборов квантов взаимно зависимой информации об отношении предпочтения ЛПР. Кроме того, рассматривается и решается вопрос учета *произвольного* конечного набора квантов взаимно зависимой информации. Описываются два алгоритма, позволяющие по данному произвольному конечному наборов квантов построить новый векторный критерий, множество Парето относительно которого будет служить оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов (векторов). Глава завершается описанием алгоритма учета произвольного набора квантов информации в случае, когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов.

5.1. Замкнутые наборы квантов информации

5.1.1. Замкнутый набор из двух квантов информации. Сначала введем понятие взаимозависимого замкнутого набора из двух квантов информации об отношении предпочтения ЛПР. Ниже это понятие будет расширено до четырех квантов.

Определение 5.1. Пусть $m \geqq 3$ и заданы две группы критериев A и B, состоящие из r и t критериев соответственно, причем $r+t \leqq m$ и $A \cap B = \varnothing$. Не теряя общности, можно перенумеровать критерии таким образом, чтобы в группу A входили номера критериев $\{1,2,\ldots,r\}$, а в группу B - $\{r+1,\ldots,r+t\}$. Пусть группа критериев A является более значимой, чем группа B с наборами положительных параметров w_i для всех $i \in A$ и w_j для всех $j \in B$. Одновременно будем считать, что группа критериев $B = \{r+1,\ldots,r+t\}$ значимее группы критериев $A = \{1,2,\ldots,r\}$ с наборами положительных параметров γ_j для всех $j \in B$ и γ_i для всех $i \in A$. В этом случае будем говорить, что задан *замкнутый набор из двух квантов информации* (A, B).

Согласно упрощенному определению кванта информации об отношении предпочтения, наличие введенного замкнутого набора информации (A, B) равносильно заданию двух векторов

$$y^1 = (w_1,\ldots,w_r,-w_{r+1},\ldots,-w_{r+t},0,\ldots,0) \text{ и } y^2 = (-\gamma_1,\ldots,-\gamma_r,\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+t},0,\ldots,0),$$

для которых выполнены соотношения $y^1 \succ 0_m$ и $y^2 \succ 0_m$.

Лемма 5.1. *Замкнутый набор двух квантов информации* (*A*, *B*) *непротиворечив тогда и только тогда, когда существуют такие номера критериев* $i \in A$ *и* $j \in B$, *что имеет место неравенство*

$$\frac{w_i}{w_j} > \frac{\gamma_i}{\gamma_j}. \tag{5.1}$$

□ Лемма будет доказана, если мы установим, что замкнутый набор информации (*A*, *B*) противоречив тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$\frac{w_i}{w_j} \leqq \frac{\gamma_i}{\gamma_j} \quad \text{для всех} \quad i \in A \text{ и } j \in B. \tag{5.2}$$

Необходимость. Если замкнутый набор информации противоречив, то в соответствии с алгебраическим критерием непротиворечивости однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_m e^m + \lambda_{m+1} y^1 + \lambda_{m+2} y^2 = 0_m \tag{5.3}$$

имеет хотя бы одно ненулевое неотрицательное решение. Значит, для некоторых неотрицательных одновременно не равных нулю чисел $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+2}^*$ выполнено

$$\lambda_{m+1}^* \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \\ -w_{r+1} \\ \vdots \\ -w_{r+t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{m+2}^* \begin{pmatrix} -\gamma_1 \\ \vdots \\ -\gamma_r \\ \gamma_{r+1} \\ \vdots \\ \gamma_{r+t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1^* \\ \vdots \\ -\lambda_r^* \\ -\lambda_{r+1}^* \\ \vdots \\ -\lambda_{r+t}^* \\ -\lambda_{r+t+1}^* \\ \vdots \\ -\lambda_m^* \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Равенство (5.4) влечет $\lambda_{r+t+1}^* = \lambda_{r+t+2}^* = \ldots = \lambda_m^* = 0$ и $\lambda_{m+1}^* > 0, \lambda_{m+2}^* > 0$. Поэтому из него вытекает следующая система покомпонентных неравенств

$$\lambda_{m+1}^* w_1 - \lambda_{m+2}^* \gamma_1 \leqq 0, \; \ldots, \; \lambda_{m+1}^* w_r - \lambda_{m+2}^* \gamma_r \leqq 0,$$
$$-\lambda_{m+1}^* w_{r+1} + \lambda_{m+2}^* \gamma_{r+1} \leqq 0, \ldots, -\lambda_{m+1}^* w_{r+t} + \lambda_{m+2}^* \gamma_{r+t} \leqq 0,$$

или

$$\frac{\lambda_{m+1}^*}{\lambda_{m+2}^*} \leqq \frac{\gamma_1}{w_1}, \; \ldots, \frac{\lambda_{m+1}^*}{\lambda_{m+2}^*} \leqq \frac{\gamma_r}{w_r}, \; \frac{\lambda_{m+1}^*}{\lambda_{m+2}^*} \geqq \frac{\gamma_{r+1}}{w_{r+1}}, \; \ldots, \; \frac{\lambda_{m+1}^*}{\lambda_{m+2}^*} \geqq \frac{\gamma_{r+t}}{w_{r+t}}. \tag{5.5}$$

Исключая величины $\lambda^*_{m+1}, \lambda^*_{m+2}$, систему (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{\gamma_j}{w_j} \leqq \frac{\gamma_i}{w_i} \qquad \text{для всех } i \in A \text{ и } j \in B.$$

Очевидно, полученная система эквивалентна системе неравенств (5.2).

Достаточность. Пусть выполнены неравенства (5.2). Тогда, как нетрудно понять, найдутся такие положительные числа $\lambda^*_{m+1}, \lambda^*_{m+2}$, при которых верно (5.5). Далее, повторяя в обратном порядке рассуждения, использованные при доказательстве необходимости, придем к (5.4). Следовательно, система линейных алгебраических уравнений (5.3) имеет ненулевое неотрицательное решение $\lambda^*_1, \lambda^*_2, ..., \lambda^*_{m+2}$, а значит, данный замкнутый набор из двух квантов информации противоречив ■

Введем множество номеров критериев

$$P = \{i \in A \,|\, \text{существует такой } j \in B, \text{ что } \quad \frac{w_i}{\gamma_i} > \frac{w_j}{\gamma_j}\},$$

$$L = \{j \in B \,|\, \text{существует такой } i \in A, \text{ что } \quad \frac{w_i}{\gamma_i} > \frac{w_j}{\gamma_j}\},$$

$$P_l = \{p \in P \,|\, \text{для фиксированного } l \in L \text{ выполняется } \quad \frac{w_p}{\gamma_p} > \frac{w_l}{\gamma_l}\},$$

$$L_p = \{l \in L \,|\, \text{для фиксированного } p \in P \text{ выполняется } \quad \frac{w_p}{\gamma_p} > \frac{w_l}{\gamma_l}\},$$

$$\overline{P}_l = \{i \in A \,|\, \text{для фиксированного } l \in L \text{ выполняется } \quad \frac{w_i}{\gamma_i} \leqq \frac{w_l}{\gamma_l}\},$$

$$\overline{L}_p = \{j \in B \,|\, \text{для фиксированного } p \in P \text{ выполняется } \quad \frac{w_p}{\gamma_p} \leqq \frac{w_j}{\gamma_j}\}.$$

Из обозначений следует, что для каждого $l \in L$ имеют место соотношения $P_l \cup \overline{P}_l = A$, $P_l \cap \overline{P}_l = \varnothing$ и для любого $p \in P$ выполнено $L_p \cup \overline{L}_p = B$, $L_p \cap \overline{L}_p = \varnothing$, $|P| \leqq r$ $|L| \leqq t$. Здесь черта над множеством означает его дополнение до множества всех номеров критериев $\{1, 2, ..., m\}$.

Замечание 5.1. Замкнутый набор двух квантов информации (*A,B*) непротиворечив тогда и только тогда, когда $P \neq \varnothing$ и $L \neq \varnothing$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть задан непротиворечивый замкнутый набор двух квантов информации* (*A,B*), *причем* $P \neq \varnothing$ и $L \neq \varnothing$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеют место включения*

$$C(Y) \subset \widehat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{5.6}$$

где $\widehat{P}(Y) = f(P_g(X))$, *а векторный критерий* g *размерности*

$$d = |I| - (|A| + |B|) + \sum_{p\in P} |L_p| + \sum_{l\in L} |P_l| + \sum_{l\in L} |P_l|\,|\overline{P}_l| + \sum_{p\in P} |L_p|\,|\overline{L}_p| \qquad (5.7)$$

имеет компоненты

$$g_{pl} = w_l f_p + w_p f_l \quad \text{для всех } p\in P \text{ и } l\in L, \text{ для которых выполняется } (5.1),$$

$$g_{lp} = \gamma_l f_p + \gamma_p f_l \quad \text{для всех } p\in P \text{ и } l\in L, \text{ для которых выполняется } (5.1),$$

$$g_{pli} = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i) f_p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) f_i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i) f_l$$

$$\text{для всех } l\in L,\ p\in P_l,\ i\in \overline{P}_l, \qquad (5.8)$$

$$g_{plj} = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l) f_p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) f_j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p) f_l, \quad \text{для всех } p\in P,\ l\in L_p,\ j\in \overline{L}_p,$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s\in I\setminus\{A\cup B\}.$$

□ I. Как указано выше, задание замкнутого набора из двух квантов информации (*A,B*) означает, что конусу K конусного отношения предпочтения $\succ$ принадлежат *m*-мерные векторы

$$y^1 = (w_1, w_2, ..., w_r, -w_{r+1}, -w_{r+2}, ..., -w_{r+t}, 0, ..., 0),\quad y^2 = (-\gamma_1, -\gamma_2, ..., -\gamma_r, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, ..., \gamma_{r+t}, 0, ..., 0),$$

т.е. $y^1 \succ 0_m$ и $y^2 \succ 0_m$. Кроме того, благодаря аксиоме Парето, выполнено включение $R_+^m \subset K$.

Введем конус M (без вершины), порожденный совокупностью единичных векторов $e^1, e^2, \dots, e^m$ пространства R^m и парой векторов y^1, y^2. Конус M является острым и выпуклым.

II. Возможны следующие четыре случая (и только они):

1) $|P|=1,\ |L|=1$, 2) $|P|=1,\ |L|>1$, 3) $|P|>1,\ |L|=1$, 4) $|P|>1,\ |L|>1$.

Рассмотрим сначала первый случай, когда множества *P* и *L* содержат по одному элементу, т.е. $P=\{p\}$, $L=\{l\}$. Тогда имеют место следующие неравенства

$$\frac{w_p}{\gamma_p} > \frac{w_l}{\gamma_l},\ \frac{w_i}{\gamma_i} \leqq \frac{w_j}{\gamma_j} \quad \text{для всех } i\in A\setminus\{p\} \text{ и всех } j\in B,$$

$$\frac{w_i}{\gamma_i} \leqq \frac{w_j}{\gamma_j} \quad \text{для всех } j\in B\setminus\{l\} \text{ и всех } i\in A. \qquad (5.9)$$

Установим, что образующими конуса M являются векторы y^1, y^2 и единичные орты e^s, для всех $s\in I\setminus\{P\cup L\}$.

Для доказательства предположим напротив, что, например, вектор e^s при $s \in (A \cup B) \setminus \{P \cup L\}$ представи̇м в виде

$$e^s = \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq s}}^{m} \lambda_k e^k + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2. \tag{5.10}$$

Выпишем p-ю и l-ю компоненты этого векторного равенства, для которых выполняется (5.1)

$$-\lambda_p = \mu_1 w_p - \mu_2 \gamma_p, \qquad -\lambda_l = -\mu_1 w_l + \mu_2 \gamma_l,$$

или

$$\mu_1 w_p - \mu_2 \gamma_p \leqq 0, \qquad -\mu_1 w_l + \mu_2 \gamma_l \leqq 0.$$

Из последних неравенств вытекает неравенство

$$\frac{w_l}{\gamma_l} \geqq \frac{w_p}{\gamma_p},$$

противоречащее (5.1).

Если же вектор e^s таков, что $s \in I \setminus (A \cup B)$, то противоречие сразу следует из (5.10), а именно $1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{m} \lambda_k \cdot 0 + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 0$. Теперь допустим, что вектор y^1 представи̇м в виде

$$y^1 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e^k + \mu y^2.$$

В таком случае для каждого $j \in B$ будет иметь место противоречивое соотношение $0 > -w_j = \lambda_j + \mu \gamma_j \geqq 0$.

Аналогично вектор y^2 невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации указанных выше векторов.

Убедимся, что вектор e^p можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1, y^2 и e^s, $s \in I \setminus \{p, l\}$. Для такого представления необходимо и достаточно, чтобы существовали неотрицательные, одновременно не равные нулю числа μ_1, μ_2, λ_s, для которых верно равенство

$$e^p = \sum_{s \in I \setminus (p,l)} \lambda_s e^s + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2,$$

или в покоординатной форме

$$1=\mu_1 w_p-\mu_2\gamma_p\,,$$

$$0=\lambda_i+\mu_1 w_i-\mu_2\gamma_i \quad \text{для всех} \;\; i\in A\setminus\{p\}\,,$$

$$0=\lambda_j-\mu_1 w_j+\mu_2\gamma_j \quad \text{для всех} \;\; j\in B\setminus\{l\}\,,$$

$$0=-\mu_1 w_l+\mu_2\gamma_l\,,$$

$$0=\lambda_s \quad \text{для всех} \;\; s\in I\setminus(A\cup B)\,.$$

Выписанная система уравнений имеет единственное решение

$$\mu_1=\frac{\gamma_l}{\gamma_l w_p-\gamma_p w_l}\,,\;\; \mu_2=\frac{w_l}{\gamma_l w_p-\gamma_p w_l}\,,\;\; \lambda_i=\frac{\gamma_i w_l-\gamma_l w_i}{\gamma_l w_p-\gamma_p w_l} \quad \text{для всех} \;\; i\in A\setminus\{p\}\,,$$

$$\lambda_j=\frac{\gamma_l w_j-\gamma_j w_l}{\gamma_l w_p-\gamma_p w_l} \quad \text{для всех} \;\; j\in B\setminus\{l\}, \quad \lambda_s=0 \quad \text{для всех} \;\; s\in I\setminus(A\cup B)\,.$$

Данное решение неотрицательно тогда и только тогда, когда

$$\frac{w_p}{\gamma_p}>\frac{w_l}{\gamma_l}\,,\;\; \frac{w_i}{\gamma_i}\leqq\frac{w_l}{\gamma_l} \quad \text{для всех} \;\; i\in A\setminus\{p\}\,, \qquad \frac{w_j}{\gamma_j}\geqq\frac{w_l}{\gamma_l} \quad \text{для всех} \;\; j\in B\setminus\{l\}\,.$$

В силу (5.9), все эти неравенства выполнены. Таким образом, вектор e^p действительно можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1, y^2 и e^s для всех $s\in I\setminus\{p,l\}$.

Аналогично проверяется, что вектор e^l можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1, y^2 и e^s для всех $s\in I\setminus\{p,l\}$.

Рассмотрим второй случай: $|P|=1$ ($P=\{p\}$), $|L|>1$. Справедливы следующие неравенства

$$\frac{w_p}{\gamma_p}>\frac{w_l}{\gamma_l} \quad \text{для всех} \;\; l\in L\,, \qquad \frac{w_i}{\gamma_i}\leqq\frac{w_j}{\gamma_j} \quad \text{для всех} \;\; i\in A\setminus\{p\}\,,\;\; j\in B\,. \tag{5.11}$$

Убедимся, что в этом случае образующими конуса M являются векторы y^1, y^2 вместе с единичными ортами e^s для всех $s\in I\setminus P$.

Аналогично первому случаю можно показать, что каждый из векторов y^1, y^2, e^s для всех $s\in I\setminus\{P\cup L\}$ невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов.

Зафиксируем в множестве L такой номер $\bar{l}$, для которого верно $\frac{w_l}{\gamma_l} \geqq \frac{w_{\bar{l}}}{\gamma_{\bar{l}}}$ для всех $l \in L$. Покажем, что вектор e^p можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1, y^2 и e^s, $s \in I \setminus \{p, \bar{l}\}$, т.е.

$$e^p = \sum_{s \in I \setminus \{p, \bar{l}\}} \lambda_s e^s + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2$$

В этом случае коэффициенты μ_1, μ_2, λ_s (при $s \in I \setminus \{p, \bar{l}\}$) неотрицательны тогда и только тогда, когда

$$\frac{w_p}{\gamma_p} > \frac{w_{\bar{l}}}{\gamma_{\bar{l}}},\ \frac{w_i}{\gamma_i} \leqq \frac{w_{\bar{l}}}{\gamma_{\bar{l}}} \quad \text{для всех } i \in A \setminus \{p\}, \quad \frac{w_j}{\gamma_j} \geqq \frac{w_{\bar{l}}}{\gamma_{\bar{l}}} \quad \text{для всех } j \in B \setminus \{\bar{l}\}.$$

В силу неравенств (5.11) и выбора номера $\bar{l}$, эти коэффициенты будут неотрицательными.

В отличие от первого случая ни один из векторов e^l (при $l \in L$) невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1, y^2 и e^s для всех $s \in I \setminus \{p, l\}$. Пусть это не так. Не уменьшая общности, предположим, что для $\bar{l} \in L$ имеет место представление

$$e^{\bar{l}} = \sum_{s \in I \setminus \{p, \bar{l}\}} \lambda_s e^s + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2 .$$

Данная система имеет решение

$$\mu_1 = \frac{\gamma_p}{\gamma_{\bar{l}} w_p - \gamma_p w_{\bar{l}}},\ \mu_2 = \frac{w_p}{\gamma_{\bar{l}} w_p - \gamma_p w_{\bar{l}}},\ \lambda_i = \frac{\gamma_i w_p - \gamma_p w_i}{\gamma_{\bar{l}} w_p - \gamma_p w_{\bar{l}}} \quad \text{для всех } i \in A \setminus \{p\},$$

$$\lambda_j = \frac{\gamma_p w_j - \gamma_j w_p}{\gamma_{\bar{l}} w_p - \gamma_p w_{\bar{l}}} \quad \text{для всех } j \in B \setminus \{\bar{l}\},\ \lambda_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B).$$

Оно неотрицательно тогда и только тогда, когда

$$\frac{w_p}{\gamma_p} > \frac{w_{\bar{l}}}{\gamma_{\bar{l}}},\ \frac{w_p}{\gamma_p} \geqq \frac{w_i}{\gamma_i} \quad \text{для всех } i \in A \setminus \{p\}, \quad \frac{w_j}{\gamma_j} \geqq \frac{w_p}{\gamma_p} \quad \text{для всех } j \in B \setminus \{\bar{l}\}.$$

Но в таком случае неравенства $\frac{w_j}{\gamma_j} \geqq \frac{w_p}{\gamma_p}$ не выполняются при $j \in L \setminus \{\bar{l}\}$. Получено противоречие. Таким образом, во втором случае векторы $e^2, \ldots, e^m, y^1, y^2$ являются образующими конуса M.

Совершено аналогично доказывается, что в третьем случае (при $|P| = 1,\ |L| > 1$) образующими конуса M являются векторы y^1, y^2 и единичные орты e^s для всех $s \in I \setminus L$.

Поскольку четвертый случай ($|P|>1,\ |L|>1$) является обобщением второго и третьего, то здесь каждый из векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m, y^1, y^2$ является образующим для конуса M.

III. Введем конус C (без вершины), двойственный для конуса M, т.е.

$$C = \{x \in R^m \mid \langle x, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } y \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа образующими многогранного конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса M, и обратно, образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса C.

Докажем для первого случая, что конус C совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных решений следующей однородной системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle e^k, y \rangle &\geqq 0 \quad \text{для всех } k = I \setminus \{p, l\}, \\ \langle y^1, y \rangle &\geqq 0, \\ \langle y^2, y \rangle &\geqq 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

С этой целью найдем (с точностью до положительного множителя) фундаментальную совокупность решений системы неравенств (5.12).

Очевидно, единичные векторы e^s для всех $s \in I \setminus \{A \cup B\}$ являются решениями системы (5.12). Количество таких векторов равно $|I| - (|A| + |B|)$. Кроме того, решением будет вектор $p_{pl} = w_l e^p + w_p e^l$. Непосредственной подстановкой легко установить, что вектор p_{pl} удовлетворяет первым $m-1$ неравенствам системы (5.12). Благодаря непротиворечивости замкнутого набора из двух квантов информации (*A*,*B*), этот вектор удовлетворяет также последнему неравенству системы (5.12).

Действительно, с одной стороны после подстановки получаем

$$\langle y^2, p_{pl} \rangle = -\gamma_p w_l + \gamma_l w_p,$$

а с другой стороны неравенство (5.1) влечет требуемое: $-\gamma_p w_l + \gamma_l w_p \geqq 0$.

Решением системы неравенств (5.12) является и вектор вида $h_{lp} = \gamma_l e^p + \gamma_p e^l$; проверка этого факта аналогична случаю с вектором p_{pl}.

И, наконец, решениями системы (5.12) также будут векторы

$$q_i = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i) e^l \quad \text{для всех } i \in \overline{P}_l,$$
$$h_j = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p) e^l \quad \text{для всех } j \in \overline{L}_p.$$

В данном случае $\overline{P}_l = A \setminus \{p\}$, $\overline{L}_p = B \setminus \{l\}$. Прямой подстановкой можно убедиться, что q_i и h_j удовлетворяют двум последним неравенствам системы (5.12). Очевидно, в силу (5.9), набор векторов q_i, h_j является решением первых $m-2$ неравенств системы (5.12).

Тем самым, найдены следующие решения системы (5.12):

$$
\begin{gathered}
e^s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{A \cup B\}, \\
w_l e^p + w_p e^l, \qquad \gamma_l e^p + \gamma_p e^l, \\
q_i = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i) e^l \quad \text{для всех} \quad i \in \overline{P}_l, \\
h_j = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p) e^l \quad \text{для всех} \quad j \in \overline{L}_p.
\end{gathered} \tag{5.13}
$$

Общее количество найденных векторов составляет

$$
|I| - (|A| + |B|) + 2 + |\overline{P}_l| + |\overline{L}_p|. \tag{5.14}
$$

Для того чтобы убедиться, что система (5.12) не имеет никаких других решений кроме тех, которые могут быть представлены в виде всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов (5.13), рассмотрим соответствующую систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\langle e^k, y \rangle = 0 \ \text{для всех} \ k \in I \setminus \{p, l\}, \\
\langle \overline{w}, y \rangle = 0, \\
\langle \overline{\gamma}, y \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{5.15}
$$

Любой набор, состоящий из $m-1$ векторов совокупности y^1, y^2 и e^k при всех $k \in I \setminus \{p, l\}$, является линейно независимым. Поэтому для отыскания общего решения системы неравенств (5.12) достаточно просмотреть ненулевые решения всех возможных подсистем системы (5.15), состоящих из $m-1$ уравнений. Затем из найденных решений следует отобрать те, которые удовлетворяют (5.12).

Удалим из (5.15) последнее уравнение. Тогда решением полученной «укороченной» системы будет вектор $q = w_l e^p + w_p e^l$. Если же удалить ($m-1$)-е уравнение, то получим решение $h = \gamma_l e^p + \gamma_p e^l$.

Далее будем удалять по одному уравнению из первых $(m-2)$ уравнений системы (5.15). В результате придем к набору решений e^s для всех $s \in I \setminus \{A \cup B\}$, $q_i = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i) e^l$ для всех $i \in \overline{P}_l$, $h_j = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l) e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) e^j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p) e^l$ для всех $j \in \overline{L}_p$.

Рассмотрим второй случай ($|P|=1$, $|L|>1$). Здесь вместо системы (5.12) следует иметь дело с системой

$$\begin{gathered}\langle e^k, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } k \in I \setminus \{p\},\\ \langle \overline{w}, y\rangle \geqq 0 \\ \langle \bar{\gamma}, y\rangle \geqq 0.\end{gathered} \tag{5.16}$$

Аналогично рассмотренному выше, можно показать, что фундаментальной совокупностью решений системы (5.16) являются векторы

$$\begin{gathered}e^s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\},\\ w_l e^p + w_p e^l \text{ для всех } l \in L_p,\\ \gamma_l e^p + \gamma_p e^l \text{ для всех } l \in L_p,\\ q_i = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i)e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l)e^i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i)e^l \text{ для всех } l \in L_p,\ i \in \overline{P}_l,\\ h_j = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l)e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l)e^j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p)e^l \ l \in L \text{ для всех } l \in L_p,\ j \in \overline{L}_p.\end{gathered} \tag{5.17}$$

Общее количество этих векторов равно

$$|I| - (|A| + |B|) + 2|L_p| + |L_p||\overline{P}_l| + |L_p||\overline{L}_p|. \tag{5.18}$$

В третьем случае фундаментальной совокупностью решений системы

$$\begin{gathered}\langle e^k, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } k = I \setminus \{l\},\\ \langle \overline{w}, y\rangle \geqq 0,\\ \langle \bar{\gamma}, y\rangle \geqq 0.\end{gathered}$$

является набор векторов

$$\begin{gathered}e^s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\},\\ w_l e^p + w_p e^l \text{ для всех } p \in P_l,\\ \gamma_l e^p + \gamma_p e^l \text{ для всех } p \in P_l,\\ q_i = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i)e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l)e^i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i)e^l \text{ для всех } p \in P_l,\ i \in \overline{P}_l,\\ h_j = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l)e^p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l)e^j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p)e^l \text{ для всех } p \in P_l,\ j \in \overline{L}_p.\end{gathered} \tag{5.19}$$

Их общее количество есть

$$|I|-(|A|+|B|)+2|P_l|+|P_l||\overline{P}_l|+|P_l||\overline{L}_p|. \tag{5.20}$$

В четвертом случае фундаментальной совокупностью решений системы

$$\langle e^k, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } k\in I,$$
$$\langle \overline{w}, y\rangle \geqq 0,$$
$$\langle \bar{\gamma}, y\rangle \geqq 0.$$

являются векторы

$$e^s \quad \text{для всех } s\in I\setminus\{A\cup B\},$$
$$w_l e^p + w_p e^l \text{ для всех } p\in P \text{ и всех } l\in L_p,$$
$$\gamma_l e^p + \gamma_p e^l \text{ для всех } l\in L \text{ и всех } p\in P_l, \tag{5.21}$$
$$q_i=(\gamma_i w_l-\gamma_l w_i)e^p+(\gamma_l w_p-\gamma_p w_l)e^i+(\gamma_i w_p-\gamma_p w_i)e^l \quad \text{для всех } l\in L,\ p\in P_l,\ i\in\overline{P}_l$$
$$h_j=(\gamma_l w_j-\gamma_j w_l)e^p+(\gamma_l w_p-\gamma_p w_l)e^j+(\gamma_p w_j-\gamma_j w_p)e^l \quad \text{для всех, } p\in P,\ l\in L_p,\ j\in\overline{L}_p.$$

Их общее количество равно

$$|I|-(|A|+|B|)+\sum_{p\in P}|L_p|+\sum_{l\in L}|P_l|+\sum_{l\in L}|P_l||\overline{P}_l|+\sum_{p\in P}|L_p||\overline{L}_p|.$$

Легко убедиться, что фундаментальная совокупность решений (5.21) совпадает с (5.13), (5.17), (5.19) соответственно в первом, во втором и третьем случаях, а формулы подсчета количества векторов (5.14), (5.18), (5.20) являются частными случаями формулы (5.7). В частности, для первого случая, когда $P=\{p\}$, $L=\{l\}$, выполняются равенства $|L_p|=1$, $|P_l|=1$, $|\overline{P}_l|=|A|-1$, $|\overline{L}_p|=|B|-1$. С учетом этих равенств формула (5.14) совпадает с (5.7).

Следовательно, в дальнейшем можно рассматривать только систему (5.21).

V. Для удобства обозначим фундаментальную совокупность векторов (5.21) посредством $a^1,a^2,...,a^q$. Тогда любой вектор $x\in C$ можно представить в виде

$$x=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a^i,$$

где неотрицательные числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_q$, одновременно не равны нулю.

Установим, что конус M представляет собой множество решений следующей системы неравенств (в которой хотя бы одно неравенство – строгое)

$$M=\{y\in R^m \mid \langle a^i, y\rangle \geq 0,\ i=1,...,q\}. \tag{5.22}$$

В самом деле, пусть y − произвольный вектор из M. Тогда для любого $x \in C$ выполняется неравенство $\langle x, y \rangle \geqq 0$. Но $a^i \in C$, $i = 1,...,q$, поэтому

$$\langle a^i, y \rangle \geqq 0, \; i = 1,...,q. \tag{5.23}$$

Если предположить, что все неравенства (5.23) обращаются в равенства, то полученной системе равенств будет удовлетворять и противоположный вектор $-y$. Тем самым, нарушается острота конуса M. Поэтому $M \subset \{y \in R^m \mid \langle a^i, y \rangle \geq 0, \; i = 1,...,q\}$.

Убедимся теперь в справедливости обратного включения, т.е. если система неравенств (5.23) (где хотя бы одно неравенство – строгое) выполнена для произвольного ненулевого вектора $y \in R^m$, то $y \in M$. С этой целью выберем произвольный вектор $x \in C$. Как указано выше, его всегда можно представить в виде $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a^i$, где неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q$ одновременно не равны нулю. Умножая каждое из уравнений (5.23) на соответствующее λ_i, а затем почленно складывая их, получим неравенство $\left\langle \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a^i, y \right\rangle \geqq 0$, или $\langle x, y \rangle \geqq 0$ для любого $x \in C$. Это означает, что вектор *y* принадлежит конусу, двойственному для конуса *C*. Согласно теории двойственности выпуклого анализа, $y \in M$.

Таким образом, конус M действительно можно записать в виде (5.22).

V. Из включений $R_+^m \subset M \subset K$ очевидным образом вытекают включения

$$\mathrm{Ndom}(Y) \subset \widehat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{5.24}$$

где

$$\widehat{P}(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}.$$

Рассмотрим два произвольных варианта $x_1, x_2 \in X$ и соответствующие им векторы $y^1 = f(x_1)$, $y^2 = f(x_2)$, считая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. С учетом (5.22) включение $y^1 - y^2 \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\langle a^i, f(x_1) - f(x_2) \rangle \geq 0, \; i = 1,...,q,$$

или

$$\langle a^i, f(x_1) \rangle \geq \langle a^i, f(x_2) \rangle, \; i = 1,...,q,$$

где хотя бы для одного i неравенство строгое. Ранее через a^i были обозначены векторы (5.21). Поэтому

$$\left\langle w_j e^i + w_i e^j,\, f(x_1)\right\rangle \geqq \left\langle w_j e^i + w_i e^j,\, f(x_2)\right\rangle \quad \text{для всех } p \in P \text{ и всех } l \in L_p,$$

$$\left\langle \gamma_j e^i + \gamma_i e^j,\, f(x_1)\right\rangle \geqq \left\langle \gamma_j e^i + \gamma_i e^j,\, f(x_2)\right\rangle \quad \text{для всех } p \in P \text{ и всех } l \in L_p,$$

$$\left\langle (w_l\gamma_i - w_i\gamma_l)e^p + (w_p\gamma_l - w_l\gamma_p)e^i + (w_p\gamma_i - \gamma_p w_i)e^l,\, f(x_1)\right\rangle \geqq$$
$$\geqq \left\langle (w_l\gamma_i - w_i\gamma_l)e^p + (w_p\gamma_l - w_l\gamma_p)e^i + (w_p\gamma_i - \gamma_p w_i)e^l,\, f(x_2)\right\rangle \quad \text{для всех } l \in L,\ p \in P_l,\, i \in \overline{P_l}$$

$$\left\langle (w_j\gamma_l - w_l\gamma_j)e^p + (w_p\gamma_l - w_l\gamma_p)e^j + (w_p\gamma_j - \gamma_p w_j)e^l,\, f(x_1)\right\rangle \geqq$$
$$\geqq \left\langle (w_j\gamma_l - w_l\gamma_j)e^p + (w_p\gamma_l - w_l\gamma_p)e^j + (w_p\gamma_j - \gamma_p w_j)e^l,\, f(x_2)\right\rangle$$
$$\text{для всех } p \in P,\ l \in L_p,\ j \in \overline{L}_p$$

$$\left\langle e^s,\, f(x_1)\right\rangle \geqq \left\langle e^s,\, f(x_2)\right\rangle \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\},$$

или $g(x_1) \geq g(x_2)$, где векторная функция g (5.8) имеет размерность (5.7). Следовательно, $\widehat{P}(Y) = f(\widehat{P}_g(X))$.

Наконец, из включений (5.24), с учетом $\mathrm{C}(Y) \subset \mathrm{Ndom}(Y)$, следует (5.6) ■

Возможны следующие две крайние возможности выполнения условия непротиворечивости из леммы 5.1. В первом случае неравенство $\dfrac{w_i}{\gamma_i} > \dfrac{w_j}{\gamma_j}$ выполняется для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Тогда $P = A$, $L = B$, $\overline{P_l} = \varnothing$ и $P_l = A$ для каждого $l \in L$, $\overline{L}_p = \varnothing$, а также $L_p = B$ для каждого $p \in P$. В этом случае теорема 5.1 примет следующий вид.

Теорема 5.2. *Пусть имеется непротиворечивый замкнутый набор двух квантов информации* (*A,B*) *, причем неравенства* (5.1) *выполняются для всех номеров* $i \in A$, $j \in B$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеют место включения* (5.6), *в которых* $\widehat{P}(Y) = f(P_g(X))$, *а векторный критерий* g *размерности* $d = |I| - (|A| + |B|) + 2|A||B|$ *имеет компоненты*

$$g_{pl} = w_l f_p + w_p f_l \quad \text{для всех } p \in A \text{ и всех } l \in B,$$
$$g_{lp} = \gamma_l f_p + \gamma_p f_l \quad \text{для всех } p \in A \text{ и всех } l \in B,$$
$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\}.$$

Во втором крайнем случае неравенство $\dfrac{w_i}{\gamma_i} > \dfrac{w_j}{\gamma_j}$ имеет место для единственной пары номеров $i \in A,\, j \in B$. Тогда $P = \{p\}$, $L = \{l\}$, $P_l = P = \{p\}$, $\overline{P_l} = A \setminus \{p\}$, $L_p = L = \{l\}$, $\overline{L}_p = B \setminus \{l\}$ и в этом случае получаем следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть имеется замкнутый набор двух квантов информации* (*A,B*), *причем* $P = \{p\}$, $L = \{l\}$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы* *включения* (5.6), *в которых* $\widehat{P}(Y) = f(P_g(X))$, *а новый векторный критерий* g *размерности* $d = |I| - (|A| + |B|) + 2 + |\overline{P}_l| + |\overline{L}_p| = m$ *имеет следующие компоненты*

$$g_{pl} = w_l f_p + w_p f_l,$$

$$g_{lp} = \gamma_l f_p + \gamma_p f_l,$$

$$g_{pli} = (\gamma_i w_l - \gamma_l w_i) f_p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) f_i + (\gamma_i w_p - \gamma_p w_i) f_l, \quad \text{для всех } i \in \overline{P}_l,$$

$$g_{plj} = (\gamma_l w_j - \gamma_j w_l) f_p + (\gamma_l w_p - \gamma_p w_l) f_j + (\gamma_p w_j - \gamma_j w_p) f_l, \quad \text{для всех } j \in \overline{L}_p,$$

$$g_s = f_s \quad \textit{для всех} \quad s \in I \setminus \{A \cup B\}$$

Пример 5.1. Пусть $m = 10$, причем $|A| = 5$, $|B| = 5$. Если существует единственная пара номеров $p \in A$, $l \in B$, при которых выполняется неравенство (5.1), то количество компонент нового векторного критерия g равно 10. Теперь предположим, что неравенство (5.1) имеет место только для номеров $p_1, p_2 \in A$, $l \in B$. Тогда $|P_l| = 2$, $|L_{p_1}| = |L_{p_2}| = 1$, $|L_{p_2}| = 1$, $|\overline{P}_l| = |A| - |P_l| = 3$, $|\overline{L}_{p_1}| = |\overline{L}_{p_2}| = |B| - |L_{p_1}| = 4$ и, согласно формуле (5.7), $d = 18$. Если же неравенства (5.1) выполняются для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, то новый векторный критерий g будет состоять уже из 50 компонент.

5.1.2. Замкнутый набор из четырех квантов информации. Теперь предположим, что об отношении предпочтения ЛПР имеется информация в виде *замкнутого набора из четырех квантов информации с тремя группами критериев* (*A, B, C*):

1) группа критериев *A* более значима, чем группа критериев *B* с положительными параметрами w_i' для всех $i \in A$, w_j' для всех $j \in B$, а группа критериев *B*, в свою очередь, более значима, чем группа критериев *A* с положительными параметрами γ_j' для всех $j \in B$ и γ_i' для всех $i \in A$; здесь группы *A* и *B* те же самые, что и в случае двух квантов взаимно зависимой замкнутой информации (*A*, *B*);

2) группа *A* значимее группы критериев *C*=$\{r+t+1,...,r+t+s\}$ с положительными параметрами w_i'' для всех $i \in A$ и w_k'' для всех $k \in C$, а группа *C* значимее группы критериев *A* с положительными параметрами γ_k'' для всех $k \in C$ и γ_i'' для всех $i \in A$.

Наличие указанной информации означает, что конусу K конусного отношения предпочтения $\succ$ принадлежат m-мерные векторы вида

$$\begin{aligned} y^1 &= (w_1', w_2', ..., w_r', -w_{r+1}', -w_{r+2}', ..., -w_{r+t}', 0, ...0), \\ y^2 &= (-\gamma_1', -\gamma_2', ..., -\gamma_r', \gamma_{r+1}', \gamma_{r+2}', ..., \gamma_{r+t}', 0, ..., 0), \\ y^3 &= (w_1'', w_2'', ..., w_r'', 0, ..., 0, -w_{r+t+1}'', -w_{r+t+2}'', ..., -w_{r+t+s}'', 0, ...0), \\ y^4 &= (-\gamma_1'', -\gamma_2'', ..., -\gamma_r'', 0, ..., 0, \gamma_{r+t+1}'', \gamma_{r+t+2}'', ..., \gamma_{r+t+s}'', 0, ...0), \end{aligned} \tag{5.25}$$

т.е. $y^1 \succ 0_m$, $y^2 \succ 0_m$, $y^3 \succ 0_m$, $y^4 \succ 0_m$.

Следующая лемма указывает условия, при которых имеющийся набор из четырех квантов взаимно зависимой информации (*A, B, C*) является непротиворечивым.

Лемма 5.2. *Замкнутый набор из четырех квантов информации с тремя группами критериев* (*A, B, C*) *непротиворечив тогда и только тогда, когда существуют номера* $i \in A$ *и* $j \in B$, *при которых выполняется неравенство*

$$\frac{w_i'}{\gamma_i'} > \frac{w_j'}{\gamma_j'}, \tag{5.26}$$

а также существуют номера $i \in A$ *и* $k \in C$, *такие что*

$$\frac{w_i''}{\gamma_i''} > \frac{w_k''}{\gamma_k''}. \tag{5.27}$$

□ Утверждение будет доказано, если мы установим, что данный набор информации противоречив тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух утверждений:

$$\begin{gathered}\frac{w_i'}{\gamma_i'} \leqq \frac{w_j'}{\gamma_j'} \quad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B, \\ \frac{w_i''}{\gamma_i''} \leqq \frac{w_k''}{\gamma_k''} \quad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } k \in C.\end{gathered} \tag{5.28}$$

Необходимость. Если имеющийся набор квантов информации противоречив, то однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \ldots + \lambda_m e^m + \lambda_{m+1} y^1 + \lambda_{m+2} y^2 + \lambda_{m+3} y^3 + \lambda_{m+4} y^4 = 0_m \tag{5.29}$$

имеет хотя бы одно ненулевое неотрицательное решение $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+4}^*$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\lambda_{m+1}^* w_i' - \lambda_{m+2}^* \gamma_i' + \lambda_{m+3}^* w_i'' - \lambda_{m+4}^* \gamma_i'' = -\lambda_i^* \quad \text{для всех } i \in A \\ -\lambda_{m+1}^* w_j' + \lambda_{m+2}^* \gamma_j' = -\lambda_j^* \quad \text{для всех } j \in B \\ -\lambda_{m+3}^* w_k'' + \lambda_{m+4}^* \gamma_k'' = -\lambda_k^* \quad \text{для всех } k \in C \\ \lambda_s^* = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}.\end{gathered} \tag{5.30}$$

Поскольку в правой части равенств (5.30) участвуют неположительные числа, имеем

$$
\begin{aligned}
\lambda^*_{m+1} w'_i - \lambda^*_{m+2}\gamma'_i + \lambda^*_{m+3} w''_i - \lambda^*_{m+4}\gamma''_i \leqq 0 \quad &\text{для всех } i \in A \\
-\lambda^*_{m+1} w'_j + \lambda^*_{m+2}\gamma'_j \leqq 0 \quad &\text{для всех } j \in B \\
-\mu^*_3 w''_k + \mu^*_4 \gamma''_k \leqq 0 \quad &\text{для всех } k \in C.
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

Пусть $\lambda^*_{m+1} = 0$ (соответственно $\lambda^*_{m+2} = 0$). Тогда из второго неравенства последней системы следует, что $\lambda^*_{m+2} = 0$ (соответственно $\lambda^*_{m+1} = 0$). А из первого и третьего неравенств (5.31) вытекает справедливость второй группы неравенств (5.28). Если же $\lambda^*_{m+3} = 0$ или $\lambda^*_{m+4} = 0$, то выполняется первая группа неравенств (5.28).

Пусть $\lambda^*_{m+1} = 0$, $\lambda^*_{m+2} = 0$, $\lambda^*_{m+3} = 0$, $\lambda^*_{m+4} = 0$. В этом случае из системы (5.30) следует, что все параметры $\lambda^*_1, \lambda^*_2, \ldots, \lambda^*_m$ равны нулю. Получаем противоречие с предположением, что система (5.29) имеет ненулевое решение.

Остается рассмотреть случай $\lambda^*_{m+1}, \lambda^*_{m+2}, \lambda^*_{m+3}, \lambda^*_{m+4} > 0$. Имеем

$$\frac{w''_k}{\gamma''_k} \geqq \frac{\lambda^*_{m+4}}{\lambda^*_{m+3}} \quad \text{для всех } k \in C,$$

$$\frac{w'_j}{\gamma'_j} \geqq \frac{\lambda^*_{m+2}}{\lambda^*_{m+1}} \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$\frac{\lambda^*_{m+2}}{\lambda^*_{m+1}} \geqq \frac{w'_i}{\gamma'_i} + \frac{(\lambda^*_{m+3} w''_i - \lambda^*_{m+4}\gamma''_i)}{\lambda^*_{m+1}\gamma'_i} \quad \text{для всех } i \in A.$$

Предположим, что $\frac{w'_l}{\gamma'_l} = \max_{i \in A} \frac{w'_i}{\gamma'_i}$. Если $\lambda^*_{m+3} w''_l - \lambda^*_{m+4}\gamma''_l \geqq 0$, то $\frac{\lambda^*_{m+2}}{\lambda^*_{m+1}} \geqq \frac{w'_l}{\gamma'_l} \geqq \frac{w'_i}{\gamma'_i}$ для всех $i \in A$ и выполняется первая группа неравенств (5.28). В противном случае выполняется вторая группа неравенств (5.28).

Достаточность. Пусть выполнены соотношения (5.28). Тогда найдутся такие положительные числа $\lambda^*_{m+1}, \lambda^*_{m+2}, \lambda^*_{m+3}, \lambda^*_{m+4}$, при которых верно

$$\frac{w'_j}{\gamma'_j} \geqq \frac{\lambda^*_{m+2}}{\lambda^*_{m+1}} \geqq \frac{w'_i}{\gamma'_i} \quad \text{для всех } j \in B \text{ и всех } i \in A,$$

$$\frac{w''_k}{\gamma''_k} \geqq \frac{\lambda^*_{m+4}}{\lambda^*_{m+3}} \geqq \frac{w''_i}{\gamma''_i} \quad \text{для всех } k \in C \text{ и всех } i \in A.$$

Из последних неравенств нетрудно вывести справедливость неравенства (5.31) и, как следствие, (5.30). Значит, система линейных алгебраических уравнений (5.29) имеет *N*- решение $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+4}^*$. Это означает, что имеющийся набор квантов информации противоречив ■

Теорема 5.4. *Пусть имеется замкнутый набор из четырех квантов информации с тремя группами критериев* (*A, B, C*), *причем неравенства* (5.26) и (5.27) *выполняются для всех номеров* $i \in A$, $j \in B$ *и* $k \in C$.

Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ *имеют место включения* (5.6), *в которых* $\widehat{P}(Y) = f(P_g(X))$, *а векторный критерий* g *размерности* $d = m - (|A| + |B| + |C|) + 4|A||B||C|$ *имеет компоненты*

$$
\begin{aligned}
&g_{ijk}(x) = w'_j w''_k f_i(x) + w'_i w''_k f_j(x) + w'_j w''_i f_k(x) \qquad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,\\
&g_{ikj}(x) = \gamma'_j \gamma''_k f_i(x) + \gamma'_i \gamma''_k f_j(x) + \gamma'_j \gamma''_i f_k(x) \qquad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,\\
&g_{jki}(x) = w'_j \gamma''_k f_i(x) + w'_i \gamma''_k f_j(x) + w'_j \gamma''_i f_k(x) \qquad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,\\
&g_{kji}(x) = \gamma'_j w''_k f_i(x) + \gamma'_i w''_k f_j(x) + \gamma'_j w''_i f_k(x) \qquad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,\\
&g_s(x) = f_s(x) \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}.
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

□ I. По условию выполнено $y^1 \succ 0_m$, $y^2 \succ 0_m$, $y^3 \succ 0_m$, $y^4 \succ 0_m$, где векторы y^1, y^2, y^3, y^4 вида (5.25).

Пусть K - острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Имеем $y^1, y^2, y^3, y^4 \in K$. Кроме того, выполнено включение $R_+^m \subset K$.

Введем конус *M* (без начала координат), порожденный совокупностью единичных векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m$ пространства R^m и векторами y^1, y^2, y^3, y^4. Конус M острый и выпуклый.

Возможны следующие случаи (и только они).

1) каждая из групп A, B, C содержит более одного критерия,

2) только группа A состоит из одного критерия f_1,

3) только группа B состоит из одного критерия f_{r+1} (или только группа C состоит из одного критерия f_{r+t+1}),

4) каждая из групп A, B, C состоит в точности из одного критерия,

5) группа A и группа B состоят из одного критерия,

6) группы B и C содержат по одному критерию.

Рассмотрим сначала первый случай, когда все четыре вектора y^1, y^2, y^3, y^4 имеют более одной положительной компоненты. Здесь образующими конуса M являются векторы набора $e^1, e^2, \ldots, e^m, y^1, y^2, y^3, y^4$, поскольку ни один из них невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации остальных векторов этого набора. В самом деле, если, например, вектор e^s, при $s \in (A \cup B \cup C)$, представляется в виде линейной неотрицательной комбинации

$$e^s = \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{m} \lambda_k e^k + \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2 + \mu_3 y^3 + \mu_4 y^4, \tag{5.33}$$

то найдутся номера $i \in A$, $i \neq s$, $j \in B$, $j \neq s$ и $k \in C$, $k \neq s$, для которых

$$\begin{aligned} \mu_1 w_i' - \mu_2 \gamma_i' + \mu_3 w_i'' - \mu_4 \gamma_i'' &= -\lambda_i, \\ -\mu_1 w_j' + \mu_2 \gamma_j' &= -\lambda_j, \\ -\mu_3 w_k'' + \mu_4 \gamma_k'' &= -\lambda_k. \end{aligned}$$

Отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned} \mu_1 w_i' - \mu_2 \gamma_i' + \mu_3 w_i'' - \mu_4 \gamma_i'' &\leqq 0, \\ -\mu_1 w_j' + \mu_2 \gamma_j' &\leqq 0, \\ -\mu_3 w_k'' + \mu_4 \gamma_k'' &\leqq 0, \end{aligned}$$

которые ведут к неравенствам

$$\frac{w_j'}{\gamma_j'} \geqq \frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{w_i'}{\gamma_i'}, \text{ или } \frac{w_k''}{\gamma_k''} \geqq \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{w_i''}{\gamma_i''},$$

противоречащим условию теоремы.

Если же вектор e^s таков, что $s \in I \setminus (A \cup B \cup C)$, то равенство (5.33) сразу влечет противоречие

$$1 = \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{m} \lambda_k \cdot 0 + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 0 + \mu_3 \cdot 0 + \mu_4 \cdot 0.$$

Теперь предположим, что вектор y^1 представляется в виде

$$y^1 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e^k + \mu_2 \bar{\gamma}' + \mu_3 \overline{w}'' + \mu_4 \bar{\gamma}''.$$

Тогда для каждого $j \in B$ имеет место противоречивое равенство $-w_j' = \lambda_j + \mu_2 \gamma_j'$, связывающее отрицательное и неотрицательное числа.

Аналогично каждый из векторов y^2, y^3, y^4 невозможно представить в виде линейной неотрицательной комбинации указанных выше векторов. Итак, каждый из векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m$, y^1, y^2, y^3, y^4 входит в число образующих конуса *M*.

II. Введем конус C, двойственный для конуса M, т.е.

$$C = \{c \in R^m \mid \langle c, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } y \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

Докажем, что конус C совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных решений однородной системы линейных неравенств

$$\left\langle e^k, y \right\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } k = 1,2,\ldots,m,$$
$$\left\langle \overline{w}', y \right\rangle \geqq 0,\ \left\langle \overline{\gamma}', y \right\rangle \geqq 0,\ \left\langle \overline{w}'', y \right\rangle \geqq 0,\ \left\langle \overline{\gamma}'', y \right\rangle \geqq 0. \tag{5.34}$$

С этой целью найдем (с точностью до положительного множителя) фундаментальную совокупность решений системы неравенств (5.34).

Очевидно, решениями системы (5.34) являются единичные векторы e^s для всех $s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}$. Количество таких векторов равно $m - (|A| + |B| + |C|)$. Кроме того, решениями будут векторы $p_{ijk} = w'_j w''_k e^i + w'_i w''_k e^j + w'_j w''_i e^k$ для всех $i \in A$, всех $j \in B$ и всех $k \in C$. Количество векторов p_{ijk} равно произведению $|A||B||C|$. В результате непосредственной подстановки и в силу (5.26), (5.27) легко убедиться, что векторы p_{ijk} удовлетворяют системе неравенств (5.34).

Другими решениями системы (5.34) являются векторы

$$q_{ikj} = \gamma'_j \gamma''_k e^i + \gamma'_i \gamma''_k e^j + \gamma'_j \gamma''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,$$
$$h_{jki} = w'_j \gamma''_k e^i + w'_i \gamma''_k e^j + w'_j \gamma''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,$$
$$t_{kji} = \gamma'_j w''_k e^i + \gamma'_i w''_k e^j + \gamma'_j w''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C,$$

Проверка здесь аналогична случаю с векторами p_{ijk}. Количество каждого вида векторов q_{ijk}, h_{jki}, t_{kji} также равно $|A||B||C|$.

В итоге получены следующие решения системы (5.34):

$$\begin{gathered} e^s \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B \cup C), \\ p_{ijk} = w'_j w''_k e^i + w'_i w''_k e^j + w'_j w''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C, \\ q_{ikj} = \gamma'_j \gamma''_k e^i + \gamma'_i \gamma''_k e^j + \gamma'_j \gamma''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C, \\ h_{jki} = w'_j \gamma''_k e^i + w'_i \gamma''_k e^j + w'_j \gamma''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C, \\ t_{kji} = \gamma'_j w''_k e^i + \gamma'_i w''_k e^j + \gamma'_j w''_i e^k \quad \text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ k \in C \end{gathered} \tag{5.35}$$

Общее количество этих решений составляет $d = m - (|A| + |B| + |C|) + 4|A||B||C|$.

Теперь покажем, что система (5.34) не имеет никаких других решений (с точностью до положительного множителя), кроме тех, которые могут быть представлены в виде всевозможных линейных неотрицательных комбинаций векторов вида (5.35). Для этого рассмотрим систему равенств, соответствующую системе неравенств (5.34), т.е.

$$\langle e^k, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } k = 1,2,...,m,$$
$$\langle \overline{w}', y\rangle = 0,$$
$$\langle \overline{\gamma}', y\rangle = 0, \tag{5.36}$$
$$\langle \overline{w}'', y\rangle = 0,$$
$$\langle \overline{\gamma}'', y\rangle = 0.$$

Любой набор, состоящий из $m-1$ векторов совокупности $e^1,...,e^m, y^1, y^2, y^3, y^4$, является линейно независимым. Поэтому для отыскания общего решения системы линейных неравенств (5.34) достаточно просмотреть ненулевые решения всех возможных подсистем системы (5.36), состоящих из $m-1$ уравнений. Затем из найденных решений следует отобрать те, которые удовлетворяют (5.34).

Будем последовательно удалять из системы (5.36) по пять уравнений. Если удалить последние четыре уравнения, а затем по очереди удалять одно из первых m уравнений, то в качестве решений получим единичные орты $e^1,...,e^m$. Из них системе (5.34) удовлетворяют только те векторы e^s, для которых $s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}$.

Если удалить три произвольных уравнения из четырех последних и два произвольных уравнения из m первых уравнений системы (5.36), то решениями, удовлетворяющими системе неравенств (5.34) являются только векторы e^s, $s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}$. Аналогично, при удалении $(m+1)$-го и $(m+2)$-го ($(m+3)$-го и $(m+4)$-го) уравнений и трех произвольных уравнений из m первых уравнений системы (2.37), искомыми решениями являются e^s, $s \in I \setminus \{A \cup B \cup C\}$. Если в состав удаляемых уравнений не входят $(m+2)$-е и $(m+4)$-е ($(m+1)$-е и $(m+3)$-е), то решениями полученной «укороченной» системы уравнений будут векторы вида $q_{ikj} = \gamma'_j\gamma''_k e^i + \gamma'_i\gamma''_k e^j + \gamma'_j\gamma''_i e^k$ ($p_{ijk} = w'_j w''_k e^i + w'_i w''_k e^j + w'_j w''_i e^k$) для всех $i \in A$, всех $j \in B$ и всех $k \in C$.

Наконец, если в состав удаляемых уравнений не входят $(m+1)$-е и $(m+4)$-е ($(m+2)$-е и $(m+3)$-е), то решениями полученной системы уравнений будут векторы вида $h_{jki} = w'_j\gamma''_k e^i + w'_i\gamma''_k e^j + w'_j\gamma''_i e^k$ ($t_{kji} = \gamma'_j w''_k e^i + \gamma'_i w''_k e^j + \gamma'_j w''_i e^k$) для всех $i \in A$, всех $j \in B$ и всех $k \in C$.

Таким образом, в результате перебора всех возможных вариантов удаления пяти уравнений из (5.36), найдены решения получающихся подсистем из $m-1$ уравнений, удовлетворяющие (5.34). Ими оказались векторы (5.35). Никаких других (с точностью до положительного множителя) решений нет. Следовательно, векторы (5.35) образуют фундаментальную совокупность решений системы неравенств (5.34) и любое решение этой системы может быть представлено в виде линейной неотрицательной комбинации этой совокупности.

Рассмотрим второй случай, когда группа *A* состоит из одного критерия. Тогда единичный вектор e^1 можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации векторов y^1 и

e^k при любом $k \in B$. Образующими конуса M в этом случае будут векторы y^1, y^2, y^3, y^4, а также единичные орты $e^2, e^3 \ldots, e^m$. Здесь вместо системы (5.34) следует рассматривать систему неравенств

$$\langle e^k, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } k = 2,\ldots,m,$$
$$\langle y^i, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } i = 1,\ldots,4,$$

а вместо (5.36) – соответствующую систему уравнений

$$\langle e^k, y \rangle = 0 \text{ для всех } k = 2,\ldots,m,$$
$$\langle y^i, y \rangle = 0 \text{ для всех } i = 1,\ldots,4.$$

Повторяя рассуждения для рассмотренного выше случая, вновь получим фундаментальную совокупность решений (5.35).

К аналогичному результату придем в остальных случаях.

Доказательства третьего и четвертого этапов здесь не приводится, поскольку они полностью повторяют рассуждения предыдущей теоремы ■

Используя технику доказательства инвариантности включений вида (5.6), развитую в предыдущей главе, нетрудно установить следующий результат.

Теорема 5.5. *Включения* (5.6) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования компонент векторного критерия* g, *которые определяются равенствами* (5.8) *или же равенствами* (5.32).

5.2. Циклические наборы квантов информации

5.2.1. Определение и непротиворечивость циклического набора квантов информации. Введем попарно непересекающиеся подмножества множества номеров критериев $A_i \subset I,\ i = 1,2,\ldots k,\ \sum_{i=1}^{k} |A_i| \le m$ и рассмотрим замкнутую «цепочку» квантов информации:

1) группа критериев A_1 более значима, чем группа критериев A_2 с параметрами $w_{i_1}^{(1)}$ для всех $i_1 \in A_1$, $w_{i_2}^{(1)}$ для всех $i_2 \in A_2$;

2) группа критериев A_2 более значима, чем группа критериев A_3 с параметрами $w_{i_2}^{(2)}$ для всех $i_2 \in A_2$, $w_{i_3}^{(2)}$ для всех $i_3 \in A_3$ и т.д.;

k) группа критериев A_k более значима, чем группа критериев A_1 с параметрами $w_{i_k}^{(k)}$ для всех $i_k \in A_k$, $w_{i_1}^{(k)}$ для всех $i_1 \in A_1$.

Перейдем к формальному определению.

Определение 5.2. Будем говорить, что задан *циклический набор квантов информации* с группами критериев $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и набором положительных параметров

$\left\{w_{i_1}^{(1)}, w_{i_2}^{(1)}, w_{i_2}^{(2)}, w_{i_3}^{(2)}, \ldots, w_{i_{k-1}}^{(k-1)}, w_{i_k}^{(k-1)}, w_{i_k}^{(k)}, w_{i_1}^{(k)} \in R \quad | \, i_1 \in A_1, i_2 \in A_2, \ldots i_k \in A_k\right\}$, если для векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)} \in R^m$ вида

$$\begin{gathered}
y_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(1)}, \quad y_{i_2}^{(1)} = -w_{i_2}^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0 \quad \forall i_1 \in A_1, \forall i_2 \in A_2, \forall s \in I \setminus (A_1 \cup A_2), \\
y_{i_2}^{(2)} = w_{i_2}^{(2)}, \quad y_{i_3}^{(2)} = -w_{i_3}^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0 \quad \forall i_2 \in A_2, \forall i_3 \in A_3, \forall s \in I \setminus (A_2 \cup A_3), \\
\ldots \\
y_{i_k}^{(k)} = w_{i_k}^{(k)}, \quad y_{i_1}^{(k)} = -w_{i_1}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = 0 \quad \forall i_k \in A_k, \forall i_1 \in A_1, \forall s \in I \setminus (A_k \cup A_1),
\end{gathered} \tag{5.37}$$

справедливы соотношения $y^{(1)} \succ 0_m, y^{(2)} \succ 0_m, \ldots, y^{(k)} \succ 0_m$.

В силу аксиомы инвариантности здесь использовано упрощенное понятие кванта информации.

Введем квадратную матрицу $W(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ порядка k для всех $i_1 \in A_1$, $i_2 \in A_2$, …, $i_k \in A_k$, зависящую от номеров критериев $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

$$W(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \begin{pmatrix} w_{i_1}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ -w_{i_2}^{(1)} & w_{i_2}^{(2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_{k-1}}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -w_{i_k}^{(k-1)} & w_{i_k}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Циклические наборы квантов информация являются взаимозависимыми и носят специфический характер. В связи с этим, параметры таких наборов информации могут принимать значения, при которых они могут оказаться противоречивыми. Вопрос непротиворечивости циклической информации разрешает следующий результат.

Теорема 5.6. *Циклический набор квантов информации с группами критериев* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *является непротиворечивым тогда и только тогда, когда найдутся такие номера* $i_p \in A_p$, $p = 1,2,...,k$, *что определитель матрицы* $W(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ *положителен, т.е.* $|W(i_1, i_2, \ldots, i_k)| > 0$.

□ Нетрудно проверить, что неравенства $|W(i_1, i_2, \ldots, i_k)| > 0$ и $\dfrac{w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)}}{w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)}} < 1$ эквивалентны.

Согласно алгебраическому критерию непротиворечивости, сформулированному в предыдущей главе, непротиворечивость циклического набора информации равносильна отсутствию у системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j y^{(j)} = 0_m$$

N-решения $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_k)$, где векторы $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, …, $y^{(k)}$ вида (5.37). Это означает, что найдутся такие номера $i'_p \in A_p$, $p=1,2,...,k$, что система линейных уравнений $\omega(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)W_E(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)=0_k$ не будет иметь решения $\omega(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)\geq 0_{2k}$, где

$$\omega(i_1,i_2,\ldots,i_k)=(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_k},\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k),$$

$$W_E(i_1,i_2,\ldots,i_k)=\begin{pmatrix} E_{k\times k} \\ W^T(i_1,i_2,\ldots,i_k)\end{pmatrix},$$

а $E_{k\times k}$ – единичная матрица порядка k. Согласно теорема Моцкина об альтернативе (см. например [45]) последнее утверждение равносильно существованию решения $x\in R^k$ системы неравенств $W_E(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)x>0_{2k}$.

Таким образом, непротиворечивость циклического набора квантов информации эквивалентна существованию таких номеров критериев $i'_p \in A_p$, $p=1,2,...,k$, что у системы линейных уравнений $W_E(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)x>0_{2k}$ существует некоторое решение.

Необходимость. Пусть существуют такие номера $i'_p \in A_p$, $p=1,2,...,k$ и такой вектор $x\in R^k$, что $W_E(i'_1,i'_2,\ldots,i'_k)x>0_{2k}$. Тогда

$$\begin{gathered} x>0_k, \\ w^{(1)}_{i'_1}x_1 - w^{(1)}_{i'_2}x_2>0, \\ \ldots \\ w^{(k-1)}_{i'_{k-1}}x_{k-1} - w^{(k-1)}_{i'_k}x_k>0, \\ w^{(k)}_{i'_k}x_k - w^{(k)}_{i'_1}x_1>0. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Отсюда в результате несложных преобразований придем к неравенству

$$\frac{w^{(1)}_{i'_2}w^{(2)}_{i'_3}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_k}w^{(k)}_{i'_1}}{w^{(1)}_{i'_1}w^{(2)}_{i'_2}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_{k-1}}w^{(k)}_{i'_k}}x_1<x_1.$$

Деля обе части неравенства на $x_1>0$, получим требуемое.

Достаточность. Пусть найдутся такие номера $i'_p \in A_p$, $p=1,2,...,k$, что выполнено $\frac{w^{(1)}_{i'_2}w^{(2)}_{i'_3}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_k}w^{(k)}_{i'_1}}{w^{(1)}_{i'_1}w^{(2)}_{i'_2}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_{k-1}}w^{(k)}_{i'_k}}<1$. Умножим последнее неравенство на произвольное положительное число x_1. В результате получим

$$\frac{w^{(1)}_{i'_1}w^{(2)}_{i'_2}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_{k-1}}}{w^{(1)}_{i'_2}w^{(2)}_{i'_3}\cdot\ldots\cdot w^{(k-1)}_{i'_k}}x_1>\frac{w^{(k)}_{i'_1}}{w^{(k)}_{i'_k}}x_1.$$

Очевидно, найдется такое число x_k, что

$$\frac{w_{i_1'}^{(1)} w_{i_2'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}'}^{(k-1)}}{w_{i_2'}^{(1)} w_{i_3'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_k'}^{(k-1)}} x_1 > x_k > \frac{w_{i_1'}^{(k)}}{w_{i_k'}^{(k)}} x_1 ,$$

откуда $\frac{w_{i_1'}^{(1)} w_{i_2'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-2}'}^{(k-2)}}{w_{i_2'}^{(1)} w_{i_3'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}'}^{(k-2)}} x_1 > \frac{w_{i_k'}^{(k-1)}}{w_{i_{k-1}'}^{(k-1)}} x_k$. Далее, такое число x_{k-1}, что

$$\frac{w_{i_1'}^{(1)} w_{i_2'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-2}'}^{(k-2)}}{w_{i_2'}^{(1)} w_{i_3'}^{(2)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-1}'}^{(k-2)}} x_1 > x_{k-1} > \frac{w_{i_k'}^{(k-1)}}{w_{i_{k-1}'}^{(k-1)}} x_k .$$

Следовательно,

$$\frac{w_{i_1'}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-3}'}^{(k-3)}}{w_{i_2'}^{(1)} \cdot \ldots \cdot w_{i_{k-2}'}^{(k-3)}} x_1 > \frac{w_{i_{k-1}'}^{(k-2)}}{w_{i_{k-2}'}^{(k-2)}} x_{k-1} .$$

Продолжая аналогично, придем к тому, что найдется такое число x_2, при котором верно

$$\frac{w_{i_1'}^{(1)}}{w_{i_2'}^{(1)}} x_1 > x_2 > \frac{w_{i_3'}^{(2)}}{w_{i_2'}^{(2)}} x_3.$$

Преобразовывая полученные выше неравенства, получаем (5.38). Причем, поскольку $x_1 > 0$, будет верно $x > 0_k$ ■

5.2.2. Сужение множества Парето на основе циклических наборов квантов информации. Перейдем к вопросу использования циклических наборов информации для сужения множества Парето. Сначала рассмотрим самую простую ситуацию, когда в определении циклической информации все группы состоят из одного элемента: $A_s = \{i_s\}$, $s = 1,2,...,k$. В этом случае будем говорить о *циклической информации с критериями* (*точнее говоря, с номерами критериев*) i_1, i_2, ..., i_k, а соответствующую матрицу $W(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ обозначим W. При этом необходимое и достаточное условие непротиворечивости теоремы 5.6 сведется к неравенству $|W| > 0$.

Введем семейство матриц $W_{s,p}, s = 1,2,...,k, p = 1,2,...,k$, в которых на месте s-го столбца W^s матрицы W стоит единичный вектор e^p пространства R^k, т. е.

$$W_{s,p} = \left(W^1,..., W^{s-1}, e^p, W^{s+1}, \ldots, W^k\right).$$

Лемма 5.3. *Определитель матрицы* $W_{s,p}$ *положителен при всех* $s = 1,2,\ldots,k$, $p = 1,2,\ldots,k$.

□ Через M_{ij} обозначим минор элемента матрицы W, расположенного на пересечении i-й строки и j-го столбца, т. е. минор порядка $(k - 1)$, полученный из определителя матрицы W вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Также введем в рассмотрение две треугольные матрицы

$$L(l,\,q)=\begin{pmatrix} w_{i_l}^{(l)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -w_{i_{l+1}}^{(l)} & w_{i_{l+1}}^{(l+1)} & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{i_{q-1}}^{(q-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -w_{i_q}^{(q-1)} & w_{i_q}^{(q)} \end{pmatrix},$$

где $l, q \in \{1, 2, \dots, k\}$, $l \leqq q$;

$$U(r,\,t)=\begin{pmatrix} -w_{i_{r+1}}^{(r)} & w_{i_{r+1}}^{(r+1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -w_{i_{r+2}}^{(r+1)} & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & -w_{i_{t-1}}^{(t-2)} & w_{i_{t-1}}^{(t-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -w_{i_t}^{(t-1)} \end{pmatrix},$$

где $r, t \in \{1, 2, \dots, k\}$, $r < t$, а также матрицу $Z_{(n\times m)}$ размерности $n\times m$, в которой все элементы нулевые, за исключением последнего элемента первой строки, равного $-w_{i_1}^{(k)}$. Определители введенных треугольных матриц равны произведению диагональных элементов. Поэтому определитель матрицы $L(l, q)$ положителен при всех возможных значениях l и q. Обозначим его через $\alpha(l, q)$. Знак определителя матрицы $U(r, t)$ зависит от разности $t–r$, $|U(r,t)| = (-1)^{t-r}\beta(r,t)$, где $\beta(r, t)$ – некоторое положительное число.

Определитель $|W_{s,p}|$ будем вычислять, раскладывая его по s-му столбцу, т. е.

$$|W_{s,p}| = (-1)^{s+p} M_{sp}\,. \tag{5.39}$$

В зависимости от соотношения между номерами s и p минор M_{sp} порядка k–1 будет разным, поэтому выделим три случая: 1) $s = p$, 2) $s > p$, 3) $s < p$.

1) $s = p$. Степень (–1) в (5.39) будет равна $2s$, и знак $|W_{s,s}|$ определяется только знаком M_{ss}. Если $s = 1$ или $s = k$, то

$$M_{11} = |L(2, k)| = \alpha(2, k),\;\; M_{kk} = |L(1, k-1)| = \alpha(1, k-1).$$

Пусть $s \neq 1$ и $s \neq k$. Тогда

$$M_{ss} = \begin{vmatrix} L(1, s-1) & Z_{(s-1)\times(k-s)} \\ 0_{(k-s)\times(s-1)} & L(s+1, k) \end{vmatrix} = \alpha(1, s-1)\alpha(s+1, k).$$

2) $s > p$. Если $p = 1$, $s \neq k$ или $s = k$, $p \neq 1$, то соответственно получаем

$$M_{s1} = \begin{vmatrix} U(1,s) & 0_{(s-1)\times(k-s)} \\ 0_{(k-s)\times(s-1)} & L(s+1,k) \end{vmatrix} = (-1)^{s-1}\alpha(s+1,k)\beta(1,s)\,,$$

$$M_{kp} = \begin{vmatrix} L(1, p-1) & 0_{(p-1)\times(k-p)} \\ 0_{(k-p)\times(p-1)} & U(p,k) \end{vmatrix} = (-1)^{k-p}\alpha(1, p-1)\beta(p,k)\,.$$

При $p = 1$ и $s = k$ имеем $M_{k1} = |U(1,k)| = (-1)^{k-1}\beta(1,k)$.

Теперь пусть $s \neq k$ и $p \neq 1$.

$$M_{sp} = \begin{vmatrix} L(1,p-1) & 0_{(p-1)\times(s-p)} & Z_{(p-1)\times(k-s)} \\ 0_{(s-p)\times(p-1)} & U(p,s) & 0_{(s-p)\times(k-s)} \\ 0_{(k-s)\times(p-1)} & 0_{(k-s)\times(s-p)} & L(s+1,k) \end{vmatrix} = (-1)^{p-s}\alpha(1,p-1)\beta(p,s)\alpha(s+1,k).$$

Из полученных выше выражений для минора M_{sp} и (5.39) делаем вывод, что в случае s > p определитель $|W_{s,p}|$ положителен.

3) $s < p$. В случае $s = 1$, $p \neq k$ имеем

$$M_{1p} = \begin{vmatrix} 0 \quad 0 \quad \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ & & 0 \\ L(2,p-1) & 0_{(p-2)\times(k-p)} & \vdots \\ 0_{(k-p)\times(p-2)} & U(p,k) & 0 \\ & & w_{i_k}^{(k)} \end{vmatrix} = (-1)^{2k-p+1} w_{i_1}^{(k)}\alpha(2,p-1)\beta(p,k).$$

Если же $p = k$, $s \neq 1$, то

$$M_{sk} = \begin{vmatrix} w_{i_1}^{(1)} \quad 0 & \ldots \quad 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ & & 0 \\ U(1,s) & 0_{(s-1)\times(k-s-1)} & \vdots \\ 0_{(k-s-1)\times(s-1)} & L(s+1,k-1) & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k+s} w_{i_1}^{(k)}\alpha(s+1,k-1)\beta(1,s).$$

В случае $s = 1$ и $p = k$ верно

$$M_{1k} = \begin{vmatrix} 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ & 0 \\ & \vdots \\ L(2,k-1) & 0 \\ & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} w_{i_1}^{(k)}\alpha(2,k-1).$$

Теперь пусть $s \neq 1$, $p \neq k$. Раскладывая M_{sp} по первой строке и, учитывая, что минор, полученный из минора M_{sp} вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент $w_{i_1}^{(1)}$, равен нулю, имеем

$$M_{sp} = \begin{vmatrix} w_{i_1}^{(1)} & 0 & \ldots\ \ldots\ \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ U(1,s) & 0_{(s-1)\times(p-s-1)} & 0_{(s-1)\times(k-p)} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ 0_{(p-s-1)\times(s-1)} & L(s+1,p-1) & 0_{(p-s-1)\times(k-p)} & & 0 \\ 0_{(k-p)\times(s-1)} & 0_{(k-p)\times(p-s-1)} & U(p,k) & & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2k+s-p} w_{i_1}^{(k)} \alpha(s+1, p-1)\beta(1,s)\beta(p,k).$$

Исходя из полученного и формулы (5.39), делаем вывод, что при $s < p$ определитель $|W_{s,p}|$ положителен.

Таким образом, во всех трех случаях ($s = p$, $s > p$, $s < p$) определитель $|W_{s,p}|$ положителен ■

Теорема 5.7. *Пусть имеется непротиворечивый циклический набор информации с критериями i_1, i_2, ..., i_k и соответствующим набором положительных параметров. Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы включения* (5.6), *где* $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, *а компоненты «нового» m-мерного векторного критерия g определяются равенствами*

$$g_{i_s} = \sum_{p=1}^{k} |W_{s,p}| f_{i_p}, \quad s = 1,2,...,k; \qquad g_i = f_i, \quad \text{для всех} \quad i \in I \setminus I_k, \tag{5.40}$$

где $I_k = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$.

□ Пусть K − острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$. Задание циклического набора информации означает, что для векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ с компонентами

$$\begin{aligned} &y_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(1)}, \quad y_{i_2}^{(1)} = -w_{i_2}^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (i_1 \cup i_2), \\ &y_{i_2}^{(2)} = w_{i_2}^{(2)}, \quad y_{i_3}^{(2)} = -w_{i_3}^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (i_2 \cup i_3), \\ &\ldots \\ &y_{i_k}^{(k)} = w_{i_k}^{(k)}, \quad y_{i_1}^{(k)} = -w_{i_1}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (i_k \cup i_1), \end{aligned}$$

справедливы соотношения $y^{(1)} \succ 0_m$, $y^{(2)} \succ 0_m$, …, $y^{(k)} \succ 0_m$. Это эквивалентно включениям $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)} \in K$.

Пусть M – острый выпуклый конус (без нуля), порожденный набором векторов

$$e^s \quad s \in I \setminus I_k, \quad y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}.$$

Покажем, что все векторы данного набора являются образующими конуса M. Если предположить напротив, что некоторый единичный вектор e^s, $s \notin I_k$ можно представить в виде

$$e^s = \sum_{l \notin (I_k \cup \{s\})} \lambda_l e^l + \sum_{i=1}^{k} \mu_i y^{(i)},$$

то получим, что ни при каких значениях коэффициентов данная линейная комбинация невозможна, так как его s-я компонента есть 1 = 0. Пусть найдется такое $p \in \{1,2,\ldots,k\}$, что

$$y^{(p)} = \sum_{l \notin I_k} \lambda_l e^l + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{k} \mu_i y^{(i)} \tag{5.41}$$

Тогда в случае p = 1 для компоненты i_1 получим $w_{i_1}^{(1)} = -\mu_k w_{i_1}^{(k)}$. Если же $p \in \{2,\ldots,k\}$, то компонента i_p векторного равенства (5.41) будет $w_{i_p}^{(p)} = -\mu_{p-1} w_{i_p}^{(p-1)}$. Таким образом, векторное равенство (5.41) невозможно.

Установим, что единичные векторы e^{i_s}, $s = 1,2,...,k$, принадлежат конусу M, т.е. найдутся такие неотрицательные (одновременно не равные нулю) числа $\lambda_l^{(s)}$ для всех $l \in I \setminus I_k$, $\mu_1^{(s)}, \ldots, \mu_k^{(s)}$, что

$$e^{i_s} = \sum_{l \notin I_k} \lambda_l^{(s)} e^l + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(s)} y^{(i)}, \quad s = 1,2,...,k.$$

Положим $\lambda_l^{(s)} = 0$ при $s = 1,2,...,k$ и любых $l \in I \setminus I_k$. Неизвестные $\mu_p^{(s)}, s = 1,2,...,k, p = 1,2,...,k$ можно найти как решение линейных неоднородных систем

$$W\mu^{(s)} = \hat{e}^s, s = 1,2,...,k, \tag{5.42}$$

где $\mu^{(s)} = \left(\mu_1^{(s)}, \mu_2^{(s)}, \ldots, \mu_k^{(s)}\right)^T$, $\hat{e}^s \in R^k$. В силу непротиворечивости циклического набора информации, выполнено $|W| > 0$. Значит, система (5.42) имеет единственное решение при всех $s = 1,2,...,k$. Применяя формулу Крамера, получим

$$\mu_p^{(s)} = \frac{|W_{p,s}|}{|W|}.$$

Данное число является положительным, поскольку $|W| > 0$ и, согласно лемме 5.3, $|W_{s,p}| > 0$ при всех $s = 1,2,...,k$, $p = 1,2,...,k$.

В результате установлено, что образующими конуса M являются векторы $e^s \quad s \in I \setminus I_k, \quad y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$, также выполнены включения $e^{i_s} \in M$, $s = 1,2,...,k$.

Теперь покажем, что конус M совпадает с ненулевыми решениями следующей системы линейных неравенств

$$\begin{gathered}\langle e^l, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad l \in I \setminus I_k, \\ \langle \bar{y}^{(s)}, y\rangle \geqq 0 \quad s = 1, 2, \ldots, k, \\ \bar{y}^{(s)}_{i_p} = \left|W_{s,p}\right|, \;\; p = 1,2,\ldots,k, \quad \bar{y}^{(s)}_q = 0 \;\text{ для всех } q \in I \setminus I_k, \quad s = 1,2,\ldots,k\,.\end{gathered} \tag{5.43}$$

Найдем фундаментальную совокупность решений системы неравенств (5.43). Следует убедиться, что последняя будет совпадать с набором векторов e^s, $s \in I \setminus I_k$, $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений, соответствующую системе неравенств (5.43), т.е.

$$\begin{gathered}\langle e^l, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } l \in I \setminus I_k, \\ \langle \bar{y}^{(s)}, y\rangle = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k.\end{gathered} \tag{5.44}$$

Ранг матрицы любой подсистемы системы (5.44), образованной удалением какого-либо одного уравнения, равен m–1. В таком случае для отыскания фундаментальной совокупности достаточно найти ненулевые решения всевозможных подсистем из m–1 уравнения системы (5.44), удовлетворяющие системе (5.43).

Если из системы (5.44) удалить уравнение $\langle e^l, y\rangle = 0$, то решением полученной подсистемы будет вектор e^l, который удовлетворяет системе (5.43). Если удалить уравнение $\langle \bar{y}^{(p)}, y\rangle = 0$, то решением полученной подсистемы будет вектор $y^{(p)}$, $p = 1,2,\ldots,k$ Покажем это. Очевидно, что $\langle e^l, y^{(p)}\rangle = 0$ для всех $l \in I \setminus I_k$. Рассмотрим выражение $\langle \bar{y}^{(s)}, y^{(p)}\rangle$, $s = 1,2,\ldots,k$, $s \neq p$. Остановимся лишь на разборе варианта $p \neq k$ (при p = k рассуждения проводятся аналогичным образом).

Возможны три случая: 1) s = 1; 2) s = k; 3) $s \neq 1$, $s \neq k$. Рассмотрим их последовательно.

1) Пусть s = 1. Имеем

$$\begin{gathered}\langle \bar{y}^{(1)}, y^{(p)}\rangle = \left|W_{1,p}\right| \cdot w^{(p)}_{i_p} - \left|W_{1,p+1}\right| \cdot w^{(p)}_{i_{p+1}} = \left|\hat{e}^p, W^2, \ldots, W^k\right| \cdot w^{(p)}_{i_p} - \left|\hat{e}^{p+1}, W^2, \ldots, W^k\right| \cdot w^{(p)}_{i_{p+1}} = \\ = \left|w^{(p)}_{i_p}\hat{e}^p - w^{(p)}_{i_{p+1}}\hat{e}^{p+1}, W^2, \ldots, W^k\right| = \left|W^p, W^2, \ldots, W^k\right| = 0,\end{gathered}$$

поскольку среди столбцов W^2, ..., W^k обязательно имеется столбец W^p.

2) Пусть s = k. Тогда

$$\begin{gathered}\langle \bar{y}^{(k)}, y^{(p)}\rangle = \left|W_{k,p}\right| \cdot w^{(p)}_{i_p} - \left|W_{k,p+1}\right| \cdot w^{(p)}_{i_{p+1}} = \left|W^1, \ldots, W^{k-1}, \hat{e}^p\right| \cdot w^{(p)}_{i_p} - \left|W^1, \ldots, W^{k-1}, \hat{e}^{p+1}\right| \cdot w^{(p)}_{i_{p+1}} = \\ = \left|W^1, \ldots, W^{k-1}, W^p\right| = 0,\end{gathered}$$

поскольку среди столбцов W^1, ..., W^{k-1} обязательно встретится столбец W^p.

3) Рассмотрим случай $s \neq 1$, $s \neq k$. Справедливо

$$\langle \overline{y}^{(s)}, y^{(p)} \rangle = \left|W_{s,p}\right| \cdot w_{i_p}^{(p)} - \left|W_{s,p+1}\right| \cdot w_{i_{p+1}}^{(p)} = \left|W^1, \ldots, W^{s-1}, \hat{e}^p, W^{s+1}, \ldots, W^k\right| \cdot w_{i_p}^{(p)} -$$
$$-\left|W^1, \ldots, W^{s-1}, \hat{e}^{p+1}, W^{s+1}, \ldots, W^k\right| \cdot w_{i_{p+1}}^{(p)} = \left|W^1, \ldots, W^{s-1}, W^p, W^{s+1}, \ldots, W^k\right| = 0,$$

из-за того, что среди столбцов W^1, ..., W^{s-1}, W^{s+1}, ..., W^k обязательно имеется столбец W^p. Чтобы убедиться, что $y^{(p)}$ удовлетворяет (5.43), остается показать $\left\langle \overline{y}^{(p)}, y^{(p)} \right\rangle \geq 0$. Если $p = 1$, то получаем

$$\langle \overline{y}^{(1)}, y^{(1)} \rangle = \left|W_{1,1}\right| \cdot w_{i_1}^{(1)} - \left|W_{1,2}\right| \cdot w_{i_2}^{(1)} = \left|\hat{e}^1, W^2, \ldots, W^k\right| \cdot w_{i_1}^{(1)} - \left|\hat{e}^2, W^2, \ldots, W^k\right| \cdot w_{i_2}^{(1)} = \left|W\right| > 0 .$$

Если $p = k$, то выполнено

$$\langle \overline{y}^{(k)}, y^{(k)} \rangle = \left|W_{k,k}\right| \cdot w_{i_k}^{(k)} - \left|W_{k,1}\right| \cdot w_{i_1}^{(k)} = \left|W^1, \ldots, W^{k-1}, \hat{e}^k\right| \cdot w_{i_k}^{(k)} - \left|W^1, \ldots, W^{k-1}, \hat{e}^1\right| \cdot w_{i_1}^{(k)} = \left|W\right| > 0 .$$

При $p \neq 1$, $p \neq k$ верно

$$\langle \overline{y}^{(p)}, y^{(p)} \rangle = \left|W_{p,p}\right| \cdot w_{i_p}^{(p)} - \left|W_{p,p+1}\right| \cdot w_{i_{p+1}}^{(p)} = \left|W^1, \ldots, W^{p-1}, w_{i_p}^{(p)} \cdot \hat{e}^p - w_{i_{p+1}}^{(p)} \cdot \hat{e}^{p+1}, W^{p+1}, \ldots, W^k\right| =$$
$$= \left|W^1, \ldots, W^{p-1}, W^p, W^{p+1}, \ldots, W^k\right| = \left|W\right| > 0$$

Таким образом, фундаментальную совокупность решений системы неравенств (5.43) образует набор векторов e^s, $s \in I \setminus I_k$, $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$, и, следовательно, конус M совпадает со множеством ненулевых решений системы (5.43).

Из включений $R_+^m \subset M \subset K$ следует

$$Ndom(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y),$$

где $\hat{P}(Y)$ множество недоминируемых векторов множества Y относительно конусного отношения с конусом M, т.е. $\hat{P}(Y) = \left\{ y^* \in Y \mid \text{ не существует } y \in Y : y - y^* \in M \right\}$.

Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательствам подобных предшествующих теорем, и поэтому опускается ■

Следствие 5.1. *Если в последней теореме положить* $k = 2$, $i_1 = i$, $i_2 = j$, *то формулы* (5.40) *для «нового» векторного критерия* g *примут вид*

$$g_i = |W_{1,1}| f_i + |W_{1,2}| f_j = w_j^{(2)} f_i + w_i^{(2)} f_j, \quad g_j = |W_{2,1}| f_i + |W_{2,2}| f_j = w_j^{(1)} f_i + w_i^{(1)} f_j,$$

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

$$|W_{1,1}| = \begin{vmatrix} 1 & -w_i^{(2)} \\ 0 & w_j^{(2)} \end{vmatrix} = w_j^{(2)}, |W_{1,2}| = \begin{vmatrix} 0 & -w_i^{(2)} \\ 1 & w_j^{(2)} \end{vmatrix} = w_i^{(2)}, |W_{2,1}| = \begin{vmatrix} w_i^{(1)} & 1 \\ -w_j^{(1)} & 0 \end{vmatrix} = w_j^{(1)}, |W_{2,2}| = \begin{vmatrix} w_i^{(1)} & 0 \\ -w_j^{(1)} & 1 \end{vmatrix} = w_i^{(1)}.$$

Следствие 5.2. *Если в последней теореме положить* $k = 3$, $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = l$, *то формулы* (5.40) *для «нового» векторного критерия* g *примут вид*

$$\begin{aligned} g_i &= w_j^{(2)} w_l^{(3)} f_i + w_l^{(2)} w_i^{(3)} f_j + w_j^{(2)} w_i^{(3)} f_l, \\ g_j &= w_j^{(1)} w_l^{(3)} f_i + w_i^{(1)} w_l^{(3)} f_j + w_j^{(1)} w_i^{(3)} f_l, \\ g_l &= w_j^{(1)} w_l^{(2)} f_i + w_i^{(1)} w_l^{(2)} f_j + w_i^{(1)} w_j^{(2)} f_l, \\ g_s &= f_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{i, j, l\}. \end{aligned}$$

5.3. Геометрический алгоритм построения нового векторного критерия

5.3.1. Предварительное рассмотрение. Легко понять, что разобранные выше случаи использования различных наборов квантов информации далеко не исчерпывают всех возможных вариантов. Разумеется, это относится к наборам, которые являются взаимно зависимыми.

Из приведенных доказательств теорем, посвященных учету различного рода информации об отношении предпочтения ЛПР, можно усмотреть вполне определенную схему, на основе которой получаются соответствующие формулы для пересчета нового критерия. Кратко эту схему можно описать следующим образом. С самого начала, когда еще нет никакой информации в виде квантов, справедливо лишь включение $R_+^m \subset K$, где символом K обозначен острый выпуклый конус (неизвестного) конусного отношения $\succ$. Указанное включение выполняется благодаря аксиоме Парето. Наличие в общем случае некоторого набора информации, состоящего из k квантов, на геометрическом языке означает задание k векторов $y^i \in R^m \setminus (R_+^m \cup (-R_+^m) \cup \{0_m\})$ (имеющих хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательные компоненты), для которых выполнено $y^i \succ 0_m$, или, что то же самое, $y^i \in K$, $i = 1,2,...,k$. Далее вводится острый выпуклый конус M (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, y^1, y^2, ..., y^k$. Этот конус определяет конусное отношение того же самого класса, что и неизвестное отношение предпочтения $\succ$, но более широкое, так как

$M \subset K$. Конус M является конечнопорожденным, а значит многогранным. Число компонент нового векторного критерия в точности совпадает с числом $(m-1)$-мерных граней конуса M, а нормальные (направленные внутрь конуса) векторы этих граней дают возможность получить формулы для пересчета нового векторного критерия.

Например, в самом простом случае, когда i-й критерий более значим, чем j-й с параметрами w_i, w_j, конус M (см. теорему 2.5) имел следующие нормальные векторы, направленные внутрь конуса: $e^1,...,e^{j-1}, w_j e^i + w_i e^j, e^{j+1},...,e^m$. Поэтому формула для пересчета нового j-го критерия имела вид $g_j = w_j f_i + w_i f_j$.

В соответствии со сказанным, поставим общую задачу, решение которой позволило бы получать формулы для пересчета новых критериев в любых ситуациях с произвольными наборами квантов информации.

Предварительно напомним определение двойственного конуса. Пусть $a^1,...,a^{m+k}$ – конечный набор векторов m-мерного евклидова пространства. Выпуклый конус, порожденный указанными векторами, обозначим

$$M = cone\{a^1,...,a^{m+k}\}.$$

Он представляет собой совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1,...,a^{m+k}$. Будем считать, что этот конус острый и его размерность[12] равна m.

Двойственный конус по отношению к конусу M обозначим символом M^o. Он определяется равенством

$$M^o = \{x \in R^m \mid \langle x, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } y \in M\}.$$

Например, двойственным конусом для неотрицательного ортанта будет сам неотрицательный ортант.

Двойственный конус для многогранного (конечнопорожденного) конуса так же является многогранным конусом, а значит, порождается некоторым конечным набором векторов. Известно также [28], что двойственный для острого m-мерного конуса сам является острым и m-мерным. Таким образом, учет произвольного конечного числа квантов информации об отношении предпочтения ЛПР сводится к решению следующей задачи.

Задача. *Построить алгоритм, который для произвольного заданного конечного набора векторов* $a^1,...,a^{m+k}$*, порождающих выпуклый острый* m*-мерный конус* M *дает возможность за обозримое время найти минимальный набор векторов* $b^1, b^2,..., b^n$*, порождающих двойственный конус* M^o*, т.е. таких векторов, что*

$$M^o = cone\{b^1, b^2,..., b^n\}.$$

---

[12] *Размерность конуса* совпадает с размерностью минимального подпространства, содержащего данный конус.

На геометрическом языке сформулированная задача заключается в построении на основе образующих конуса M, набора нормальных векторов всех гиперплоскостей, являющихся $(m-1)$-мерными гранями M.

В частном случае, когда конусом M является неотрицательный ортант пространства R^m, сформулированная задача тривиальна и ее решением будет, например, набор единичных ортов этого пространства (тех самых, которые порождают данный неотрицательный ортант).

Имея в распоряжении алгоритм, о котором идет речь в сформулированной выше задаче, можно для любого конечного непротиворечивого набора квантов информации за обозримое время получать формулы для пересчета старого векторного критерия и формирования нового, при помощи которого строится оценка сверху для множества выбираемых вариантов (векторов).

5.3.2. Геометрический алгоритм и его обоснование. Ниже приводится так называемый *геометрический алгоритм* построения нового векторного критерия на основе произвольного конечного набора непротиворечивых квантов информации.

На вход алгоритма подается конечный набор векторов $a^1,...,a^{m+k}$, $k \geqq 1$, порождающих острый выпуклый конус в пространстве R^m, а на выходе (в памяти) образуется новый набор векторов $b^1,b^2,...,b^n$, порождающих двойственный конус в том же пространстве.

Шаг 1 (открытие цикла по перебору векторов). Открыть цикл по переменной i от 1 до C_{m+k}^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m-1$ векторов набора $a^1,...,a^{m+k}$.

Шаг 2 (проверка на линейную независимость). Если текущий i-й поднабор $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$, выбранный из $a^1,...,a^{m+k}$, линейно зависим, то следует увеличить номер i на единицу и вернуться к началу шага 2. Когда увеличение номера i невозможно, т.е. $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к шагу 5. В противном случае, т.е. когда указанный поднабор линейно независим, выполнить шаг 3.

Шаг 3 (построение вектора, ортогонального линейно независимому поднабору). Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу D n-го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой из векторов множества $I_i = \{a^1,...,a^{m+k}\} \setminus \{a^{i1},...,a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ линейно независимую систему (такой вектор всегда найдется благодаря m-мерности конуса M). Найти последний столбец обратной матрицы $(D^T)^{-1}$, где T – символ транспонирования. Этот вектор-столбец (обозначим его y^i) следует запомнить. По построению, вектор y^i будет ортогонален всем векторам поднабора $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$.

Шаг 4 (проверка вектора y^i на принадлежность искомому множеству $b^1,...,b^n$). Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, y^i \rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое скалярное произведение окажется отрицательным, то удалить из памяти вектор y^i. В случае, когда все указанные скалярные произведения неотрицательны, увеличить номер i на единицу и перейти на шаг 2 (когда такое увеличение невозможно, – выполнить шаг 5).

Шаг 5 (окончание процесса вычислений). В результате выполнения полного цикла по переменной i в памяти будут сохранены вектор-столбцы, которые в ходе выполнения алгоритма записывались в память как y^i. Они составят искомый минимальный набор векторов $b^1,...,b^n$, порождающих двойственный конус M^o.

Перейдем к обоснованию приведенного алгоритма. Сначала установим некоторое вспомогательное утверждение.

Лемма 5.4. *Вектор $y^i \in M^o$ задает ребро*[13] *двойственного конуса M^o тогда и только тогда, когда в наборе $a^1,\ldots,a^{m+k}$ найдутся $m-1$ линейно-независимых векторов, скалярные произведения которых на вектор y^i равны нулю, а скалярные произведения всех остальных векторов указанного набора на вектор y^i неотрицательны.*

□ Достаточность. Обозначим линейно-независимые векторы через $a^{i1},\ldots,a^{i(m-1)}$. По условию леммы, верно

$$\langle a^{ij}, y^i \rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,m-1,$$
$$\langle a^{ij}, y^i \rangle \geq 0, \quad j = m,\ldots,m+k. \tag{5.45}$$

Предположим напротив, что вектор y^i не является ребром двойственного конуса. В таком случае найдутся два неколлинеарных вектора $z^1, z^2 \in M^o$ и два положительных числа α_1, α_2, таких что $y^i = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2$. В силу $z^1, z^2 \in M^o$, имеем

$$\langle a^{ij}, z^1 \rangle \geq 0, \; \langle a^{ij}, z^2 \rangle \geq 0, \quad j = 1,...,m-1. \tag{5.46}$$

Из равенств в (5.45) следует

$$\langle a^{ij}, y^i \rangle = \alpha_1 \langle a^{ij}, z^1 \rangle + \alpha_2 \langle a^{ij}, z^2 \rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,m-1.$$

Отсюда с учетом положительности α_1, α_2 и неравенств (5.46) получаем равенства $\alpha_1 \langle a^{ij}, z^1 \rangle = \alpha_2 \langle a^{ij}, z^2 \rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,m-1$. Полученное означает, что линейная оболочка $L(z^1, z^2)$ неколлинеарных векторов z^1, z^2 входит в ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $a^{i1},\ldots,a^{i(m-1)}$, т.е. $L(z^1,z^2) \subset L^{\perp}(a^{i1},...,a^{i(m-1)})$, причем $\dim L(z^1,z^2) = 2$. Отсюда немедленно следует неравенство $\dim L^{\perp}(a^{i1},...,a^{i(m-1)}) \geq 2$, которое несовместимо с линейной независимостью набора m-мерных векторов $a^{i1},\ldots,a^{i(m-1)}$.

Необходимость. Пусть вектор y^i является ребром двойственного конуса M^o. Для этого вектора, очевидно, выполнены неравенства $\langle a^j, y^i \rangle \geq 0, \quad j = 1,\ldots,m+k$. В соответствии с [53] между ребрами острого m-мерного конуса M^o и (m – 1)-мерными гранями острого m-мерного исходного конуса M существует взаимно однозначное соответствие. А

[13] *Ребром* (*образующей*) является такой вектор конуса, который невозможно представить в виде положительной выпуклой комбинации каких-то двух других векторов этого конуса. Все ребра образуют минимальную систему векторов, порождающих данный конус

именно, каждый вектор, в частности, y^i, являющийся ребром двойственного конуса, является внутренней нормалью для некоторой (m – 1)-мерной грани исходного конуса, и обратно.

Зафиксируем линейно-независимый набор $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ из m – 1 векторов набора $a^1,\ldots,a^{m+k}$, порождающий (m – 1)-мерную грань конуса M, нормалью для которой является вектор y^i. Допустим напротив, что для набора $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ соотношения (5.45) не выполнены. Последнее означает нарушение неравенств, т.е. найдется такой номер $j \in \{m,\ldots,m+k\}$, при котором верно $\langle a^{ij}, y^i \rangle < 0$. Это неравенство несовместимо с тем, что $y^i \in M^o$ ■

Согласно лемме 4.1, вектор y^i, запоминаемый на Шаге 4, является ребром двойственного конуса M^o.

В нижеследующей теореме обосновывается применение описанного алгоритма для сужения множества Парето.

Теорема 5.8. *Пусть заданы векторы* $u^1,...,u^k$, *каждый из которых имеет хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты и порождающие непротиворечивый набор квантов информации, т.е.* $u^i \succ 0_m$, $i = 1,...,k$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *выполняются включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y). \tag{5.47}$$

Здесь $\hat{P}(Y) = f(P_g(X)) = P_g(Y)$, *где вектор-функция*

$$g(x) = (\langle b^1, f(x)\rangle,...,\langle b^n, f(x)\rangle) \qquad (n \geqq m),$$

построена с *использованием векторов* $b^1,...,b^n$, *полученных в результате применения описанного выше алгоритма к набору, состоящему из векторов* $u^1,...,u^k$ *вместе с m единичными ортами пространства* R^m.

□ Для удобства переобозначим набор векторов $e^1,\ldots,e^m,u^1,\ldots,u^k$, о котором идет речь в условиях теоремы, через $a^1,\ldots,a^{m+k}$ и введем обозначение M для конуса (без нуля), порожденного этим набором векторов: $M = \text{cone}\{a^1,\ldots a^{m+k}\} \setminus \{0_m\}$. Поскольку имеющийся набор квантов информации непротиворечивый, введенный конус является острым и m-мерным. Рассмотрим двойственный конус (без нуля)

$$M^o = \{y \in R^m \mid \langle a^j, y\rangle \geqq 0, \quad j = 1,\ldots,m+k\} \setminus \{0_m\}.$$

Он также имеет размерность m и является острым ([49,56]).

В условиях выполнения аксиом «разумного» выбора, отношение предпочтения $\succ$, которое участвует в формулировке теоремы, является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант R^m_+. Пусть K – конус отношения $\succ$. Таким образом, имеют место включения $R^m \subset M \subset K$, причем все участвующие здесь конусы являются острыми, выпуклыми и m-мерными. Соответствующие этим конусам множества недоминируемых векторов вложены друг в друга обратным образом

$$\text{Ndom}\, Y \subset \text{Ndom}_M Y \subset P(Y). \qquad (5.48)$$

Здесь $P(Y)$ - множество Парето, т.е. множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения с конусом R_+^m; $\text{Ndom}\, Y$ - множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения $\succ$, а $\text{Ndom}_M Y$ - множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения $\succ_M$ с конусом M, т.е.

$$\text{Ndom}_M Y = \{y^* \in Y \,|\, \text{не существует } y \in Y, \text{ такого что } y - y^* \in M\}.$$

Согласно лемме 5.4, описанный алгоритм строит векторы $b^1,...,b^n$, которые порождают ребра двойственного для M конуса M^o. Как известно, двойственный для двойственного конуса совпадает с исходным конусом (см. [49,53]). Таким образом, конус M является двойственным для конуса M^o (при этом начало координат следует не принимать в расчет). Поэтому соотношение $y - y^* \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда $\langle b^j, y\rangle \geq \langle b^j, y^*\rangle,\ j = 1,...,n$. Отсюда следует, что в (5.47) $\text{Ndom}_M Y = \hat{P}(Y)$, причем g – в точности та самая вектор-функция, которая описана в условиях теоремы. Теперь с учетом того, что для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ верно включение $C(Y) \subset \text{Ndom}Y$, из (5.48) вытекают требуемые включения (5.47) ■

Согласно последней теореме, применяя алгоритм, следует построить новый векторный критерий g, множество Парето относительно которого даст оценку сверху (5.6) для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y)$ с учетом выявленного набора квантов информации. В общем случае эта оценка будет более точной, чем исходное множество Парето $P(Y)$.

5.3.3. Пример. Пусть $m = 3,\ k = 2$, $u^1 = (-2, 3, 1) \succ 0_3$, $u^2 = (4, -1, 1) \succ 0_3$. Нетрудно проверить, что информация об отношении предпочтения, заданная указанными двумя квантами, является непротиворечивой. Применим описанный алгоритм для формирования нового векторного критерия. В соответствии с теоремой на вход алгоритма следует подать набор из пяти векторов $\{e^1, e^2, e^3, u^1, u^2\}$, где $e^1 = (1, 0, 0), e^2 = (0, 1, 0), e^3 = (0, 0, 1)$. Длина цикла алгоритма будет равна $C_5^2 = 10$.

Рассмотрим первый поднабор из двух векторов $\{e^1, e^2\}$. Очевидно, ортогональным к этим векторам является вектор $\{e^3\}$, причем $\langle e^3, u^1\rangle = \langle e^3, u^2\rangle = \langle e^3, e^3\rangle = 1 > 0$. Следовательно, на основании утверждения вектор $y^1 = e^3$ следует запомнить.

Перейдем ко второму поднабору $\{e^1, e^3\}$. Вектор e^2 ортогонален обоим векторам рассматриваемого поднабора, но $\langle e^2, u^1\rangle = 3 > 0$ и $\langle e^2, u^2\rangle = -1 < 0$. Это означает, что вектор e^2 запоминать не следует.

Теперь рассмотрим $\{e^2, e^3\}$. Здесь для ортогонального вектора e^1 выполняется $\langle e^1, u^1\rangle = -2 < 0$, $\langle e^1, u^2\rangle = 4 > 0$. Поэтому данный вектор тоже должен быть пропущен.

Для набора $\{e^1, u^1\}$ в качестве ортогонального вектора можно взять, например, $(0, 1, -3)$. Поскольку $\langle(0, 1, -3), e^2\rangle = 1 > 0$, $\langle(0, 1, -3), u^2\rangle = -4 < 0$, данный вектор также пропускаем.

Для набора $\{e^2, u^1\}$ можно выбрать вектор $y^2 = (1, 0, 2)$, который следует запомнить. Далее аналогично, нетрудно проверить, что для набора $\{e^3, u^1\}$ можно запомнить, например, вектор $y^3 = (3, 2, 0)$, для набора $\{e^1, u^2\}$ – вектор $y^4 = (0, 1, 1)$, а для набора $\{e^2, u^2\}$ ортогональный вектор следует пропустить, тогда как для набора $\{e^3, u^2\}$ можно запомнить вектор $y^5 = (1, 4, 0)$. И наконец, после рассмотрения набора $\{u^1, u^2\}$, ничего запоминать не следует.

В итоге найдены пять векторов $y^1,..., y^5$. Им отвечает новый векторный критерий g с компонентами $g_1(y) = y_3$, $g_2(y) = y_1 + 2y_3$, $g_3(y) = 3y_1 + 2y_2$, $g_4(y) = y_2 + y_3$, $g_5(y) = y_1 + 4y_2$.

Согласно теореме 5.8, множество Парето относительно этого 5-мерного критерия будет служить более точной оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых векторов, чем исходное множество Парето.

Чтобы получить конкретный результат, выберем в качестве *Y*, например, следующее конечное множество $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где

$$y^1 = (1, 4.5, 2),\quad y^2 = (2, 3, 1),\quad y^3 = (3, 2, 1.5),\quad y^4 = (5, 1.5, 2).$$

Нетрудно видеть, что все эти векторы парето-оптимальны. Простые вычисления показывают, что

$$g(Y) = \{(2, 5, 12, 6.5, 19), (1, 4, 12, 4, 14), (1.5, 6, 13, 3.5, 9), (2, 9, 18, 3.5, 11)\}$$

В этом множестве второй и третий векторы не являются парето-оптимальными. Следовательно, $\hat{P}(Y) = P_g(Y) = \{y^1, y^4\}$, т.е. после использования имеющейся информации множество Парето сократилось в 2 раза.

5.4. Алгебраический алгоритм пересчета векторного критерия

5.4.1. Геометрическая постановка задачи. Отношение предпочтения в условиях выполнения аксиом «разумного» выбора является конусным, причем его конус *K* включает неотрицательный ортант. Если известна дополнительная информация в форме соотношений $u^k \succ 0_m$, где $u^k \in N^m$, $k = 1,2,...,q$, то, по определению конуса отношения предпочтения, $u^k \in K, k = 1,2,...,k$. Кроме того, из аксиомы согласия следуют включения $e^k \in K, k = 1,2,...,m$. Так как конус отношения предпочтения является выпуклым, он должен содержать и весь конус, порожденный указанными векторами, т.е.

$$cone\{u^1,u^2,...,u^p,e^1,e^2,...,e^m\}\setminus\{0_m\}=M\subset K\ .$$

Из цепочки включений $K\subset M\subset R^m_+$ вытекает

$$NdomY\subset\{y\in R^m\ |\ \text{не существует } y':y'-y\in M\}\subset P(Y)\ . \tag{5.49}$$

Введем конус *Q*, двойственный для замкнутого конуса $M\cup\{0_m\}$. Так как последний конус - конечнопорожденный, двойственный к нему конус *Q* также представим в виде линейной неотрицательной комбинации конечного числа векторов: $Q=cone\{b^1,b^2,...,b^q\}$. В таком случае условие $y'-y\in M$ эквивалентно выполнению неравенств $\langle b^k,y'-y\rangle\geq 0$ для всех $k=1,2,...,p$, причем хотя бы одно неравенство должно быть строгим. Действительно, если $y'-y\in M$, то неравенства справедливы по определению двойственного конуса. Если бы все они выполнялись как равенства, то ненулевой вектор $y'-y$ (в силу $0_m\notin M$) был бы ортогонален линейной оболочке $L\{b^1,b^2,...,b^q\}$. Но тогда по определению двойственного конуса было бы выполнено не только включение $y'-y\in M$, но и $y-y'\in M$. В этом случае одновременно имели бы место соотношения $y'\succ y$ и $y\succ y'$, несовместимые с асимметричностью отношения предпочтения. Обратное утверждение очевидно: из указанных неравенств по определению двойственного конуса следует $y'-y\in M\cup\{0_m\}$, но вектор $y'-y$ не может оказаться нулевым, так как имеется по меньшей мере одно строгое неравенство.

Построим новый векторный критерий *g* следующим образом. В качестве его *k*-ой компоненты возьмем скалярное произведение $g_k(y)=\langle b^k,y\rangle$. Тогда только что установленное утверждение можно записать в виде $y'-y\in M\Leftrightarrow g(y'-y)\geq 0_q$, или, используя линейность скалярного произведения, переписать в форме $g(y')\geq g(y)$. Значит, множество в правой части (5.49) есть не что иное, как множество Парето относительно нового векторного критерия, т.е.

$$\{y\in R^m\ |\ \text{не существует } y'\in R^m:y'-y\in M\}=$$
$$=\{y\in R^m\ |\ \text{не существует } y'\in R^m:g(y')\geq g(y)\}=P_g(Y).$$

Проведенные рассуждения ведут к следующему утверждению.

Теорема 5.9. *Пусть имеется конечный набор векторов* $u^k\in N^m$*, для которых выполнено* $u^k\succ 0_m$, $k=1,2,...,p$. *Далее, пусть векторы* $b^1,b^2,...,b^q$ *порождают конус, двойственный для конуса* $cone\{u^1,u^2,...,u^p,e^1,e^2,...,e^m\}$. *Наконец, пусть компоненты векторного критерия* $g(y)$ *задаются равенствами* $g_k(y)=\langle b^k,y\rangle, k=1,2,...,q$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеют место включения*

$$C(Y) \subset P_g(Y) \subset P(Y). \tag{5.50}$$

Таким образом, задача об учете набора квантов информации сводится к задаче построения образующих конуса, двойственного к заданному острому конечнопорожденному конусу, которая будет рассмотрена в следующем разделе.

5.4.2. Нахождение образующих двойственного конуса. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задан острый конечнопорожденный конус $cone\{u^1, u^2, ..., u^p, e^1, e^2, ..., e^m\}$. Требуется определить образующие двойственного к нему острого конуса *Q*.

В общем случае, когда конус *M* имеет произвольную структуру, двойственный ему конус может не содержать ортов пространства и вообще не являться острым; эта задача решается алгоритмом Моцкина−Бургера [56]. Однако благодаря специальным свойствам упомянутого конуса, вытекающим из многокритериальной специфики, этот алгоритм может быть существенно упрощен.

Двойственный конус можно представить в виде пересечения следующих полупространств

$$Q = (\bigcap_{k=1}^{m}\{y \in R^m \mid \langle e^k, y\rangle \geqq 0\}) \cap (\bigcap_{k=1}^{p}\{y \in R^m \mid \langle u^k, y\rangle \geqq 0\}) =$$
$$= \{y \in R^m \mid y \geqq 0\} \cap (\bigcap_{k=1}^{p}\{y \in R^m \mid \langle u^k, y\rangle \geqq 0\}).$$

Введем конусы

$$Q_s = \{y \in R^m \mid y \geqq 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{s}\{y \in R^m \mid \langle u^k, y\rangle \geqq 0\}, \quad s = 0, 1, ..., p.$$

Тогда $Q_{s+1} = Q_s \cap \{y \in R^m \mid \langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0\}$ и искомый конус есть $Q = Q_p$, между тем как $Q_0 = \bigcap_{k=1}^{m}\{y \in R^m \mid \langle e^k, y\rangle \geqq 0\} = cone\{e^1, e^2, ..., e^m\}$.

Таким образом, если известен алгоритм пересчета векторов, порождающих конус *Q* при пересечении его полупространством $\{y \in R^m \mid \langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0\}$, то образующие искомого конуса *Q* можно получить за p шагов из образующих первого ортанта. Эта идея поддерживается следующим утверждением.

Теорема 5.10. *Пусть* $Q_s = cone\{a^1, a^2, ..., a^r\}$. *Разобьем векторы* $a^1, a^2, ..., a^r$ (*точнее говоря, их номера*) *на три группы в соответствии с тем, как делит пространство плоскость* $\{y \in R^m \mid \langle u^{s+1}, y\rangle = 0\}$:

$$A = \{i \mid \langle u^{s+1}, a^i\rangle > 0\}, \qquad B = \{j \mid \langle u^{s+1}, a^j\rangle < 0\}, \qquad C = \{k \mid \langle u^{s+1}, a^k\rangle = 0\}.$$

Тогда векторы

$$a^i, \quad i \in A \cup C, \quad d^{ij} = \langle u^{s+1}, a^i\rangle a^j - \langle u^{s+1}, a^j\rangle a^i, \quad \textit{где } (i, j) \in A \times B, \tag{5.51}$$

порождают конус $Q_{s+1} = Q_s \cap \{y \in R^m \mid \langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0\}$.

□ Можно убедиться, что система векторов (5.51) принадлежит пересечению $Q_s \cap \{y \in R^m \mid \langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0\}$. В самом деле, векторы d^{ij} являются линейными комбинациями векторов $a^1, a^2, ..., a^r$ с положительными коэффициентами, поэтому они принадлежат этому пересечению. Множества номеров A и C были составлены так, что $\langle u^{s+1}, a^i\rangle \geqq 0$ для всех $i \in A \cup C$. Наконец, $\langle u^{s+1}, d^{ij}\rangle = \langle u^{s+1}, a^i\rangle\langle u^{s+1}, a^j\rangle - \langle u^{s+1}, a^j\rangle\langle u^{s+1}, a^i\rangle = 0$.

Осталось показать, что всякий вектор $y \in Q_s$, удовлетворяющий неравенству $\langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0$, можно представить в виде линейной неотрицательной комбинации системы векторов (5.51). Так как $y \in Q_s$, возможно представление $y = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i a^i$, где все коэффициенты γ_i неотрицательны. Если $\sum_{i \in A} \gamma_i \langle u^{s+1}, a^i\rangle = 0$, то, благодаря неравенству $\langle u^{s+1}, y\rangle \geqq 0$, приходим к равенству $\sum_{j \in B} \gamma_j \langle u^{s+1}, a^j\rangle = 0$. Сумма неотрицательных чисел γ_i с положительными (или отрицательными) коэффициентами может быть равной нулю только в том случае, когда все эти числа равны нулю. Тогда получается, что вектор $y = \sum_{i \in C} \gamma_i a^i$ уже разложен по системе векторов (5.51).

В случае $\sum_{i \in A} \gamma_i a^i > 0_m$ выполним преобразование

$$y = \sum_{i \in A \cup C} \gamma_i a^i + \frac{\sum_{i \in A} \gamma_i \langle u^{s+1}, a^i\rangle}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} \sum_{j \in B} \gamma_j a^j = \sum_{i \in A \cup C} \gamma_i a^i + \frac{\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \gamma_i \gamma_j \langle u^{s+1}, a^i\rangle a^j}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} =$$

$$= \sum_{i \in A \cup C} \gamma_i a^i + \frac{\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \gamma_i \gamma_j (d^{ij} + \langle u^{s+1}, a^j\rangle a^i)}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} = \sum_{i \in C} \gamma_i a^i + \sum_{(i,j) \in A \times B} \frac{\gamma_i \gamma_j d^{ij}}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} +$$

$$+ \sum_{i \in A} \gamma_i \left(1 + \frac{\sum_{j \in B} \gamma_j \langle u^{s+1}, a^j\rangle}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} \right) a^i,$$

результатом которого является представление вектора y в виде линейной неотрицательной комбинации векторов (5.51):

$$1 + \frac{\sum_{j \in B} \gamma_j \langle u^{s+1}, a^j\rangle}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} = \frac{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle + \sum_{j \in B} \gamma_j \langle u^{s+1}, a^j\rangle}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} = \frac{\langle u^{s+1}, y\rangle}{\sum_{k \in A} \gamma_k \langle u^{s+1}, a^k\rangle} \geq 0 \ \blacksquare$$

Однако не все векторы набора (5.51) необходимы для порождения конуса Q_{s+1}. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим, например, $Q_s = cone\{(3,1,1),(1,3,1),(3,3,1),(1,1,1)\}$ и $u^{s+1} = (1,-1,0)$. Первый вектор, порождающий конус Q_s, лежит в положительном полупространстве, второй – в отрицательном, оставшиеся лежат в гиперплоскости $\{y \in R^m \,|\, \langle u^{s+1}, y\rangle = 0\}$. Согласно теореме 5.11, конус Q_{s+1} порождается системой векторов $\{(3,1,1),(3,3,1),(1,1,1),(8,8,4)\}$. Очевидно, последний вектор является линейной комбинацией двух предыдущих, а именно, их удвоенной суммой, и потому он лишний.

Теорема 5.11. *Вектор a^r не является ребром в наборе $a^1, a^2, ..., a^r$, порождающих некоторый острый конус, тогда и только тогда, когда он нулевой, коллинеарен какому-либо другому вектору или существуют такие неколлинеарные векторы $x, y \in cone\{a^1, a^2, ..., a^r\}$ и число $\alpha > 0$, что $x + y = \alpha \cdot a^r$.*

□ Необходимость. Если вектор a^r не является ребром, то выполнено $a^r \in cone\{a^1, a^2, ..., a^r\} = cone\{a^1, a^2, ..., a^{r-1}\}$. Следовательно, имеет место представление $a^r = \sum_{k=1}^{r-1} \gamma_k a^k$. Если все коэффициенты γ_i нулевые, то $a^r = 0_m$. Если ровно один коэффициент отличен от нуля, то вектор a^r коллинеарен соответствующей образующей. Наконец, пусть хотя бы два коэффициента ненулевые. Не умаляя общности, предположим, что один из этих коэффициентов положителен, т.е. $\gamma_1 > 0$. Тогда $a^r = \gamma_1 a^1 + \sum_{k=2}^{r-1} \gamma_k a^k$. Отсюда следует, что либо вектор a^r представлен в виде суммы двух неколлинеарных векторов, либо векторы a^r и a^1 коллинеарны.

Достаточность. Включение $cone\{a^1, a^2, ..., a^{r-1}\} \subset cone\{a^1, a^2, ..., a^r\}$ очевидно. Покажем встречное включение. Для этого возьмем вектор $z \in cone\{a^1, a^2, ..., a^r\}$. Он может быть разложен в сумму

$$z = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k a^k . \tag{5.52}$$

В самом деле, когда a^r – нулевой вектор, верно $z = \sum_{k=1}^{r-1} \gamma_k a^k \subset cone\{a^1, a^2, ..., a^{r-1}\}$. Если a^r коллинеарен одной из образующих, он также может быть исключен из суммы. Рассмотрим случай $\alpha \cdot a^r = x + y$, где x и y – два неколлинеарных вектора из конуса $cone\{a^1, a^2, ..., a^r\}$. Для этих векторов возможны представления $x = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k a^k$, $y = \sum_{k=1}^{r} \psi_k a^k$. Так как эти векторы неколлинеарны, найдутся такие $i, j, i \neq j$, что $\varphi_i > 0, a^i \neq 0_m, \psi_j > 0, a^j \neq 0_m$. В таком случае

$$a^r = \frac{x+y}{\alpha} = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi_k + \psi_k}{\alpha} a^k, \quad \left(1 - \frac{\varphi_r + \psi_r}{\alpha}\right) a^r = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi_k + \psi_k}{\alpha} a^k ,$$

причем в правой части последнего равенства хотя бы один коэффициент положителен. Выражение в скобках не может быть отрицательным, так как тогда конус $cone\{a^1,a^2,...,a^r\}$ не был бы острым. Оно не может равняться нулю, поскольку справа записан ненулевой вектор. Следовательно, выражение в скобках положительно, и вектор a^r представлен в виде линейной неотрицательной комбинации образующих $a^1,a^2,...,a^{r-1}$. Подставляя это представление в сумму (5.52), получаем разложение вектора z по образующим $a^1,a^2,...,a^{r-1}$. Таким образом, встречное включение доказано ■

Рассмотрим способы исключения из получаемых на каждом шаге тех векторов, которые не являются ребрами. Для этого будем предполагать, что все вектора, порождающие конус Q_s − ребра. Так как $Q_{s+1}\subset Q_s$, очевидно, все сохранившиеся вектора $a^k, k\in A\cup C$, остались ребрами. Действительно, в противном случае возможны два варианта: либо нашлись бы два неколлинеарных вектора $x,y\in Q_{s+1}\subset Q_s$, сумма которых коллинеарна a^k, что сразу противоречило бы тому, что a^k - ребро в конусе Q_s, либо существовала бы коллинеарный вектору a^k вектор из числа порождающих конус Q_{s+1}. Однако в силу того, что векторы, порождающие Q_s, являются ребрами, этой коллинеарной образующей должна оказаться d^{ij}. Но в таком случае вектор $a^k=\langle u^{s+1},a^i\rangle a^j+\langle -u^{s+1},a^j\rangle a^i$ оказался бы представлен в виде суммы двух неколлинеарных векторов из Q_s, и потому не мог бы быть ребром.

Известно, что ребро конуса является нормалью к (m−1)-мерной грани двойственного конуса. Это приводит к следующему способу исключения векторов, не являющихся ребрами.

Теорема 5.12. *Вектор d^{ij} конуса Q_{s+1}, не коллинеарный никакому другому вектору $d^{i'j'}$, является ребром в том и только в том случае, если $rangT(d^{ij})=m-1$, где*

$$T(d^{ij})=(\bigcup_{k=1}^{m}\{e^k\mid\langle d^{ij},e^k\rangle=0\})\cup(\bigcup_{k=1}^{s+1}\{e^k\mid\langle d^{ij},e^k\rangle=0\}).$$

□ Необходимость. Ранг набора векторов $T(d^{ij})$ не может быть равен m, так как ребро не может быть нулевым вектором. Предположим, что он меньше m−1. Тогда размерность линейной оболочки векторов $T(d^{ij})\cup\{d^{ij}\}$ меньше размерности пространства R^m, а значит, существует ненулевой вектор z, ортогональный как d^{ij}, так и всем векторам из $T(d^{ij})$.

По построению конуса Q_{s+1} вектор d^{ij} удовлетворяет неравенствам

$$\langle d^{ij},e^k\rangle\geqq 0,\ k=1,2,...,m,\quad \langle d^{ij},e^k\rangle\geqq 0, k=1,2,...,s+1.$$

Выберем число $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось

$$0\leqq\varepsilon\left|\langle z,e^k\rangle\right|\leqq\langle d^{ij},e^k\rangle,\quad k=1,2,...,m,\qquad 0\leqq\varepsilon\left|\langle z,u^k\rangle\right|\leqq\langle d^{ij},e^k\rangle,\quad k=1,2,...,s+1. \tag{5.53}$$

Это возможно, поскольку в тех случаях, когда в правой части неравенства нуль, например, $\langle d^{ij}, e^k \rangle = 0$, имеем $e^k \in T(d^{ij})$, и $\langle z, e^k \rangle = 0$, а когда в правой части положительное число, величина ε может быть выбрана достаточно малой.

Наложенные на ε условия позволяют утверждать, что

$$\langle d^{ij} \pm \varepsilon z, e^k \rangle \geqq 0,\ k = 1,2,...,m, \quad \langle d^{ij} \pm \varepsilon u^k, e^k \rangle \geqq 0, k = 1,2,...,s+1 .$$

А значит, векторы $d^{ij} \pm \varepsilon z$ принадлежат конусу Q_{s+1}. При этом они не являются коллинеарными, так как $d^{ij} \perp z$. Следовательно, вектор d^{ij} можно представить в виде полусуммы двух неколлинеарных векторов из Q_{s+1}, и, следовательно, он не является ребром.

Достаточность. Предположим теперь, что, несмотря на равенство $rangT(d^{ij}) = m-1$, вектор d^{ij} ребром не является. Отметим, что d^{ij} – ненулевой вектор, иначе все орты пространства R^m вошли бы в $T(d^{ij})$, и ранг полученного набора был бы равен *m*. Недопустимость случая коллинеарности вектора $a^k, k \in A \cup C$, была рассмотрена выше. Предположим, что существуют такие векторы $x, y \in Q_{s+1}$, что $x + y = \alpha \cdot a^r$ для некоторого $\alpha > 0$. Возьмем произвольный вектор $z \in T(d^{ij})$. Так как $x, y \in Q_{s+1}$, имеют место неравенства $\langle z, x \rangle \geqq 0, \langle z, y \rangle \geqq 0$. Однако из включения $z \in T(d^{ij})$ следует, что $\langle z, x+y \rangle = \langle z, d^{ij} \rangle = 0$. Сумма двух неотрицательных чисел может быть равной нулю, только если оба слагаемых равны нулю: $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle = 0$. Таким образом, оба вектора *x*, *y* ортогональны всем векторам из $T(d^{ij})$. Но тогда они должны быть коллинеарны, так как $rangT(d^{ij}) = m-1$. Полученное противоречие завершает доказательство ■

Вычисление ранга набора векторов можно заменить сравнением этих наборов для разных образующих. Тогда получается следующий критерий для исключения векторов, не являющихся ребрами.

Теорема 5.13. *Ненулевой вектор* d^{ij} *конуса* Q_{s+1} *не является ребром в том и только в том случае, если существует такой вектор* q *(*a^k *или* $d^{i'j'}$*) этого конуса, что* $T(d^{ij}) \subset T(q)$.

□ Необходимость. Если вектор d^{ij} не является ребром, то либо существует коллинеарный ему вектор $d^{i'j'}$, и тогда $T(d^{ij}) \subset T(d^{i'j'})$; и, тем самым, необходимость доказана, либо $rangT(d^{ij}) < m-1$. В случае выполнения последнего неравенства существует вектор *z*, ортогональный d^{ij} и всем векторам из $T(d^{ij})$, а также число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенствам (5.53). Среди всех таких чисел ε выберем наибольшее, другими словами, возьмем

$$\varepsilon = \min_{t \in T \setminus T(d^{ij})} \frac{\langle d^{ij}, t \rangle}{|\langle z, t \rangle|}, \qquad (5.54)$$

где $T = \{u^1, u^2, ..., u^{s+1}, e^1, e^2, ..., e^m\}$. По построению оба вектора $d^{ij} \pm \varepsilon z$ принадлежат конусу Q_{s+1}, при этом один из них ортогонален вектору $\bar{t} \in T(d^{ij})$, на котором достигался минимум в (5.54). Возьмем разложение этого вектора по ребрам конуса Q_{s+1}, из которых исключен вектор d^{ij}. Так как $d^{ij} \pm \varepsilon z \in Q_{s+1}$, найдется хотя бы один вектор q, входящий в это разложение с положительным коэффициентом. Так как он принадлежит d^{ij}, неравенство $\langle q,t\rangle \geqq 0$ выполнено для всех $t \in T$. Но сумма подобных векторов с положительными коэффициентами даст вектор, ортогональный $\{\bar{t}\} \cup T(d^{ij})$. Это возможно только в том случае, если $\{\bar{t}\} \cup T(d^{ij}) \subset T(q)$, следовательно, $T(d^{ij}) \subset T(q)$.

Достаточность. Если имеет место включение $T(d^{ij}) \subset T(q)$, то $rangT(d^{ij}) \leqq m-1$. В случае, когда выполнено равенство $rangT(d^{ij}) = m-1$, векторы d^{ij} и q принадлежат одномерному линейному пространству и, следовательно, коллинеарны. Это означает, что d^{ij} не является ребром. Если же $rangT(d^{ij}) < m-1$, то требуемое следует из предыдущей теоремы ■

Отметим, что среди векторов d^{ij} не может быть нулевого вектора, так как они являются неотрицательными линейными комбинациями ненулевых ребер a^i, a^j.

Наконец, рассмотрим еще один специальный случай, который может возникнуть по ходу алгоритма. А именно, пусть на некотором шаге при построении конуса Q_{s+1} оказалось $A = \varnothing$. Это означает, что все векторы q конуса Q_s удовлетворяют неравенству $\langle q,u^{s+1}\rangle \leqq 0$. Но тогда $\langle q,-u^{s+1}\rangle \geqq 0$, и вектор $-u^{s+1}$ принадлежит конусу, двойственному к Q_s, а именно, $-u^{s+1} \in cone\{u^1,u^2,...,u^s,e^1,e^2,...,e^m\}$. Из аксиомы согласования следует $e^k \succ 0_m$, $k = 1,2,...,m$, а по определению кванта информации выполнено $u^k \succ 0_m$, $k = 1,2,...,s$. Отсюда на основании аксиомы инвариантности можно вывести $-u^{s+1} \succ 0_m$. Но по условию задания кванта информации верно соотношение $u^{s+1} \succ 0_m$. Отсюда вытекает противоречие $u^{s+1} + (-u^{s+1}) = 0_m \succ 0_m$, которое свидетельствует о противоречивости имеющегося набора квантов информации.

3. Алгоритм учета квантов информации. Опишем алгоритм учета квантов информации, заданных с помощью произвольного набора векторов $u^1,u^2,...,u^p \in N^m$.

Перед началом работы алгоритма следует инициализировать *список образующих* (*ребер*) ортами $e^1,e^2,...,e^m$.

На каждом шаге $s = 1,2,...,p$ векторы $q^1,q^2,...,q^{r_s}$ делятся на три группы:

$$A = \{i \mid \langle u^s,q^i\rangle > 0\}, \qquad B = \{i \mid \langle u^s,q^j\rangle < 0\}, \qquad C = \{k \mid \langle u^s,q^k\rangle = 0\}.$$

Если $A = \varnothing$, набор имеющихся квантов информации, в котором участвуют векторы $u^1,u^2,...,u^p$, противоречив и работа алгоритма останавливается. В противном случае в новый список векторов включаются векторы q^i при $i \in A \cup C$. Далее перебираются пары $(i,j) \in A \times B$, и в новый список векторов добавляется вектор $d^{ij} = \langle u^s,a^i\rangle a^j - \langle u^s,a^j\rangle a^i$, если множество

$$T(d^{ij}) = (\bigcup_{k=1}^{m}\{e^k \mid \langle d^{ij}, e^k \rangle = 0\}) \cup (\bigcup_{k=1}^{s}\{u^k \mid \langle d^{ij}, u^k \rangle = 0\})$$

не содержится ни в одном подобном множестве $T(q)$ для уже включенной в новый список образующей q.

Полученные после p шагов в списке векторы $q^1, q^2, ..., q^{r_p}$ являются ребрами двойственного конуса и позволяют построить новый векторный критерий по формуле $g(y) = (g_1(y), g_2(y), ..., g_{r_p}(y))$, где $g_k(y) = \langle q^k, y \rangle$, $k = 1,2,...,r_p$. Множество Парето относительно нового критерия g даст искомую оценку сверху (5.50).

5.5. Сужение конечного множества Парето

5.5.1. Идея подхода. Рассмотрим ситуацию, когда информация об отношении предпочтения содержит произвольный конечный набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \quad u^i - v^i \in N^m, \ i = 1,2,...,k,$$

для которых выполнены соотношения $u^i \succ v^i$, $i = 1,2,...,k$. Напомним, что множество N^m составляют все m-мерные векторы, имеющие по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательные компоненты.

Введем выпуклый конус M (без нуля), порожденный векторами

$$e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, ..., u^k - v^k. \tag{5.55}$$

Все указанные векторы принадлежит острому выпуклому конусу K, который задает конусное отношение предпочтения $\succ$. Поэтому справедливо включение $M \subset K$, а значит конус M – острый. Кроме того, благодаря аксиоме Парето, он содержит неотрицательный ортант R_+^m, т.е. $R_+^m \subset M$.

Обозначим через $\succ_M$ конусное отношение с конусом M. Это конусное отношение относится к отношениям того же класса, что и исходное отношение $\succ$. Следует, правда, заметить, что отношение $\succ$ удовлетворяет еще и аксиоме 1, а для отношения $\succ_M$ она может оказаться не выполненной. Но ее выполнение для дальнейшего и не понадобится.

Таким образом, имеются два конусных отношения $\succ$ и $\succ_M$, которые в силу включения $M \subset K$ связаны друг с другом импликацией

$$y' \succ_M y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$$

для всех $y', y'' \in R^m$.

Наличие этой связи приводит к тому, что

$$\mathrm{Ndom}Y \subset \mathrm{Ndom}_M Y\,, \tag{5.56}$$

где

$$\mathrm{Ndom}_M Y = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_M y^*\}.$$

Включение (5.56) означает, что множество $\mathrm{Ndom}_M Y$ является оценкой сверху для множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}Y$, а значит и для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$. Благодаря конечности множества Y, в результате прямого перебора всех пар его элементов, можно построить множество $\mathrm{Ndom}_M Y$. Оно представит в общем случае более узкое множество, чем множество Парето, и, тем самым, за счет удаления некоторых парето-оптимальных векторов произойдет сужение множества Парето. В этом и заключается суть подхода, предлагаемого ниже.

5.5.2. Мажорантное отношение. Конусное отношение $\succ_M$ с острым выпуклым конусом M (без нуля), порожденным векторами (5.55), будем называть *мажорантным отношением*. Это наименование обуславливается тем, что на его основе далее будет построена оценка сверху (т.е. мажоранта) для множества выбираемых векторов.

Предлагаемый подход основан на применении следующего утверждения.

Теорема 5.14. *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда равно нулю оптимальное значение целевой функции в следующей канонической задаче линейного программирования*

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \xi_s = |\, y'_s - y''_s \,|, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{5.57}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \geqq 0.$$

Здесь символ $\operatorname{sign}(a)$ определяется равенством

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0 \text{ или } a = 0 \\ -1, \text{ если } a < 0 \end{cases}.$$

□ Прежде всего заметим, что соотношение $y' \succ_M y''$ выполняется тогда и только тогда, когда верно включение $y' - y'' \in M$, что равносильно выполнению равенства

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u^i - v^i) = y' - y'' \tag{5.58}$$

при некотором N-решении $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$. В свою очередь, равенство (5.58) при указанном решении имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) = | y'_s - y''_s |, \quad s = 1, 2, ..., m. \qquad (5.59)$$

Далее, для того чтобы выполнялись равенства (5.59) при некотором N-решении $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ необходимо и достаточно, чтобы каноническая задача линейного программирования (5.57) имела оптимальное решение, в котором $\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_m = 0$. Последнее эквивалентно равенству нулю оптимального значения целевой функции в задаче линейного программирования (5.57) ■

В соответствии с теоремой 5.14 проверка соотношения $y' \succ_M y''$ сводится к решению канонической задачи линейного программирования (5.57). Это решение может быть осуществлено с помощью известного алгоритма симплекс-метода. Такой способ проверки соотношения $y' \succ_M y''$ удобен при создании общего алгоритма построения оценки сверху в случае конечного множества возможных векторов Y. Если же требуется решить задачу невысокой размерности «вручную», то более удобным оказывается использование следующего результата, который представляет собой частный случай теоремы 5.14, установленный в ходе доказательства этой теоремы.

Следствие 5.3. *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений* (5.58) *имеет N-решение* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$.

5.5.3. Пример. Пусть $m = 3,\ k = 2,\ Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где

$$y^1 = (1,\ 4.5,\ 2),\ y^2 = (2,\ 3,\ 1),\ y^3 = (3,\ 2,\ 1.5),\ y^4 = (5,\ 1.5,\ 2),$$

$$u^1 = (0,\ 5,\ 1),\ v^1 = (2,\ 2,\ 0),\ u^2 = (5,\ 0,\ 2),\ v^2 = (1,\ 1,\ 1).$$

Поскольку

$$u^1 - v^1 = (-2,\ \ 3,\ \ 1),\ \ u^2 - v^2 = (4,\ -1,\ 1),$$

данные две пары векторов u^1, v^1, u^2, v^2 могут задавать (если они непротиворечивы) пару квантов информации. Первый квант свидетельствует о том, что группа из второго и третьего критериев, более значима, чем первый критерий. Второй квант содержит информацию о большей значимости группы, состоящей из первого и третьего критериев по сравнению со вторым критерием.

Сначала убедимся в непротиворечивости имеющейся пары квантов. Для этого воспользуемся теоремой 4.2 и запишем для данного случая однородную систему линейных уравнений (4.4):

$$\lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = 0$$
$$\lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Из последнего уравнения, благодаря неотрицательности чисел λ_3, μ_1, μ_2, следует их равенство нулю: $\lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. В таком случае из первого и второго уравнений получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, рассматриваемая система линейных уравнений не имеет *N*- решений. Согласно теореме 4.2 это означает совместность двух данных пар векторов.

Теперь построим оценку сверху для множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}\,Y$ (а значит, и для множества выбираемых векторов $C(Y)$). С этой целью сначала запишем систему линейных уравнений (5.57) для векторов $y' = y^1$ и $y'' = y^2$:

$$\lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = -1$$
$$\lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = 1.5$$
$$\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Она имеет *N*-решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$, $\lambda_3 = \mu_1 = 0.5$. Следовательно, выполняется соотношение $y^1 \succ_M y^2$, а значит вектор y^2 не может входить в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\,Y$.

Для векторов $y' = y^4$ и $y'' = y^3$ система линейных уравнений (5.58) принимает вид

$$\lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = 2$$
$$\lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = -0.5$$
$$\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0.5.$$

У этой системы имеется *N*-решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.5$. Поэтому вектор y^3 так же не входит в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\,Y$.

Выпишем пару систем линейных уравнений (5.58) для векторов $y' = y^1$, $y'' = y^4$ и $y' = y^4$, $y'' = y^1$:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = -4 \qquad && \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = 4 \\ &\lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = 3 && \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = -3 \\ &\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0 && \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что ни одна из этих двух систем не имеет *N*-решений, а значит, ни одно из соотношений $y^1 \succ_M y^4$, $y^4 \succ_M y^1$ не выполняется.

В итоге получено следующее двухэлементное множество недоминируемых векторов

$$\mathrm{Ndom}_M\, Y = \{y^1, y^4\}\,.$$

Это множество представляет собой оценку сверху для множества выбираемых векторов $C(Y)$, т.е. $C(Y) \subset \{y^1, y^4\}$. Как видим, ни один из возможных векторов y^2, y^3 не вошел в это множество, а значит, ни один из них заведомо не должен оказаться выбранным.

5.5.4. Алгоритм построения оценки сверху. Здесь будем считать, что множество векторов Y состоит из конечного числа элементов:

$$Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}\,.$$

Алгоритм построения множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ состоит из следующих восьми шагов.

Шаг 1. Прежде всего, надлежит проверить непротиворечивость набора пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, для которых выполняется $u^i - v^i \in N^m$, $i = 1,2,...,k$. Такая проверка сводится к решению канонической задачи линейного программирования (4.6). Если в результате решения этой задачи оптимальное значение целевой функции оказалось равным нулю, то вычисления следует закончить, так как данный набор пар векторов противоречив. Если же это значение положительно, то необходимо перейти к следующему шагу.

Шаг 2. Положить $\mathrm{Ndom}_M\, Y = Y,\ i = 1,\ j = 2$. Тем самым, образуется так называемое *текущее множество недоминируемых векторов*, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y, а в конце – составит искомую оценку сверху. Алгоритм устроен таким образом, что эта оценка получается из Y последовательным удалением заведомо доминируемых векторов.

Шаг 3. Проверить выполнение соотношения $y^i \succ_M y^j$. Для этого нужно решить каноническую задачу линейного программирования (5.58) при $y' = y^i$, $y'' = y^j$. Если оптимальное значение целевой функции в этой задаче оказалось равным нулю, то перейти к Шагу 4. В противном случае (т.е. когда это значение положительно) перейти к Шагу 6.

Шаг 4. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ вектор y^j, так как он не может входить в это множество.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 3. В противном случае – перейти к Шагу 8.

Шаг 6. Проверить справедливость соотношения $y^j \succ_M y^i$. Для этого необходимо решить каноническую задачу линейного программирования (4.6) при $y' = y^j$, $y'' = y^i$. В том случае, когда оптимальное значение целевой функции этой задачи окажется равным нулю, перейти к Шагу 7. В противном случае (т.е. когда это оптимальное значение положительно) – вернуться к Шагу 5.

Шаг 7. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ вектор y^i.

Шаг 8. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 3. В противном случае (т.е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество недоминируемых векторов построено полностью.

Глава 6. Полнота наборов квантов информации

Здесь дается теоретическое обоснование предлагаемого в книге аксиоматического метода сужения множества Парето на основе конечного набора квантов информации. Изложение данной главы является наиболее сложным в математическом отношении, поэтому она без ущерба для понимания дальнейшего материала может быть пропущена читателями, не имеющими соответствующей подготовки.

Существо полученных ниже результатов можно выразить следующим образом: информация в виде квантов полна в том смысле, что только на ее основе для любой задачи определенного достаточно широкого класса можно с любой степенью точности определить неизвестное множество недоминируемых векторов (недоминируемых вариантов). Если же число возможных векторов конечно, то множество недоминируемых векторов может быть построено точно и полностью. Таким образом, научившись выявлять кванты информации об отношении предпочтения ЛПР, можно успешно находить множество недоминируемых вариантов и векторов, не привлекая информации никакого другого типа.

6.1. Предварительное рассмотрение

6.1.1. Постановка задачи. Наличие кванта информации позволяет удалить определенные парето-оптимальные векторы как заведомо неприемлемые и, тем самым, получить более точную оценку сверху (аппроксимацию) для множества выбираемых векторов, чем множество Парето. Если же таких квантов информации имеется некоторый конечный набор, то можно надеяться, что с его помощью удастся построить еще более точную (более узкую) оценку сверху. Из общих соображений ясно, что, располагая все большим набором квантов информации, можно строить все более точную оценку сверху. В связи с этим, возникает следующий вопрос: каковы границы использования конечного набора квантов информации об отношении предпочтения ЛПР?

Прежде чем продолжить рассмотрение, отметим следующее. Благодаря лемме 1.2 множество выбираемых векторов должно содержаться в множестве недоминируемых векторов. Более того, имея дело с классом задач многокритериального выбора, ограниченных рамками аксиом 1 – 4, ясно, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых векторов. Иными словами, информация об отношении предпочтения ЛПР и наличие набора критериев, удовлетворяющих аксиомам 1 – 4, не позволяют исключить как заведомо неприемлемый ни один из недоминируемых векторов. Поэтому самой узкой оценкой сверху для множества выбираемых векторов в рассматриваемой модели будет множество недоминируемых векторов. По этой причине мы будем далее говорить об аппроксимации (приближении) не множества выбираемых, а множества недоминируемых векторов.

Более точно поставленный выше вопрос можно сформулировать следующим образом: *возможно ли, используя лишь конечный набор квантов информации, получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов*? Оказывается, на этот вопрос в принципе можно ответить положительно. В принципе – так как придется несколько сузить класс рассматриваемых задач многокритериального выбора, уже ограниченных рамками аксиом 1 – 4.

Ниже будет показано, что для определенного класса задач многокритериального выбора нужно лишь научиться извлекать и грамотно использовать кванты информации. Этого вполне достаточно для того, чтобы, по крайней мере, теоретически получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов. Такое положение свидетельствует о важной роли квантов информации в процессе принятия решений.

6.1.2. Геометрические аспекты. Сформулируем поставленный выше вопрос в геометрических терминах.

В соответствии с определением 3.3 наличие кванта информации означает, что задан вектор $u \in N^m$, имеющий по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты, для которого выполняется соотношение $u \succ 0_m$. В том случае, когда имеется конечный набор подобного типа информации, соответственно получаем набор таких векторов $u^i \in N^m$: $u^i \succ 0_m$, $i = 1,2,...,k$. Если данный набор векторов непротиворечив (точнее говоря, непротиворечивым является набор пар векторов $u^i, 0_m$, $i = 1, 2, ..., k$), то выпуклый конус M, порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k$, представляет собой совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций этих векторов и является острым выпуклым конусом (без нуля). Он задает конусное отношение, обозначаемое далее $\succ_M$.

Поставленный в предыдущем пункте вопрос о полноте набора квантов информации теперь в геометрических терминах примет следующую форму: насколько близким к неизвестному отношению предпочтения $\succ$ можно получить отношение $\succ_M$, используя лишь различного рода конечные непротиворечивые наборы векторов $u^1, u^2, ..., u^k$. Другими словами, *имеется ли принципиальная возможность за счет выбора указанного набора векторов сколь угодно точно приблизить отношение $\succ_M$ к неизвестному отношению предпочтения $\succ$?*

Для упрощения последующего решения поставленный вопрос переведем в плоскость конусов отношений и сформулируем его так: *возможно ли за счет выбора набора векторов $u^1, u^2, ..., u^k$ получить конус M сколь угодно близким к неизвестному конусу K*[14]? При этом число векторов k не фиксировано и может быть любым конечным числом.

Конус K является произвольным острым выпуклым конусом и не содержит нуля. Что касается конуса M, то он принадлежит тому же классу, что и K, т.е. так же является острым, выпуклым и не содержит нуля. Однако в отличие от K конус M порожден конечным числом векторов, а значит он – конечнопорожденный, т.е. многогранный. В такой постановке вопрос о полноте квантов информации имеет много общего с известной в выпуклом анализе задачей аппроксимации произвольного выпуклого компактного множества многогранником. Как известно, эта задача имеет положительное решение – произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество можно сколь угодно точно аппроксимировать (приблизить) многогранником. Поэтому есть все основания надеяться, что аналогичный вопрос, сформулированный для конусов (когда произвольный выпуклый конус нужно аппроксимировать многогранным конусом) найдет свое положительное решение. Но для того чтобы получить это решение, прежде всего необходимо договориться об измерении расстояния между выпуклыми конусами.

6.1.3. Расстояние между конусами. Пусть A и B – произвольные непустые выпуклые подмножества пространства R^m. Как известно (см. [16]), *хаусдорфово расстояние* между данными множествами может быть определено формулой

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{r \in R_+ \mid A \subset (B)_r,\ B \subset (A)_r\},$$

где R_+ означает множество положительных вещественных чисел,

[14] Напоминаем, что K – острый выпуклый конус отношения $\succ$.

$$(A)_r = \bigcup_{y \in A} U_r(y), \qquad (B)_r = \bigcup_{y \in B} U_r(y),$$

и $U_r(y)$ ($r > 0$) – замкнутый шар в пространстве R^m с центром в y и радиусом r:

$$U_r(y) = \{z \in R^m \mid \|z - y\| \leqq r\},$$

Символом $\|a\|$ здесь обозначена евклидова норма (длина) вектора $a \in R^m$, т.е.

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2}\,.$$

В частном случае, когда A и B – одноэлементные множества $\{a\}$ и $\{b\}$ соответственно, хаусдорфово расстояние между ними совпадает с евклидовым и равно норме разности этих векторов, т.е. $\|a - b\|$.

Следующий результат показывает, что непосредственное применение хаусдорфова расстояния для измерения расстояния между выпуклыми конусами наталкивается на определенные трудности, которые, впрочем, далее будут преодолены.

Лемма 6.1. *Пусть K_1 и K_2 – произвольные два выпуклых конуса в пространстве R^m, не содержащие начало координат, причем $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$, где черта сверху означает замыкание множества*[15]. *Тогда имеет место равенство*

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) = +\infty.$$

□ Из неравенства $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$ следует, что найдется точка $y \in R^m$, такая что $y \in \bar{K}_1,\ y \notin \bar{K}_2$, либо найдется такая точка $y \in R^m$, для которой $y \in \bar{K}_2,\ y \notin \bar{K}_1$. Для определенности продолжим рассмотрение первого случая, так как второй разбирается аналогично.

Из соотношений $y \in \bar{K}_1,\ y \notin \bar{K}_2$ вытекает существование такой точки y', что $y' \neq 0_m$ и $y' \in K_1,\ y' \notin \bar{K}_2$. Рассмотрим луч (частный случай конуса), исходящий из начала координат и проходящий через y'. Обозначим этот луч l. Для него выполнены соотношения $l \subset K_1,\ l \not\subset \bar{K}_2$.

Норма $\| y' - y \|$, как функция переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, непрерывна и ограничена снизу на конусе K_2. Поэтому найдется предельная для множества K_2 точка $\hat{y} \in R^m$, для которой выполняется равенство

$$\inf_{y \in K_2} \|y' - y\| = \| y' - \hat{y} \|,$$

причем $\hat{y} \neq y'$. Выберем на луче l последовательность точек $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$y^k = k y', \qquad k = 1,2,\ldots$$

Для точек этой последовательности имеем

---

[15] Операция *замыкания множества* состоит в присоединении к нему всех его граничных точек.

$$\inf_{y\in K_2}\left\|y^k - y\right\| = \inf_{y\in K_2}\left\|k y' - y\right\| = k \inf_{y\in K_2} \| y' - \frac{y}{k} \| = k \inf_{ky\in K_2} \| y' - y \| = k \| y' - \hat{y} \| \underset{k\to\infty}{\to} +\infty ,$$

откуда немедленно следует требуемое равенство $\operatorname{dist}(K_1, K_2) = +\infty$ ■

В соответствии с доказанной леммой хаусдорфово расстояние между двумя «существенно несовпадающими» конусами (замыкания которых не совпадают) всегда равно $+\infty$. Поэтому измерять близость конусов бинарных отношений с помощью этого расстояния не представляется возможным.

Пусть K есть выпуклый конус в пространстве R^m, а Y – подмножество того же пространства. Введем множество

$$Y_z = \{y \in Y \mid y - z \in K\}$$

для каждого $z \in Y$. Если существует такая положительная константа r, что для любого $z \in Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{y\in Y_z}\left\|y - z\right\| \leqq r ,$$

то множество Y называют K*-ограниченным.* Нетрудно проверить, что всякое ограниченное множество является K-ограниченным, тогда как обратное утверждение в общем случае места не имеет.

Теперь пусть Y есть множество возможных векторов, а K – выпуклый конус конусного отношения предпочтения $\succ$. Предположим, что имеет место соотношение $y' \succ y''$ для векторов $y', y'' \in R^m$. Это равносильно выполнению включения $y' - y'' \in K$. Если допустить, что множество Y является K-ограниченным, то справедливо неравенство $\left\|y' - y''\right\| \leqq r$ или, что то же самое, верно включение

$$y' - y'' \in K \cap U_r(0_m) .$$

Таким образом, для K-ограниченного множества возможных векторов Y истинна эквивалентность

$$y' - y'' \in K \Leftrightarrow y' - y'' \in K \cap U_r(0_m) .$$

Это означает, что для K-ограниченного множества Y вопрос близости конусов равнозначен вопросу близости лишь тех частей конусов, которые расположены в шаре $U_r(0_m)$.

Приведенные рассуждения обосновывают введение следующего определения. *Расстояние между конусами* K_1 *и* K_2 будем обозначать $d_r(K_1, K_2)$; оно определяется формулой

$$d_r(K_1, K_2) = \operatorname{dist}(K_1 \cap U_r(0_m),\ K_2 \cap U_r(0_m)) , \tag{6.1}$$

где r - некоторое (достаточно большое) положительное число. Введенное расстояние обладает стандартными свойствами метрики (см. [16]):

1) $d_r(K_1,K_2) \geqq 0$

2) $d_r(K_1,K_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{K}_1=\bar{K}_2$

3) $d_r(K_1,K_2)=d_r(K_2,K_1)$

4) $d_r(K_1,K_3) \leqq d_r(K_1,K_2)+d_r(K_2,K_3)$

для любых выпуклых конусов K_1,K_2,K_3.

Пусть $K_3 \subset K_2 \subset K_1$. Тогда, как нетрудно понять, имеет место неравенство

$$d_r(K_1,K_2) \leqq d_r(K_1,K_3).$$

6.2. Первая теорема о полноте

6.2.1. Постановка математической задачи. Бинарное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе принятия решений, благодаря аксиомам 2 – 4 является конусным с острым выпуклым конусом K без начала координат. Поэтому пусть имеется произвольный острый выпуклый конус $K, K \subset R^m$, который не содержит начало координат и в силу аксиомы Парето включает неотрицательный ортант R_+^m. Следует заметить, что в общем случае конус K не является многогранным.

Как указано в предыдущем разделе, наличие конечного набора квантов информации равносильно заданию некоторого непротиворечивого конечного набора векторов $u^1,u^2,\ldots,u^k \in N^m$, которые вместе с единичными ортами $e^1,e^2,\ldots,e^m$ порождают многогранный конус M, содержащийся в конусе K.

Математическая постановка рассматриваемого вопроса выглядит следующим образом: *возможно ли за счет выбора указанных выше векторов* $u^1,u^2,\ldots,u^k$ (*при этом число* k *векторов конечно, но не фиксировано*) *добиться того, чтобы расстояние* $d_r(K,M)$ *между конусами* K *и* M *было сколь угодно малым*?

Ответ на поставленный вопрос дается в следующей теореме.

6.2.2. Первая теорема о полноте.

Теорема 6.1. *Пусть* K *– произвольный острый выпуклый конус, не содержащий начала координат, и такой, что* $K \subset R^m$, $K \supset R_+^m$, $K \neq R_+^m$. *Выберем и зафиксируем произвольное положительное* r. *Тогда для любого положительного числа* ε *найдется такой конечный набор векторов*

$$\{u^i\}_{i=1}^k \subset R^m, \quad u^i \in N^m \cap K \cap U_r(0_m), \quad i=1,2,\ldots,k,$$

что

$$d_r(K,\ \mathrm{cone}\{e^1,e^2,\ldots,e^m,u^1,u^2,\ldots,u^k\})<\varepsilon, \tag{6.2}$$

где $\mathrm{cone}\{e^1,e^2,\ldots e^m\ u^1\ u^2\ ,\ldots u^k$ *– выпуклый конус, порожденный конечным набором векторов* $e^1,e^2,\ldots,e^m,u^1,u^2,\ldots,u^k$.

Более того, при этом можно считать, что компоненты всех векторов u^i *являются рациональными числами.*

□ Примем обозначения

$$\hat{K} = K \cap U_r(0_m), \quad \operatorname{int}\hat{K} = \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} U_r(0_m).$$

Зафиксируем произвольное положительное ε. Введем $\varepsilon/2\sqrt{m}$-сеть пространства R^m. Очевидно, диагональ куба указанной сети равна $\varepsilon/2$.

Выделим все кубы данной сети, пересекающиеся с множеством $\operatorname{int}\hat{K}$. Благодаря ограниченности последнего множества, число выделенных кубов конечно. Обозначим их через $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_l$. Пусть

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j .$$

По построению, $\operatorname{int}\hat{K} \subset \Pi$. Следовательно, замыкание множества $\operatorname{int}\hat{K}$ является подмножеством замыкания множества Π, которое в силу замкнутости совпадает с самим множеством Π. А так как $\hat{K}$ содержится в замыкании множества $\operatorname{int}\hat{K}$, то $\hat{K} \subset \Pi$. Следовательно, Π – покрытие множества $\hat{K}$.

Нетрудно понять, что в каждом пересечении $\Pi_j \cap \operatorname{int}\hat{K}$ можно выбрать точку u^j с рациональными компонентами, $j = 1,2,...,l$. Введем выпуклую оболочку[16] всех таких точек u^j и обозначим ее P. Это множество представляет собой некоторый многогранник.

Так как $\hat{K}$ – выпуклое множество и $u^j \in \hat{K}$, $j = 1,2,...,l$, то $P \subset \hat{K}$, а значит и

$$P \subset (\hat{K})_\varepsilon. \tag{6.3}$$

С другой стороны, есть точки, одновременно принадлежащие $\hat{K}$ и не принадлежащие P. Поскольку Π – покрытие $\hat{K}$, то каждая из таких точек удалена от P не более чем на длину диагонали куба введенной сети, т.е. на $\varepsilon/2$. Поэтому заведомо выполняется включение $\hat{K} \subset (P)_\varepsilon$, которое вместе с (6.3) влечет неравенство

$$\operatorname{dist}(\hat{K}, P) < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Нетрудно понять, что

$$P \subset (\operatorname{cone}\{P\}) \cap U_r(0_m) \subset \hat{K}.$$

Поэтому из (6.4) с учетом выписанных выше включений и равенства $\operatorname{cone}\{P\} = \operatorname{cone}\{u^1, u^2, ..., u^l\}$ можно написать

$$\operatorname{dist}(\hat{K}, \operatorname{cone}\{u^1, u^2, ..., u^l\} \cap U_r(0_m)) < \varepsilon. \tag{6.5}$$

[16] *Выпуклой оболочкой* данного множества называют наименьшее выпуклое множество, содержащее это множество.

В свою очередь, из (6.5) в силу $R_+^m \subset K$ получаем неравенство

$$\operatorname{dist}(\hat{K}, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^l\} \cap U_r(0_m)) < \varepsilon .$$

Оно совпадет с доказываемым неравенством (6.2), если из векторов $u^1, u^2, ..., u^l$ удалить все "лишние", т.е. те, которые принадлежат неотрицательному ортанту R_+^m, и оставшийся набор векторов обозначить $u^1, u^2, ..., u^k$ ■

6.3. Вторая теорема о полноте

6.3.1. Пример. В предыдущем разделе было установлено, что при определенных условиях конус неизвестного отношения предпочтения можно сколь угодно точно аппроксимировать «изнутри» многогранным конусом, соответствующим некоторому конечному набору квантов информации об отношении предпочтения ЛПР. Следует отметить, что близость конусов двух данных отношений (измеряемая расстоянием по формуле (6.1)) в общем случае не влечет близость самих бинарных отношений, а значит и множеств недоминируемых векторов, построенных на основе этих отношений. Подтверждение тому – следующий простой пример.

Пример 6.1. Пусть $m = 2$, плоское множество возможных векторов (точек) имеет вид отрезка

$$Y = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid \ y_1, y_2 \geqq 0, \ y_1 + y_2 = 1\},$$

а острый выпуклый конус K задается равенством

$$K = (\operatorname{cone}\{(1, 0), (-1, 1)\}) \setminus \{0_m\}.$$

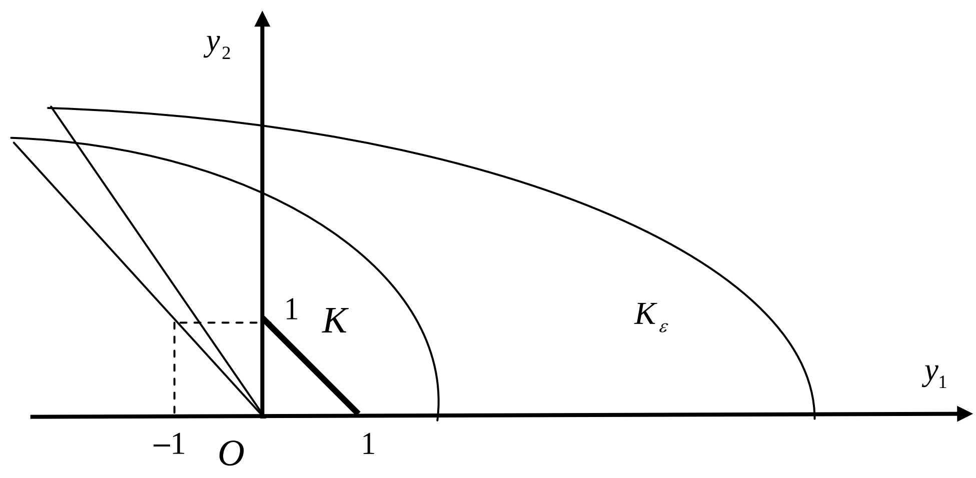

Рис. 6.1.

Здесь точка $(0,\ 1) \in Y$ доминирует (имеется в виду доминирование относительно конусного отношения с конусом K) над всеми остальными точками выделенного на рис. 6.1 отрезка, соединяющего эту точку с точкой $(0,\ 1)$. В частности, выполнено соотношение $(0,\ 1) \succ (1,\ 0)$, так как $(0,\ 1)-(1,\ 0)=(-1,\ 1)\in K$.

Теперь немного изменим K. Вместо него рассмотрим конус

$$K_\varepsilon = (\text{cone}\{(1,0),(-1,1+\varepsilon)\})\setminus\{0_m\},$$

где $\varepsilon\in(0,1)$ (см. рис. 6.1). Выбирая положительное число ε достаточно малым, конус K_ε можно сделать сколь угодно близким к конусу K (измеряя близость при помощи расстояния по формуле (6.1)). С другой стороны, каким бы малым положительное ε не выбрать, конусное отношение с конусом K_ε не будет близким к отношению с конусом K, поскольку для последнего множество недоминируемых точек будет состоять из одной точки $(0,\ 1)$ отрезка, соединяющего $(0,\ 1)$ и $(1,\ 0)$, а для отношения с конусом K_ε (при любом $\varepsilon\in(0,1)$) множество недоминируемых точек будет составлять весь указанный отрезок.

6.3.2. Вторая теорема о полноте. Анализ примера 6.1 показывают, что если конус K не является открытым множеством, то при "небольшом" изменении этого конуса соответствующее ему множество недоминируемых точек может измениться значительно. Однако если ограничиться отношениями предпочтения с открытыми конусами, то множество недоминируемых точек относительно произвольного отношения, удовлетворяющего всем указанным в теореме 6.1 свойствам, может быть получено как предел последовательности множеств недоминируемых точек относительно некоторых конусных отношений, построенных на основе набора квантов информации. Точнее говоря, имеет место следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть K – открытый острый выпуклый конус, не содержащий начала координат и $K\supset R_+^m$, $K\neq R_+^m$. Допустим, что множество Y является K-ограниченным. Тогда существует такая последовательность векторов*

$$\{u^s\}_{s=1}^{\infty},\quad u^s\in N^m\cap K,\quad s=1,2,...$$

с рациональными компонентами, что имеет место сходимость

$$\text{Ndom}_{\succ_s} Y \to \text{Ndom}\,Y \quad \text{при } s\to\infty, \tag{6.6}$$

где $\succ_s$ – конусное отношение, порожденное острым выпуклым конусом $\text{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^s\}$ без начала координат, $s=1,2,...$

Замечание. Сходимость в формуле (6.6) последовательности множеств недоминируемых векторов означает так называемую «поточечную» сходимость множеств, определяемую следующим образом: точка (вектор) $y^*\in Y$ принадлежит предельному множеству (т.е. $y^*\in \text{Ndom}\,Y$) тогда и только тогда, когда существует такое натуральное s_0, что включение $y^*\in\text{Ndom}_{\succ_s} Y$ имеет место для всех натуральных $s>s_0$.

□ Положим $\varepsilon = 1/n$. Применяя доказательство теоремы 6.1, при $n=1$ получим существование набора векторов $u^1,u^2,...,u^k$, для которых

$$d_r(K,\ \text{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^k\})<1.$$

При $n=2$ аналогично найдется, вообще говоря, другой набор векторов $u^{k+1},...,u^{k+p}$, для которых

$$d_r(K,\ \mathrm{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^{k+1},u^{k+2},...,u^{k+p}\})<\frac{1}{2}.$$

Поскольку при «расширении» конуса $\mathrm{cone}\{u^{k+1},...,u^{k+p}\}$ за счет добавления полученных ранее образующих $u^1,...,u^k\in K$ расстояние между K и указанным способом «расширенным» конусом $\mathrm{cone}\{u^1,...,u^k,u^{k+1},...,u^{k+p}\}$ становится разве что меньше, то

$$d_r(K,\ \mathrm{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^k,u^{k+1},u^{k+2},...,u^{k+p}\})<\frac{1}{2}.$$

Рассуждая подобным образом, придем к существованию такой последовательности векторов $\{u^s\}_{s=1}^{\infty}$, что для каждого натурального n найдется номер s_n, при котором верно неравенство

$$d_r(K,\ \mathrm{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^s\})<\frac{1}{n},\qquad s=s_n,s_n+1,... \tag{6.7}$$

Введем выпуклые замкнутые конусы

$$C_s=\mathrm{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^s\},\qquad s=1,2,...$$

Очевидно, $C_s\subset C_{s+1}\subset K\cup\{0_m\}$, $s=1,2,...$ Кроме того, в соответствии с неравенством (6.7) для любого n существует номер s_n, при котором справедливы неравенства

$$d_r(K,C_s)<\frac{1}{n},\qquad s=s_n,s_n+1,...$$

Отсюда сразу следует, что для любой точки $z\in\mathrm{int}\,\hat{K}$, где $\hat{K}=K\cap U_r(0_m)$, найдется такой номер s_0, что включение $z\in C_s$ будет выполнено для всех $s=s_0,s_0+1,...$

Перейдем к доказательству сходимости (6.6) недоминируемых множеств. Если $y^*\in Y$ и $y^*\notin\mathrm{Ndom}Y$, то по определению множества недоминируемых точек найдется точка $y\in Y$, для которой $y-y^*\in K$. Отсюда, используя условие теоремы о K-ограниченности множества Y, получаем $y-y^*\in\hat{K}$. Так как K – открытый конус, то можно считать, что $z=y-y^*\in\mathrm{int}\,\hat{K}$ (в противном случае, в качестве такой внутренней точки z можно взять, например, $0.5(y-y^*)\in\mathrm{int}\,\hat{K}$). Тогда, как указано выше, существует такой номер s_0, что включение $z=y-y^*\in C_s$ будет выполнено для всех номеров $s=s_0,s_0+1,...$ Это влечет $y^*\notin\mathrm{Ndom}_{\succ_s}Y$ для всех указанных s. Поэтому всякая точка множества Y, не принадлежащая множеству $\mathrm{Ndom}Y$, не может являться предельной точкой последовательности множеств $\mathrm{Ndom}_{\succ_s}Y$, $s=1,2,...$

С другой стороны, любая точка из $\mathrm{Ndom}\, Y$ заведомо принадлежит указанному пределу последовательности множеств, так как включения $C_s \subset C_{s+1} \subset K \cup \{0_m\}$ влекут $\mathrm{Ndom}\, Y \subset \mathrm{Ndom}_{\succ_s} Y$ при всех $s = 1,2,...$

Тем самым, соотношение (6.6), а вместе с ним и теорема 6.2 доказаны ■

6.3.3. Случай конечного множества возможных векторов. Когда множество возможных векторов Y состоит из конечного числа элементов, для точного определения множества недоминируемых векторов (с конусным отношением, у которого конус K – открытый) достаточно располагать лишь определенным конечным набором квантов информации. Об этом свидетельствует следующая ниже теорема. Она имеет важное значение в рамках подхода, развиваемого в данной книге, поскольку теоретически обосновывает значимость аксиоматического подхода в вопросах построения множества недоминируемых векторов. В соответствии с этой теоремой, для задач многокритериального выбора определенного класса, используя лишь кванты информации об отношении предпочтения ЛПР, можно точно найти множество недоминируемых векторов.

Теорема 6.3. *Если дополнительно к предположениям теоремы* 6.2 *добавить, что множество векторов* Y *– конечное*[17], *то существует такой набор* p *векторов* $\{u^i\}_{i=1}^p \subset N^m \cap K$ *с рациональными компонентами, что*

$$\mathrm{Ndom}\, Y = \mathrm{Ndom}_{\succ_p} Y,$$

где $\succ_p$ *– конусное отношение с выпуклым конусом* $\mathrm{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^p\}$ *без начала координат*.

□ Пусть множество допустимых векторов Y – конечно и имеет вид $Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}$. Для каждого $y^i \in Y$ введем конечное множество

$$Z_i = \{z \in Y \mid \text{существует такой } y \in Y, \text{ что } z = y - y^i \in K\}, \quad i = 1,2,...,N.$$

Благодаря тому, что K – открытое множество, найдется номер s_i, для которого $Z_i \subset C_s$ при всех $s = s_i, s_i + 1, ...$, где C_s – конусы, введенные в ходе доказательства теоремы 6.2. Положим $p = \max\{s_1, s_2, ..., s_N\}$. Для этого номера в силу вложенности конусов $C_s \subset C_{s+1}$, $s = 1,2,...$, имеем

$$Z_i \subset C_p \text{ для всех } i = 1,2,...,N.$$

Выберем два произвольных вектора $y^i, y^j \in Y$, $y^i \neq y^j$. Если имеет место включение $y^j - y^i \in K$, то выполняется $y^j - y^i \in Z_i \subset C_p$, а значит и $y^j - y^i \in C_p$. Обратно, если верно включение $y^j - y^i \in C_p$, то в силу $C_p \subset K \cup \{0_m\}$ выполнено включение $y^j - y^i \in K$. Таким образом, истинна эквивалентность

$$y^j - y^i \in K \quad \Leftrightarrow \quad y^j - y^i \in C_p,$$

которая устанавливает равенство конусных отношений с конусами K и $C_p \setminus \{0_m\}$■

[17] При этом K-ограниченность множества возможных векторов можно не предполагать, так как конечное множество ограничено, а значит и K-ограничено.

Глава 7. Сужение множества Парето с помощью нечеткой информации

При решении ряда прикладных задач многокритериального выбора информация об отношении предпочтения ЛПР может оказаться нечеткой в том смысле, что предпочтительность одного варианта в сравнении с другим не удается установить определенно, поскольку имеются аргументы как «за», так и «против» указанной предпочтительности. В таких случаях удобным математическим инструментом для описания подобного рода отношений предпочтения является аппарат нечетких множеств и отношений.

В данной главе формулируется задача многокритериального выбора с нечетким отношением предпочтения, вводится понятие кванта нечеткой информации, на основе которого можно осуществлять сужение множества Парето. Рассматривается вопрос непротиворечивости конечного набора квантов нечеткой информации, а также их учета для сужения множества Парето.

7.1. Постановка задачи нечеткого многокритериального выбора

7.1.1. Вспомогательные сведения из теории нечетких множеств. Напомним некоторые важнейшие понятия теории нечетких множеств. Более подробные сведения можно найти, например, в [12].

Пусть A – некоторое непустое (так называемое *универсальное*) множество. *Нечеткое множество* X в A задается функцией принадлежности $\lambda_X : A \to [0,1]$. При этом для каждого элемента $x \in A$ число $\lambda_X(x) \in [0,1]$ интерпретируется как *степень принадлежности* элемента x множеству X. Нередко, говоря, что задано некоторое нечеткое множество, упоминают лишь его функцию принадлежности, поскольку ею оно однозначно определяется. В случае, когда значениями функции принадлежности $\lambda_X(\cdot)$ являются лишь два числа 0 и 1, она превращается в характеристическую функцию обычного (четкого) множества X. Все элементы x множества A, для которых $\lambda_X(x) > 0$, образуют *носитель* или *суппорт* множества X, обозначаемый далее $\operatorname{supp} X$. Два нечетких множества равны друг другу, если они имеют одинаковые функции принадлежности.

Отношение включения, операции объединения и пересечения нечетких множеств X и Y (в терминах их функций принадлежности) определяются следующим образом:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \lambda_X(x) \leqq \lambda_Y(x), \qquad \text{для всех } x \in A$$
$$\lambda_{X \cup Y}(x) = \max\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\}, \qquad \text{для всех } x \in A$$
$$\lambda_{X \cap Y}(x) = \min\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\}, \qquad \text{для всех } x \in A.$$

В случае нечеткого множества, заданного функцией принадлежности $\eta(\cdot)$ на некотором линейном пространстве L, используют следующие термины:

- *нечеткий конус*, если равенство $\eta(x) = \eta(\alpha \cdot x)$ выполняется для всех $\alpha > 0$ и всех $x \in L$;
- *нечеткий острый конус*, если носитель этого конуса является острым, т.е. ни один ненулевой элемент носителя не содержится в нем вместе с противоположным ему элементом;
- *нечеткое выпуклое множество*, если неравенство $\eta(\theta x + (1-\theta) y) \geqq \min\{\eta(x); \eta(y)\}$ имеет место для всех $x, y \in L$ и всех $\theta \in [0,1]$.

Нечеткое бинарное отношение задается на множестве *A* с помощью функции принадлежности $\mu : A \times A \to [0,1]$; при этом число $\mu(x, y) \in [0,1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что элемент *x* находится в данном отношении с элементом *y*. Все те пары $(x, y) \in A$, для которых $\mu(x, y) = 1$, образуют так называемую *четкую часть* данного нечеткого отношения.

Нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$ называют

- *иррефлексивным*, если $\mu(x, x) = 0$ для всех $x \in A$;
- *транзитивным*, если $\mu(x, z) \geqq \min\{\mu(x, y); \mu(y, z)\}$ для всех $x, y, z \in A$;
- *асимметричным*, если $\mu(x, y) > 0 \Rightarrow \mu(y, x) = 0$ для всех $x, y \in A$;
- *нечетким конусным отношением* на линейном пространстве *L*, если найдется такой нечеткий конус $\eta : L \to [0, 1]$, что $\mu(x, y) = \eta(x - y)$ для всех $x, y \in L$;
- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если данное отношение задано на линейном пространстве *L* и выполняются равенства $\mu(\alpha x, \alpha y) = \mu(x, y)$, $\mu(x + c, y + c) = \mu(x, y)$ для всех $x, y \in L$, $\alpha > 0$, $c \in L$.

7.1.2. Задача нечеткого многокритериального выбора. Через *X* обозначим (четкое) множество возможных вариантов, содержащее по крайней мере два элемента. Имеется *m* ($m \geqq 2$) числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, заданных на множестве *X*. Они образуют векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, который принимает значения в *m*-мерном арифметическом пространстве R^m − критериальном пространстве.

Предположим, что ЛПР не всегда имеет возможность однозначно решить, является ли одно из двух данных вариантов для него предпочтительнее другого. В соответствии с этим будем считать, что на множестве *X* задано нечеткое отношение предпочтения ЛПР с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$. Для вариантов $x', x'' \in X$ число $\mu(x', x'') \in [0, 1]$ интерпретируется как степень уверенности ЛПР в том, что для него вариант x' предпочтительнее x''.

Перечислим все элементы задачи нечеткого многокритериального выбора в терминах вариантов $\langle X, f, \mu_X \rangle$:

1) множество возможных вариантов *X*,
2) векторный критерий *f*, определенный на множестве *X*,

3) нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$, заданной на декартовом произведении $X \times X$ и принимающей значения в пределах отрезка $[0,1]$. На практике это отношение обычно полностью не известно.

Как известно, выбор состоит в указании среди всех возможных такого варианта, которое объявляется выбранным, хотя в некоторых случаях происходит выбор не одного, а целого набора вариантов, составляющих определенное подмножество множества *X*. Нередко относительно некоторых вариантов очень трудно однозначно сказать «хорошие» они или же «плохие» с точки зрения выбора. С одной стороны, такие варианты обладают целым рядом достоинств, которые дают основания причислять их подходящим; с другой – эти варианты не лишены каких-то недостатков, что не позволяет безоговорочно включить их в число выбираемых вариантов. В таких случаях деление всех возможных вариантов лишь на два класса – выбранных и не выбранных («хороших» и «плохих») вариантов является слишком «грубым». Удобнее оказывается более гибкий подход с позиций теории нечетких множеств, когда каждому возможному варианту приписывают некоторое число из отрезка $[0,1]$, выражающее степень принадлежности множеству *X*. Это число можно также трактовать как степень (или долю) положительных (желательных) качеств данного варианта. Таким образом, решением задачи нечеткого многокритериального выбора будем считать некоторое в общем случае нечеткое множество $C(X)$, $C(X) \subset X$, а его функцию принадлежности обозначим μ_X^C. Именно это множество подлежит нахождению в результате решения задачи выбора.

Указанную задачу многокритериального выбора можно сформулировать и в терминах векторов. С этой целью через $C(Y)$ обозначим нечеткое множество выбираемых векторов, функция принадлежности которого естественным образом сопрягается с функцией принадлежности нечеткого множества выбираемых вариантов:

$$\lambda_{\hat{Y}}^C(x) = \begin{cases} \lambda_X^C(x), & \text{если} \quad y = f(x) \quad \text{при} \quad \text{некотором} \quad x \in X, \\ 0, & \text{если} \quad y \in R^m \setminus Y. \end{cases}$$

Будем считать, что между множеством возможных вариантов и множеством соответствующих векторов имеется взаимно однозначное соответствие. Тогда функция принадлежности нечеткого множества выбираемых вариантов, в свою очередь, определяется через функцию принадлежности нечеткого множества выбираемых векторов.

Функцией $\mu_X(\cdot,\cdot)$ индуцируется функция принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$ нечеткого отношения предпочтения на множестве *Y* следующим образом:

$$\mu_Y(y', y'') = \mu_X(x', x''), \quad \text{если} \quad y' = f(x'), y'' = f(x'') \quad \text{при всех} \quad x', x'' \in X .$$

В свою очередь, функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения, заданного на *Y*, индуцирует функцию принадлежности нечеткого отношения предпочтения на множестве *X*.

В итоге задача нечеткого многокритериального выбора в терминах векторов включает

1) множество возможных векторов Y;

2) нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$, заданной на Y.

Эта задача заключается в нахождении нечеткого множества выбираемых векторов $C(Y)$ с функцией принадлежности μ_Y^C.

Сформулированные выше две задачи нечеткого многокритериального выбора (в терминах вариантов и в терминах векторов) эквивалентны в том смысле, что, благодаря указанному выше взаимно однозначному соответствию и согласованности перечисленных функций принадлежности, все результаты, полученные в терминах одной из этих задач, могут быть переформулированы в терминах другой задачи.

Сложность решения этих задач заключается в том, что на практике нечеткое отношение предпочтения ЛПР, как правило, известно не полностью или же вообще неизвестно, что существенно затрудняет отыскание множества выбираемых векторов (вариантов).

7.1.3. Аксиомы разумного нечеткого выбора. Приведем ряд аксиом, которые будут предполагаться выполненными на протяжении данной главы. Эти аксиомы представляют собой распространение на случай нечеткого отношения предпочтения аксиом, сформулированных ранее для случая четкого отношения предпочтения.

Аксиома Н1 (аксиома исключения). *Для всякой пары вариантов $x', x'' \in X$, для которых выполнено $\mu_X(x', x'') = \mu^* \in [0,1]$, справедливо неравенство $\lambda_X^C(x'') \leqq 1 - \mu^*$. Иначе говоря, для всех $x', x'' \in X$ имеет место неравенство $\lambda_X^C(x'') \leqq 1 - \mu(x', x'')$.*

Аксиома Н2 (аксиома транзитивности). *Нечеткое иррефлексивное отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$ (а значит, и с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$) является транзитивным и, кроме того, существует транзитивное отношение, функцию принадлежности которого обозначим $\mu(\cdot,\cdot)$, заданное на критериальном пространстве R^m и такое, что его сужение на Y совпадает с отношением предпочтения $\mu_Y(\cdot,\cdot)$.*

Будем говорить, что критерий f_i *согласован с отношением предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$, если для любых векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения соотношений

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \quad y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \quad y'_i > y''_i$$

следует равенство $\mu(y', y'') = 1$.

Содержательно, как и в случае четкого отношения предпочтения, согласованность данного критерия с отношением предпочтения означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности бóльших значений этого критерия.

Аксиома Н3 (аксиома согласования). *Каждый из критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ согласован с отношением предпочтения $\mu(\cdot,\cdot)$.*

Аксиома Н4 (аксиома инвариантности). *Нечеткое отношение предпочтения $\mu(\cdot,\cdot)$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Нетрудно заметить, все сформулированные аксиомы в случае, когда нечеткое отношение становится четким, совпадают с аксиомами, введенными ранее в главах 1 и 2.

Обозначим функцию принадлежности множества парето-оптимальных вариантов (характеристическую функцию этого множества) следующим образом

$$\lambda_X^P(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in P_f(X), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично вводится функция принадлежности множества парето-оптимальных векторов $\lambda_Y^P(y)$.

7.1.4. Нечеткий принцип Парето. Орловский С.А. [44] использует понятие *нечеткого множества недоминируемых вариантов*, функция принадлежности λ_X^N которого определяется равенством

$$\lambda_X^N(x) = 1 - \sup_{z \in X} \mu_X(z, x) \qquad \text{для всех } x \in X.$$

Нечеткое множество недоминируемых вариантов будем обозначать $\mathrm{Ndom}\, X$. В случае, когда отношение предпочтения является четким, т.е. когда функция принадлежности $\mu_X(\cdot, \cdot)$ принимает значения 0 либо 1, нечеткое множество недоминируемых вариантов совпадает с известным из главы 1 (четким) множеством недоминируемых вариантов.

Лемма 7.1 (в терминах вариантов). *Принятие аксиомы* $H1$ *гарантирует выполнение включения*

$$C(X) \subset \mathrm{Ndom}\, X \tag{7.1}$$

для любого нечеткого множества выбираемых вариантов $C(X)$.

□ Выберем произвольный вариант $x \in X$. Благодаря аксиоме H1, для любого $z \in X$ имеет место неравенство $\lambda_X^C(x) \leqq 1 - \mu_X(z, x)$. Переходя в правой части этого неравенства к точной нижней грани по $z \in X$, получаем

$$\lambda_X^C(x) \leqq \inf_{z \in X}(1 - \mu_X(z, x)) = 1 - \sup_{z \in X} \mu_X(z, x) = \lambda_X^N(x) \qquad \text{для всех } x \in X.$$

Установленное таким образом неравенство $\lambda_X^C(x) \leqq \lambda_X^N(x)$ для всех $x \in X$ и означает выполнение включения (7.1) ■

В соответствии с (четкой) аксиомой Парето из неравенства $f(x'') \geq f(x')$ следует соотношение $x'' \succ_X x'$. Для нечеткого отношения предпочтения соответствующий вариант *аксиомы Парето* формулируется следующим образом: из неравенства $f(x'') \geq f(x')$ вытекает равенство $\mu_X(x'', x') = 1$. Аналогичным образом эта аксиома может быть сформулирована и в терминах векторов.

Теорема 7.1 (нечеткий принцип Парето). *Пусть выполнены аксиома* $H1$ *и аксиома Парето. Тогда для любого нечеткого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеет место включение*

$$C(X) \subset P_f(X), \tag{7.2}$$

или, что то же самое, неравенство $\lambda_X^C(x) \leqq \lambda_X^P(x)$ *выполняется для всех* $x \in X$.

□ Благодаря лемме 7.1 справедливо включение $C(X) \subset \mathrm{Ndom}\, X$ или, что то же самое, верно неравенство $\lambda_X^C(x) \leqq \lambda_X^N(x)$ для всех $x \in X$. Остается убедиться, что нечеткое множество недоминируемых варитантов $\mathrm{Ndom}\, X$ является подмножеством множества Парето $P_f(X)$. С этой целью допустим противное: существует $x' \in X$, для которого $\lambda_X^N(x') > \lambda_X^P(x')$. Поскольку значениями характеристической функции множества Парето могут быть лишь два числа – 0 или 1, должно выполняться равенство $\lambda_X^P(x') = 0$. Оно означает, что варитант x' не является парето-оптимальным, а значит существует $x'' \in X$, такое что $f(x'') \geq f(x')$. Согласно аксиоме Парето, последнее неравенство влечет равенство $\mu(x'', x') = 1$. В таком случае, согласно аксиоме Н1, приходим к равенству $\lambda_X^N(x') = 0$, которое вместе с $\lambda_X^P(x') = 0$ не совместимо с начальным предположением $\lambda_X^N(x') > \lambda_X^P(x')$ ■

Включение (7.2) выражает общий принцип нечеткого выбора: **в достаточно широком классе задач нечеткого многокритериального выбора** (а именно, в тех задачах, где одновременно выполняются аксиома Н1 и аксиома Парето) **любой выбор (в том числе и нечеткий) должен осуществляться в пределах множества Парето**.

В частном случае, когда отношение предпочтения является четким, доказанная теорема 7.1 в точности совпадает с установленным ранее в главе 1 (четким) принципом Эджворта–Парето.

Далее в этой главе аксиомы Н1–Н3 всегда будем считать выполненными. Подобно тому, как это было в случае четкого отношения предпочтения, *выполнение аксиом Н2-Н3 гарантирует справедливость аксиомы Парето*.

□ В самом деле, выберем произвольно два вектора $y', y'' \in R^m$, для которых $y'' = f(x'') \geq f(x') = y'$. В этом векторном неравенстве по крайней мере у одной компоненты есть строгое неравенство. Пусть таких строгих неравенств $l, 0 < l \leqq m$, причем все они отвечают первым l номерам критериев (это допущение не ограничивает общности последующих рассуждений). Имеем цепочку неравенств

$$y'' \geq y^1 = (y_1', y_2'', \ldots, y_m'') \geq y^2 = (y_1', y_2', y_3'', \ldots, y_m'') \geq \ldots \geq y^l = (y_1', y_2', \ldots, y_l', y_{l+1}'', \ldots, y_m'') = y'$$

Согласно аксиоме Н3, отсюда следует цепочка равенств

$$\mu(y'', y^1) = \mu(y^1, y^2) = \ldots = \mu(y^{l-1}, y^l) = \mu(y^{l-1}, y') = 1,$$

из которой, благодаря транзитивности нечеткого отношения предпочтения, получаем требуемое равенство $\mu(y'', y') = 1$ ■

7.2. Нечеткая информация об отношении предпочтения и ее непротиворечивость

7.2.1. Определение и некоторые свойства кванта информации о нечетком отношении предпочтения.

Определение 7. 1. Пусть имеются две группы номеров критериев A и B ($A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$). Будем говорить, что *задан квант нечеткой информации с группами критериев A, B*[18]*, двумя наборами положительных параметров* w_i *для всех* $i \in A$, w_j *для всех* $j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполнено

$$y'_i - y''_i = w_i \quad \text{для всех} \quad i \in A,$$

$$y''_j - y'_j = w_j \quad \text{для всех} \quad j \in B,$$

$$y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus (A \cup B)$$

имеет место равенство $\mu(y', y'') = \mu^*$. При этом, как и ранее, число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j} \in (0,1)$$

будем именовать *коэффициентом компромисса*.

В случае, когда имеется квант нечеткой информации, введенный определением 7.1, будем говорить, что группа критериев *A более значима*, чем группа критериев *B* с заданными параметрами и соответствующей степенью уверенности.

Справедливо следующее утверждение, которое раскрывает математический смысл введенных ранее аксиом нечеткого выбора.

Лемма 7. 2. *Следующие два высказывания эквивалентны:*

1) *нечеткое отношение* $\mu(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет аксиомам H*2-*H*4;
2) *нечеткое отношение* $\mu(\cdot,\cdot)$ *является конусным отношением с нечетким острым выпуклым конусом, который с единичной степенью принадлежности включает неотрицательный ортант пространства* R^m *и не содержит начало координат.*

□ Сначала установим, что свойство инвариантности нечеткого отношения с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$, постулируемое аксиомой Н4, равносильно свойству конусности этого отношения. Пусть μ инвариантно. Введем нечеткое множество η равенством $\eta(x) = \mu(x, 0_m)$ для всех $x \in R^m$. Благодаря инвариантности имеем

$$\eta(\alpha x) = \mu(\alpha x, \alpha 0_m) = \mu(x, 0_m) = \eta(x) \qquad \text{для всех} \quad x \in R^m, \ \alpha > 0.$$

[18] Напомним, что там, где это не вызывает недоразумений, указывая группу номеров критериев мы подразумеваем соответствующую этим номерам группу критериев.

Следовательно, нечеткое множество η является конусом. Кроме того,

$$\mu(x,y)=\mu(x-y,0_m)=\eta(x-y) \quad \text{для всех} \quad x,y.$$

Полученное означает, что инвариантное отношение μ является конусным.

Обратно, пусть μ представляет собой нечеткое конусное отношение с конусом η. Его инвариантность вытекает из равенств

$$\mu(x,y)=\eta(x-y)=\eta((x+a)-(y+a))=\mu(x+a,y+a) \quad \text{для всех} \quad a\in R^m$$
$$\mu(x,y)=\eta(x-y)=\eta(\alpha(x-y))=\eta(\alpha x-\alpha y))=\mu(\alpha x,\alpha y) \quad \text{для всех} \quad \alpha>0.$$

Приступим к доказательству импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть нечеткое отношение μ удовлетворяет аксиомам Н2-Н4. В соответствии с доказанным выше, отношение μ является конусным; обозначим его конус через η. Носитель конуса η не содержит начала координат, так как в противном случае отношение не было бы иррефлексивным. Для доказательства того, что конус η острый, предположим напротив, что существует ненулевой вектор y, для которого выполняется $\mu(y,0_m)=\eta(y)>0$ и $\mu(0_m,y)=\eta(-y)>0$. Отсюда в силу транзитивности отношения μ получаем $\mu(y,y)>0$, что вновь противоречит иррефлексивности μ.

Для доказательства выпуклости конуса η в определении транзитивного нечеткого отношения положим $x=\alpha x', y=0_m, z=(1-\alpha)(-x'')$, $\alpha\in(0,1)$. Получим

$$\mu(\alpha x',(1-\alpha)(-x''))\geq\min\{\mu(\alpha x',0_m),\mu(0_m,(1-\alpha)(-x''))\}.$$

Отсюда в соответствии с инвариантностью следует

$$\mu(\alpha x',(1-\alpha)(-x''))\geq\min\{\mu(x',0_m),\mu(0_m,-x'')\},$$

или

$$\eta(\alpha x'+(1-\alpha)x'')\geq\min\{\eta(x'),\eta(x'')\},$$

что означает выпуклость нечеткого конуса η.

Пусть e^i есть i-й орт пространства R^m. Согласно аксиоме Н3 верно $\mu(e^i,0_m)=\eta(e^i)=1$. Это означает, что все орты указанного пространства принадлежат конусу η с единичной степенью принадлежности. Поэтому в силу выпуклости η и весь неотрицательный ортант этого пространства имеет ту же степень принадлежности.

Теперь установим истинность импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Прежде всего заметим, что согласно доказанному выше, нечеткое отношение μ инвариантно. На основании выпуклости конуса η для любых x,y,z можно написать

$$\eta(\frac{x-y}{2}+\frac{y-z}{2}) \geq \min\{\eta(x-y),\eta(y-z)\}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\mu(x,z) \geq \min\{\mu(x,y),\mu(y,z)\} \qquad \text{для всех } x,y,z,$$

устанавливающее транзитивность нечеткого отношения μ. Далее, ясно, что это отношение иррефлексивно, так как носитель конуса η не содержит начало координат. Тем самым нечеткое отношение μ удовлетворяет аксиомам Н2 и Н4. Оно также удовлетворяет аксиоме Н3, поскольку для любых двух векторов y' и y'' из определения критерия, согласованного с отношением предпочтения, благодаря инвариантности имеем

$$\mu(y',y'') = \mu(e^i,0_m) = \eta(e^i) = 1 \ ■$$

Лемма 7. 3. *В условиях аксиомы Н4 задание кванта нечеткой информации с группами критериев А, В с заданными положительными параметрами* w_i *и* w_j *для всех* $i \in A$, $j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$ *равносильно выполнению равенства* $\mu(\tilde{y},0_m) = \mu^*$ *с вектором* $\tilde{y} \in R^m$, *где* $\tilde{y}_i = w_i$, $\tilde{y}_j = -w_j$, $\tilde{y}_s = 0$ *для всех* $i \in A$, $j \in B$, $s \in I \setminus (A \cup B)$.

□ Необходимость очевидна. Для проверки достаточности выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^m$ из определения 7.1. Справедливость части «достаточность» следует из следующих равенств, полученных с использованием инвариантности нечеткого отношения μ,

$$\mu^* = \mu(\tilde{y},0_m) = \mu(\tilde{y}+y'',y'') = \mu(y',y'') \ ■$$

Обозначим через N^m множество всех m-мерных векторов, имеющих по крайней мере одну положительную и одну отрицательную компоненты. Согласно лемме 7.3, каждый вектор введенного множества может задавать определенный квант нечеткой информации, если окажется предпочтительнее нулевого вектора с некоторой ненулевой степенью уверенности.

7.2.2. Непротиворечивость набора квантов нечеткой информации. Пусть задан набор пар векторов u^i, v^i $(u^i - v^i \in N^m)$ вместе с набором чисел $\mu_i \in (0,1]$ такие, что $\mu(u^i,v^i) = \mu_i$, $i = 1,2,...,k$. Обозначим через

$$\mu_{11},...,\mu_{1k_1};\mu_{21},...\mu_{2k_2};...;\mu_{l1},...,\mu_{lk_l}$$

такую перестановку чисел $\mu_1,\mu_2,...,\mu_k$, что

$$1 \geqq \mu_{11} = ... = \mu_{1k_1} > \mu_{21} = ... = \mu_{2k_2} > ... > \mu_{l1} = ... = \mu_{lk_l} > 0,$$

где $k_1 + ... + k_l = k,\ 1 \leqq l \leqq k$. Таким образом, имеет место следующее взаимно однозначное соответствие: каждой паре векторов u^i, v^i соответствует определенное положительное число

μ_{rs} $(r \in \{1,2,...,l\}, s \in \{1,2,...,k_r\})$, такое, что $\mu_i = \mu_{rs}$. Обратно, каждому указанному числу μ_{rs} отвечает некоторая пара векторов из набора u^i, v^i, $i = 1,2,...,k$.

Пусть e^i – единичный орт векторного пространства R^m, $i = 1,2,...,m$. Введем четкие конусы $K_h, h \in \{1,2,...,l\}$, порождаемые единичными векторами $e^1, e^2,..., e^m$ вместе со всеми теми векторами $u^i - v^i$, $i \in \{1,2,...,k\}$, которым соответствуют числа μ_i вида $\mu_i = \mu_{rs}$ при некоторых *r* и *s*, причем $\mu_i \geqq \mu_{h1}$. Из приведенного определения конусов немедленно следуют включения $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_l$.

Определение 7. 2. *Набор пар векторов* u^i, v^i $(u^i - v^i \in N^m)$, $i = 1,2,...,k$, *вместе с набором чисел* $\mu_1, \mu_2,..., \mu_k \in (0, 1]$ *задают непротиворечивый набор квантов нечеткой информации, если существует хотя бы одно нечеткое отношение предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$, *удовлетворяющее аксиомам Н2-Н4 и такое, что* $\mu(u^i, v^i) = \mu_i \in (0,1]$, $i = 1,2,...,k$ $(k \geqq 1)$.

Имеет место следующий критерий непротиворечивости набора квантов нечеткой информации.

Теорема 7.2. *Для того чтобы набор пар векторов* u^i, v^i $(u^i - v^i \in N^m)$, $i = 1,2,...,k$, *вместе с набором чисел* $\mu_1, \mu_2,..., \mu_k \in (0, 1]$ *задавали непротиворечивый набор квантов нечеткой информации необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений*

$$\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_m e^m + \xi_1 \left(u^1 - v^1\right) + ... + \xi_k \left(u^k - v^k\right) = 0_m \tag{7.3}$$

относительно $\lambda_1,...,\lambda_m, \xi_1,...,\xi_k$ *не имела ни одного ненулевого неотрицательного решения и, кроме того, каждый конус* K_h, $h \in \{1,...,l-1\}$, *не содержал ни одного вектора* $u^i - v^i$, $i \in \{1,2,...,k\}$, *которому соответствует число* μ_i, *такое, что* $\mu_i < \mu_{h1}$.

□ Необходимость. Пусть набор пар векторов u^i, v^i $(u^i - v^i \in N^m)$, $i = 1,2,...,k$, вместе с набором чисел $\mu_1, \mu_2,..., \mu_k \in (0, 1]$ задают непротиворечивый набор квантов нечеткой информации. По определению 7.2 и благодаря лемме 7.3, существует нечеткое отношение μ с нечетким выпуклым конусом *η*, причем единичные векторы $e^1,..., e^m$ и векторы $u^i - v^i$, $i = 1,2,...,k$, принадлежат носителю конуса *η*, который является четким острым конусом. Следовательно, четкий многогранный выпуклый конус, порожденный векторами $e^1,..., e^m$, $u^i - v^i$, $i = 1,2,...,k$, также является острым и, согласно утверждению, приведенному на стр. 269 в книге [56], система линейных уравнений (7.3) не имеет ненулевых неотрицательных решений относительно $\lambda_1,...,\lambda_m, \xi_1,...,\xi_k$.

Для доказательства заключительной части необходимости предположим противное: для некоторого $h \in \{1,...,l-1\}$ конус K_h содержит вектор $u^i - v^i$, такой, что его степень принадлежности $\mu_i = \mu_{rs}$ при некоторых *r* и *s* удовлетворяет неравенствам $\mu_{rs} < \mu_{h1}$, $r > h$. Включение $u^i - v^i \in K_h$ можно переписать в виде равенства

$$u^i - v^i = \sum_q \lambda_q e^q + \sum_j \alpha_j (u^j - v^j),$$

где некоторые $\lambda_q > 0,\ \alpha_j > 0$, причем суммирование во втором слагаемом производится по множеству индексов, содержащихся во множестве всех j, для которых верно неравенство $\mu(u^j, u^j) \geq \mu_{h1}$. С использованием свойства выпуклости нечеткого конуса η имеем

$$\mu_{rs} = \mu_i = \mu(u^i, v^i) = \eta(u^i - v^i) = \eta(\sum_q \lambda_q e^q + \sum_j \alpha_j (u^j - v^j)) \geq \min_{q,j}\{\eta(e^q), \eta(u^j - v^j)\} =$$
$$= \min_j\{\eta(u^j - v^j)\} = \min_j\{\mu(u^j, v^j)\} = \mu_{t1}$$

при некотором $t \in \{1,...,h-1\}$. В итоге приходим к неравенствам $\mu_{rs} \geqq \mu_{t1}$ и $r > t$, противоречащим ранее принятым условиям:

$$1 \geqq \mu_{11} = ... = \mu_{1k_1} > \mu_{21} = ... = \mu_{2k_2} > ... > \mu_{l1} = ... = \mu_{lk_l} > 0.$$

Достаточность. Так как по условию теоремы система (7.3) не имеет ненулевых неотрицательных решений, согласно упомянутому выше утверждению из книги [56], четкий многогранный выпуклый конус K_l, который порождается единичными векторами $e^1,...,e^m$ вместе с векторами $u^i - v^i$, $i = 1,2,...,k$, является острым.

Рассмотрим нечеткое конусное отношение μ с нечетким конусом η, имеющим носитель K_l (без начала координат):

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in R_+^m, \\ \mu_i, & \text{если } z = \alpha(u^i - v^i) \text{ при некоторых } \alpha > 0 \text{ и } i \in \{1,...,k\}, \\ \max\limits_{j \in \{1,2,...,l\}} \{\mu_{j1} \mid z \in K_j\}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{7.4}$$

Очевидно, $\mu(u^i, v^i) = \eta(u^i - v^i) = \mu_i,\ i = 1,...,k$. Поэтому остается доказать, что отношение μ удовлетворяет аксиомам Н2-Н4. Согласно лемме 7.3, это равносильно тому, что конус η является выпуклым, причем он с единичной степенью принадлежности включает неотрицательный ортант пространства R^m и с нулевой степенью принадлежности содержит начало координат. Поскольку носитель конуса η есть конус K_l без начала координат и η согласно (7.4) с единичной степенью принадлежности содержит неотрицательный ортант, остается убедиться, что нечеткий конус η – выпуклый.

С этой целью выберем произвольные векторы $x, y \in K_l$ и произвольное число $\lambda \in [0,1]$. Не ограничивая общности, допустим, что $x \in K_h, x \notin K_{h-1}$ и $y \in K_t, y \notin K_{t-1}$, где $l \geqq h \geqq t \geqq 0$ (считается, что $K_0 = R_+^m, K_{-1} = \varnothing$).

Для доказательства выпуклости конуса η достаточно проверить неравенство $\eta(z) \geqq \mu_{h1}$, где $z = \lambda x + (1-\lambda) y$. Напомним, что по условию теоремы каждый конус K_j, $j \in \{1,...,l\}$, содержит единичные векторы $e^1,...,e^m$, а также векторы вида $u^i - v^i$, для которых выполнено неравенство $\mu_i \geqq \mu_{j1}$. В частности, конус K_h, содержит векторы $e^1,...,e^m$, а из векторов $u^i - v^i$ лишь те, для которых верно $\mu_i \geqq \mu_{h1}$.

Приступим к проверке неравенства $\eta(z) \geqq \mu_{h1}$. Так как $K_h \supset K_t$ и конус K_h – выпуклый, имеем $z \in K_h$. Если для точки z оказывается выполненным включение $z \in R_+^m$, то из равенства (7.4) следует $\eta(z) = 1 \geqq \mu_{h1}$. В случае выполнения равенства $z = \alpha(u^i - v^i)$ при некоторых $\alpha > 0$ и $i \in \{1,...,k\}$, благодаря включению $z \in K_h$ и равенству (7.4) верно $\eta(z) = \mu_i \geqq \mu_{h1}$. В остальных случаях имеем $z \in K_j$ и $z \notin K_{j-1}$ при некотором $j \in \{1,...,h\}$, откуда с использованием равенства (7.4) получаем $\eta(z) = \mu_{j1} \geqq \mu_{h1}$. Тем самым, выпуклость конуса η доказана ■

7.3. Сужение множества Парето на основе кванта нечеткой информации

7.3.1. Основной результат. Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы 3.5 на случай нечеткого отношения предпочтения. Напоминаем, что всюду далее предполагаются выполненными аксиомы Н1-Н4.

Теорема 7.3. *Пусть задан квант нечеткой информации с группами критериев* A, B *с положительными параметрами* w_i, w_j *для всех* $i \in A, j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *имеет место неравенство*

$$\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_Y^M(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \quad \text{для всех } y \in Y, \tag{7.5}$$

где $\lambda_Y^P(\cdot)$ *– функция принадлежности множества Парето, а* $\lambda_Y^M(\cdot)$ *– функция принадлежности, определяемая равенствами*

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \varsigma(z, y) \quad \text{для всех } y \in Y, \tag{7.6}$$

$$\varsigma(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu^*, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^p, \quad z - y \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{для всех } y, z \in Y, \tag{7.7}$$

где $R_+^m = \{y \in R^m \mid y \geq 0_m\}$, $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$ *и вектор* $\hat{y}$ (*а также* $\hat{z}$) *составлен из компонент* y_i *для всех* $i \in I \setminus B$ (*соответственно,* z_i *для всех* $i \in I \setminus B$), *тогда как остальные его компоненты имеют вид* $w_j y_i + w_i y_j$ (*соответственно,* $w_j z_i + w_i z_j$) *для всех* $i \in A, j \in B$.

□ Благодаря лемме 7.3, нечеткое отношение предпочтения является конусным с нечетким острым выпуклым конусом (без начала координат), который обозначим K. В этот конус с единичной степенью принадлежности входит неотрицательный ортант R_+^m. Наличие кванта информации согласно лемме 7.3 означает, что вектор $\tilde{y}$ из указанной леммы принадлежит конусу K, причем степень его принадлежности равна μ^*.

В критериальном пространстве введем нечеткое множество M, носитель которого представляет собой совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций конечного набора единичных ортов $e^1,...,e^m$ пространства R^m и указанного выше вектора $\tilde{y}$. При этом векторам носителя, входящим в неотрицательный ортант, приписана степень принадлежности 1 (кроме начала координат, степень принадлежности которого равна 0), а всем остальным векторам носителя – μ^*. Множество M есть нечеткий острый выпуклый конус (без начала координат), содержащий с единичной степенью принадлежности неотрицательный ортант, и благодаря выпуклости конуса K является подмножеством этого конуса.

Согласно результатам главы 3, носитель конуса M совпадает с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств $\langle a^i, y \rangle \geqq 0$, $i = 1,2,...,p = m - |B| + |A| \cdot |B|$, где векторы $a^1,...,a^p$ суть e^i при всех $i \in I \setminus B$ и $w_j e^i + w_i e^j$ при всех $i \in A, j \in B$.

Рассмотрим нечеткое конусное отношение ς с конусом M. Нетрудно понять, что оно в точности совпадает с тем, которое определяется равенством (7.7). Из (7.6) видно, что нечеткое множество, функция принадлежности которого обозначена в (7.5) через $\lambda_Y^M(y)$, представляет собой нечеткое множество недоминируемых векторов относительно отношения ς.

Как указывалось выше, неотрицательный ортант входит в конус M. Последний, в свою очередь, содержится в конусе K. Поэтому множество Парето содержит множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения ς, которое включает множество недоминируемых векторов, порожденное конусным отношением предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$. Последнее множество, в свою очередь, на основании нечеткого принципа Парето содержит нечеткое множество выбираемых векторов ■

Анализ формулировки последней теоремы показывает, что для построения нечеткого множества с функцией принадлежности $\lambda_Y^M(y)$, а тем самым, для сужения множества Парето на основе кванта нечеткой информации, следует решить две (четкие) многокритериальные задачи (точнее говоря, найти множества Парето в двух многокритериальных задачах). Начать следует с многокритериальной задачи, содержащей исходную векторную функцию f и множество возможных вариантов X. После чего всем векторам найденного в результате решения множества Парето нужно присвоить степень принадлежности, равную единице, а остальным векторам – нулевую степень принадлежности. Затем на том же самом множестве X необходимо решить многокритериальную задачу с новой (“пересчитанной”) p-мерной векторной функцией, имеющей компоненты f_i для всех $i \in I \setminus B$ и $w_j f_i + w_i f_j$ для всех

$i \in A, j \in B$, после чего всем векторам "старого" множества Парето, которые не попали в "новое" множество Парето, на этот раз присвоить степень принадлежности $1-\mu^*$. Тем самым сужение множества Парето, в котором находится неизвестное множество выбираемых векторов построено. Соответствующий иллюстративный пример рассматривается ниже.

В частном случае, когда множества A и B одноэлементные, теорема 7.3 принимает следующую форму.

Следствие 7.1. *Пусть* $i, j \in I, i \neq j$, *и задан простейший квант нечеткой информации с парой критериев* f_i, f_j, *параметрами* w_i, w_j *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *имеют место неравенства* (7.5), *где функция принадлежности* $\lambda_Y^M(y)$ *определяется равенством* (7.6), *а отношение* ς *– равенством* (7.7), *где* $p = m$ *и* m*-мерный вектор* $\hat{y}$ *(а также* $\hat{z}$*) состоит из компонент* $y_1,...,y_{j-1},w_j y_i + w_i y_j, y_{j+1},...,y_m$ *(соответственно,* $z_1,...,z_{j-1},w_j z_i + w_i z_j, z_{j+1},...,z_m$*).*

7.3.2. Пример. Рассмотрим следующий иллюстративный пример. Пусть выполняются все предположения следствия 7.1 и $m = 2$, $f = (f_1, f_2)$, $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\} \subset R^2$, $y^1 = (0,3), y^2 = (1,1), y^3 = (2,1), y^4 = (4,0)$. В данном случае множество парето-оптимальных векторов состоит из трех элементов: $\lambda_Y^P(y^1) = \lambda_Y^P(y^3) = \lambda_Y^P(y^4) = 1$, $\lambda_Y^P(y^2) = 0$, так как $y^3 \geq y^2$.

Предположим, что от ЛПР получен квант нечеткой информации состоящий в том, что первый критерий более значим, чем второй с параметрами $w_i = 0.3, w_j = 0.7$ и степенью уверенности 0.6. Тогда, в соответствии со следствием 7.1, имеем

$$\hat{y}^1 = (0, 0.9),\ \hat{y}^2 = (1,1),\ \hat{y}^3 = (2, 1.7),\ \hat{y}^4 = (4, 2.8)$$
$$\varsigma(y^1, y^2) = \varsigma(y^1, y^3) = \varsigma(y^1, y^4) = \varsigma(y^2, y^3) = \varsigma(y^2, y^4) = \varsigma(y^3, y^4) = 0$$
$$\varsigma(y^2, y^1) = \varsigma(y^3, y^1) = \varsigma(y^4, y^1) = \varsigma(y^4, y^2) = \varsigma(y^4, y^3) = 0.6,\ \varsigma(y^3, y^2) = 1$$
$$\lambda_Y^M(y^1) = 1 - \max\{0.6, 0.6, 0.6\} = 0.4,\ \lambda_Y^M(y^2) = 1 - \max\{0, 1, 0.6\} = 0,$$
$$\lambda_Y^M(y^3) = 1 - \max\{0, 0, 0.6\} = 0.4,\ \lambda_Y^M(y^4) = 1 - \max\{0, 0, 0\} = 1.$$

Нечеткое множество с функцией принадлежности $\lambda_Y^M(y^1) = 0.4$, $\lambda_Y^M(y^2) = 0$, $\lambda_Y^M(y^3) = 0.4$, $\lambda_Y^M(y^4) = 1$ дает оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов в том смысле, что множество выбираемых векторов содержится в указанном нечетком множестве.

К той же самой оценке можно прийти другим путем. На первом шаге присвоим всем парето-оптимальным векторам исходной многокритериальной задачи степень принадлежности, равную 1, а остальным векторам (в данном случае одному второму вектору y^2) степень принадлежности, равную 0. На втором шаге найдем парето-оптимальные векторы множества "пересчитанных" векторов $\{\hat{y}^1, \hat{y}^3, \hat{y}^4\}$. Таковым оказывается единственный вектор $\{\hat{y}^4\}$. Следовательно, первому и третьему векторам (т.е. y^1, y^3) следует присвоить степень принадлежности, равную 1– 0.6 = 0.4. В итоге приходим к уже найденной выше оценке сверху.

На основании результата, полученного в данном примере, можно предложить следующие рекомендации для осуществления выбора. Если выбранным должен быть в точности один вектор, то в таком случае, очевидно, ЛПР следует остановить выбор на векторе y^4. В терминах С.А. Орловского [43] этот вектор в данном случае образует так называемое *четкое множество недоминируемых векторов*.

Разберем ситуацию, когда в рассмотренном примере требуется из четырех имеющихся выбрать не один, а два вектора. В этом случае, один из подходов состоит в переходе к рассмотрению новой задачи, в которой возможными векторами являются не отдельные векторы, а пары векторов. При этом в качестве отношения предпочтения в такой задаче будет участвовать новое бинарное отношение, заданное на указанных парах векторов. Тем самым, придем к совершенно иной, значительно более сложной задаче, решение которой потребует наличия новой информации о нечетком отношении предпочтения по сравнению с задачей, которая имелась с самого начала. Более того, в этом случае изначально заданная информация не представит особого интереса в процессе последующего выбора.

Перейдем к рассмотрению второго подхода при выборе двух векторов. Если индивидуальные свойства вариантов при их объединении в пары существенно не изменяются, то можно предложить следующие рекомендации для выбора двух векторов, оставаясь в рамках первоначальной задачи, а именно: на основании полученного выше можно заключить, что выбранной из имеющихся четырех векторов должна быть пара, содержащая третий и четвертый векторы (т.е. y^3 и y^4), так как при сравнении первого и третьего векторов с учетом имеющимся нечетким квантом информации первый вектор оказывается менее предпочтительным, чем третий: $\hat{y}^3 \geq \hat{y}^1$.

Наконец, в том случае, когда требуется выбрать уже не один или два, а целых три вектора из четырех, можно рекомендовать выбрать тройку, составляющую множество Парето в исходной задаче (т.е. первый, третий и четвертый векторы), поскольку в данных условиях справедлив нечеткий принцип Эджворта–Парето. При этом, как нетрудно понять, никак не используется информация о нечетком отношении предпочтения. Она в этом случае оказывается “лишней”.

7.3.3. Случай нечеткого множества возможных вариантов. Полученные выше результаты для обычного множества X допускают распространение на случай нечеткого множества возможных вариантов, функцию принадлежности которого обозначим $\lambda_X(\cdot)$ (для векторов – соответственно $\lambda_Y(\cdot)$).

Для того чтобы осуществить это распространение, прежде всего необходимо договориться, что понимать под решением задачи нечеткого выбора. Поскольку нечеткий выбор производится в пределах нечеткого множества X, то, очевидно, степень принадлежности каждого из выбираемых вариантов не должна превышать его степени принадлежности нечеткому множеству X. В соответствии с этим можно считать, что в рассматриваемом случае *нечеткое множество выбираемых вариантов*, обозначаемое далее $FC(X)$ (с функцией принадлежности $\lambda_Y^F(\cdot)$), по определению есть пересечение $X \cap C(X)$, где $C(X)$ – множество выбираемых вариантов, найденное в предположении, что множество X является четким. Таким образом, для того, чтобы решить задачу нечеткого выбора с нечетким множеством X сначала следует найти множество выбираемых вариантов в предположении, что X – четкое множество, после чего пересечь найденное множество с заданным нечетким множеством X.

В соответствии со сказанным и на основании полученного выше можно сформулировать следующие результаты.

Теорема 7.4. *В случае нечеткого множества* X *и нечеткого отношения предпочтения для любого нечеткого множества выбираемых вариантов* $FC(X)$ *справедливо включение*

$$FC(X) \subset X \cap P_f(X).$$

Теорема 7.5. *Пусть множество* X *нечеткое. Если имеется квант нечеткой информации с группами критериев* A, B, *параметрами* w_i, w_j *для всех* $i \in A, j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$, *то для любого множества выбираемых векторов с функцией принадлежности* $\lambda_Y^F(\cdot)$ *выполняется неравенство*

$$\lambda_Y^F(y) \leqq \min\{\lambda_Y^M(y), \lambda_Y(y)\} \leqq \min\{\lambda_Y^P(y), \lambda_Y(y)\} \qquad \text{для всех } y \in Y,$$

где $\lambda_Y^P(\cdot)$ *– функция принадлежности множества Парето, а* $\lambda_Y^M(\cdot)$ *– функция принадлежности, определяемая равенствами* (7.6), (7.7), *при этом число* p *и векторы* $\hat{y}$, $\hat{z}$ *имеют тот же самый вид, что и в теореме* 7.4.

7.4. Сужение множества Парето на основе наборов квантов нечеткой информации

7.4.1. Использование двух квантов нечеткой информации для сужения множества Парето. В следующей теореме пойдет речь об учете двух квантов нечеткой информации, состоящих в том, что критерий f_i по отдельности более значим, чем критерии f_j и f_k. Напомним, что символом $\mu(\cdot,\cdot)$ обозначается функция принадлежности отношения предпочтения ЛПР.

Теорема 7.6. *Пусть* $i, j, k \in I;\ i \neq j, i \neq k, j \neq k$, *и* $\mu(y',0_m) = \mu_1 \in (0,1]$, $\mu(y'',0_m) = \mu_2 \in (0,1]$, *где вектор* y' *имеет только две отличные от нуля компоненты* $y_i' = w_i'$, $y_j' = -w_j'$, *а вектор* y'' *− соответственно* $y_i'' = w_i''$, $y_k'' = -w_k''$, *причем* $\mu_1 \geqq \mu_2$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *выполняются неравенства*

$$\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_Y^M(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \qquad \text{для всех } y \in Y, \tag{7.8}$$

где $\lambda_Y^P(y)$ *− функция принадлежности множества Парето, а* $\lambda_Y^M(y)$ *− функция принадлежности, определяемая равенствами*

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \varsigma(z, y) \qquad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad y \in Y\,, \tag{7.9}$$

$$\varsigma(z, y) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad z - y \in R_+^m,\ \forall y, z \in Y,\ y \neq z \\ \mu_1, & \textit{если} \quad \bar{z} - \bar{y} \in R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \forall y, z \in Y,\ y \neq z \\ \mu_2, & \textit{если} \quad \hat{z} - \hat{y} \in R_+^{m+1},\ \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \forall y, z \in Y,\ y \neq z \\ 0, & \textit{в} \quad \textit{остальных случаях}, \end{cases} \tag{7.10}$$

причем

$$R_+^m = \{y \in R^m \mid y \geq 0_m\}, \qquad R_+^{m+1} = \{y \in R^{m+1} \mid y \geq 0_{m+1}\},$$

$$\bar{y} = (y_1, \ldots, y_{j-1}, w'_j y_i + w'_i y_j, y_{j+1}, \ldots, y_m),$$

$$\hat{y} = (y_1, \ldots, y_{j-1}, w'_j y_i + w'_i y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, w''_k y_i + w''_i y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m, w'_j w''_k y_i +$$
$$+ w'_i w''_k y_j + w''_i w'_j y_k)\,,$$

$$\bar{z} = (z_1, \ldots, z_{j-1}, w'_j z_i + w'_i z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m),$$

$$\hat{z} = (z_1, \ldots,\ z_{j-1}, w''_j z_i + w'_i z_j, z_{j+1}, \ldots,\ z_{k-1}, w''_k z_i + w''_i z_k, z_{k+1}, \ldots,\ z_m, w'_j w''_k z_i +$$
$$+ w'_i w''_k z_j + w''_i w'_j z_k).$$

□ Благодаря лемме 7.2, всякое заданное на критериальном пространстве R^m нечеткое отношение предпочтения $\mu(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющее аксиомам Н2-Н4, является конусным отношением с нечетким острым выпуклым конусом *K*, который с единичной степенью принадлежности включает неотрицательный ортант и не содержит начала координат.

По условию теоремы имеются два кванта, поэтому $k = 2$. В соответствии с обозначениями раздела 7.2.2 рассмотрим два четких конуса K_1 и K_2. Для них выполняется включение $K_1 \subset K_2$.

Наличие двух заданных квантов информации означает, что вектор y' принадлежит конусу K_1 со степенью принадлежности $\mu_1 = \mu(y', 0_m)$, вектор y'' − конусу K_2, причем степень его принадлежности равна $\mu_2 = \mu(y'', 0_m)$.

Сначала установим непротиворечивость данного набора информации. Для этого воспользуемся теоремой 7.2. Система линейных уравнений (7.3) в данном случае принимает вид $\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_m e^m + \xi_1 y' + \xi_k y'' = 0_n$. Из *i*-го уравнения этой системы следует $\lambda_i = \xi_1 = \xi_2 = 0$. Тогда из *j*-го и *k*-го уравнений получаем $\lambda_j = \lambda_k = 0$. Рассмотрение остальных уравнений указанной системы приводит к выводу, что и все остальные компоненты вектора λ равны нулю. Следовательно, эта система не имеет ненулевых неотрицательных решений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \xi_1, \xi_2$. Отсюда сразу вытекает, что в случае выполнения равенства $\mu_1 = \mu_2$ данный набор информации является непротиворечивым.

Предположим, что $\mu_1 > \mu_2$, и проверим второе условие теоремы 7.2. Допустим противное, т.е. $y'' \in K_1$. Отсюда получаем, что вектор y'' может быть представлен в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $e^1, ..., e^m,\ y'$. Рассмотрение векторного равенства $\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_m e^m + \xi_1 y' = y''$ (точнее говоря, *k*-го уравнения этого равенства) приводит к неравенству $\lambda_k < 0$. Это противоречит условию неотрицательности коэффициентов $\lambda_1,...,\lambda_m$. Следовательно, согласно теореме 7.2 рассматриваемый набор двух квантов нечеткой информации действительно является непротиворечивым.

Введем два нечетких конуса с носителями K_1 и K_2. Через M_1 обозначим нечеткий конус с носителем K_1, все элементы которого, принадлежащие неотрицательному ортанту, имеют степень принадлежности 1, а остальные – μ_1.Через M_2 обозначим нечеткий конус, носителем которого является K_2, причем всем его элементам, входящим в неотрицательный ортант, приписана степень принадлежности 1, а остальным – μ_2.

Обозначим символом *M* нечеткий конус (без нуля), носитель которого порожден векторами $e^1, ..., e^m, y', y''$, причем *M* является объединением нечетких конусов M_1 и M_2. Вследствие того, что заданная в условиях теоремы нечеткая информация непротиворечива, нечеткий конус *M* является острым и выпуклым. Тем самым, векторам носителя $\operatorname{supp} M\ (= K_2)$, входящим в неотрицательный ортант, приписана степень принадлежности 1 (кроме начала координат, степень принадлежности которого равна 0), векторам, принадлежащим конусу K_1 и не принадлежащим неотрицательному ортанту, – μ_1, а векторам, принадлежащим конусу K_2, но не принадлежащим K_1, – соответственно μ_2.

Из доказательства теоремы 2.5 следует, что носитель конуса *M* совпадает со множеством всех ненулевых решений системы линейных неравенств

$$
\begin{gathered}
y_s \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{j,k\}, \\
w_j' y_i + w_i' y_j \geqq 0, \\
w_k'' y_i + w_i'' y_k \geqq 0, \\
w_j' w_k'' y_i + w_i' w_k'' y_j + w_i'' w_j' y_k \geqq 0,
\end{gathered}
$$

а $\operatorname{supp} M_1$ – со множеством всех решений системы линейных неравенств

$$
\begin{gathered}
y_s \geqq 0 \ \text{ для всех } \ s \in I \setminus \{j\}, \\
w_j' y_i + w_i' y_j \geqq 0 .
\end{gathered}
$$

Рассмотрим нечеткое конусное отношение с конусом *M*. Обозначим его функцию принадлежности ς. Анализ показывает, что она в точности совпадает с той, которая обозначена той же буквой и определяется равенством (7.7). Из определения нечеткого множества недоминируемых векторов (7.6) и равенства (7.7) следует, что нечеткое множество, функция принадлежности которого есть $\lambda_Y^M(y)$, представляет собой нечеткое множество недоминируемых векторов относительно отношения ς.

Неотрицательный ортант содержится в M с единичной степенью принадлежности. В свою очередь, конус M содержится в конусе K нечеткого отношения $\mu(\cdot,\cdot)$. На этом основании множество Парето содержит множество недоминируемых векторов относительно конусного отношения ς, которое включает множество недоминируемых векторов, соответствующее конусному отношению M. Последнее множество, в силу леммы 7.1, содержит любое нечеткое множество выбираемых векторов ■

Анализ формулировки теоремы 7.6 показывает, что для построения нечеткого множества с функцией принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ следует решить три (четкие) многокритериальные задачи. Начать следует с нахождения множества парето-оптимальных векторов многокритериальной задачи, содержащей исходную векторную функцию f и множество возможных вавриантов X. После чего всем векторам найденного множества Парето нужно присвоить степень принадлежности, равную единице, а остальным векторам – нулевую степень принадлежности. Затем на том же самом множестве X необходимо рассмотреть вторую многокритериальную задачу с новой векторной функцией, имеющей компоненты f_s для всех $s \in I \setminus \{j\}$ и j-й компонентой вида $w'_j f_i + w'_i f_j$. Найти множество парето-оптимальных векторов для последней задачи, после чего всем векторам «старого» множества Парето, которые не попали в «новое» множество Парето, присвоить степень принадлежности $1-\mu_1$. Наконец, на множестве X следует рассмотреть третью многокритериальную задачу, имеющей «старые» компоненты f_s для всех $s \in I \setminus \{j,k\}$, новую j-ю компоненту $w'_j f_i + w'_i f_j$, новую k-ю компоненту $f_k = w''_k f_i + w''_i f_k$ и дополнительную $(m+1)$-ю компоненту $f_{m+1} = w'_j w''_k f_i + w'_i w''_k f_j + w'_j w''_i f_k$. После нахождения множества парето-оптимальных векторов в последней задаче, векторам найденного множества Парето, которые не попали ни в первое, ни во второе множества Парето присваивается степень принадлежности $1-\mu_2$. В итоге будет построено нечеткое множество векторов, представляющее сужение исходного множества Парето за счет использования имеющихся двух квантов нечеткой информации.

7.4.2. Пример. Пусть выполняются все предположения теоремы 7.6 и $m=3$, $f=(f_1, f_2, f_3)$, $Y=\{y^1,y^2,y^3,y^4,y^5,y^6\}\subset R^3$, $y^1=(4,3,5)$, $y^2=(0,3,2)$, $y^3=(1,2,3)$, $y^4=(4,3,0)$, $y^5=(5,2,7)$, $y^6=(2,5,5)$. В данном случае множество парето-оптимальных векторов состоит из трех элементов: $\lambda_Y^P(y^1)=\lambda_Y^P(y^5)=\lambda_Y^P(y^6)=1$, $\lambda_Y^P(y^2)=\lambda_Y^P(y^3)=\lambda_Y^P(y^4)=0$.

Предположим, что от ЛПР получена информация о том, что первый критерий более значим, чем второй с параметрами $w'_1=0.4$, $w'_2=0.6$ и степенью уверенности 0.6, а также, что первый критерий более значим третьего критерия с параметрами $w''_1=0.5$, $w''_3=0.5$ и степенью уверенности 0.4.

В соответствии с теоремой 7.6 вычисляем

$$\bar{y}^1=(4,\,3.6,\,5),\quad \bar{y}^2=(0,\,1.2,\,2),\quad \bar{y}^3=(1,\,1.4,\,3),$$
$$\bar{y}^4=(4,\,3.6,\,0),\quad \bar{y}^5=(5,\,3.8,\,7),\quad \bar{y}^6=(2,\,3.2,\,5).$$

Здесь множество парето-оптимальных векторов состоит из двух элементов – первого и пятого. Поэтому полагаем

$$\lambda_Y^M\left(y^1\right)=\lambda_Y^M\left(y^5\right)=1,\quad \lambda_Y^M\left(y^6\right)=0.4,\quad \lambda_Y^M\left(y^2\right)=\lambda_Y^M\left(y^3\right)=\lambda_Y^M\left(y^4\right)=0.$$

Далее, в соответствии с теоремой 7.6 вычисляем дополнительный критерий $f_4=0.3f_1+0.2f_2+0.3f_3$. Следовательно,

$$\hat{y}^1=(4, 3.6, 4.5, 3.3\ ),\quad \hat{y}^2=(0, 1.2, 1, 1.2),\quad \hat{y}^3=(1, 1.4, 2, 1.6),$$
$$\hat{y}^4=(4, 3.6, 2, 1.8),\quad \hat{y}^5=(5, 3.8, 6, 4\ ),\quad \hat{y}^6=(2, 3.2, 3.5, 3.1).$$

Здесь парето-оптимальным будет пятый вектор. В итоге имеем

$$\lambda_Y^M\left(y^5\right)=1,\ \lambda_Y^M\left(y^1\right)=0.6,\ \lambda_Y^M\left(y^6\right)=0.4,\quad \lambda_Y^M\left(y^2\right)=\lambda_Y^M\left(y^3\right)=\lambda_Y^M\left(y^4\right)=0.$$

Полученное нечеткое множество представляет собой искомое сужение исходного множества Парето. Лучшим кандидатом в число выбираемых является пятый вектор, за ним следует первый, затем - шестой.

Теорема 7.7. *Пусть* $i, j, k\in I;\ i\neq j, i\neq k, j\neq k$, *и имеют место соотношения* $\mu(y',0_m)=\mu_1\in(0,1]$, $\mu(y'',0_m)=\mu_2\in(0,1]$, *где вектор* y' *имеет только две отличные от нуля компоненты* $y'_i=w'_i$, $y'_k=-w'_k$, *а вектор* y'' − *соответственно* $y''_j=w''_j$, $y''_k=-w''_k$, *причем* $\mu_1\geqq\mu_2$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$\lambda_Y^C(y)\leqq\lambda_Y^M(y)\leqq\lambda_Y^P(y)\qquad \text{для всех}\ \ y\in Y,$$

где $\lambda_Y^P(y)$ − *функция принадлежности множества Парето, а* $\lambda_Y^M(y)$ − *функция принадлежности, определяемая равенствами*

$$\lambda_Y^M(y)=1-\sup_{z\in Y}\varsigma(z,y)\quad \text{для}\quad \text{всех}\quad y\in Y,$$

$$\varsigma(z,y)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad z-y\in R_+^m,\quad \text{для всех}\ y,z\in Y,\ y\neq z\\ \mu_1, & \text{если}\quad \bar{z}-\bar{y}\in R_+^m,\ z-y\notin R_+^m,\quad \text{для всех}\ y,z\in Y,\ y\neq z\\ \mu_2, & \text{если}\quad \hat{z}-\hat{y}\in R_+^{m+1}, \bar{z}-\bar{y}\notin R_+^m,\ z-y\notin R_+^m,\quad \text{для всех}\ y,z\in Y,\ y\neq z\\ 0, & \text{в}\quad \text{остальных случаях,}\end{cases}$$

причем

$$\bar{y}=\left(y_1,\ldots,y_{k-1},w'_k y_i+w'_i y_k,y_{k+1},\ldots,y_m\right),$$
$$\hat{y}=\left(y_1,\ldots,y_{k-1},w'_k w''_j y_i+w'_i w''_k y_j+w'_i w''_j y_k,y_{k+1},\ldots,y_m\right),$$

$$\bar{z} = \left(z_1,\ldots,z_{k-1}, w_k' z_i + w_i' z_k, z_{k+1},\ldots,z_m\right),$$
$$\hat{z} = \left(z_1,\ldots,z_{k-1}, w_k' w_j'' z_i + w_i' w_k'' z_j + w_i' w_j'' z_k, z_{k+1},\ldots,z_m\right).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы, и поэтому не приводится.

7.4.3. Кванты нечеткой циклической информации и их непротиворечивость.

Определение 7.3. Будем говорить, что задана *нечеткая циклическая информация* со степенями уверенности $\mu_1,\ldots,\mu_k \in (0,1]$ и положительными параметрами $w_{i_1}^{(1)}$, $w_{i_2}^{(1)}$, $w_{i_2}^{(2)}$, $w_{i_3}^{(2)}$, …, $w_{i_{k-1}}^{(k-1)}$, $w_{i_{k-1}}^{(k-1)}$, $w_{i_k}^{(k)}$, $w_{i_1}^{(k)}$, если для векторов $y^{(1)}$, …, $y^{(k)} \in R^m$, таких, что

$$y_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(1)}, \quad y_{i_2}^{(1)} = -w_{i_2}^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i_1, i_2\}$$
$$y_{i_2}^{(2)} = w_{i_2}^{(2)}, \quad y_{i_3}^{(2)} = -w_{i_3}^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i_2, i_3\}$$
$$\ldots$$
$$y_{i_k}^{(k)} = w_{i_k}^{(k)}, \quad y_{i_1}^{(k)} = -w_{i_1}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i_1, i_k\}$$

справедливы равенства $\mu(y^{(1)}, 0_m) = \mu_1$, …, $\mu(y^{(k)}, 0_m) = \mu_k$.

Поскольку циклическая информация задается при помощи набора квантов, необходимо решить вопрос о непротиворечивости такой информации. Определение непротиворечивого набора векторов было сформулировано в разд. 7.2.2. Там же была введена такая перестановка

$$\mu_{11}, \ldots, \mu_{1k_1}, \mu_{21}, \ldots, \mu_{2k_2}, \ldots, \mu_{l1}, \ldots, \mu_{lk_l}$$

чисел $\mu_1,\ldots,\mu_k$, что

$$1 \geqq \mu_{11} = \ldots = \mu_{1k_1} > \mu_{21} = \ldots = \mu_{2k_2} > \ldots > \mu_{l1} = \ldots = \mu_{lk_l} > 0,$$

где $k = k_1 + \ldots + k_l$, $1 \leqq l \leqq k$. Далее также будем использовать четкие конусы K_h, $h \in \{1,\ldots,l\}$, порожденные единичными векторами e^1, …, e^m пространства R^m вместе с векторами $y^{(i)}$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, такими, что соответствующие им числа μ_i удовлетворяют неравенству $\mu_i \geqq \mu_{h1}$). Эти конусы связаны соотношением $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_l$.

Введем матрицу

$$W = \begin{pmatrix} w_{i_1}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ -w_{i_2}^{(1)} & w_{i_2}^{(2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_{k-1}}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -w_{i_k}^{(k-1)} & w_{i_k}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что *нечеткая циклическая информация, введенная в определении 7.3, непротиворечива в том и только случае, когда определитель матрицы W положителен, т.е.* $|W| > 0$.

□ Необходимость. Пусть указанная нечеткая циклическая информация непротиворечива. Тогда в соответствии с теоремой 7.2 система линейных уравнений (7.3), записанная для векторов, образующих заданный набор квантов циклической информации, не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения. В таком случае, согласно теореме 5.6 справедливо $|W| > 0$.

Достаточность. Пусть верно неравенство $|W| > 0$. По теореме 5.6 соответствующая однородная система линейных уравнений (7.3) не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения. Докажем, что каждый конус K_h, $h \in \{1,...,l-1\}$, не содержит ни одного вектора $y^{(j)}$, $j = 1,2,...,k$, такого, что соответствующее число μ_j удовлетворяет неравенству $\mu_j < \mu_{h1}$. Предположим обратное: найдутся такие номера $\bar{h} \in \{1,...,l-1\}$ и $\bar{j} \in \{1,...,k\}$, для которых $\mu_{\bar{j}} < \mu_{\bar{h}1}$, причем конус $K_{\bar{h}}$ содержит вектор $y^{(\bar{j})}$.

Далее предполагаем, что $\bar{j} \in \{1,...,k-1\}$ (случай $\bar{j} = k$ рассматривается аналогично). Вышесказанное означает возможность представления вектора $y^{(\bar{j})}$ в виде линейной неотрицательной комбинации

$$y^{(\bar{j})} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i e^i + \sum_{j:\, \mu_j \geqq \mu_{\bar{h}1}} \bar{\xi}_j y^{(\bar{j})} . \tag{7.11}$$

Возможны два случая: $\mu_{\bar{j}+1} \geqq \mu_{\bar{h}1}$, либо $\mu_{\bar{j}+1} < \mu_{\bar{h}1}$. Компоненты векторов $y^{(\bar{j})}$ и $y^{(\bar{j}+1)}$ имеют соответствующий этим случаям вид

$$y_p^{(\bar{j})} = w_p^{(\bar{j})},\ y_q^{(\bar{j})} = -w_q^{(\bar{j})},\ y_s^{(\bar{j})} = 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{p,q\}$$
$$y_q^{(\bar{j}+1)} = w_q^{(\bar{j}+1)},\ y_t^{(\bar{j}+1)} = -w_t^{(\bar{j}+1)},\ y_s^{(\bar{j}+1)} = 0 \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{q,t\}$$

где *p, q, t* – некоторые попарно различные номера критериев из набора $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$. В указанных двух случаях q-я компонента векторного равенства (7.11) равна

$$-w_q^{(\bar{j})} = \bar{\lambda}_q + \bar{\xi}_{\bar{j}+1} w_q^{(\bar{j}+1)} \quad \text{и} \quad -w_q^{(\bar{j})} = \bar{\lambda}_q ,$$

соответственно. Ни одно из последних двух равенств невозможно ни при каких положительных числах $\bar{\lambda}_q$ и $\bar{\xi}_{\bar{j}+1}$. Значит, предположение $y^{(\bar{j})} \in K_{\bar{h}}$ неверно и в соответствии с теоремой 7.2 нечеткая циклическая информация является непротиворечивой ■

7.4.4. Сужение множества Парето за счет простейшего кванта нечеткой циклической информации. Пусть задана нечеткая циклическая информация со степенями уверенности μ_1, μ_2, $\mu_3 \in (0,1]$. Согласно определению 7.2, это означает, что векторы $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)} \in R^m$ с компонентами

$$y_i^{(1)} = w_i^{(1)},\ \ y_j^{(1)} = -w_j^{(1)},\ \ y_s^{(1)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$y_j^{(2)} = w_j^{(2)},\ \ y_l^{(2)} = -w_l^{(2)},\ \ y_s^{(2)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, l\},$$
$$y_l^{(3)} = w_l^{(3)},\ \ y_i^{(3)} = -w_i^{(3)},\ \ y_s^{(3)} = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{l, i\}$$

удовлетворяют равенствам $\mu(y^{(1)}, 0_m) = \mu_1$, $\mu(y^{(2)}, 0_m) = \mu_2$, $\mu(y^{(3)}, 0_m) = \mu_3$. Будем считать, что заданная нечеткая циклическая информация непротиворечива, т.е. $|W| > 0$.

Упорядочим числа μ_1, μ_2, μ_3 так, чтобы выполнялись неравенства $\tilde{\mu}_1 \geqq \tilde{\mu}_2 \geqq \tilde{\mu}_3$, где $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3)$ есть некоторая перестановка (μ_1, μ_2, μ_3).

Введем в рассмотрение следующую ситуацию.

(I) $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3$. Этим неравенствам отвечает упорядоченный набор векторов $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, который составляет «цепочку» квантов: критерий *i* более значим, чем критерий *j*, критерий *j* более значим, чем критерий *l*, а также критерий *l* более значим критерия *i*.

В ситуацию (I) входят также случаи $\mu_3 \geqq \mu_1 \geqq \mu_2$ и $\mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \mu_1$. Например, первому из них соответствуют векторы $y^{(3)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, составляющие «цепочку» квантов, которая после замены номеров критериев *l* на *i*, *i* на *j*, *j* на *l* удовлетворяет условиям ситуации (I).

Пусть реализуется следующая ситуация.

(II) $\mu_1 > \mu_3 > \mu_2$. Соответствующий упорядоченный набор векторов $y^{(1)}$, $y^{(3)}$, $y^{(2)}$ образует «цепочку» квантов: критерий *i* более значим критерия *j*, критерий *l* более значим критерия *i*, а критерий *j* более значим критерия *l*. К этой же ситуации при помощи переименования критериев приходим и при выполнении неравенств $\mu_2 > \mu_1 > \mu_3$ и $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$.

Поскольку число возможных перестановок трех чисел равно 6, то других возможных неравенств, связывающих величины μ_1, μ_2, μ_3, кроме рассмотренных выше двух ситуаций, не существует. В ситуации (I) участвуют нестрогие неравенства, в ситуации (II) – строгие.

Рассмотрим ситуацию (I). Не ограничивая общности, положим $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3$ (в противном случае можно перенумеровать критерии). Введем функцию принадлежности

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \zeta(z, y) \quad \text{для всех} \quad y \in Y, \tag{7.12}$$

где

$$\zeta(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu_1, & \text{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \\ \mu_2, & \text{если } \tilde{z} - \tilde{y} \in R_+^m,\ \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^m, \\ \mu_3, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^m,\ \tilde{z} - \tilde{y} \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{для всех } y, z \in Y,\ y \neq z, \tag{7.13}$$

а векторы $\bar{a}$, $\tilde{a}$, $\hat{a}$, где $a=(a_1,\dots a_m)\in\{y,z\}$, выглядят следующим образом:

$$\bar{a}=a+(w_j^{(1)}a_i+(w_i^{(1)}-1)a_j)e^j,$$
$$\tilde{a}=a+(w_j^{(1)}a_i+(w_i^{(1)}-1)a_j)e^j+(w_l^{(2)}w_j^{(1)}a_i+w_l^{(2)}w_i^{(1)}a_j+(w_j^{(2)}w_i^{(1)}-1)a_l)e^l,$$
$$\hat{a}=a+((w_i^{(2)}w_l^{(3)}-1)a_i+w_l^{(2)}w_i^{(3)}a_j+w_j^{(2)}w_i^{(3)}a_l)e^i+(w_j^{(1)}w_l^{(3)}a_i+(w_i^{(1)}w_l^{(3)}-1)a_j+w_j^{(1)}w_i^{(3)}a_l)e^j+$$
$$+(w_l^{(2)}w_j^{(1)}a_i+w_l^{(2)}w_i^{(1)}a_j+(w_j^{(2)}w_i^{(1)}-1)a_l)e^l.$$

Теорема 7.8. *Пусть задана непротиворечивая нечеткая циклическая информация, описанная в ситуации* (I). *Тогда для любой функции принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *нечеткого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливо неравенство*

$$\lambda_Y^C(y)\leqq\lambda_Y^M(y)\leqq\lambda_Y^P(y)\qquad \text{для всех } y\in Y,$$

где функция $\lambda_Y^M(\cdot)$ *определяется равенством* (7.12).

□ Задание непротиворечивой нечеткой циклической информации означает справедливость равенств $\mu(y^{(1)},0_m)=\mu_1$, $\mu(y^{(2)},0_m)=\mu_2$, $\mu(y^{(3)},0_m)=\mu_3$ для векторов $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$.

Рассмотрим три четких конуса K_1, K_2, K_3, каждый из которых определяется так, как это было описано выше, $K_1\subset K_2\subset K_3$. Вектор $y^{(i)}$ принадлежит конусу K_i для всех $i\in\{1,2,3\}$.

Теперь для каждого конуса K_i введем нечеткий конус M_i, $i=1,2,3$, такой, что supp M_i = K_i, $i=1,2,3$, и все его элементы, принадлежащие неотрицательному ортанту (за исключением начала координат) имеют степень принадлежности 1, а остальные – μ_i.

Пусть M есть нечеткий конус с функцией принадлежности $\eta(\cdot)$ и носителем, образованным неотрицательным ортантом R_+^m без начала координат и векторами $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, причем

$$\eta(y)=\begin{cases}1, & \text{если } y\in R_+^m,\\ \mu_1, & \text{если } y\in K_1,\ y\notin R_+^m,\\ \mu_2, & \text{если } y\in K_2,\ y\notin K_1,\\ \mu_3, & \text{если } y\in K_3,\ y\notin K_2,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Конус M является объединением конусов M_1, M_2, M_3, причем в силу непротиворечивости заданной информации, он острый и выпуклый.

Согласно доказательству теоремы 5.7, множество векторов, составляющих носитель конуса M (т.е. K_3), является множеством ненулевых решений системы неравенств

$$w_j^{(2)}w_l^{(3)}y_i+w_i^{(3)}w_l^{(2)}y_j+w_i^{(3)}w_j^{(2)}y_l\geqq 0,$$

$$w_j^{(1)}w_l^{(3)}y_i + w_i^{(1)}w_l^{(3)}y_j + w_i^{(3)}w_j^{(1)}y_l \geqq 0,$$
$$w_j^{(1)}w_l^{(2)}y_i + w_i^{(1)}w_l^{(2)}y_j + w_i^{(1)}w_j^{(2)}y_l \geqq 0,$$
$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j, l\}.$$

Включение $y \in \operatorname{supp} M_2 = K_2$ равносильно однородной системе линейных неравенств (в которых хотя бы одно − строгое)

$$w_j^{(1)}y_i + w_i^{(1)}y_j \geqq 0,$$
$$w_j^{(1)}w_l^{(2)}y_i + w_i^{(1)}w_l^{(2)}y_j + w_i^{(1)}w_j^{(2)}y_l \geqq 0,$$
$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, l\},$$

а включение $y \in \operatorname{supp} M_1 = K_1$ – системе неравенств (где хотя бы одно из них строгое) (см. теорему 2.5)

$$w_j^{(1)}y_i + w_i^{(1)}y_j \geqq 0,$$
$$y_s \geqq 0 \quad \forall s \in I \setminus \{j\}.$$

Введем нечеткое конусное отношение с конусом M, обозначив его функцию принадлежности через $\psi(\cdot,\cdot)$, для которой справедливо равенство $\psi(z,y) = \eta(z-y)$ для всех $z, y \in Y$. Нетрудно видеть, что данная функция совпадает с $\zeta(\cdot,\cdot)$, определенной равенством (7.13). Таким образом, нечеткое бинарное отношение ζ является конусным с конусом M.

Из (7.12) следует, что $\lambda_Y^M(\cdot)$ является функций принадлежности нечеткого множества недоминируемых векторов относительного бинарного отношения ζ. По определению нечеткий конус M содержит неотрицательный ортант R_+^m. Кроме того, справедливо включение $M \subset K$. Тогда множество Парето содержит нечеткое множество недоминируемых векторов относительно бинарного отношения ζ, которое, в свою очередь, содержит нечеткое множество недоминируемых векторов относительно отношения μ.

Пусть $\lambda_Y^N(\cdot)$ – функция принадлежности нечеткого множества недоминируемых векторов относительно бинарного отношения μ (ему соответствует конус K). Согласно лемме 7.1, справедливо неравенство $\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_Y^N(y)$ для всех $y \in Y$. В результате, приходим к требуемым неравенствам $\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_Y^M(y) \leqq \lambda_Y^P(y)$ для всех $y \in Y$ ■

В соответствии с доказанной теоремой для сужения множества Парето на основе нечеткой циклической информации, необходимо решить четыре многокритериальных задачи с четким отношением предпочтения. Сначала следует найти множество Парето $P(Y)$ в исходной многокритериальной задаче, т.е. с множеством возможных векторов X и векторным критерием f. Полагаем $\lambda_Y^M(y) = 1$ для всех векторов $y \in P(Y)$, а для остальных векторов из множества Y значение функции принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ приравнивается нулю. Затем решаем многокритериальную задачу с векторным критерием $\bar{f}$, полученным из критерия f заменой

j-й компоненты на линейную комбинацию $w_j^{(1)} f_i + w_i^{(1)} f_j$. Обозначим $\bar{P}(Y) = f(P_{\bar{f}}(X))$. Для векторов, вошедших во множество $P(Y) \setminus \bar{P}(Y)$, значения функции принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ полагаем равными $1-\mu_1$. У третьей многокритериальной задачи векторный критерий $\tilde{f}$ образован компонентами критерия f, где j-й заменен на комбинацию $w_j^{(1)} f_i + w_i^{(1)} f_j$, а l-й на комбинацию $w_l^{(2)} w_j^{(1)} f_i + w_l^{(2)} w_i^{(1)} f_j + w_j^{(2)} w_i^{(1)} f_l$. Образ множества парето-оптимальных вариантов $P_{\tilde{f}}(X)$ при отображении f обозначим $\tilde{P}(Y)$. Значения функции принадлежности каждого вектора из множества $\bar{P}(Y) \setminus \tilde{P}(Y)$ следует приравнять $1-\mu_2$. После этого решаем четвертую многокритериальную задачу с векторным критерием $\hat{f}$, полученным из критерия f заменой i-й, j-й и l-й компонент на линейные комбинации $w_j^{(2)} w_l^{(3)} f_i + w_l^{(2)} w_i^{(3)} f_j + w_j^{(2)} w_i^{(3)} f_l$, $w_j^{(1)} w_l^{(3)} f_i + w_i^{(1)} w_l^{(3)} f_j + w_j^{(1)} w_i^{(3)} f_l$ и $w_l^{(2)} w_j^{(1)} f_i + w_l^{(2)} w_i^{(1)} f_j + w_j^{(2)} w_i^{(1)} f_l$ соответственно. Также положим $\hat{P}(Y) = f(P_{\hat{f}}(X))$. Значение функции принадлежности в векторах множества $\tilde{P}(Y) \setminus \hat{P}(Y)$ нужно положить равным $1-\mu_3$.

В итоге, решив указанные четыре многокритериальные задачи, мы построим искомую функцию принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$ нечеткого множества, отвечающего искомому сужению множества Парето.

Замечание 7.1. Если в формулировке теоремы 7.8 имеет место равенство $\mu_1 = \mu_2$, то нечеткое конусное отношение ζ следует вычислять по формуле

$$\zeta(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu_1 = \mu_2, & \text{если } \tilde{z} - \tilde{y} \in R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \\ \mu_3, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^m,\ \tilde{z} - \tilde{y} \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{для всех} \quad y, z \in Y,\ y \neq z.$$

Замечание 7.2. Если в условиях теоремы 7.8 верно $\mu_2 = \mu_3$, то нечеткое конусное отношение ζ определяется следующим образом

$$\zeta(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu_1, & \text{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \\ \mu_2 = \mu_3, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^m,\ \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{для всех} \quad y, z \in Y,\ y \neq z.$$

Замечание 7.3. Если же в условиях теоремы 7.8 выполняется $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu^*$, то

$$\zeta(z,y)=\begin{cases}1, & \text{если } z-y\in R_+^m,\\ \mu^*, & \text{если } \hat{z}-\hat{y}\in R_+^m,\ z-y\notin R_+^m,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\quad \text{для всех } y,z\in Y,\ y\neq z.$$

Рассмотрим иллюстративный пример, в котором множество возможных векторов Y состоит из шести трехмерных векторов

$$y^{(1)}=(4,2,1)\,,\ y^{(2)}=(5,1,3)\,,\ y^{(3)}=(1,0,1)\,,\ y^{(4)}=(3,4.5,3)\,,\ y^{(5)}=(1,5,3)\,,\ y^{(6)}=(2,4,4)\,.$$

Предположим, что от ЛПР получена циклическая информация о нечетком отношении предпочтения, задаваемая векторами

$$v^{(1)}=(3,-1,0)\,,\ v^{(2)}=(0,2,-3)\,,\ v^{(3)}=(-2,0,4)\,,$$

со степенями уверенности 0.9, 0.7 и 0.3, т.е. справедливы равенства

$$\mu(v^{(1)},0_3)=0.9,\ \ \mu(v^{(2)},0_3)=0.7,\ \mu(v^{(3)},0_3)=0.3.$$

Очевидно, данная информация является непротиворечивой, поскольку определитель $|W|=|v^{(1)}\ v^{(2)}\ v^{(3)}|=18$ положителен. Все векторы множества Y, кроме $y^{(3)}$, являются парето-оптимальными. Следовательно, функция принадлежности λ_Y^P множества Парето $P(Y)$ есть

$$\lambda_Y^P(y^{(i)})=1 \ \text{ для всех } i\in\{1,2,4,5,6\}\,,\ \lambda_Y^P(y^{(3)})=0\,.$$

Поскольку в данном случае мы находимся в ситуации (I) (так как 0,9 > 0,7 > 0,3), для учета нечеткой циклической информации применим теорему 7.8 и построим «новое» множество Парето с функцией принадлежности λ_Y^M. Для этого решаем вторую многокритериальную задачу с векторным критерием $\bar{f}=(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3)$, где $\bar{f}_1=f_1$, $\bar{f}_2=f_1+3f_2$, $\bar{f}_3=f_3$. Используя последние соотношения, сформируем множество векторов $\bar{Y}$:

$$\bar{y}^{(1)}=(4,10,1)\,,\ \bar{y}^{(2)}=(5,8,3)\,,\ \bar{y}^{(3)}=(1,1,1)\,,\ \bar{y}^{(4)}=(3,16.5,3)\,,\ \bar{y}^{(5)}=(1,16,3)\,,\ \bar{y}^{(6)}=(2,14,4)\,,$$

среди которых парето-оптимальными являются 1-й, 2-й, 4-й и 6-й. Поэтому на данном этапе функция принадлежности λ_Y^M будет следующей

$$\lambda_Y^M(y^{(i)})=1 \text{ для всех } i\in\{1,2,4,6\}\,,\ \lambda_Y^M(y^{(5)})=0{,}1,\ \lambda_Y^M(y^{(3)})=0\,.$$

Теперь решаем третью многокритериальную задачу с векторным критерием $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2,\ \tilde{f}_3)$, где $\tilde{f}_1 = f_1$, $\tilde{f}_2 = f_1 + 3f_2$, $\tilde{f}_3 = 3f_1 + 9f_2 + 6f_3$, и с соответствующим множеством возможных векторов $\tilde{Y}$:

$$\tilde{y}^{(1)} = (4, 10, 36),\ \tilde{y}^{(2)} = (5, 8, 42),\ \tilde{y}^{(3)} = (1, 1, 9),\ \tilde{y}^{(4)} = (3, 16.5, 67.5),\ \tilde{y}^{(5)} = (1, 16, 66),$$
$$\tilde{y}^{(6)} = (2, 14, 66).$$

Парето-оптимальными являются векторы $\tilde{y}^{(1)}$, $\tilde{y}^{(2)}$ и $\tilde{y}^{(4)}$, поэтому

$$\lambda_Y^M(y^{(i)}) = 1 \text{ для всех } i \in \{1, 2, 4\},\ \lambda_Y^M(y^{(6)}) = 0.3,\ \lambda_Y^M(y^{(5)}) = 0.1,\ \lambda_Y^M(y^{(3)}) = 0.$$

Окончательно, переходим к четвертой многокритериальной задаче, в которой компоненты векторного критерия $\hat{f} = (\hat{f}_1,\ \hat{f}_2,\ \hat{f}_3)$ суть функции $\hat{f}_1 = 8f_1 + 6f_2 + 4f_3$, $\hat{f}_2 = 4f_1 + 12f_2 + 2f_3$ и $\hat{f}_3 = 3f_1 + 9f_2 + 6f_3$. Строим множество векторов $\hat{Y}$

$$\hat{y}^{(1)} = (48, 42, 36),\ \hat{y}^{(2)} = (58, 38, 42),\ \hat{y}^{(3)} = (12, 6, 9),\ \hat{y}^{(4)} = (63, 72, 67.5),\ \hat{y}^{(5)} = (50, 70, 66),$$
$$\hat{y}^{(6)} = (56, 64, 66).$$

Поскольку вектор $\hat{y}^{(4)}$ доминирует все остальные векторы по отношению Парето, имеем следующую функцию принадлежности λ_Y^M:

$$\lambda_Y^M(y^{(4)}) = 1,\ \lambda_Y^M(y^{(1)}) = \lambda_Y^M(y^{(2)}) = 0.7,\ \lambda_Y^M(y^{(6)}) = 0.3\ ,\ \lambda_Y^M(y^{(5)}) = 0.1,\ \lambda_Y^M(y^{(3)}) = 0.$$

В результате, используя циклическую информацию о нечетком отношении предпочтения, мы построили сужение множества Парето в виде нечеткого множества с функцией принадлежности λ_Y^M.

Перейдем к анализу ситуации (II). Не ограничивая общности, положим $\mu_1 > \mu_3 > \mu_2$, т.е. $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_2$ (в противном случае следует просто перенумеровать критерии).

Как и ранее, рассмотрим функцию принадлежности $\lambda_Y^M(\cdot)$, определяемую равенством в (7.12). Здесь нечеткое отношение ζ определяется по формуле

$$\zeta(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu_1, & \text{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^m,\ z - y \notin R_+^m, \\ \mu_3, & \text{если } \tilde{z} - \tilde{y} \in R_+^m,\ \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^m, \\ \mu_2, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^m,\ \tilde{z} - \tilde{y} \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{для всех } y, z \in Y,\ y \neq z,$$

а векторы $\bar{b}$, $\tilde{b}$, $\hat{b}$, где $b=(b_1,\ldots,b_m)\in\{y,z\}$, таковы, что $\bar{b}=\bar{a}$, $\hat{b}=\hat{a}$ и

$$\tilde{b}=b+(w_i^{(3)}b_l+(w_l^{(3)}-1)b_i)e^i+(w_j^{(1)}w_l^{(3)}b_i+(w_i^{(1)}w_l^{(3)}-1)b_j+w_j^{(1)}w_i^{(3)}b_l)e^j\ .$$

Теорема 7.9. *Пусть задана непротиворечивая нечеткая циклическая информация, описанная выше как ситуация* (II). *Тогда для любой функции принадлежности* $\lambda_Y^M(\cdot)$ *нечеткого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливы неравенства*

$$\lambda_Y^C(y)\leqq\lambda_Y^M(y)\leqq\lambda_Y^P(y)\qquad \text{для всех } y\in Y\ ,$$

где функция $\lambda_Y^M(\cdot)$ *определяется* (7.12) и (7.14).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы, отвечающей ситуации (I), с той лишь разницей, что четкий конус K_2 образован неотрицательным ортантом и векторами $y^{(1)}$ и $y^{(3)}$, а также носитель нечеткого конуса M_2 (т.е. конус K_2) является множеством ненулевых решений следующей системы неравенств (где хотя бы одно из них - строгое)

$$w_i^{(3)}y_l+w_l^{(3)}y_i\geqq 0\ ,$$
$$w_j^{(1)}w_l^{(3)}y_i+w_i^{(1)}w_l^{(3)}y_j+w_i^{(3)}w_j^{(1)}y_l\geqq 0\ ,$$
$$y_s\geqq 0 \quad \text{для всех } s\in I\setminus\{i,j\}\ .$$

Глава 8. Методология и практика принятия решений на основе квантов информации

В этой главе после краткого предварительного рассмотрения вопросов, связанных с процессом принятия решения человеком, излагается методология аксиоматического подхода к сужению множества Парето (области компромиссов) на основе квантов информации об отношении предпочтения ЛПР. Теоретические предпосылки применения этого метода были разработаны в предыдущих главах, а здесь дается его описание без математических подробностей и приводятся некоторые рекомендации по применению. Кроме того, изучается возможность комбинирования этого метода с другими известными методами принятия решений, а также пути обобщения рассматриваемого подхода.

8.1. Как принимает решение человек?

8.1.1. Психические составляющие процесса принятия решений. В процессе решения выделяют стадии *поиска*, *принятия* и *реализации* решения.

Принятие решений – волевой акт формирования последовательности действий, ведущих к достижению цели на основе преобразования исходной информации в ситуации неопределенности. Основные этапы процесса принятия решений включают *информационную подготовку решений* и собственно *процедуру принятия решений* – формирование и сопоставление вариантов, выбор, построение программы действий.

Принятие решений с одной стороны может выступать как особая форма мыслительной деятельности (например, управленческое решение), с другой – как один из этапов мыслительного действия при решении любых задач. Область применения этого понятия чрезвычайно широка. В этой книге под *принятием решений* обычно понимается особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Процесс принятия решений обеспечивается деятельностью *интеллекта*, который складывается в основном из совместной работы *памяти*, *внимания* и *мышления*.

Память связывает прошлое субъекта с его настоящим и будущим и представляет собой особого рода процессы организации и сохранения прошлого опыта, позволяющие повторно использовать этот опыт в деятельности человека или же дающие возможность возврата в сферу сознания. Память лежит в основе любого психического явления. Собственно благодаря памяти существует как таковая личность, ее отношения, навыки, привычки, надежды, желания и притязания.

В зависимости от времени сохранения различают несколько видов памяти – *мгновенную* или *сенсорную* (обеспечивает удержание информации в течение срока менее одной секунды), *кратковременную* (время сохранения − до 30 сек.), *оперативную* (время сохранения информации до нескольких минут) и *долговременную*, которая способна удерживать информацию от нескольких часов до десятилетий. По мнению психологов, именно с оперативной памятью человека прежде всего связаны процессы принятия решений, поскольку наиболее типичным для оперативной памяти является удержание материала для использования его именно в процессе принятия решений. Оперативная память тесно связана с долговременной и опирается на способы запоминания и различные приемы, выработанные в других видах деятельности. В свою очередь, долговременная память использует приемы и способы запоминания, сложившиеся внутри оперативной памяти. Между этими видами памяти существует самая тесная связь и в отношении циркуляции информации – оперативная память использует часть информации, хранящейся в долговременной памяти и, с другой стороны, она сама постоянно передает в долговременную память какую-то часть новой информации.

Любопытно, что в оперативной памяти человека может храниться лишь очень ограниченное количество информации – не более 7 ± 2 единиц материала, которых называют чанками (от английского слова chunk). Этот факт составляет содержание так называемого *закона Дж. Миллера* по имени психолога, который в 1956 году на основе экспериментальных данных опубликовал свою знаменитую статью «о магическом числе 7 ± 2» (см. [21]).

Заметное влияние на постановку проблемы памяти оказала аналогия между этапами переработки информации человеком и структурными блоками компьютера. Следует, однако, заметить, что при таком сравнении функциональная структура памяти человека обнаруживает значительно большую гибкость по сравнению с компьютером.

Следующий компонент интеллекта – *внимание*, которое понимают как сосредоточенность деятельности субъекта в данный момент времени на каком-то идеальном или реальном объекте, т.е. предмете, событии, образе, рассуждении и т.п. Внимание – это динамическая сторона сознания, характеризующая степень его направленности на объект и сосредоточения на нем с целью обеспечения адекватного отражения в течение времени, необходимого для выполнения определенного акта деятельности (например, принятия решения). Внимание обеспечивает индивиду возможность сосредоточенности и направленности сознания на объекты, которые он воспринимает в ходе той или иной деятельности. Концентрация внимания позволяет человеку быстрее и качественнее выполнять ту или иную работу. С другой стороны, отсутствие должного внимания затрудняет восприятие нового, усложняет процесс обучения человека. Как известно, отсутствие внимания пагубным образом сказывается, например, на выполнении различного рода вычислительных операций: достаточно лишь одной ошибки для того, чтобы в итоге получить неверный результат.

Мышление в понимании психологов – это процесс познавательной деятельности человека, обеспечивающий организацию и переработку информации; это – анализ, синтез, а также обобщение условий и требований решаемой задачи и способов ее решения. Только с помощью развитого мышления человек получает возможность преодолевать пространственную ограниченность восприятия и может устремляться мыслью в необозримые дали макро- и микромира. При этом снимается и временная ограниченность восприятия – возникает свободное мысленное перемещение вдоль временной оси от седой древности к неопределенному будущему.

Мышление активизируется при решении любой задачи, возникающей перед человеком, коль скоро она актуальна, не имеет готового решения, и мощный мотив побуждает человека искать выход из создавшегося положения. Непосредственным толчком к развертыванию мыслительного процесса служит возникновение, осознание задачи. Следующий этап обычно связан с задержкой импульсивно возникающих реакций. Такая задержка создает паузу, необходимую для ориентировки в ее условиях, анализа компонентов, выделения наиболее существенных и соотнесения их друг с другом. Ключевой этап мышления связан с выбором одного из вариантов и формирования общей схемы решения.

Мышление включает произвольные и непроизвольные составляющие. В качестве непроизвольных могут выступать ассоциации, приводящие к образованию неуправляемых связей, которые с одной стороны определяют некоторую стереотипность, с другой – могут способствовать появлению оригинальных и плодотворных в свете решаемой задачи идей и гипотез. Мышление характерно единством осознанного и неосознанного. Следует отметить, что большую роль в мыслительной деятельности играют эмоции, обеспечивающие управление поиском решения задачи.

Различают следующие виды мышления: наглядно-образное, словесно-образное, словесно-логическое, и др. Считается установленным, что мышление словесно-логическое является наиболее поздним продуктом развития мышления индивида и что переход от наглядного к абстрактному мышлению составляет одну из линий этого развития. Кроме того, психологи выделяют следующие в определенном плане противоположные пары типов мышления – теоретическое и практическое (эмпирическое), логическое (аналитическое) и интуитивное, реалистическое и аутистическое, связанное с уходом от действительности во внутренние переживания и др.

8.1.2. Стратегии принятия решений человеком в многокритериальной среде. Во многих ситуациях, связанных с выбором, результат выбора невозможно оценить только в одной шкале, например, в деньгах или времени. Правда, по этому поводу, как известно, существует расхожая поговорка «время – деньги», которая подразумевает, по крайней мере, теоретическую возможность выражения единиц времени в денежных единицах и, тем самым, принципиальную сводимость одной шкалы к другой. Но в противовес упомянутой имеется и такая поговорка – «не хлебом единым». Последняя, на взгляд автора, утверждает факт многокритериальности той среды, в которой живет человек, принципиальную несводимость духовного к материальному, а значит невозможность выражения в одной шкале многого из того, что связано с человеком.

Процитированные поговорки можно рассматривать как концентрированное выражение двух принципиально различных позиций, отражающих в определенном плане противоположные точки зрения на данный предмет. В соответствии с первой точкой зрения существует некий единый показатель или критерий, в терминах которого могут быть измерены все другие качества. Согласно второй – подобного показателя не существует в принципе. При этом чисто логическим путем, умозрительно ни одна из этих позиций, по-видимому, не может быть доказана или опровергнута, поэтому они обе имеют право на существование. Но вторая («не хлебом единым») более реалистична и жизнеспособна, поскольку знание лишь того отвлеченного факта, что все можно выразить в единой шкале, в практике принятия решений мало что дает – ведь нужно уметь реализовать эту точку зрения. Другими словами, необходимо научиться выполнять указанное сведение к единой шкале (на языке многокритериальной оптимизации это означает – уметь производить *скаляризацию* многокритериальной задачи), а его выполнение есть не что иное, как определенный этап решения исходной по существу многокритериальной задачи.

Задачи многокритериального выбора представляют собой исключительно сложный класс задач интеллектуальной деятельности человека. Наличие нескольких критериев усиливает нагрузку на ограниченную естественными пределами оперативную память человека, делает задачу, стоящую перед человеком, более неопределенной, требует высокой концентрации внимания и нередко – нестандартного мышления.

К настоящему времени еще нет полной картины того, каким образом и при помощи каких механизмов человек осуществляет выбор в многокритериальной среде. Существуют лишь определенные подходы и варианты предложений решения этих сложных вопросов. При этом они нередко в чем-то противоречат друг другу и в совокупности явно не исчерпывают все возможные способы выбора. Считается, что одной из наиболее типичных черт поведения индивида в ходе решения задачи выбора является расчленение (декомпозиция) исходной проблемы на множество более простых промежуточных задач.

Когда имеется всего два возможных варианта, стратегии поведения человека в условиях многокритериальной среды в этом простейшем случае, можно разделить на два класса:

- стратегия компенсации
- стратегия исключения.

Стратегия компенсации соответствует такой линии поведения человека, при которой низкие показатели по одному критерию (или сразу по нескольким критериям) искупаются (компенсируются) высоким показателем по другому критерию (или одновременно по некоторым другим критериям). Типичный пример выбора при использовании стратегии компенсации – покупка автомобиля, когда невысокая экономичность (т.е. большой расход горючего) может окупаться стильным видом или престижной маркой автомобиля. Другой пример подобного рода – приобретение дома с не совсем удачной планировкой комнат и несколько завышенной ценой, но в замечательном районе парковой зоны, расположенном не слишком далеко от места работы.

Стратегия исключения (или *некомпенсирующая стратегия*) состоит в удалении (исключении) из списка имеющихся возможных вариантов тех, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу нескольким критериям одновременно. Например, при покупке автомобиля или дома покупатель, пользуясь некомпенсирующей стратегией, сразу исключает такие варианты, которые выходят за пределы его финансовых возможностей. Еще один характерный пример некомпенсирующей стратегии, связанный с покупкой автомобиля, – это такая ситуация, когда внимание покупателя сосредотачивается только на моделях с автоматической коробкой передач, а все машины с ручной передачей сразу исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что при решении многокритериальных задач с более чем двумя возможными вариантами, человек обычно не придерживается лишь одной линии поведения. Он, как правило, определенным образом комбинирует указанные стратегии. Такого рода фактический материал позволил некоторым авторам выдвинуть теории человеческого поведения в процессе принятия решений [13]. Например, в соответствии с *теорией поиска доминантной структуры* человек при выборе лучшего варианта из нескольких сначала как бы окидывает взглядом все имеющиеся возможные варианты и старается найти лучшее, основываясь лишь на первом впечатлении. После этого он попарно сравнивает выделенный вариант со всеми остальными. Если в результате такого сравнения выбранное вариант оказался предпочтительнее остальных, то процесс выбора закончен. В противном случае то вариант, который при сравнении оказалось лучше выбранного первоначально, становится претендентом на выбираемый, и именно он далее сравнивается со всеми остальными возможными вариантами, и т.д.

С точки зрения наличия или отсутствия гарантии полученного результата механизмы принятия решений можно разделить на два класса – *точные* (или *аналитические, логические*) и *эвристические* (или *приближенные, интуитивные*) механизмы. Механизмы первого класса характеризуются четким описанием того типа или класса задач принятия решений, в которых их применение гарантированно приводит к положительным результатам (или, по крайней мере, дает возможность избежать принятия заведомо неприемлемых решений). Что касается эвристических механизмов, то они в задачах разного типа могут давать различные с точки зрения удовлетворительности результаты. При этом точное разделение всех возможных задач на две группы, в одной из которых данный эвристический механизм работает хорошо, а в другой ─ его применять не стоит, осуществить не удается.

Нередко к точным механизмам и методам принятия решений причисляют все те, которые предполагают использование математического аппарата. С этим нельзя согласиться, поскольку применение языка математики для записи некоторого высказывания еще не означает точности самого высказывания. Более того, у людей, не разбирающихся в математических тонкостях, при знакомстве с такими методами или механизмами может возникнуть иллюзия их высокой точности и надежности.

Психологи продолжают заниматься изучением поведения человека при выборе различного рода решений (см. [45]). К настоящему времени сформулирован и изучен целый ряд психологических эффектов, которые человек должен учитывать для осуществления действительно наилучшего выбора. На основе этого материала специалистами предложены (см. [45]) определенные рекомендации, например:

- не позволяйте детализированным сценариям вводить вас в заблуждение
- по возможности обращайте внимание на так называемую базовую частоту (т.е. на относительную частоту, с которой происходит то или иное событие)
- помните, что шанс не саморегулируется (т.е. после длинной череды неудач совсем необязательно наступит ряд удачных событий, или наоборот)
- не забывайте о регрессе к среднему (когда после сильных отклонений в ту или иную сторону обычно следуют более обычные, средние события).

8.2. Методология применения аксиоматического подхода к сужению множества Парето

8.2.1. Формирование математической модели. В упрощенной форме процесс принятия решений можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 8.1.

Собственно выбор решения или решений осуществляет *лицо, принимающее решение* (ЛПР). Оно же несет всю ответственность за принятое решение. Результат решения задачи многокритериального выбора именуют *множеством выбираемых вариантов* и обозначают

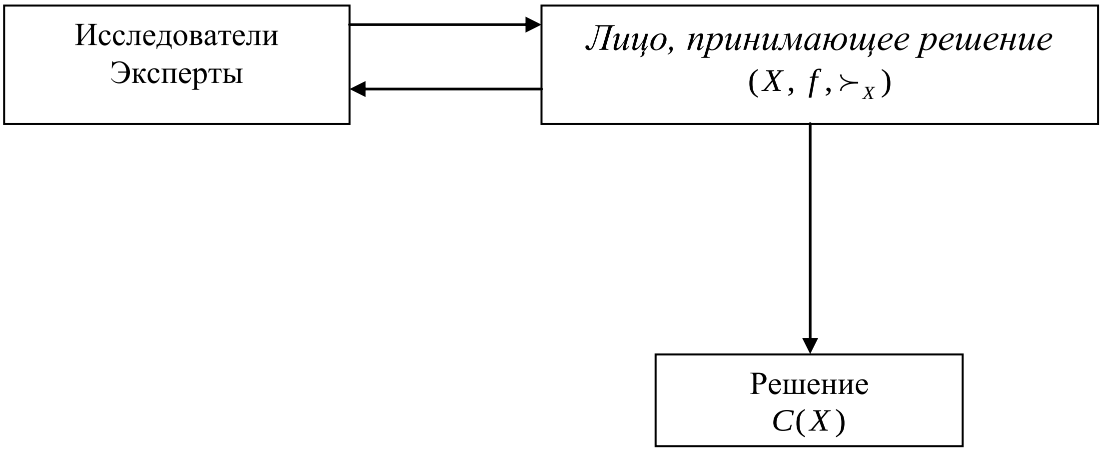

Рис. 8.1.

$C(X)$. Нередко в реальных задачах это множество состоит из одного элемента. Однако можно указать немало ситуаций, когда оно должно включать несколько (а иногда и бесконечное число) элементов. Например, при выборе кандидатов на несколько вакантных мест, число выбранных претендентов должно в точности совпадать с числом вакантных мест.

Основными компонентами задачи многокритериального выбора являются: *множество возможных вариантов* X, *векторный критерий* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ и *отношение предпочтения* $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора.

Для того чтобы решить конкретную задачу выбора, прежде всего, необходимо сформировать математическую модель этой задачи. Другими словами, следует образовать множество возможных вариантов, векторный критерий и отношение предпочтения, которые наиболее полно и точно отражали бы имеющуюся в наличии реальную ситуацию. Чем более адекватной реальной задаче будет построена математическая модель, тем больше будет шансов получить действительно наилучшее решение.

В построении математической модели вместе с ЛПР активно участвуют как *исследователи* (специалисты в области принятия решений), так и *эксперты* (специалисты в той области, которой принадлежит решаемая задача). Как правило, именно благодаря совместным напряженным усилиям указанных лиц удается построить приемлемую математическую модель, которая, с одной стороны, адекватно отражает конкретную ситуацию, а с другой – допускает наилучшее решение за обозримое время. Этот первый этап, на котором происходит формирование математической модели (*этап формализации*), невозможно запрограммировать заранее. Здесь многое зависит от опыта и интуиции всех участвующих сторон (не зря существует такое словосочетание как *искусство формализации*, отражающее исключительную сложность этого этапа).

Множество возможных вариантов может состоять из конечного числа элементов, но оно может оказаться и бесконечным. Конечное множество обычно задается перечислением всех его элементов. Что касается бесконечного множества возможных вариантов, то его можно задавать различными способами (например, в виде множества решений некоторой системы уравнений или неравенств). Дальнейшее решение задачи выбора в сильной степени зависит от способа задания множества возможных вариантов. Некоторые из способов задания могут оказаться не слишком удобными для последующего оперирования с множествами. В этом вопросе свое слово должен сказать специалист по принятию решений.

Перейдем к критериям. Все участвующие в задаче функции $f_1, f_2, ..., f_m$, во-первых, должны быть числовыми и, во-вторых, ЛПР должно быть заинтересовано в максимизации каждой из них. Когда значения одного или сразу нескольких критериев измеряются не в количественной, а лишь в качественной шкале, опыт показывает, что в таких случаях все-таки удается тем или иным способом перейти к числовым значениям, вводя, например, балльную шкалу. Так например, всем хорошо известна четырех балльная шкала (2,3,4,5) для оценки знаний учащихся в России. Подобного рода шкалы существуют и для оценки выступления спортсменов – гимнастов и фигуристов. Немало примеров введения и дальнейшего использования количественных шкал для измерения качественных характеристик можно встретить в психологии. С вопросами введения специальной девяти балльной шкалы и ее обоснованием можно ознакомиться в работах Т. Саати [50, 51].

Если какой-то из критериев для ЛПР желательно не максимизировать, а минимизировать, то его в математическую модель следует включить со знаком минус; такой распространенный прием сводит операцию минимизации к операции максимизации. Следует заметить, что критерии, как функции, также можно задавать различными способами. В некоторых случаях важно иметь критерии, которые обладали бы определенными полезными с математической точки зрения свойствами (например, непрерывностью, дифференцируемостью, вогнутостью или выпуклостью). Здесь вновь требуется консультация со специалистом по принятию решений.

Третья компонента задачи многокритериального выбора – отношение предпочтения – наиболее трудно формализуемая. Как правило, полностью построить отношение предпочтения, которым ЛПР пользуется в процессе выбора, невозможно. Об этом отношении удается получить лишь некоторые фрагментарные сведения. Среди этих сведений обязательно должна быть информация о том, что оно принадлежит определенному классу, который ограничен специальными требованиями. Напомним, что предлагаемый в данной книге подход к решению задач многокритериального выбора предполагает, что используемое ЛПР отношение предпочтения должно удовлетворять четырем аксиомам 1 – 4, которые описывают в определенном смысле последовательное (разумное) поведение субъекта в процессе принятия решений.

Согласно *аксиоме* 1, если какой-то вариант не выбирается из пары, то он не может быть выбран и из всего множества возможных вариантов. Это требование выглядит вполне приемлемым и не слишком обременительным, однако, в некоторых практически значимых случаях оно не может быть выполнено. Подтверждение тому – следующий простой пример. Предположим, что на два вакантных места претендуют три кандидата, причем при попарном сравнении оказалось, что первый кандидат лучше второго и третьего, а второй лучше третьего. Поскольку необходимо заполнить оба вакантных места, то ЛПР вынуждено будет остановить свой выбор на первом и втором кандидатах. Тем самым, второй кандидат войдет в множество выбираемых вариантов, несмотря на то, что для него существует лучший вариант – первый кандидат.

Следующая *аксиома* 2 устанавливает принципиальную возможность сравнения лицом, принимающим решение, любых векторов критериального пространства: для произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ может реализоваться одна (и только одна) из следующих трех возможностей:

- y' предпочтительнее y''; при этом пишут $y' \succ y''$ (в этом случае из двух данных векторов ЛПР выбирает первый и не выбирает второй)
- y'' предпочтительнее y'; в таком случае пишут $y'' \succ y'$ (ЛПР из двух данных выбирает второй вектор)
- не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$ (т.е. из данных двух векторов ЛПР не в состоянии отдать предпочтение ни одному из этих векторов).

При этом согласно аксиоме 2 результаты попарного сравнения должны подчиняться *свойству транзитивности*, согласно которому для любой тройки векторов y, y', y'', удовлетворяющих соотношениям $y \succ y'$ и $y' \succ y''$, всегда имеет место $y \succ y''$. Это свойство выражает «последовательность» (логичность или рациональность) поведения ЛПР в процессе выбора. Несмотря на естественность этого требования, как утверждают психологи, человек в своем поведении не всегда следует свойству транзитивности и при сравнении трех вариантов, когда первый вариант лучше второго, а второй – лучше третьего, из первого и третьего вполне может выбрать третий.

Смысл *аксиомы* 3 заключается в том, что ЛПР заинтересовано в максимизации значений каждого из критериев f_i, $i = 1,2,...,m$, при условии сохранения значений всех остальных критериев. Здесь, видимо, нет особой нужды подробно объяснять, что и это требование в каких-то ситуациях может не выполняться (если, например, ЛПР заинтересовано в удержании значения какого-то критерия в определенных фиксированных пределах).

Последняя *аксиома* 4 состоит в требовании инвариантности (сохранении) для любых двух векторов y', y'' критериального пространства R^m соотношения $y' \succ y''$ при одновременном увеличении (или уменьшении) всех компонент данных двух векторов в одно и то же число раз (свойство однородности), а также при добавлении к этим векторам одного и того же произвольного вектора критериального пространства (свойство аддитивности). Например, пусть справедливо соотношение $y' = (y'_1, y'_2, ..., y'_m) \succ (y''_1, y''_2, ..., y''_m) = y''$. Тогда в соответствии с аксиомой 4 для произвольного положительного числа α должно выполняться соотношение $\alpha y' = (\alpha y'_1, \alpha y'_2, ..., \alpha y'_m) \succ (\alpha y''_1, \alpha y''_2, ..., \alpha y''_m) = \alpha y''$, а для любого вектора $c = (c_1, c_2, ..., c_m)$ – соотношение $y' + c = (y'_1 + c_1, y'_2 + c_2, ..., y'_m + c_m) \succ (y''_1 + c_1, y''_2 + c_2, ..., y''_m + c_m) = y'' + c$.

В тех случаях, когда отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не удовлетворяет хотя бы одной из упомянутых четырех аксиом, применение излагаемого ниже подхода не гарантирует получение наилучшего результата.

Если же проверить выполнение всех указанных аксиом в какой-то конкретной ситуации не удается, то остается лишь надеяться, что применение данного подхода не приведет к заведомо неудовлетворительному решению.

8.2.2. Выявление информации об отношении предпочтения ЛПР. Основная идея предлагаемого подхода состоит в использовании информации об отношении предпочтения в виде так называемых квантов для исключения неприемлемых парето-оптимальных вариантов. Существуют по меньшей мере два способа получения такого рода информации:

- на основе анализа действий, ранее принимавшихся данным ЛПР
- в результате прямого опроса ЛПР.

Для того чтобы воспользоваться первым способом, нужно располагать сведениями о поведении данного ЛПР в прошлом при решении аналогичных задач выбора с имеющимся набором критериев $f_1, f_2, ..., f_m$. Если же до этого момента ЛПР не сталкивалось с необходимостью решения таких задач, то остается только второй способ – непосредственный опрос ЛПР.

Перед осуществлением опроса следует ознакомить ЛПР с определением 2.1, в котором идет речь о самой простой ситуации, когда i-й критерий (т.е. f_i) является более значимым, чем j-й критерий (т.е. f_j) с положительными параметрами w_i^* и w_j^*. В основе этого определения лежит идея компенсации, упомянутая в предыдущем пункте, а его смысл заключается в том, что всякий раз ради увеличения значения более значимому i-му критерию не менее, чем на w_i^* единиц, ЛПР готово пожертвовать не более, чем w_j^* единицами по менее значимому j-му критерию (иначе говоря, потеря не более, чем в w_j^* единиц по j-му критерию всегда может быть компенсирована увеличением не менее, чем на w_i^* единиц значения i-го критерия) при условии сохранения значений по всем остальным критериям. При этом положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \qquad (0 < \theta_{ij} < 1), \tag{6.1}$$

выражающее долю потери относительно суммы потери и прибавки, носит названия *коэффициента компромисса*.

Значение этого коэффициента, близкое к единице, свидетельствует о высокой степени значимости i-го критерия по сравнению с j-м, поскольку за относительно небольшую добавку по более значимому критерию ЛПР готово платить довольно существенной потерей по менее значимому критерию. В случае, когда данный коэффициент близок к нулю, указанная степень компромисса сравнительно мала, так как здесь ЛПР согласно пойти на потери по менее значимому критерию лишь при условии относительно большой прибавки по более значимому критерию.

Следует, однако, заметить, что сказанное не носит абсолютного характера, так как величина коэффициента компромисса в сильной степени зависит от единиц, в которых измеряются значения сравниваемых по значимости критериев (см. разд. 2.4). Вполне возможна ситуация, когда два абсолютно одинаковых (с точки зрения принятия решений) ЛПР при решении одной и той же задачи пользуются разными коэффициентами компромисса по той простой причине, что они применяют различные единицы при измерении значений сравниваемых по значимости критериев.

Сказанное выше свидетельствует о том, что конкретная величина коэффициента компромисса зависит от единиц, в которых измеряются значения критериев. При переходе к другим единицам (в пределах той же самой шкалы!) – коэффициенты относительного компромисса, как правило, меняются. Например, если речь идет о прибыли, и она выражается в денежных единицах, то коэффициенты компромисса, соответствующие двум идентичным ЛПР, но пользующихся при расчете различной валютой (рублями и долларами), будут различными.

Если в результате опроса ЛПР выясняется, что оно готово за некоторую добавку по i-у критерию пожертвовать определенным количеством по j-у критерию, то такое положение на основании определения 2.4 свидетельствует о большей значимости i-го критерия по сравнению с j-м. Остается определить степень этой значимости, т.е. найти конкретные значения величин w_i^* и w_j^*. При определении этих величин следует иметь в виду, что чем больше отношение w_j^* / w_i^*, тем более содержательной будет информация об отношении предпочтения и, тем самым, на большую степень сужения множества Парето (области компромиссов) можно рассчитывать. Поэтому у ЛПР необходимо стремиться выяснить, каким максимальным возможным количеством w_j^* по j-му критерию оно готово пожертвовать ради получения некоторой фиксированной прибавки w_i^* по менее значимому критерию.

В результате выявления значений параметров w_i^* и w_j^* удобно один из них зафиксировать, положив, например, равным единице, и тогда нужно будет определять только один оставшийся параметр. В этом случае вопрос, адресованный ЛПР, может, например, звучать следующим образом: *какова для Вас максимальная возможная величина w_j^* потери по менее значимому j-му критерию, при условии получения прибавки не менее 1 единицы по более значимому i-му критерию.*

8.2.3. Последовательное сужение множества Парето. Опишем общую схему последовательного сужения множества Парето на основе набора квантов информации. В его основу положена стратегия исключения, которая упоминалась в разд. 8.1.

Первый этап этого подхода состоит в выявлении информации об отношении предпочтения в виде квантов. Наиболее распространенный путь выявления этой информации – прямой опрос ЛПР. В результате должны быть получены пары более значимых и менее значимых критериев f_i и f_j, а также соответствующие параметры w_i^* и w_j^*, которые задают простейший квант информации об отношении предпочтения ЛПР.

Второй этап осуществляется без привлечения ЛПР. В соответствии с теоремой 2.5 необходимо менее значимый j-й критерий в общем списке критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ заменить новым, вычисленным по простой формуле $w_i^* f_j + w_j^* f_i$, и найти множество Парето относительно нового векторного критерия. На этом этапе могут возникнуть определенные вычислительные трудности, если множество возможных вариантов не является конечным. В случае конечного множества возможных векторов, множество Парето можно построить, используя алгоритм из разд. 1.6.

Построенное с использованием нового векторного критерия множество Парето представляет собой оценку сверху для искомого множества выбираемых вариантов. Проще говоря, это означает, что дальнейший выбор следует производить в пределах найденного множества Парето. Поэтому после его отыскания на *третьем этапе* оно предъявляется для анализа ЛПР. В случае если ЛПР сочтет его приемлемым (по размерам) для окончательного выбора, то процесс принятия решений заканчивается. В противном случае (т.е. когда указанное множество «слишком широкое») необходимо попытаться получить дополнительную информацию в форме нового кванта, а затем аналогичным образом использовать его для дальнейшего сужения области поиска множества выбираемых вариантов. В этом случае при формировании нового векторного критерия придется использовать набор квантов информации и прежде чем сделать это, необходимо убедиться в непротиворечивости данного набора (по этому поводу см. разд. 4.1). Заметим, что в общем случае такая проверка сводится к решению определенной задачи линейного программирования.

В результате последовательного выполнения указанных действий образуется циклический процесс, схема которого изображена на рис. 8.2. Циклы в нем повторяются до тех пор, пока не будет получен результат, приемлемый для ЛПР. Этим результатом является очередное множество Парето, размеры которого, по мнению ЛПР, соответствуют размерам множества выбираемых вариантов $C(Y)$.

Иногда за прибавку по какому-то одному очень значимому критерию ЛПР согласно пойти на потери сразу по нескольким критериям. В других случаях потеря по одному менее значимому критерию не может быть компенсирована прибавкой лишь по одному критерию, а только одновременно по нескольким критериям. В общем случае могут существовать две группы критериев, номера которых принадлежат непересекающимся множествам A и B, и такие, что за прибавки в размере не менее w_i^* единиц по всем критериям f_i при $i \in A$, ЛПР согласно потерять не более w_j^* единиц по всем критериям f_j при $j \in B$). В соответствии с теоремой 3.4 это означает, что *группа критериев A более значима, чем группа критериев B* с двумя наборами положительных параметров w_i^* и w_j^* для всех $i \in A$ и всех $j \in B$.

При выявлении квантов информации следует учитывать следующее обстоятельство. В теореме 3.1 утверждается, что из большей значимости группы критериев A по сравнению с группой B вытекает бóльшая значимость более широкой, чем A, группы по сравнению с более узкой группой, чем B. Грубо говоря, более значимую группу всегда можно расширить, а менее значимую – сузить. В силу сказанного, при выявлении квантов информации всегда следует стремиться к тому, чтобы более значимая группа была как можно уже, а менее значимая – как можно шире. Тогда информация будет наиболее содержательной, и последующее использование этой информации будет способствовать более существенному сужению области компромиссов. В этом смысле самым лучшим является вариант, когда какой-то один критерий оказывается более значимым по сравнению с группой всех остальных критериев.

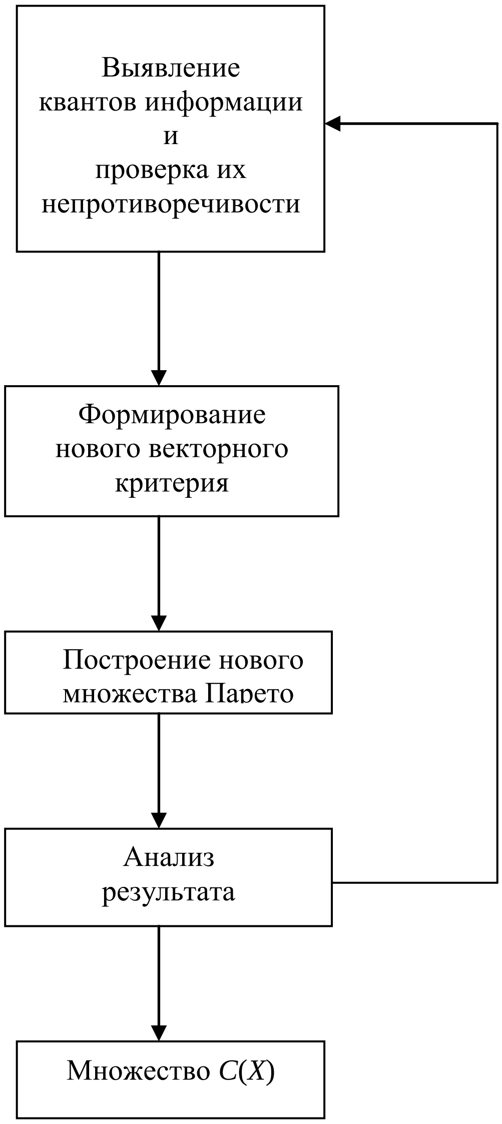

Рис. 8.2.

Пересчет векторного критерия на основе общего кванта информации производится с помощью теоремы 3.5. Согласно этой теореме из исходного набора критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ прежде всего удаляются все менее значимые критерии, т.е. те, номера которых принадлежат множеству B. Затем к оставшимся необходимо добавить новые критерии вида $w_j f_i + w_i f_j$, число которых совпадает с произведением чисел элементов множества A и множества B.

Нетрудно понять, что общее число новых критериев при этом может оказаться значительно больше числа первоначального набора критериев. Например, если множество A состоит из двух элементов, а B – из трех, то общее число новых критериев равно 6. Три менее значимых критерия должны быть удалены, но при этом шесть новых следует добавить. В итоге общее число критериев увеличится на 3.

В случае, когда множество более значимых критериев состоит в точности из одного элемента, увеличения количества критериев при учете данного кванта информации не произойдет (см. следствие 3.1), т.е. число новых критериев будет совпадать с числом старых критериев.

В теоремах глав 3-5 разобраны различные варианты наборов квантов информации и указаны условия их непротиворечивости. Если же полученный набор квантов информации не участвует ни в одной теореме указанных глав, то для сужения множества Парето можно воспользоваться одним из алгоритмов, описанных в разд. 5.3-5.4.

Теоретическое обоснование описанного метода последовательного сужения множества Парето на основе набора квантов информации приведено в шестой главе. Доказанная в ней теорема 6.3 утверждает, что во многих случаях, когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов (это условие заведомо выполняется, если конечным является множество возможных вариантов), на основе конечного набора квантов информации можно точно построить неизвестное множество недоминируемых векторов (а значит, и множество недоминируемых вариантов). К сожалению, этот результат не является конструктивным в том смысле, что в нем не указывается, какой именно набор квантов информации следует при этом использовать. Неизвестно также и общее количество квантов. Решение этих вопросов в сильной степени зависит от конкретного вида множества возможных вариантов и участвующих в задаче выбора критериев. Тем не менее, эта теорема имеет важное теоретическое значение, поскольку она обосновывает описанный подход. По сути дела, она утверждает, что *при решении задач многокритериального выбора следует лишь научиться выявлять кванты информации и умело использовать их. На основе только такой информации можно полностью и точно построить множество недоминируемых вариантов для произвольной задачи многокритериального выбора из достаточно широкого класса*, в которой множество возможных вариантов конечно. Если же указанное множество не является конечным, то с помощью конечного набора квантов информации можно получить сколь угодно точное приближение к искомому множеству недоминируемых вариантов или векторов (см. теорему 6.2).

В заключение данного раздела отметим, что при опросе ЛПР с целью выявления квантов информации не всегда можно получить четкие ответы на поставленные вопросы. Например, при ответе на вопрос «является ли для Вас i-й критерий более значимым, чем j-й» ЛПР может оказаться в затруднении с ответом и лишь выразить свою уверенность в том, что это действительно так, с помощью числа, представляющего, например, некоторую долю от единицы. В таком случае необходимо использовать определение кванта нечеткой информации об отношении предпочтения и результаты главы 7. При этом следует иметь в виду, что подавая «на вход» описываемого подхода нечеткую информацию, на «выходе», мы получим некоторое нечеткое множество, внутри которого следует осуществлять окончательный выбор. Между тем, на практике выбор должен быть вполне определенным (четким), поэтому для его реализации необходимо ограничиться каким-то четким подмножеством. Выделение этого окончательного четкого подмножества из полученного нечеткого множества может вызвать определенные затруднения. К сожалению, каких-то универсальных рецептов формирования четкого подмножества из нечеткого множества автор предложить не может; в каждом конкретном случае требуется отдельный анализ сложившейся ситуации. Пример подобного анализа вместе с рекомендациями окончательного выбора можно найти в разд. 7.3.2.

8.3. Выбор с использованием линейной свертки критериев

8.3.1. Метод линейной свертки. Решение многокритериальных задач на основе линейной свертки критериев состоит в назначении тем или иным способом неотрицательных (а чаще – положительных) коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, в сумме дающих единицу (хотя это не обязательно), и последующей максимизации линейной комбинации критериев $\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$ на множестве X.

Такой способ решения задач многокритериального выбора существовал еще до появления самого понятия оптимальности по Парето. Его автором является французский ученый XVIII века Ж.-Ш. Борда, предложивший способ голосования, согласно которому побеждает тот кандидат, который набирает максимальную сумму мест в ранжировках кандидатов, представленных участниками голосования. Напомним, что в задаче голосования имеется конечное множество вариантов $X = \{x_1,..., x_n\}$, именуемых кандидатами, и m участников голосования, каждый из которых способен ранжировать исходное множество вариантов, т.е. расположить их в порядке убывания предпочтительности. Ранжирование равносильно приписыванию каждому кандидату номера, считая с самого последнего n-го (т.е. наименее предпочтительного). Другими словами, на множестве X заданы числовые функции $f_1,..., f_m$, такие, что $f_k(x_j) = n_{kj}$, где n_{kj} − порядковый номер (считая с конца) кандидата x_j, который он занимает по мнению k-го участника голосования в ряду вариантов, расположенных в порядке убывания их предпочтительности. Согласно *правилу де Борда*, выигрывает в голосовании тот кандидат i, чья сумма мест $\sum_{k=1}^{m} f_k(x_i)$ окажется максимальной. Как видим, в этом правиле как раз участвует линейная свертка критериев (с одинаковыми «весами», равными единице). Отметим также, что, например, замечательный русский инженер-корабел А.Н. Крылов применял линейную свертку при оценке качества продукции и услуг в начале XX века.

Практически никто из исследователей, использующих линейную свертку для решения своих прикладных задач, не задумывается, являются ли их действия правомерными. В терминах модели многокритериального выбора использование линейной свертки критериев заведомо будет правомерным (обоснованным, корректным), если

1) выполнена аксиома 1 исключения доминируемых векторов
2) существуют указанные выше коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, при которых отношение предпочтение $\succ$ представляется линейной функцией, т.е.

$$y \succ y' \iff \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i > \sum_{i=1}^{m} \mu_i y'_i \quad \text{для всех} \quad y, y' \in R^m . \tag{8.1}$$

Действительно, из (8.1), согласно аксиоме исключения, следует, что всякий вектор, для которого найдется другой вектор с большей линейной комбинацией будет исключен из множества выбираемых векторов, и потому в нем останутся только те, которые доставляют максимум линейной свертке. Таким образом, при выполнении указанных выше двух условий имеет место включение

$$C(Y) \subset \{ y^0 \in Y \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \} \tag{8.2}$$

Отметим, что аксиома исключения не является универсальной в том смысле, что существуют задачи многокритериального выбора, в которых она вполне может нарушаться.

Функцию $\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$, удовлетворяющую (8.1), принято именовать *линейной функцией полезности*. При этом нередко говорят, что указанная линейная функция представляет бинарное отношение $\succ$. Вопрос существования линейной функции полезности, по-видимому, впервые был исследован родоначальниками теории игр – Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном. Впоследствии их исследования были продолжены самыми различными авторами. Выяснилось , что достаточные условия существования линейной функции полезности являются довольно ограничительными и выполняются для сравнительно узкого класса отношений предпочтения (см., например, [54], с. 161). В их числе требование слабой упорядоченности (что означает иррефлексивносить и отрицательную транзитивность) отношения $\succ$, а также так называемое условие Архимеда. Поскольку бинарное отношение $\succ$, задаваемое (8.1), является конусным, то необходимым (но явно не достаточным) условием существования линейной функции полезности является принятие аксиомы согласования, а также транзитивность и инвариантность этого отношения относительно положительного линейного преобразования. Еще одно необходимое условие существования линейной функции полезности состоит в требовании транзитивности отношения неразличимости $\approx$, которое задается эквивалентностью

$y \approx y' \Leftrightarrow$ не выполняется ни соотношение $y \succ y'$, ни соотношение $y' \succ y$.

Анализ показывает, что это условие также можно охарактеризовать как достаточно «жесткое».

Таким образом, линейная функция полезности существует не так часто, как полагают некоторые исследователи, решившие использовать линейную свертку для решения многокритериальных задач и отказавшиеся от выполнения принципа Эджворта-Парето.

Отметим еще одно обстоятельство. Выполнение включения (8.2) означает, что множество выбираемых векторов содержится в множестве векторов, доставляющих максимум линейной свертке критериев. Если последнее множество состоит в точности из одного элемента, то, безусловно, именно этот вектор и следует выбирать. Однако простые примеры показывают, что указанное множество может оказаться достаточно широким (и даже совпасть с Y), причем все его элементы неравноценны в том же самом смысле, как неравноценны различные парето-оптимальные векторы. В таком случае вопрос выбора остается открытым, и для выявления $C(Y)$ необходимо использовать какую-то дополнительную информацию.

8.3.2. Линейная свертка как средство выбора конкретного парето-оптимального вектора. Если же принять принцип Эджворта-Парето, то использование линейной свертки можно обосновать, не требуя существования линейной функции полезности. В самом деле, в соответствии с указанным принципом выбирать следует только в пределах множества Парето, поэтому можно воспользоваться следующим необходимым и достаточным условием парето-оптимальности в терминах линейной свертки критериев.

Теорема 8.1 [46]. *Пусть множество*

$$Y_* = \{y^* \in R^m \mid y_i^* \leq y_i,\, i = 1,2,...,m, \text{ при некотором } y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in Y\}$$

является выпуклым[19]. *Тогда для того, чтобы вектор* $y^0 \in Y$ *был парето-оптимальным, необходимо существование набора неотрицательных чисел* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, *при которых имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \ . \tag{8.3}$$

Обратно, выполнение равенства (8.3) *при некоторых положительных* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, *влечет парето-оптимальность вектора* $y^0 \in Y$ *.*

Как видим, между необходимым и достаточным условием парето-оптимальности имеется определенное «рассогласование», заключающееся в том, что необходимое условие содержит требование неотрицательности коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, тогда как в достаточном условии эти коэффициенты строго положительны.

Напомним понятие собственно эффективного варианта и собственно эффективного вектора. Вариант (точка) $x^* \in X$ называется *собственно эффективной* относительно f на множестве X, если он эффективен (оптимален по Парето) и, кроме того, найдется такое положительное число *A,* при котором для любых $i \in \{1,2,...,m\}$, $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $f_i(x) > f_i(x^*)$, и некотором $j \in \{1,2,...,m\}$ вида $f_j(x) < f_j(x^*)$ имеет место неравенство $\dfrac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x^*) - f_i(x)} \leq A$; в этом случае $f(x^*)$ именуют *собственно эффективным вектором*.

Если вместо парето-оптимальных (эффективных) векторов ограничиться собственно эффективными, то на указанное выше «рассогласование» можно отчасти закрыть глаза и считать коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ строго положительными, тем более что «разница» между множествами эффективных и собственно эффективных векторов в условиях сформулированной теоремы не столь велика (а именно, второе множество является плотным в первом; см. [46]). Однако на требование выпуклости множества Y_* закрыть глаза никак нельзя, поскольку при его отсутствии далеко не каждый парето-оптимальный вектор может быть полу-

[19] Это требование выполняется, если вектор-функция f покомпонентно вогнута на выпуклом множестве X .

чен в результате максимизации линейной свертки с положительными коэффициентами. Простейшим примером подобного типа может служить плоское множество $Y = \{y \in R^2 \mid y_1 \cdot y_2 \le 10,\ y_1 \ge 1,\ y_2 \ge 1\}$, в котором вся криволинейная часть его границы является парето-оптимальной, тогда как в результате максимизации линейной свертки с неотрицательными коэффициентами могут быть получены лишь две ее крайние точки – (1,10) и (10,1). По этой же причине в случае конечного множества *Y*, которое заведомо не является выпуклым, если оно содержит по крайней мере два вектора, применение линейной свертки критериев не является обоснованным. Между тем, именно линейная свертка критериев лежит в основе широко известного метода анализа иерархий (см. [50]-[51]); об этом следует помнить тем, кто использует МАИ в своих исследованиях.

Комбинируя принцип Эджворта-Парето и сформулированную выше теорему, приходим к следующему результату.

Теорема 8.2. *Пусть имеют место аксиомы исключения и Парето. Предположим, что множество* Y_* *выпукло. Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *выполнено включение* (8.2), *где коэффициенты вектора* $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ *неотрицательны и в сумме равны единице.*

В соответствии с данным утверждением, варьируя μ в указанных пределах и собрав вместе все векторы, доставляющие на множестве *Y* максимум линейной свертке критериев с указанными коэффициентами, получим множество, в котором заведомо содержится искомое множество выбираемых векторов. В общем случае в число выбираемых могут попасть векторы, которые получаются в результате максимизации линейных сверток с несколькими различными наборами коэффициентов (с несколькими векторами μ). Следовательно, при отсутствии гарантии существования линейной функции полезности в некоторых случаях следует использовать не одну, а несколько линейных сверток критериев для отыскания множества $C(Y)$.

Согласно включению (8.2), если необходимо выбрать единственный вектор, то его нахождение можно свести к назначению одного набора коэффициентов линейной свертки и последующей максимизации этой свертки на множестве *Y*.

8.3.3. Разбиение множества Парето с помощью линейной свертки. Обозначим символом P_1^0 множество парето-оптимальных векторов, которые можно получить в результате решения задачи максимизации различных линейных сверток критериев с положительными коэффициентами:

$$P_1^0 = \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \{y^* \in Y \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^* = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \},$$

где M означает множество векторов с положительными компонентами, в сумме равными единице. Будем именовать его слоем 1-го уровня. Далее аналогичная задача решается на множестве $Y \setminus P_1^0$, т.е. находится множество

$$P_2 = \bigcup_{\mu\in \mathrm{M}} \{ y^* \in Y \setminus P_1^0 \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^* = \max_{y\in Y\setminus P_1^0} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \}$$

Из найденного множества следует удалить такие векторы y, для которых найдутся $y' \in P_1^0$ такие, что $y' \geq y$. Оставшееся множество образует слой 2-го уровня P_2^0. Затем следует найти

$$P_3 = \bigcup_{\mu\in \mathrm{M}} \{ y^* \in Y \setminus P_1^0 \cup P_2 \mid \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^* = \max_{y\in Y\setminus P_2} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \}$$

и удалить из него векторы y, для которых найдутся $y' \in P_2^0$ такие, что $y' \geq y$. Оставшееся множество образует слой 3-го уровня P_3^0. И т.д.

Поскольку на каждом шаге множество, на котором производится максимизация, будет сокращаться, после некоторого конечного числа k шагов придём к пустому множеству. Таким образом, на предыдущем шаге $k - 1$ будет построено множество P_{m-1}^0, а значит и множество $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0$. Как показывает нижеследующее утверждение, последнее совпадает с множеством Парето $P(Y)$ и представляетет его разбиение на конечное число слоев.

Множество $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0$, построенное с помощью описанного выше алгоритмаявляется разбиением множества Парето $P(Y)$ на слои $P_1^0, P_2^0, ..., P_{k-1}^0$.

□ Множества $P_1^0, P_2^0, ..., P_{k-1}^0$ попарно не пересекаются, поскольку каждое следующее множество этой цепочки представляет собой результат максимизации линейных сверток на множестве, из которого удалено предыдущее множество данной цепочки.

Включение $P_1^0 \subset P(Y)$ вытекает из того факта, что максимизация линейной свертки критериев с положительными коэффициентами на множестве Y всегда приводит к парето-оптимальной точке. Проверим включение $P_2^0 \subset P(Y)$. В самом деле, если это не так, то найдутся $y \in P_2^0,\ y' \in Y$, для которых $y' \geq y$. Однако по построению с одной стороны $y' \notin P_1^0$, а с другой $y' \notin Y \setminus P_1^0$. Поэтому в действительности указанного вектора y' не существует.

При помощи аналогичных рассуждений можно убедиться, что все последующие множества цепочки $P_3^0, ..., P_{k-1}^0$ также входят в множество Парето, т.е. имеет место включение

$$\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0 \subset P(Y).$$

Установим обратное включение. Известно, что множество Парето в случае конечного множества возможных векторов Y обладает тем свойством, что всякий возможный вектор, не входящий в множество Парето, доминируется каким-то парето-оптимальным вектором по отношению $\geq$. Тем самым, исходное множество векторов Y разбивается на две части, одна из которых совпадает с множеством парето-оптимальных векторов, тогда как другую часть образуют доминируемые ими векторы. Сформулированный алгоритм устроен таким образом, что на каждом шаге вместе с найденным новым слоем Парето удаляются векторы, которые доминируются слоем, построенным на предыдущем шаге. Причем на k-ом шаге образуется пустое множество P_k и работа алгоритма заканчивается. Из этого следует, что в построенное множество $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0$ не входят лишь те векторы, которые были удалены на том или ином предыдущем шаге как доминируемые. Следовательно, множество Парето не может быть шире $\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i^0$ ■

Как можно использовать полученное разбиение в процессе принятия решений? Самое последнее множество (т.е. P_{k-1}^0) будет «наиболее близким» к так называемому *надир вектору* y^N, определяемому равенством $y^N = (\min_{y\in P(Y)} y_1, \min_{y\in P(Y)} y_2, ..., \min_{y\in P(Y)} y_m)$. Этот вектор указывает покоординатные границы снизу множества Парето, и близость к нему реализует определенную отдаленность от m «крайних» парето-оптимальных точек, характеризующихся максимальным значением по какому-то одному из критериев. Следовательно, элементы множества P_{k-1}^0 вполне могут претендовать на выбираемые, если ЛПР заинтересовано в получении вектора, компоненты которого относительно равномерно удалены от указанных «крайних» границ множества Парето.

8.3.4. Нормализация критериев и выбор коэффициентов свертки. Когда мы имеем дело с прикладными многокритериальными задачами, критерии перестают быть абстрактными числовыми функциями, они наполняются конкретным содержанием. Точнее говоря, значения этих функций начинают выражать величины, принадлежащие той ли иной количественной шкале и измеряться в тех или иных единицах измерения. Как известно, основными количественными шкалами являются – абсолютная шкала, шкала отношений, шкала разностей и шкала интервалов.

Если значения критериев, участвующих в нашей многокритериальной задаче однотипны, т.е. принадлежат одной шкале и измеряются в одних и тех же единицах, то их линейная свертка заведомо будет иметь смысл. Однако на практике подобного рода ситуации крайне редки, поскольку в таких случаях, как правило, можно избежать многокритериальности и свести рассматриваемую задачу к однокритериальной. Например, если нас интересуют m различного рода затрат, связанных с производством некоторого продукта, то нет смысла рассматривать задачу с m критериями, можно просто сложить все эти затраты вместе и решать задачу с одним суммарным критерием.

Многокритериальность возникает именно по причине «разнородности» имеющихся критериев, поскольку их не удается «свернуть» в одну формулу из-за того, что значения участвующих в задаче критериев, как правило, принадлежат различным шкалам и измеряются в различных единицах. Типичный пример подобного типа из области экономики – получить максимальную прибыль за минимальное время. Прибыль измеряется в шкале отношений, тогда как время – в шкале интервалов. Единицами прибыли могут быть рубли, доллары и пр., а единицами времени служат часы, дни, годы и т.д. Разве можно сложить вместе критерий прибыли и критерий времени? Такая сумма даже с использованием коэффициентов (т.е. свертка), является некорректной. Как же следует поступать в таких случаях?

Для решения этой проблемы обычно используют прием, который носит название «нормализации критериев», заключающийся в приведении разнотипных критериев к единой шкале. Правда, получающаяся таким образом «искусственная» шкала не имеет ничего общего с упомянутыми выше теми или иными представителями «естественных» количественных шкал. Этот прием заключается в применении к критериям таких монотонных преобразований, которые в той или иной степени «уравнивают» пределы изменения данных критериев. Наиболее распространенным преобразованием данного типа является замена исходного критерия f_i на преобразованный критерий вида

$$\tilde{f}_i = \frac{y_i^{\max} - f_i(x)}{y_i^{\max} - y_i^{\min}},$$

где $y_i^{\max}$ и $y_i^{\min}$ – максимальное и минимальное значения функции f_i на множестве X, в предположении, разумеется, что они существуют. Однако так как при максимизации линейной свертки с положительными коэффициентами мы никогда не выйдем за пределы множества Парето, знаменатель нормализованного критерия имеет смысл уточнить следующим образом:

$$\tilde{\tilde{f}}_i = \frac{y_i^{\max} - f_i(x)}{y_i^{\max} - y_i^{N}},$$

где y_i^N означает i-ю компоненту надир вектора, введенного в предыдущем разделе.

Значения таким образом преобразованных критериев лежат в пределах отрезка $[0,1]$, чем, собственно, и обеспечивается указанное выше «уравнивание». Кроме того, каждое из этих преобразований является положительным линейным (точнее говоря, аффинным), а значит, строго возрастающим. Поэтому множество Парето при таком преобразовании не изменяется, а значит, нормализацию вполне можно использовать в связке с принципом Эджворта-Парето и последующим применением линейной свертки преобразованных критериев.

Наиболее уязвимо для критики применение линейной свертки в части назначения ее коэффициентов. Обычно считается, что они характеризуют некий «вес», или «важность» соответствующего критерия, однако до сих пор еще никто не дал точного определения этих понятий, связанных с линейной сверткой, хотя и предложено множество приемов для их отыскания.

Например, когда вообще нет никакой информации о приоритете того или иного критерия, коэффициенты линейной свертки предлагают выбирать одинаковыми. В случае строгого упорядочения «весов» критериев коэффициенты назначают так, чтобы они равномерно заполняли отрезок своего изменения [0,1]. Еще один вариант определения коэффициентов линейной свертки критериев основан на попарном сравнении «весов» критериев и последующем использовании метода анализа иерархий [50]. В некоторых случаях их нахождение поручают экспертам. При этом каждый эксперт вкладывает в понятие «вес критерия» свой собственный субъективный смысл, а значит ни о какой объективности метода линейной свертки говорить не приходится. В силу сказанного, этот метод причисляют лишь к списку эвристических приемов решения многокритериальных задач, когда строгое обоснование заменяется теми или иными «разумными» соображениями. Еще одним признаком эвристического подхода является невозможность четко описать класс задач, в котором применение данного метода гарантированно приводит к требуемому решению.

Если существование линейной функции полезности обеспечено, то коэффициенты должны выбираться так, чтобы имело место соотношение (8.1). Ясно, что на практике выполнить эту задачу нереально. Именно поэтому, как указано выше, вопрос назначения коэффициентов переводят в другую плоскость и прибегают к различного рода уловкам, использующим неопределенные понятия «вес», «важность» и т.п.

Аналогично поступают и при выделении с помощью линейной свертки того или иного парето-оптимального вектора. Однако конкретной связи между коэффициентами линейной свертки и различными парето-оптимальными векторами в руках у исследователя нет, а значит, каким бы изощренным не был способ назначения указанных коэффициентов, нет никакой гарантии, что в итоге будет найден действительно «наилучший» парето-оптимальный вектор (или их некое подмножество) в данной задаче.

8.3.5. Применение линейной свертки на завершающем этапе сужения множества Парето. Если принять принцип Эджворта-Парето, то решение исходной задачи, т.е. нахождение множества выбираемых векторов, можно трактовать как сужение множества Парето до искомого множества $C(Y)$. Такое сужение может быть обоснованным только в том случае, когда используется какая-то дополнительная информация о предпочтениях ЛПР, позволяющая «выбраковывать» непригодные парето-оптимальные векторы. Очень удобной в этом плане является информация об отношении предпочтения ЛПР в виде пары парето-оптимальных векторов, из которых ЛПР выбирает один вектор и не выбирает другой. Это как раз и есть информация в виде квантов, изучение и использование которой рассматривалось на протяжении предыдущих глав.

Таким образом, на первом этапе для сужения множества Парето выявляется непротиворечивая информация об отношении предпочтения ЛПР в виде одного или нескольких квантов информации. В результате использования этой информации с помощью установленных ранее теорем или алгоритмов строится новый векторный критерий $g=(g_1,g_2,...,g_p)$, $p \geqq m$, при котором выполняются включения

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \quad C(Y) \subset f(P_g(X)) \subset P(Y) \qquad (8.4)$$

Если размеры нового множества Парето $P_g(X)$ «слишком велики» для осуществления окончательного выбора, то на втором этапе для дальнейшего сужения этого множества можно использовать метод линейной свертки критериев.

Обоснование описанного комбинированного подхода дается в следующем утверждении.

Теорема 8.3. *Пусть имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР и* $g=(g_1,g_2,...,g_p)$ *есть вектор-функция, которая участвует в* (8.4). *Предположим, что множество* $X\subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *покомпонентно вогнута на нем. Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеет место включение*

$$C(X)\subset\bigcup_{\mu}\{x^*\in X\mid\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x^*)=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x)\}, \tag{8.5}$$

где вектор μ *принимает свои значения в пределах множества*

$$\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_p)\geq\mathbf{0},\quad \sum_{i=1}^{p}\mu_i=1. \tag{8.6}$$

□ В соответствии с аксиоматическим подходом для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$ выполняется $C(X)\subset P_g(X)$. Поскольку компоненты исходной вектор-функции f вогнуты, а компоненты новой вектор-функции g представляют собой их линейные неотрицательные комбинации, то все новые компоненты также являются вогнутыми функциями. В этих условиях в силу теоремы 8.1 справедливо включение

$$P_g(X)\subset\bigcup_{\mu}\{x^*\in X\mid\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x^*)=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x)\},$$

где вектор μ вида (3) (см. правое включение (12) из [5] на с. 102). Комбинация полученных двух включений приводит к требуемому результату ■

Если к предположениям теоремы 8.3 добавить, что множество выбираемых вариантов (или векторов) состоит в точности из одного элемента, то, очевидно, включение (8.5) можно заменить более простым соотношением

$$C(X)\subset\{x^*\in X\mid\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x^*)=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x)\} \tag{8.7}$$

при некотором векторе μ вида (8.6). Это означает, что в данном случае достаточно выбрать единственный вектор весовых коэффициентов линейной свертки критериев и решить одну соответствующую задачу скалярной максимизации для того чтобы получить множество, которое заведомо содержит подлежащий нахождению единственный «наилучший» вариант.

Поскольку неравнозначность критериев была учтена при формировании и использовании квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, компоненты вектора μ можно выбрать одинаковыми. Однако если требуется дополнительная корректировка степени неравнозначности критериев, то этого можно добиться перераспределением значений коэффициентов линейной свертки критериев. При этом следует иметь в виду, что изначально непростая задача назначения коэффициентов вектора μ усложняется тем, что эти коэффициенты относятся к компонентам $g_1, g_2, ..., g_p$ новой вектор-функции, которые в отличие от $f_1, f_2, ..., f_m$ уже не имеют конкретного прикладного смысла, если они представляют собой линейные комбинации исходных критериев.

Кроме того, в общем случае среди коэффициентов линейной свертки из (8.5) могут встретиться и нулевые, так как вектор μ имеет вид (8.6). Наличие нулевых коэффициентов требует рассмотрения линейных комбинаций исходных критериев, в которых могут присутствовать от одного до p слагаемых, что вносит определенное неудобство при реализации разбираемого подхода.

Вариант теоремы 8.3, избавленный от указанного недостатка, можно получить, лишь усилив предположения этой теоремы. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Пусть имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР, учет которых следует осуществлять с помощью вектор-функции* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло и компактно, а вектор-функция* f *вогнута и непрерывна на нем, причем по крайней мере одна из ее компонент строго вогнута. Тогда для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *имеет место включение*

$$C(X) \subset cl\left(\bigcup_{\mu}\{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x^*) = \max_{x \in X}\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x)\}\right), \tag{8.8}$$

где $cl(A)$ *означает замыкание множества A, а вектор* μ *подчинен условиям*

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p) > \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{p}\mu_i = 1. \tag{8.9}$$

Теорема 8.4 немедленно вытекает из результатов аксиоматической подхода и следствия 5 (см. [5], с. 145).

В этой теореме все компоненты вектора μ положительны, однако наличие операции замыкания множества в правой части включения (8.8) несколько снижает значимость данного утверждения. Однако если допустить, что выбираемый вариант единственный и, кроме того, он является собственно эффективным, то можно сформулировать следующее удобное для практического применения утверждение.

Теорема 8.5. *Пусть учет некоторого конечного непротиворечивого набора квантов информации следует производить с помощью вектор-функции* $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$. *Предположим, что множество* $X \subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *вогнута на нем. Тогда для лю-*

бого одноэлементного множества $C(X)$, *представляющего собой собственно эффективный вариант, существует вектор* μ *вида* (6)*, при котором имеет место включение* (8.7).

Справедливость теоремы 8.5 следует из результатов аксиоматической подхода и теоремы Джоффриона (см. [5], с. 104) о характеризации собственной эффективных точек с помощью линейной свертки критериев в случае вогнутых критериев на выпуклом множестве вариантов.

Таким образом, на втором этапе комбинированного подхода при указанных предположениях единственный «наилучший» вариант можно искать среди собственно эффективных точек в результате решения одной задачи максимизации линейной свертки критериев $g=(g_1,g_2,...,g_p)$ при некотором μ с положительными компонентами.

При определенных ограничениях на векторный критерий и множество возможных вариантов всякая парето-оптимальная точка является собственно эффективной. В таком случае от требования собственной эффективности в последней теореме можно отказаться. В частности, такое положение имеет место для конечного множества X, а также в случае линейной вектор функции f и полиэдрального X.

8.3.6. Комбинированный подход с использованием мультипликативной свертки критериев. Наряду с линейной сверткой критериев для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной в предположении, что все критерии принимают положительные значения, используют мультипликативную свертку $\prod_{i=1}^{m} f_i^{\mu_i}(x)$, где вектор μ имеет вид (8.6) или (8.9). Максимизацию произведения критериев нередко связывают с реализацией так называемого принципа справедливого компромисса. Заметим, что в теории кооперативных игр арбитражное решение Нэша по существу также является результатом максимизации произведения функций выигрышей игроков.

Полученные выше результаты для линейной свертки критериев можно без труда перенести на случай мультипликативной свертки. Это позволяет осуществить следующая цепочка эквивалентностей

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i \ln g_i(x^*)\geqq\sum_{i=1}^{p}\mu_i \ln g_i(x) \Leftrightarrow \ln\prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*)\geqq\ln\prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*)\geqq\prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x),$$

а также тот факт, что операция логарифмирования вогнутой функции, принимающей положительные значения, не нарушает ее свойство вогнутости.

Например, следующее утверждение вытекает непосредственно из сказанного выше и теоремы 8.5.

Следствие 8.1. *Пусть учет некоторого конечного непротиворечивого набора квантов информации следует производить с помощью вектор-функции* $g=(g_1,g_2,...,g_p)$. *Предположим, что множество* $X\subset R^n$ *выпукло, а вектор-функция* f *вогнута и положительна на нем. Тогда для любого одноэлементного множества* $C(X)$, *представляющего собой собственно эффективный вариант, существует вектор* μ *вида* (8.9)*, при котором имеет место включение*

$$C(X) \subset \{x^* \in X \mid \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x^*) \geqq \prod_{i=1}^{p} g_i^{\mu_i}(x)\}.$$

8.3. Комбинированные методы сужения множества Парето

8.3.1. Использование равномерной метрики. В 1966 г. Ю.Б. Гермейером было получено необходимое и достаточное условие слабой эффективности (оптимальности по Слейтеру). Позднее рядом зарубежных авторов это условие было открыто заново. Согласно этому условию точка $x^* \in X$ является слабо эффективной (т.е. для нее не существует такого $x \in X$, что $f(x) > f(x^*)$), если найдутся числа $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) > 0_m, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, при которых функция $\min\limits_{i=1,2,...,m} \mu_i f_i(x)$ достигает своего максимума на множестве X в точке x^*. Единственным предварительным условием в теореме Гермейера является положительность всех компонент векторного критерия в данной точке, т.е. $f(x^*) > 0_m$. Функция $\min\limits_{i=1,2,...,m} \mu_i f_i(x)$ в отечественной литературе именуется сверткой Гермейера, в зарубежной – взвешенной метрикой Чебышева, поскольку при одинаковых коэффициентах $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ она действительно с точностью до постоянного множителя совпадает с равномерной метрикой, ранее введенной П.Л. Чебышевым.

Пусть на первом этапе для сужения множества Парето был использован один или несколько квантов информации об отношении предпочтения ЛПР и построен новый векторный критерий $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$, при котором имеет место (8.4). Всякая эффективная точка является слабо эффективной. Линейная комбинация положительных функций с положительными коэффициентами является положительной функцией. Поэтому, комбинируя аксиоматический подход и теорему Гермейера (см., например, [46]) применительно к вектор-функции g, приходим к следующему утверждению.

Теорема 8.6. *Пусть функции $f_1, f_2, ..., f_m$ принимают положительные значения на множестве X. Предположим, что имеется набор непротиворечивых квантов информации, учет которых следует производить с помощью вектор-функции g. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение*

$$C(Y) \subset f(P_g(X) \subset \bigcup_{\mu} \{ f(x^*) \in Y \mid \min_{i=1,,...,p} \mu_i g(x^*) = \max_{x \in X} \min_{i=1,2,...,p} \mu_i g_i(x)\},$$

где вектор μ принимает свои значения в пределах множества (8.9).

Если согласно исходным требованиям конкретной задачи множество $C(Y)$ должно состоять из одного элемента, то в соответствии с последней теоремой, его можно получить, решая одну скалярную (однокритериальную) задачу максимизации функции $\min\limits_{i=1,2,...,p} \mu_i g_i(x)$ на множестве X при некотором фиксированном векторе μ вида (8.9). Заметим, что эта задача максимизации не обязательно имеет единственное решение. В таком случае придется привлечь дополнительные соображения, которые позволили бы сократить число претендентов на выбираемое решение. Например, можно воспользоваться простой или взвешенной суммой критериев и т.п.

Что касается проблемы назначения весовых коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ функции $\min\limits_{i=1,2,...,p} \mu_i g_i(x)$, то она уже обсуждалась в предыдущем разделе применительно к линейной свертке. Сделанные там выводы в полной мере относятся и к свертке Гермейера. Поскольку при использовании квантов информации неравнозначность критериев уже была учтена, на втором этапе резонно использовать одинаковые коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$, что избавляет исследователя от проблемы их назначения. Если же все-таки имеется настоятельная необходимость дополнительной корректировки значимости критериев, то это можно осуществить, подбирая соответствующие значения указанных коэффициентов.

Пример 8.1. Рассмотрим двухкритериальную задачу, в которой $Y = \{y^1, y^2, ..., y^5\}$, где $y^1 = (1,2)$, $y^2 = (2,1.8)$, $y^3 = (3,1.7)$, $y^4 = (4,1.6)$, $y^5 = (5,1.3)$. Здесь все векторы имеют положительные компоненты и являются парето-оптимальными. Допустим, что в результате опроса ЛПР было установлено, что первый критерий более значим, чем второй, причем за уступку в размере 1 единицы в значении второго критерия ЛПР рассчитывает получить прибавку в размере не менее 4 единиц по первому критерию. Согласно аксиоматическому подходу, это означает, что в наличии имеется квант информации, состоящий в том, что первый критерий является более значимым, чем второй с параметрами $w_1^* = 4,\ w_2^* = 1$. В соответствии с теоремой 1 составим новый векторный критерий $g_1 = y_1,\ g_2 = y_1 + 4y_2$. Вычисляем образ множества возможных вариантов относительно нового векторного критерия: $g(Y) = \{(1,9), (2,9.2), (3,9.8), (4,10.4), (5,10.2)\}$. На втором этапе, максимизируя функцию $\min\limits_{i=1,2} y_i$ на полученном множестве, приходим к единственному вектору y^5, который объявляем «наилучшим» (выбранным) решением данной задачи.

Возможен и другой вариант решения этой задачи. Так как согласно принципу Парето должно выполняться включение $C(Y) \subset \hat{P}(Y) = f(P_g(X))$, перед выполнением второго этапа все векторы множества $g(Y)$, которые не являются парето-оптимальными, можно удалить и проводить максимизацию функции $\min\limits_{i=1,2} y_i$ лишь на полученном сокращенном множестве Парето $\{y^4, y^5\}$. Заметим, что исключение первого этапа (т.е. отказ от использования кванта информации) приводит к вектору y^2 при использовании той же равномерной метрики.

В теореме 8.6, как и в теореме Гермейера, положительность всех критериев на области их определения является существенным требованием, от которого отказаться нельзя. В следующей теореме вместо него предполагается ограниченность сверху всех критериев, что является менее ограничительным, чем положительность. Этот результат имеет место в результате комбинации аксиоматического подхода и следствия 3.1 из [3], которое можно рассматривать как результат применения теоремы Гермейера к положительному векторному критерию $\hat{y} - g(x)$.

Теорема 8.7. *Пусть имеется непротиворечивый набор квантов информации, учет которых производится на основе вектор-функции* g *и при некотором* $\hat{y} \in R^p$ *неравенство*

$g(x) < \hat{y}$ выполняется для всех $x \in X$. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливо включение

$$C(Y) \subset \bigcup_{\mu} \{ f(x^*) \in Y \mid \max_{i=1,2,\ldots,p} \mu_i (\hat{y}_i - g_i(x^*)) = \min_{x \in X} \max_{i=1,2,\ldots,p} \mu_i (\hat{y}_i - g_i(x)) \},$$

где вектор μ изменяется в пределах множества (8.9).

Все высказанные ранее комментарии по отношению к теореме 8.6, можно отнести и к теореме 8.7. Поэтому повторять их не будем.

Наиболее удобный для практического использования результат подобного рода основан на следующем необходимом и достаточном условии слабой эффективности.

Лемма 8.1. *Пусть задано произвольное число α. Вектор $y^* \in Y$ слабо эффективен относительно f тогда и только тогда, когда существует такой вектор $u \in R^m$, $\sum_{i=1}^{m} u_i = \alpha$, что*

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i^*) \leqq \max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i) \qquad \text{для всех } y \in Y. \tag{8.10}$$

□ Необходимость. Пусть y^* - произвольный слабо эффективный вектор. Введем вектор u с компонентами

$$u_i = y_i^* - \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - \alpha \right), \quad i = 1,2,\ldots,m; \ \sum_{i=1}^{m} u_i = \alpha .$$

Для доказательства предположим противное: существует точка $y \in Y$, для которой выполнено $\max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i^*) > \max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i)$. Отсюда для любого i следует неравенство

$$u_i - y_i < \max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i^*) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \frac{\alpha}{m} .$$

Подставив в левую часть неравенства соответствующие значения компонент u_i, получим $y_i^* < y_i$, $i = 1,2,\ldots,m$. Последнее противоречит слабой эффективности y^*.

Достаточность. Пусть для вектора u из условий теоремы выполняется неравенство (8.10). Вновь используем рассуждение от противного: вектор y^* не является слабо эффективным, т.е. найдется $y \in Y$, такой, что $y^* < y$. В таком случае верно $u_i - y_i^* > u_i - y_i$, $i = 1,2,\ldots,m$. Отсюда вытекает неравенство $\max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i^*) > \max_{i=1,2,\ldots,m} (u_i - y_i)$, которое противоречит (8.10). Теорема доказана.

Комбинирование аксиоматического подхода и последнего утверждения приводит к следующему результату.

Теорема 8.8. *Предположим, что имеется непротиворечивый набор квантов информации, учет которых следует осуществлять при помощи вектор-функции g. Пусть задано* *произвольное число* α. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *выполняется*

$$C(Y) \subset \bigcup_u \{ f(x^*) \in Y \mid \max_{i=1,2,\ldots,p} (u_i - g_i(x^*)) = \min_{x \in X} \max_{i=1,2,\ldots,p} (u_i - g_i(x)) \},$$

где вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *удовлетворяет условию* $\sum_{i=1}^{p} u_i = \alpha$.

Когда множество $C(Y)$ состоит из одного элемента, оно, согласно теореме 8.8, содержится среди решений одной задачи минимизации функции $\max_{i=1,2,\ldots,p} (u_i - g_i(x))$ на множестве X. При этом никаких весовых коэффициентов назначать не нужно. Требуется лишь указать «желаемые» («идеальные») значения по каждому из критериев, в качестве которых можно выбрать, например, их максимальные значения на множестве X, т.е. $u_i = \sup_{x \in X} g_i(x),\ i = 1,2,\ldots,p$. Решив указанную выше задачу минимизации функции максимума, получим в общем случае слабо эффективный вектор из множества $g(X)$, равномерно ближайший к вектору u. Подобная идея выбора допустимого вектора, наиболее близкого к некоторому «идеальному» вектору (или даже некоторому множеству «идеальных» векторов) лежит в основе метода целевого программирования. В следующем разделе на втором этапе используется та же идея приближения, но основанная на евклидовой метрике.

Пример 8.2. Рассмотрим задачу из примера 8.1 с тем же квантом информации, но на втором этапе воспользуемся скаляризацией на основе теоремы 8.8. С этой целью в качестве «идеального» выберем вектор $u = (5, 10.4)$, составленный из максимумов компонент векторов нового множества Парето $\{y^4, y^5\}$. Нетрудно проверить, что в этом случае снова придем к «наилучшему» вектору y^5.

Интересно отметить, что параметр α можно выбирать произвольно, и если в качестве вектора u выбрать так называемый надир вектор (nadir vector) с компонентами $u_i = \inf_{x \in P_g(X)} g_i(x),\ i = 1,2,\ldots,p$, то минимизация функции $\max_{i=1,2,\ldots,p} (u_i - g_i(x))$ на множестве X приведет к слабо эффективному вектору, который будет равномерно наиболее удален от надир вектора.

8.3.2. Использование евклидовой метрики. Предположим, что все критерии ограничены сверху на множестве X и введем множество

$$U = \{ u \in R^m \mid u_i > \sup_{x \in X} f_i(x),\ i = 1,2,\ldots,m \},$$

которое обычно именуют множеством *идеальных* или *утопических векторов*.

Рассмотрим решение многокритериальной задачи, основанное на идее выбора в качестве «наилучшего» вектора множества Y, ближайшего к множеству U. При этом в качестве расстояния будем использовать обычную евклидову метрику $\| a - b \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)^2}$ для векторов $a, b \in R^m$.

Лемма 8.2. *Допустим, что множество $X \subset R^n$ выпукло, а числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нем. Точка $x^* \in X$ является собственно эффективной относительно f тогда и только тогда, когда существует вектор $u \in U$, для которого имеет место равенство*

$$\| u - f(x^*) \| = \min_{x \in X} \| u - f(x) \|.$$

□ Заметим, что в условиях теоремы множество

$$Y_* = \{ y^* \in R^m \mid y_i^* \le y_i \ \ i = 1,2,...,m, \text{ при некотором } y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in Y \}$$

является выпуклым, причем множества эффективных (и собственно эффективных) векторов на множестве Y и на множестве Y_* совпадают (см. [8], С. 99).

Необходимость. Пусть вектор $y^* = f(x^*) \in Y$ собственно эффективен. В таком случае согласно теореме Джофриона (см. [8] С. 105) найдется вектор μ с положительными компонентами в сумме равными единице, при котором линейная функция $\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ достигает своего максимума на множестве Y_* в точке $y^* \in Y_*$. Это означает, что вектор μ задает гиперплоскость, опорную для выпуклого множества Y_* в указанной точке. В силу положительности всех компонент вектора μ, найдется положительное число α, при котором $y^* + \alpha \cdot \mu \in U$. В качестве вектора $u \in U$, удовлетворяющего условиям теоремы, выбираем $u = y^* + \alpha \cdot \mu$. Тогда упомянутая выше гиперплоскость будет опорной и для замкнутого шара с центром в точке u и радиусом $\| u - y^* \|$. Это означает, что точка y^* является ближайшей точкой множества Y_* (а значит, и Y) к точке u.

Достаточность. Обозначим через $y^* = f(x^*) \in Y$ точку, реализующую минимум расстояния от Y до некоторого вектора $u \in U$. Нетрудно понять, что точка y^* будет ближайшей и от множества Y_* до u. Обозначим через L гиперплоскость, проходящую через точку y^* и являющуюся опорной для шара с центром в u и радиусом $\| u - y^* \|$. Очевидно, относительные внутренности выпуклых множества Y_* и указанного шара не пересекаются. Поэтому на основании теоремы 11.3 [9] множество Y_* и указанный шар можно отделить друг от друга некоторой гиперплоскостью, проходящей через их общую точку y^*. Поскольку для шара в точке y^* существует только одна опорная гиперплоскость L, эта же гиперплоскость будет опорной и для множества Y_*. Последнее означает, что линейная функция $\sum_{i=1}^{m} (u_i - y_i^*) y_i$ с положительными коэффициентами достигает своего максимума на множестве Y_* (а значит, и на Y) в точке y^*. Отсюда вытекает собственная эффективность этой точки ■

Перейдем к рассмотрению комбинированного подхода, состоящего в сужении на первом этапе множества Парето за счет одного или нескольких непротиворечивых квантов информации с последующей минимизацией на втором этапе расстояния от множества $g(X)$ до некоторой заранее выбранной точки «идеального» множества $U' = \{u \in R^p \mid u_i > \sup_{x \in X} g_i(x),\ i = 1,2,..., p\}$.

Теорема 8.9. *Пусть имеется набор квантов непротиворечивой информации, учет которых следует производить с помощью вектор-функции g, множество $X \subset R^n$ выпукло, функции $f_1, f_2,..., f_m$ ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нем. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение*

$$C(Y) \subset cl\left(\bigcup_{u \in U'} \{ f(x^*) \in Y \mid \| u - g(x^*) \| = \min_{x \in X} \| u - g(x) \| \}\right), \tag{8.11}$$

где $cl(A)$ означает замыкание множества A.

Теорема 8.9 является результатом комбинирования аксиоматического подхода, леммы 8.2 и того факта, что в условиях данной теоремы множество собственно эффективных векторов плотно в множестве эффективных векторов (см. [8] С. 140), т.е. замыкание множества собственно эффективных векторов содержит множество эффективных векторов.

Как видим, в условиях теоремы 8.9 присутствуют ограничительные предположения, без которых она может потерять свою силу. В частности, если новое множество Парето состоит из конечного числа элементов (это заведомо выполняется, если конечным является множество Y), то скаляризация на основе евклидовой метрики в общем случае не является корректной. Это обстоятельство следует иметь в виду всем тем многочисленным авторам, которые при решении прикладных многокритериальных задач в качестве «наилучшего» вектора выбирают ближайший в конечном множестве Y к некоторому элементу из U . Соответствующий показательный пример приводится ниже.

Пример 8.3. Пусть $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$, где $y^1 = (1,3)$, $y^2 = (1.5,1.5)$, $y^3 = (3,1)$**.** Здесь все векторы парето-оптимальны, но второй вектор не будет ближайшим (на основе евклидовой метрики) в множестве $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$ ни к одному из векторов множества $\{u \in R^2 \mid u_1, u_2 > 3\}$. Заметим, что он будет ближайшим, например, к вектору $(3.1, 3.1)$, если использовать равномерную метрику.

8.4. Выбор оптимальной величины таможенной пошлины

8.4.1. Постановка задачи. Пусть Российская федерация торгует с другими государствами на своем внутреннем рынке каким-то продуктом, который производится как внутри страны, так и за рубежом. Вследствие торговли в бюджет РФ поступает доход

$$S = t_d xp + \tau qy + t_m (1+\tau) qy, \tag{8.12}$$

где

t_d – налог на добавленную стоимость на произведенный в стране продукт (в настоящее время t_d=18%),

t_m – налог на добавленную стоимость для продуктов и услуг, поступивших в страну через границу (в настоящее время этот налог в РФ применяется по-разному к трем категориям товаров и услуг: 0% для особо важных, например, компоненты и приборы для космической отрасли; 10% для товаров средней важности, например, предметы питания и детские товары; и, наконец, обычные товары и услуги облагаются налогом в 18%);

x – объем производства данного продукта в России,

p – рыночная цена продукта на внутреннем рынке в России,

τ – ввозная пошлина на импорт продукта (здесь рассматривается пошлина типа ad valorem; так называемые «специфические» пошлины анализируются в соответствующей литературе, (например, см. [61]),

q – цена продукта за рубежом (с учетом того, что импортер не платит налог на добавленную стоимость в стране, где он приобрел продукт, т.е. величина q намного меньше, чем в розничной торговле в соответствующей стране),

y – объем импорта.

Поскольку для большинства продуктов и услуг налог на добавленную стоимость определяется одинаково как для производимых внутри страны, так и для импортируемых из зарубежа, не уменьшая общности постановки задачи положим $t_d = t_m = t$.

Импортер данного продукта получает прибыль

$$D = y[p - (1+\tau)(1+t)q] \tag{8.13}$$

Согласно Налоговому Кодексу Российской Федерации [22], глава 21 и ст. 150, 153, 164 и 166 товары и услуги, ввозимые на территорию РФ, за некоторым исключением облагаются налогом на добавленную стоимость, базой для которого является таможенная стоимость с учетом ввозной пошлины. В разных странах ставки налога различны, в некоторых государствах (например, США, Япония) их вообще нет. Европейские страны взимают высокие налоги (в Норвегии – 25%). Китай, Индия, арабские страны – примерно 10%. В сумме для российского бюджета данный налог составляет сотни миллиардов рублей.

Страна-потребитель продукта стоит перед выбором регулирования импорта в зависимости от ситуации с помощью величины ввозной пошлины (или некоторой системы квот, о которой в данной работе мы не говорим, так как оптимальные пошлины и оптимальные квоты взаимосвязаны и являются управлением в распоряжении правительства). Целью такого регулирования может быть доход от налогов и таможенных платежей (8.12) или рост доли отечественного производителя в объемах продаж. Целью импортера, которой он добивается изменением объема импорта, является либо прибыль (8.13), либо число рабочих мест в странах, производящих импортируемый продукт, которое далее принимается пропорциональным объему импорта.

Далее считается, что государственное потребление не изменяет мировой цены предложения q (которая будет предполагаться постоянной). Кроме того, здесь не анализируются товары замещения или дополняющие товары и услуги. Это заметно упрощает задачу и ее решение. Рынок данного продукта считается конкурентным, что позволит рассматривать цену продукта внутри страны, как следствие равновесия по Вальрасу. Случаи монопольных или олигопольных ценовых надбавок рассматриваться не будут.

Сформулируем следующие три задачи.

Задача А: найти множество Парето для двух целевых функций S и D при $y \geq 0, \tau \geq 0, D \geq 0$.

Внутреннее производство x в этой задаче считается постоянным. Результат решения задачи А определяет возможности взаимных стратегий государства и импортера. Множество Парето задает область компромиссов в торговой политике и выбор внутри него позволяет за столом переговоров (или же, например, методом «проб и ошибок») установить взаимовыгодную стратегию.

Задача Б: найти множество Парето для трех целевых функций S, D и $Y = y$ при $y \geq 0, \tau \geq 0, D \geq 0$.

Внутреннее производство x в этой задаче также считается постоянным. Результат решения задачи Б определяет возможности взаимных стратегий государства-потребителя, импортирующих компаний и государств, производящих импорт, так как дополнительной целью оптимизации является увеличение (или не уменьшение) числа рабочих мест. Такое исследование становится актуальным, если импорт в страну-потребителя достаточно велик, чтобы профсоюзы страны-производителя или органы, контролирующие экспорт, потребовали от правительства ответных мер на установление ввозных пошлин. Например, ограничение поставок куриных окороков из США в РФ («ножки Буша») привело к существенному напряжению на птицефабриках штата Мэриленд в США и вызвало политические реакции правительства США. Тогда как оценивание множества Парето, возможно, позволило бы найти приемлемое компромиссное решение проблемы.

Задача В: найти множество Парето для трех целевых функций S, D и $X = x$ при $y \geq 0, \tau \geq 0, D \geq 0$.

Внутреннее производство x в этой задаче является переменным и соответствует функции предложения отечественного производства. В такой постановке задача анализирует возможности протекционистского поведения с целью сделать собственное производство более конкурентно-способным или просто увеличить объем собственного производства, что соответствует заботе правительства страны-потребителя о рабочих местах в своей стране.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\Omega = \{(y, \tau) : y \geq 0; \tau \geq 0; D \geq 0\}$.

Во всех предлагаемых задачах цена продукта на внешнем рынке постоянна, поэтому ее можно выбрать в качестве денежной единицы на протяжении всей работы, т.е. $q = 1$. Аналогично, в первых двух задачах объем внутреннего производства постоянен и поэтому в качестве единицы измерения объемов импорта и потребления эту величину можно выбрать следующим образом $x = 1$. Кроме того, предположим, что внутренний потребитель из своего бюджета тратит определенную, фиксированную сумму M на данный товар. Тогда кривая спроса определяется соотношением

$$p(x + y) = M. \tag{8.14}$$

В силу сделанных предположений для первых двух задач получим три целевые функции

$$S = \frac{txM}{x+y} + [\tau + t(1+\tau)]qy\,, \tag{8.15}$$

$$D = y\left[\frac{M}{x+y} - (1+\tau)(1+t)q\right], \tag{8.16}$$

$$Y = y. \tag{8.17}$$

В задаче А целевая функция (8.17) не участвует. Переменными здесь являются $y \geq 0, \tau \geq 0$, а M выступает, как положительный параметр (ниже в вычислениях и графиках будем считать $M = 6$, а в формулах оставим буквенное обозначение параметра).

8.4.2. Решение поставленных задач. Приступим к нахождению множества Парето в *задаче А*. Согласно (8.16), условие прибыльности импорта $D \geq 0$ выражается неравенством $\tau \leq \dfrac{M}{q(1+t)(x+y)} - 1$, что отвечает области **Ω**, изображенной на рис. 8.3 при t=0,18.

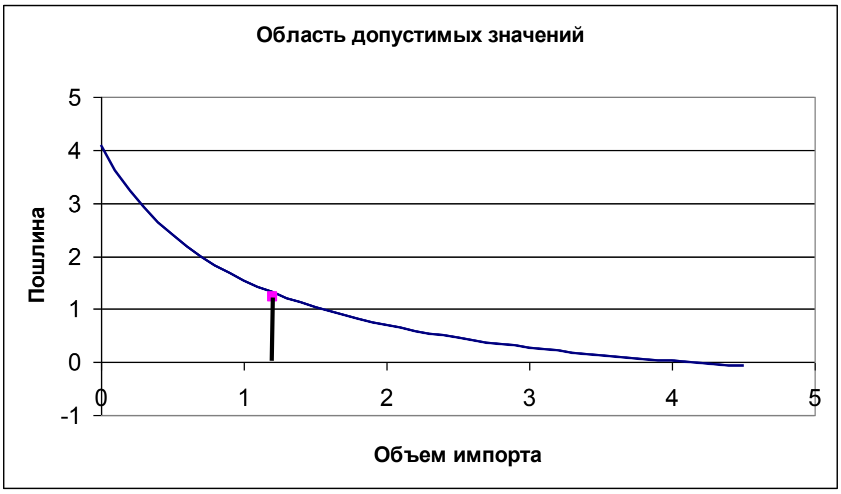

Рис 8.3.

Вертикальный отрезок соответствует решению задачи А. Поскольку в задаче А рассматриваются только две целевые функции от двух переменных, то можно применить известный подход на основе «ящика Эджворта».

Утверждение 1. *Множество локально парето-оптимальных вариантов для нахождения компромисса между государством и импортером содержится в множестве точек отрезка* $\left\{(\bar{y}, \tau) : 0 \leq \tau \leq \dfrac{1}{1+t}\sqrt{\dfrac{M}{qx(1-t)}} - 1\right\}$, *где* $\bar{y} = \sqrt{\dfrac{(1-t)Mx}{q}} - x$.

□ Точка плоскости (y, τ) обязательно лежит вне множества локально парето-оптимальных точек, если в ней линии уровней функций (8.15) и (8.16) пересекаются. В противном случае, когда градиенты этих функций коллинеарны, множество таких точек содержит локально парето-оптимальное множество. Выпишем в явном виде указанное условие коллинеарности

$$-\frac{txM}{(x+y)^2}+[\tau+t(1+\tau)]q=\vartheta\left[\frac{M}{x+y}-(1+\tau)(1+t)q-\frac{yM}{(x+y)^2}\right],$$

$$(1+t)qy=-\vartheta qy(1+t).$$

Из второго равенства следует $\vartheta=-1$. Тогда первое равенство приводит к квадратному уравнению

$$q(x+y)^2-M(x+y)+m(y+tx)=0,$$

положительное решение которого является оптимальным объемом импорта, т.е.

$$\bar{y}=\sqrt{\frac{(1-t)Mx}{q}}-x.$$

Учитывая, что нас интересуют только точки множества Ω, получим интервал изменения импортной пошлины

$$0\le\tau\le\frac{1}{1+t}\sqrt{\frac{M}{qx(1-t)}}-1 \quad \blacksquare$$

Численные расчеты на компьютере показывают, что множество, указанное в Утверждении 1, является (глобальным) множеством Парето.

Замечание 8.1. Так как оптимальный объем импорта $\bar{y}$ не зависит от величины пошлины, то подстановка $\bar{y}$ в (8.15) и (8.16) приводит к линейным зависимостям от τ:

$$S(\bar{y})=t\sqrt{\frac{qxM}{1-t}}+[(1+t)\tau+t]\sqrt{qxM(1-t)}-qx\ ,$$

$$D(\bar{y})=\left[\sqrt{qxM(1-t)}-qx\right]\left[\sqrt{\frac{M}{(1-t)qx}}-(1+t)(1+\tau)\right].$$

Первая зависимость возрастающая, вторая – убывающая, но с одинаковыми угловыми коэффициентами. Это означает, что увеличение импортной пошлины на один процент влечет рост доходов государства и уменьшение доходов импортера на одну и ту же величину (которая зависит от многих характеристик экономического состояния РФ и мировых цен).

Замечание 8.2. Согласно методике, изложенной в [47] (где используется модель при t_m=0%), импортер принимает стратегию $y^*=\arg\max D(y,\tau)$ при фиксированном значении

τ, а затем государство определяет уровень τ^* по полученному объему y^*. В принятых обозначениях имеем

$$D'_y = \frac{M}{1+y} - 1 - \tau - \frac{My}{(1+y)^2} = 0$$
.

Следовательно, $y^* = \sqrt{\frac{M}{1+\tau^*}} - 1$, а значит $\tau^* = \frac{M}{(1+y^*)^2} - 1$ При этом прибыль государства достигается на кривой

$$S^*(\tau) = 1{,}18\sqrt{M(1+\tau)} + \tau\left(\sqrt{\frac{M}{1+\tau}} - 1\right)$$
.

Наибольшее значение этой прибыли будет иметь место при $\tau^* \approx 2{,}29$ (для M=6). В этом случае $y^* \approx 0{,}35$. Подставляя найденные значения в выражения для функций S и D, получаем $S^* \approx 1{,}6; D^* \approx 0{,}4$. С другой стороны, область Парето дает возможность принятия компромиссного варианта в пределах $\hat{\tau}$ из интервала [0;1,7]. Приближенные оценки показывают, что S растет от 0,5 до 2,5, а D убывает от 2,1 до 0 при возрастании $\hat{\tau}$. В частности, при $\hat{\tau} = 0.9$ имеем S=1,6 и D = 1. Таким образом, результат выбора торговой политики с использованием области Парето дает существенно лучший результат.

Решение задачи Б. Наличие третьей целевой функции $Y = y$, представляющей интересы стран-производителей импорта, несколько изменяет построение множества Парето внутри $\Omega = \{(y,\tau) : y \geq 0, \tau \geq 0, D \geq 0\}$.

На основе определения парето-оптимального варианта в результате непосредственных вычислений можно найти, что в задаче Б множество Парето имеет вид

$$\left((y,\tau) : y \geq \sqrt{\frac{(1-t)xM}{q}} - x, \tau \geq 0, D \geq 0 \right)$$
.

Перейдем к задаче В. Как и прежде, основные целевые функции определяются выражениями (8.12) и (8.13), но в равенство (8.14) теперь входит переменная x, - это производство рассматриваемого продукта внутри страны, и оно определяется функцией предложения, которую будем считать линейной (на практике для формирования полной в смысле экономических интерпретаций задачи необходимо привлекать статистические методы идентификации этой функции). Итак, пусть функция предложения имеет вид

$$p = ax + b,$$

где, $a > 0, b > 0$. Подставляя найденное, из последнего равенства $x = {(p-b)}/{a}$ в (8.14), находим следующее соотношение для внутренней цены p

$$p = \frac{b-ay}{2} + \sqrt{\frac{(b-ay)^2}{4} + aM}\,.$$

Здесь выбран один из двух корней получающегося квадратного уравнения в силу $p > 0$.

Как и раньше, уменьшим количество параметров, вводя специальные единицы измерения количества денег и объемов продаж: $q = 1$ и $a = 1$. Тогда значение цены на внутреннем рынке и количество единиц выпускаемого в стране продукта определяются формулами

$$p = \frac{b-y}{2} + \sqrt{\frac{(b-y)^2}{4} + M}\,, \qquad x = -\frac{b+y}{2} + \sqrt{\frac{(b-y)^2}{4} + M}\,.$$

Подставляя полученные выражения для цены и объема собственного производства в целевые функции (8.12)– (8.13), получим

$$S = txp + \tau y + t(1+\tau)y = \tau y + t(1+\tau)y + t\left[M - \frac{y}{2}\left(b - y + \sqrt{(b-y)^2 + 4M}\right)\right]$$

$$D = \frac{y}{2}\left[b - y + \sqrt{(b-y)^2 + 4M} - 2(1+\tau)\right].$$

Вычислим соответствующие производные:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = (t + t\tau + \tau) + \frac{t}{2}\left[2y - b - \sqrt{(b-y)^2 + 4M} - \frac{y(y-b)}{\sqrt{(b-y)^2 + 4M}}\right],\ \frac{\partial S}{\partial \tau} = y(t+1);$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[b - 2y + \sqrt{(b-y)^2 + 4M} + \frac{y(y-b)}{\sqrt{(b-y)^2 + 4M}} - 2(1+t)(1+\tau)\right],\ \frac{\partial D}{\partial \tau} = -y(t+1);$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{\sqrt{(b-y)^2 + 4M}} - 1\right),\ \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0\,.$$

Проведение дальнейшего анализа требует от нас некоторой информации о параметре b, который присутствует в функции внутреннего предложения продукта. Если бы значение b было меньше 1, то это означало бы, что продукт может производиться в стране без особых проблем в достаточных количествах. Поскольку цена вне страны за единицу продукта равна 1, то при $b < 1$ производство возможно только при современных технологиях и отсутствии дефицита производственных факторов. Если же $b > 4$, то наращивать объемы производства не имеет смысла. Поэтому будем считать, что $1 < b < 4$.

Поскольку $\frac{\partial S}{\partial \tau} = y(t+1)$ и $\frac{\partial D}{\partial \tau} = -y(t+1)$, оценим сначала множество Парето для двух целевых функций *S* и *D*. В точках этого множества градиенты должны быть коллинеарными, поэтому

$$2y - b - \sqrt{(b-y)^2 + 4M} - \frac{y(y-b)}{\sqrt{(b-y)^2 + 4M}} + \frac{2}{1-t} = 0.$$

Здесь *b, M, t* – параметры. При *M = 6* и *t = 0,18* с помощью компьютерной программы, например, MS EXCEL можно установить, что данное уравнение имеет единственное положительное решение, и оно почти линейно зависит от параметра *b*:

$$\breve{y} \approx 0{,}3355b + 1{,}633.$$

На плоскости (y, τ) условие $D > 0$ равносильно неравенству

$$\tau < \frac{1}{2(1+t)}\left[b - y + \sqrt{(b-y)^2 + 4M}\right] - 1 = \breve{\tau}$$

Так как $\frac{\partial x}{\partial \tau} < 0$, добавление третьей целевой функции x приводит к множеству Парето в форме криволинейной трапеции $0 \le y \le \breve{y}, 0 \le \tau \le \breve{\tau}$ в зависимости от параметров *b, M, t*.

8.4.3. Сужение множества Парето. Вернемся к рассмотрению задачи А. Как видно из (8.13) и (8.15) целевые функции *S* и *D* при фиксированном *y* являются линейными, причем их угловые коэффициенты представляют собой противоположные числа. Поэтому, если в соответствии с Утверждением 1 зафиксировать $y = \bar{y}$ для того, чтобы перейти к отрезку, содержащему множество Парето, получим две линейные функции переменной τ с угловыми коэффициентами, равными $\bar{y}$ и $-\bar{y}$.

Предположим, что в результате переговоров (или сложившейся на момент выбора ситуации) государство, располагая некими средствами давления на импортера, вынуждает его согласиться на уступку в размере, не превышающем $w_D > 0$ единиц по критерию *D*, и при этом государство рассчитывает на повышение величины критерия *S* по крайней мере на $w_S > 0$ единиц. Такого рода информация задает определенный квант. В соответствии с теоремой 2.5 приходим к новой двухкритериальной задаче с целевыми функциями *S* и $w_D S + w_S D$. В случае $w_D = w_S$ угловой коэффициент второй целевой функции равен 0. Множество Парето относительно критериев *S* и const будет совпадать с множеством точек максимума функции *S* на отрезке, указанном в Утверждении 1, т.е. с точкой

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{(1-t)xM}{q}} - x\,,\ \bar{\tau} = \frac{1}{1+t}\sqrt{\frac{M}{qx(1-t)}} - 1.$$

Такой же результат получается и при $w_D > w_S$, поскольку угловой коэффициент линейной функции $w_D S + w_S D$ при переменной τ будет иметь тот же знак, что и у функции *S*. Если же выполняется неравенство $w_D < w_S$, то новое множество Парето будет совпадать с исходным. В этом случае наличие указанного кванта информации не дает возможности сузить исходное множество Парето.

Аналогично можно рассмотреть симметричную ситуацию, когда импортер имеет средства давления на государство, и оно согласно пойти на потери в размере не более чем w_S единиц, и при этом «не возражает» против получения импортером прибавки по меньшей мере в w_D единиц. В таком случае приходим к новой двухкритериальной задаче с функциями $w_D S + w_S D$ и *D*. При $w_D \le w_S$ получаем сужение множества Парето до точки $\bar{y} = \sqrt{\frac{(1-t)xM}{q}} - x,\ \bar{\tau} = 0$, тогда как при $w_D > w_S$ сужения множества Парето не происходит.

В задаче Б имеются три критерия *S*, *D* и *Y* = *y*. Теоретически здесь возможны ситуации, когда имеется информация о том, что какая-то пара критериев обладает тем свойством, что по одному из критериев этой пары возможна уступка ради получения выигрыша по другому критерию. Кроме того, здесь вполне допустимы и такие случаи, когда уступка (или выигрыш) относятся к паре критериев, а выигрыш (соответственно, уступка) отвечают оставшемуся третьему критерию. Например, может реализоваться ситуация, когда государство обладает инструментами давления, заставляя импортера пойти на определенные уступки по критерию *D*; при этом само государство рассчитывает на некоторые увеличения значений по критериям *S* и *Y*. Располагая информацией о критериях, по которым возможны уступки и выигрыши, а также величинами уступок и выигрышей с помощью теоремы 2.5 можно учесть такого рода информацию для сужения множества Парето.

Пусть, например, государство и импортер готовы уступить по критерию *Y* не более одной единицы, чтобы получить прибавки не менее 0.3 по критериям *S* и *D*, т.е. $w_s = w_D = 0.3,\ w_y = 1$. Тогда, как показывают вычисления, соответствующее множество Парето описывается следующим образом

$$\left\{(y,\tau)\ |\ \ \sqrt{\frac{(1-t)Mx}{q}} - x \le y \le \sqrt{\frac{(1-t)Mx}{q-0.6}} - x, \tau \ge 0, D \ge 0\right\}.$$

Рассмотрим задачу В. Как указано ранее, здесь множество Парето представляет собой криволинейную трапецию $\{(y,\tau)\,|\,0 \le y \le \breve{y},\ 0 \le \tau \le \breve{\tau}\}$, где $\breve{y} \approx 0.3355b + 1.633$ и

$$\breve{\tau} = \frac{1}{2(1+t)}\left[b - y + \sqrt{(b-y)^2 + 4M}\right] - 1.$$

Пусть государство имеет возможность вынудить импортера пойти на потерю в размере, не превышающем $w_D > 0$ единиц по критерию D (прибыль импортера) для того, чтобы оно смогло повысить величину критерия S (налоговые поступления в бюджет) не более чем на $w_S > 0$ единиц. Согласно теореме 2.5 для построения нового множества Парето приходим к трехкритериальной задаче с целевыми функциями S, $w_D S + w_S D$ и x (считаем, что развитие собственной промышленности и, в частности, количество рабочих мест являются менее приоритетными, чем бюджетные поступления).

Аналогично в «обратном» случае, когда государство готово пойти на уступку в размере w_S, а импортер при этом получает добавку w_D, приходим к трехкритериальной задаче с целевыми функциями $w_D S + w_S D$, D и x.

Еще один из вариантов имеет место, когда государство готово потерять некоторое количество единиц w_x от внутреннего производства для того, что получить прибавку по критерию S в размере w_S. Тогда критериями являются следующие три функции S, D и $w_x S + w_S x$. Если же государство заботится о рабочих местах и развитии собственного производства, то в качестве критериев рассматриваются функции x, D и $w_x S + w_s x$.

Кроме того, в задаче В (так же, как и в задаче Б) теоретически возможны ситуации, когда уступки (выигрыш) происходят по какой-то паре критериев из имеющихся трех S, D и x.

В качестве иллюстративного примера с конкретными числовыми характеристиками задачи В выберем один из последних случаев: пусть более значимым является доход S. При M=6; t=0,18; b=3; w_x=1; w_S=2 для функций S, D и $G = w_x S + w_s x$ имеем

$$S = (0.18 + 1.18\tau)y + 0.18\left[6 - \frac{y}{2}\left(3 - y + \sqrt{(3-y)^2 + 24}\right)\right],$$

$$D = \frac{y}{2}\left[3 - y + \sqrt{(3-y)^2 + 24} - 2.36(1+\tau)\right],$$

$$G = (0.18 + 1.18\tau)y + 0.18\left[6 - \frac{y}{2}\left(3 - y + \sqrt{(3-y)^2 + 24}\right)\right] + y\left[3 - y + \sqrt{(3-y)^2 + 24}\right].$$

Чтобы получить множество Парето, вычислим градиенты трех функций и проверим, когда точка с начало координат лежит внутри треугольника, составленного из концов указанных градиентов. В результате найдем множество

$$\left\{ y + [1.69, 2.64],\ \tau \in \left[0, \frac{1}{2.36}\left(3 - y + \sqrt{(3-y)^2 + 24}\right)\right]\right\}.$$

Очевидно, найденное множество существенно у́же того, что было получено в исходной задаче В без информации в виде квантов.

8.5. Задача увеличения выпуска продукции с учетом затрат на ресурсы

8.5.1. Постановка задачи. Предположим, некоторая фирма столкнулась с проблемой увеличения выпуска произведенной продукции при одновременном стремлении сократить затраты на ресурсы. Ясно, что увеличение объема продукции невозможно без ресурсных затрат, поэтому стремление максимизировать объем продукции входит в противоречие с желанием сокращения ресурсов. Подобного рода ситуация типична для многокритериальной оптимизации. Поэтому имеет смысл формализовать данную проблему в виде некоторой задачи многокритериального выбора. Перейдем к этой формализации.

Во многих экономических задачах связь между выпуском продукции и затраченными ресурсами моделируется степенными производственными функциями вида $z = ax_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$. Здесь z - объем произведенной продукции, $x_1,...,x_n$ - объемы затраченных ресурсов, а $a, \alpha_1,...,\alpha_n$ - некоторые положительные параметры.

Ограничимся двумя видами ресурсов - трудовыми и основными производственными фондами. Таким образом, объем выпускаемой продукции z связан с затратами на трудовые ресурсы x_1 и капиталом x_2 формулой $z = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ для некоторых положительных параметров $a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Поставим следующую многокритериальную задачу. Множеством возможных вариантов будем считать все пары $\{(x_1, x_2)\}$, для которых $x_1, x_2 > 0$. В качестве критериев рассмотрим стоимости трудовых ресурсов, основных производственных фондов и выпущенной продукции. Первые две величины необходимо минимизировать, поэтому для согласованности с постановкой общей задачи принятия решения, в которой критерии подлежат максимизации , возьмем их с обратным знаком. Таким образом, критерии определяются формулами $f_1 = -p_1 x_1$, $f_2 = -p_2 x_2$, $f_3 = p_z z$, где величины p_1, p_2, p_z задают цены соответствующих ресурсов и продукции.

Множество возможных векторов Y представляет собой поверхность, описываемую уравнением $y_3 = \dfrac{ap_z}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} (-y_1)^{\alpha_1} (-y_2)^{\alpha_2}$ при ограничениях $y_1, y_2 < 0$. Множество возможных векторов Y изображено на рис. 8.4. Нетрудно видеть, что эта поверхность вогнутая, следовательно, $P(Y) = Y$.

8.5.2. Сужение множества Парето. Рассмотрим двумерные сечения множества Y плоскостями, параллельными координатным плоскостям (y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_1, y_3). В первом случае будут получены изокванты, которые задаются множеством

$$Y_{c_3}^{12} = \{(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2, c_3) \in Y\}, \ c_3 > 0.$$

Это гипербола при $c_3 > 0$ (на рис. 8.5 изображено множество Y_4^{12}). Видно, что ЛПР, сокращая затраты на один ресурс, вынуждено увеличить затраты на другой, и наоборот (при этом значение дохода остается неизменным). Это означает, что, выбирая точку (y_1', y_2') вместо другой точки (y_1'', y_2''), которые принадлежат множеству $Y_{c_3}^{12}$ (соответствующие точки

$\left(y_1', y_2', c_3\right), \left(y_1'', y_2'', c_3\right) \in P(Y)$), ЛПР допускает определенный компромисс между трудовыми затратами и затратами на основные производственные фонды.

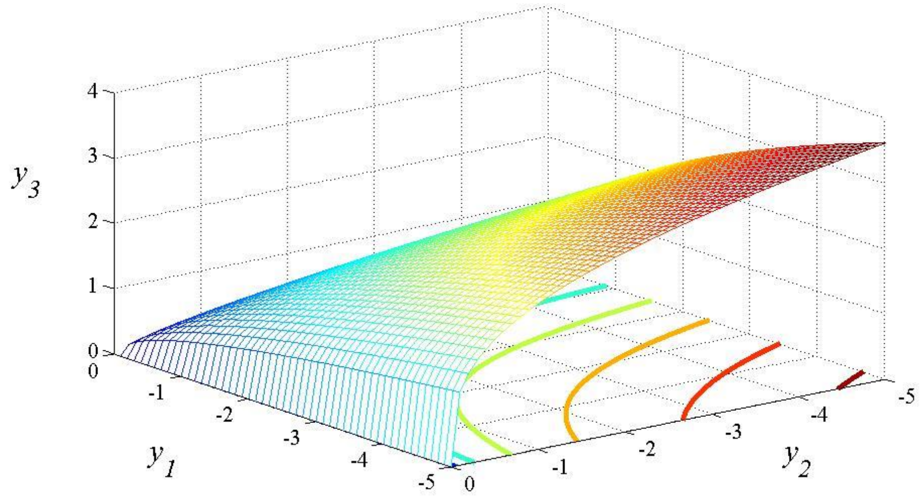

Рис. 8.4.

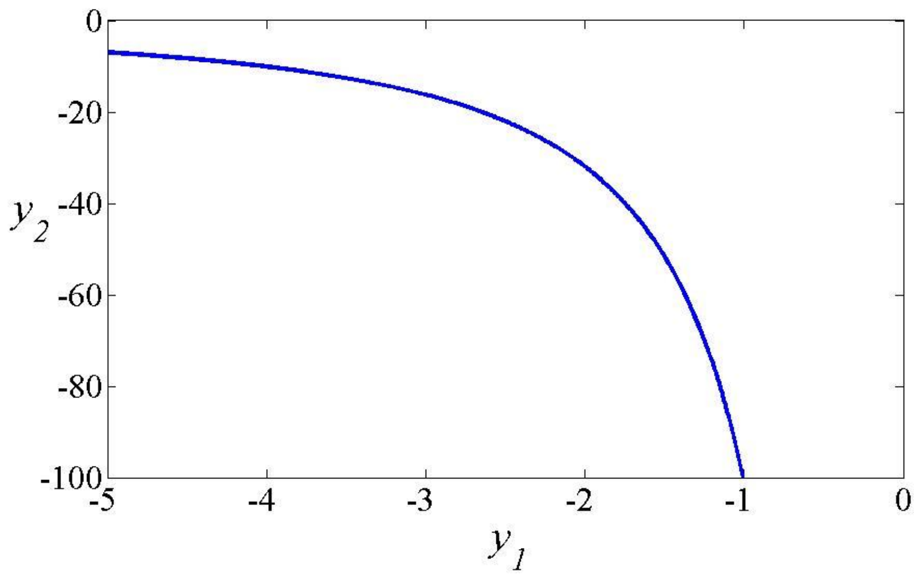

Рис. 8.5.

Сечения

$$Y_{c_1}^{23} = \{(y_2, y_3) \mid (c_1, y_2, y_3) \in Y\},\ c_1 < 0,$$
$$Y_{c_2}^{13} = \{(y_1, y_3) \mid (y_1, c_2, y_3) \in Y\},\ c_2 < 0$$

множества возможных векторов Y плоскостями $y_1 = c_1$ и $y_2 = c_2$, соответственно, представляют собой степенные функции. На рис. 8.6 изображены эти множества при $c_1 = -2$ и $c_1 = -3$.

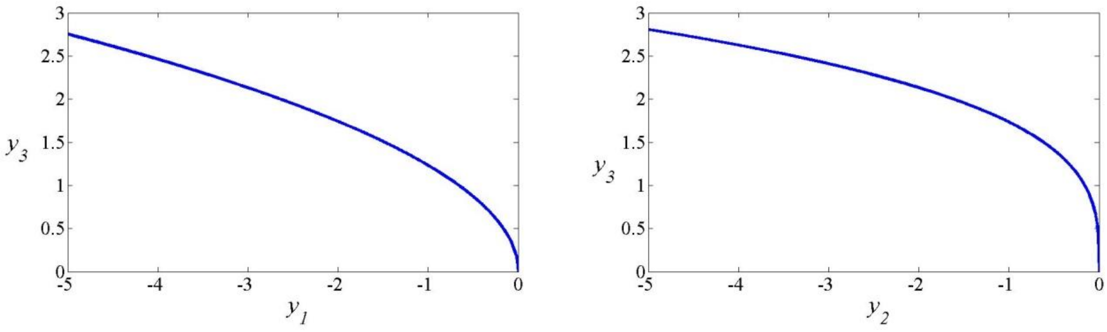

Рис. 8.6.

Останавливая свой выбор на конкретном компромиссном варианте, ЛПР придется выбрать соотношения между доходом и величиной затрат (по каждому виду).

Предположим, что ЛПР выражает свои предпочтения следующим образом.

1. Увеличение дохода (f_3) имеет больший приоритет по сравнению с сокращением трудовых затрат (f_1). ЛПР готово пойти на следующий компромисс - ради роста дохода на $w_3^{(3)}$ тыс. руб., увеличить затраты на труд (оплата рабочей силы и пр.) на $w_1^{(3)}$ тыс. руб., при этом $w_3^{(3)} > w_1^{(3)}$.
2. Снижение трудовых затрат (f_1) более значимо, чем снижение затрат на основные производственные фонды (f_2). Для данного ЛПР более приоритетным является использование высококачественного (и, соответственно, дорогостоящего) оборудования, чем высококачественного труда. Ради снижения расходов на трудовые ресурсы на $w_1^{(1)}$ тыс. руб., имеется готовность увеличить затраты на основные производственные фонды на $w_2^{(1)}$ тыс. руб., при этом $w_1^{(1)} > w_2^{(1)}$.
3. Рост дохода (f_3) менее значим, чем снижение затрат на основные производственные фонды (f_2). Однако закупаемые материалы, оборудование и пр. (основные производственные фонды) не должны быть слишком дорогостоящими. Поэтому ради снижения расходов на основные производственные фонды на $w_2^{(2)}$ тыс. руб., ЛПР готово снизить доход на $w_3^{(2)}$ тыс. руб., причем $w_2^{(2)} > w_3^{(2)}$.

Таким образом, имеется замкнутая информация - трудовые затраты f_1 значимее затрат на основные производственные фонды f_2, затраты на основные производственные фонды f_2 имеют больший приоритет по сравнению с доходом f_3, который, в свою очередь, более значим, чем трудовые затраты f_1 с соответствующими наборами положительных параметров.

Если учесть неравенства, приведенные в пунктах 1) - 3), то упомянутая информация в виде трех квантов будет непротиворечивой. Действительно,

$$|W| = \begin{vmatrix} w_1^{(1)} & 0 & -w_1^{(3)} \\ -w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & 0 \\ 0 & -w_3^{(2)} & w_3^{(3)} \end{vmatrix} = w_1^{(1)} w_2^{(2)} w_3^{(3)} - w_2^{(1)} w_3^{(2)} w_1^{(3)} > 0 .$$

Для сужения множества Парето воспользуемся следствием 5.2. Новый векторный критерий g будет иметь следующие компоненты

$$g_1 = w_2^{(2)} w_3^{(3)} f_1 + w_1^{(3)} w_3^{(2)} f_2 + w_1^{(3)} w_2^{(2)} f_3 = -p_1 w_2^{(2)} w_3^{(3)} x_1 - p_2 w_1^{(3)} w_3^{(2)} x_2 + a p_z w_1^{(3)} w_2^{(2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ,$$

$$g_2 = w_2^{(1)} w_3^{(3)} f_1 + w_1^{(1)} w_3^{(3)} f_2 + w_1^{(3)} w_2^{(1)} f_3 = -p_1 w_2^{(1)} w_3^{(3)} x_1 - p_2 w_1^{(1)} w_3^{(3)} x_2 + a p_z w_1^{(3)} w_2^{(1)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$
$$g_3 = w_2^{(1)} w_3^{(2)} f_1 + w_1^{(1)} w_3^{(2)} f_2 + w_1^{(1)} w_2^{(2)} f_3 = -p_1 w_2^{(1)} w_3^{(2)} x_1 - p_2 w_1^{(1)} w_3^{(2)} x_2 + a p_z w_1^{(1)} w_2^{(2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

Множество возможных вариантов X является выпуклым. Степенная функция $q(x_1, x_2) = a p_z w_1^{(3)} w_2^{(2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ при $\alpha_1+\alpha_2 < 1$ и сделанных выше предположениях будет вогнутой на X, и значит функция $g_1(x)$ также является вогнутой (как сумма степенной и линейной) при любых $(x_1, x_2) \in X$. Аналогично получаем, что и функции $g_2(x)$, $g_3(x)$ вогнуты. В итоге, имеем задачу с выпуклым множеством X и вогнутым векторным критерием g. В таком случае для поиска множества собственно эффективных точек (которое несколько уже множества Парето $P_g(X)$) можно использовать линейную свертку критериев

$$\varphi(x) = -p_1\left(\lambda_1 w_2^{(2)} w_3^{(3)} + \lambda_2 w_2^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_2^{(1)} w_3^{(2)}\right) x_1 - p_2\left(\lambda_1 w_1^{(3)} w_3^{(2)} + \lambda_2 w_1^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_3^{(2)}\right) x_2 +$$
$$+ a\, p_z\left(\lambda_1 w_1^{(3)} w_2^{(2)} + \lambda_2 w_1^{(3)} w_2^{(1)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_2^{(2)}\right) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

с положительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, в сумме равными единице. Обозначим

$$a_1 = p_1\left(\lambda_1 w_2^{(2)} w_3^{(3)} + \lambda_2 w_2^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_2^{(1)} w_3^{(2)}\right),\ a_2 = p_2\left(\lambda_1 w_1^{(3)} w_3^{(2)} + \lambda_2 w_1^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_3^{(2)}\right),$$

$$a_3 = a\, p_z\left(\lambda_1 w_1^{(3)} w_2^{(2)} + \lambda_2 w_1^{(3)} w_2^{(1)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_2^{(2)}\right).$$

Рассмотрим частные производные первого порядка линейной свертки

$$\varphi'_{x_1} = -a_1 + \alpha_1 a_3 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}, \quad \varphi'_{x_2} = -a_2 + \alpha_2 a_3 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}.$$

Решая уравнения $\varphi'_{x_1}\left(x^0\right) = 0$, $\varphi'_{x_2}\left(x^0\right) = 0$, получим точку $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ с координатами

$$x_1^0 = \left(\frac{\alpha_1 a_3}{a_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} \left(\frac{\alpha_2 a_3}{a_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}, \quad x_2^0 = \left(\frac{\alpha_1 a_3}{a_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} \cdot \left(\frac{\alpha_2 a_3}{a_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}.$$

где $x_1^0, x_2^0 > 0$.

Теперь вычисляем частные производные второго порядка линейной свертки в точке $x = x^0$

$$\varphi''_{x_1^2}(x^0) = a_3 \alpha_1 (\alpha_1 - 1)(x_1^0)^{\alpha_1 - 2} (x_2^0)^{\alpha_2},\ \varphi''_{x_2^2}(x^0) = a_3 \alpha_2 (\alpha_2 - 1)(x_1^0)^{\alpha_1} (x_2^0)^{\alpha_2 - 2},$$
$$\varphi''_{x_1 x_2}(x^0) = a_3 \alpha_1 \alpha_2 (x_1^0)^{\alpha_1 - 1} (x_2^0)^{\alpha_2 - 1}.$$

Достаточным условием максимума функции $\varphi(x)$ в точке $x = x^0$ является выполнение следующих неравенств

$$\varphi''_{x_1^2}(x^0) < 0,\ \varphi''_{x_1^2}(x^0) \cdot \varphi''_{x_2^2}(x^0) - (\varphi''_{x_1 x_2}(x^0))^2 > 0.$$

Нетрудно видеть, что первое неравенство справедливо в силу $a_3, \alpha_2, x_1^0, x_2^0 > 0$; $0 < \alpha_1 < 1$. Для второго неравенства имеем

$$\varphi''_{x_1^2}(x^0) \cdot \varphi''_{x_2^2}(x^0) - (\varphi''_{x_1 x_2}(x^0))^2 = a_3^2 \alpha_1 \alpha_2 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))(x_1^0)^{2(\alpha_1 - 1)}(x_2^0)^{2(\alpha_2 - 1)} > 0,$$

благодаря $\alpha_1, \alpha_2, x_1^0, x_2^0 > 0$; $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Таким образом, $x = x^0$ является точкой максимума линейной свертки $\varphi(x)$, а значит, она собственно эффективна. Поскольку x^0 зависит от положительных параметров λ_1, λ_2, λ_3, на самом деле получено целое семейство подобных точек. Именно из этого множества следует осуществлять окончательный выбор.

8.6. Ослабление основной аксиоматики

Поскольку на практике, как правило, не известно, выполняются ли аксиомы 1-4 в тех или иных условиях, актуальной представляется возможность ослабления указанной аксиоматики с тем, чтобы максимально расширить класс задач, в котором имеет смысл применять аксиоматический подход к сужению множества Парето на основе квантов информации.

Ниже обсуждаются два направления возможного ослабления аксиоматики.

8.6.1. Ослабление аксиомы согласования. В главе 2 было установлено (см. лемму 2.2 и теорему 2.1), что выполнение аксиомы 2 вместе с аксиомой 4 в предположении иррефлексивности отношения предпочтения влечет конусность этого отношения, причем соответствующий конус является острым и выпуклым (без начала координат). Если же дополнительно потребовать выполнение аксиомы 3, то этот конус будет содержать неотрицательный ортант. Таким образом, можно предложить следующий более общий вариант аксиомы согласования.

Аксиома $3'$. *В критериальном пространстве R^m задан некий конус «желательных направлений» С, который является острым, выпуклым и не содержит начала координат, причем для всякой пары векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения $y' - y'' \in C$ следует $y' \succ y''$.*

В аксиоме 3 конусом C служит неотрицательный ортант пространства R^m. В общем случае в соответствии с аксиомой $3'$ конус C может быть как шире, так и у̀же упомянутого неотрицательного ортанта. Последнюю аксиому можно рассматривать как некоторое обобщение аксиомы Парето.

В случае принятия аксиомы $3'$ необходимо видоизменить определение кванта информации, например, следующим образом.

Определение 8.1. Пусть имеется некоторая пара векторов $y', y'' \in R^m$, для которых не выполняется ни соотношение $y' - y'' \in C$, ни соотношение $y'' - y' \in C$. Будем говорить, что в условиях справедливости аксиомы $3'$ *задан квант информации об отношении предпочтения*, если справедливо $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 8.10. *В предположении выполнения аксиом* 1, 2, $3'$ *и* 4, *а также при условии наличия кванта информации* (*в смысле определения* 8.1), *в соответствии с которым* $y' \succ y''$, *для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливо включение*

$$C(Y) \subset Ndom_C(Y) \tag{8.18}$$

где в правой части записано множество

$$Ndom_C(Y) = \{y^* \in X \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{что } y - y^* \in conv\{(y' - y'') \cup C\}\},$$

а символом conv{A} обозначена выпуклая оболочка множества A. Если, кроме того, конус C содержит неотрицательный ортант, то дополнительно выполняется включение $Ndom_C(Y) \subset P(Y)$.

□ Как указывалось в начале данного раздела, в условиях принятия аксиом 2 и 4 вместе с иррефлексивностью отношения предпочтения оно является конусным с острым выпуклым конусом K (без начала координат). Благодаря аксиоме 3′, выполнено $C \subset K$. Кроме того, наличие канта информации влечет $K \supset conv\{(y' - y'') \cup C\}$. Следовательно, $Ndom(Y) \subset Ndom_C(Y)$. Это вместе с включением $C(Y) \subset Ndom Y$, вытекающем из аксиомы 1, приводит к требуемому включению (8.18) ■

Теорема 8.10 может быть распространена на случай непротиворечивого набора квантов информации, заданного на основе пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, $u^i - v^i \notin \{C \cup (-C)\}, i = 1,2,...,k$. Однако предварительно необходимо сформулировать соответствующее определение непротиворечивого набора векторов.

Определение 8.2. В предположении выполнения аксиомы 3′ будем говорить, что набор пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, $u^i - v^i \notin \{C \cup (-C)\}, i = 1,2,...,k$, является *непротиворечивым*, если существует такое иррефлексивное бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2 и 4, что имеют место соотношения $u^i \succ v^i$, $i = 1,...,k$.

Теорема 8.11. *Пусть выполнена аксиома 3′. Набор пар векторов* $u^i, v^i \in R^m, u^i - v^i \notin \{C \cup (-C)\}, i = 1,2,...,k$, *является непротиворечивым, если выпуклая оболочка* $conv\{[\bigcup_{i=1,...,k}(u^i - v^i)] \cup C\}$ *образует острый конус.*

□ В самом деле, конусное отношение с острым выпуклым конусом $conv\{[\bigcup_{i=1,...,k}(u^i - v^i)] \cup C\}$, в силу теоремы 2.1, удовлетворяет аксиомам 2 и 4 ■

В соответствующем обобщении теоремы 8.10, справедливом для произвольного непротиворечивого набора пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, $u^i - v^i \notin \{C \cup (-C)\}, i = 1,2,...,k$ в определении множества $Ndom_C(Y)$ вместо выпуклой оболочки $conv\{(y' - y'') \cup C\}$ будет участвовать выпуклая оболочка $conv\{[\bigcup_{i=1,...,k}(u^i - v^i)] \cup C\}$.

В случае конечного множества возможных векторов *Y* множество $Ndom_C(Y)$ в принципе может быть построено прямым перебором всех пар векторов множества *Y*. В противном случае (т.е. когда *Y* бесконечно) могут возникнуть сложные вычислительные проблемы, которые мы здесь обсуждать не будем.

В наиболее простой ситуации, когда конус C является многогранным (полиэдральным), для построения множества $Ndom_C(Y)$ может быть использован алгоритм, сходный с тем, который был предложен автором для построения двойственного конуса (см. разд. 5.3).

8.6.2. Ослабление аксиомы инвариантности. Как уже было упомянуто выше, выполнение аксиомы 2 вместе с аксиомой 4 в предположении иррефлексивности отношения предпочтения влечет конусность этого отношения, причем соответствующий ему конус является острым и выпуклым (без начала координат). Идея следующего варианта обобщения аксиоматического подхода состоит в отказе от свойства линейности (точнее говоря, однородности) отношения предпочтения и постулировании существования некоторого «хорошего» конуса внутри множества всех тех векторов, которые доминируют произвольный вектор критериального пространства. А именно, будем предполагать, что отношение предпочтения $\succ$ вместо аксиом 2-4 подчиняется следующему требованию.

Аксиома 2$^{//}$. *Иррефлексивное отношение предпочтения $\succ$ обладает свойством аддитивности, а также для каждого $y \in R^m$ множество $Y_y = \{z \in R^m \mid y \succ z\}$ выпукло и содержит некоторый фиксированный острый выпуклый конус C без начала координат*.

Заметим, что в условиях аксиомы 2$^{//}$ отношение предпочтения $\succ$ может не удовлетворять свойству однородности, т.е. не являться линейным.

Определение 8.3. Пусть задана некоторая пара векторов $y', y'' \in R^m$, для которых не выполняется ни соотношение $y' - y'' \in C$, ни соотношение $y'' - y' \in C$. Будем говорить, что в условиях справедливости аксиомы 2$^{//}$ задан *квант информации об отношении предпочтения*, если имеет место соотношение $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$.

Следует отметить, что задача выявления подобного кванта информации существенно сложнее соответствующей задачи на основе определения 8.1, поскольку конус C заранее неизвестен. Справедлив следующий результат.

Теорема 8.12. *Пусть выполнены аксиомы* 1 *и* 2$^{//}$, *а также имеется квант информации* (*в смысле определения* 8.3), *в соответствии с которым* $y' \succ y''$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *справедливо включение* (8.18), *где в правой его части записано множество из формулировки теоремы* 8.11. *Если, кроме того, конус C содержит неотрицательный ортант, то дополнительно выполняется* $Ndom_C(Y) \subset P(Y)$.

Данный результат вытекает из аксиомы 1 и того факта, что выпуклая оболочка $conv\{(y' - y'') \cup C\}$ содержится в множестве $Y_y = \{z \in R^m \mid y \succ z\}$ для каждого $y \in R^m$. Его можно распространить на случай произвольного конечного непротиворечивого набора квантов информации подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

Заключение

Считается, что первая попытка решения многокритериальной задачи была предпринята французом де Борда, когда он предложил свой метод подсчета результатов голосования с помощью линейной свертки критериев (см. [1]). В середине XIX века Ирландский экономист Френсис Эджворт [61] ввел в рассмотрение так называемый «ящик Эджворта», в котором задолго до самого Вильфредо Парето использовал понятие локально парето-оптимального варианта для двух критериев. Общее понятие парето-оптимальности появилось в конце XIX - начале XX веков, но активно стало использоваться, начиная с конца сороковых – начала пятидесятых годов прошлого столетия. Исследования того времени были в основном посвящены получению различного рода обобщениям известных результатов обычной теории оптимизации – выводу необходимых и достаточных условий оптимальности в том или ином смысле, условий существования, а также вопросам двойственности в многокритериальном программировании, где ограничения задачи задаются в виде множества решений конечной системы равенств и/или неравенств. Это направление продолжает развиваться до сих пор, параллельно соответствующим разделам обычной теории оптимизации. К нему же можно отнести и работы, посвященные разработке различных алгоритмов (в том числе и приближенных) построения всего множества Парето. Например, для линейных задач был предложен многокритериальный аналог симплекс-метода, с помощью которого можно найти все грани множества Парето (см. [56]).

С другой стороны, под влиянием насущных нужд экономики и техники, где довольно часто встречаются многокритериальные задачи оптимизации, многие авторы, опираясь на те или иные эвристические соображения, стали предлагать различного рода «наилучшие» решения многокритериальных задач. Как уже было сказано выше, пионером в этой области, видимо, является де Борда. Имеются сведения, что в начале XX века замечательный русский инженер-корабел А.Н. Крылов также применял линейную свертку критериев для оценки качества продукции и услуг. В научной литературе 70-80 годов прошлого века можно найти множество примеров использования линейной свертки, а также других способов скаляризации многокритериальных задач применительно к решению различного рода прикладных задач из области техники и экономики. В 80-е годы стало окончательно ясно, что без привлечения дополнительных сведений (не считая набора критериев и допустимого множества) обоснованно выбрать тот или иной вариант в качестве «окончательного» («наилучшего») невозможно. В это время была широко распространена разработка и использование так называемых «решающих правил», позволяющих выделять «наилучшие» в том или ином смысле решения многокритериальной задачи. В частности, в СССР, где к тому времени сложилось значительное сообщество исследователей, занимающихся решением задач оптимизации при нескольких критериях, разными авторами предлагались соответствующие решающие правила на основе конструирования некоторых «результирующих» бинарных отношений. Следует заметить, что нечто подобное с пятидесятых годов активно развивалось на Западе после появления знаменитой теоремы о невозможности Нобелевского лауреата в области экономики

Кеннета Эрроу и впоследствии привело в формированию общей теории выбора вариантов [1]. Если результат этой теоремы попробовать переложить на многокритериальный «язык», то ее содержание можно выразить следующим образом: в общем случае многокритериальная задача не сводима к однокритериальной, эти задачи качественно различны. После теоремы о невозможности в сотнях статей было продолжено изучение теоретических аспектов и конструктивных способов «агрегирования» некоего общего отношения из конечного набора определенных частных бинарных отношений. На «языке» многокритериальной оптимизации это как раз и означало сведение многокритериальной задачи к однокритериальной, т.е. скаляризацию многокритериальной задачи.

Как было отмечено выше, в 80-е годы стало ясно, что без привлечения дополнительных сведений более или менее обоснованно выбрать «окончательный» («наилучший») вариант невозможно. Например, эти сведения могли заключаться в указании тех или иных параметров (например, коэффициентов линейной свертки критериев), участвующих в соответствующем методе скаляризации. Ряд авторов предлагали «наилучший вариант», исходя из каких-то аналогий или соображений общего характера. Примером может служить центр тяжести множества парето-оптимальных векторов (по аналогии с вектором Шепли из теории игр) или тот парето-оптимальный вектор, который является ближайшим к некоторому идеальному недостижимому вектору (как это постулируется в целевом программировании).

Постепенно зрело представление, что окончательный выбор осуществляет человек, заинтересованный в решении многокритериальной задачи. Его стали именовать лицом, принимающим решение - ЛПР. При этом каждый человек имеет право на свои собственные представления о том, какие варианты считать «наилучшими». Поэтому попытки предложить какое-то одно универсальное правило или понятие «наилучшего» варианта заведомо обречены на неудачу. С помощью введения в многокритериальную задачу бинарного отношения предпочтения удалось научиться учитывать специфику того или иного ЛПР. Однако сложность состояла в том, что человек, приступающий к решению задачи выбора, как правило, имеет очень туманные представления о своих предпочтениях. Во всяком случае, полностью описать свое отношение предпочтения чаще всего он не в состоянии. Поэтому дальнейший путь развития пролегал в направлении учета некоторых «отрывочных» сведений об отношении предпочтения ЛПР, относительно которого делались минимальные предположения (в частности, это отношение не предполагалось полным, а лишь частичным). Такие сведения составляли пары несравнимых по отношению Парето векторов, в которых ЛПР может сделать свой выбор в пользу одного против другого. Именно такого рода сведения впоследствии были названы квантами информации об отношении предпочтения ЛПР.

Явным образом ЛПР со своим отношением предпочтения автором было включено в многокритериальную задачу в докладе 1982 г. [24]. В нем уже присутствовали и требования в виде аксиом, которым должно удовлетворять это отношение (иррефлексивность, аксиома Парето, транзитивность и инвариантность). Наряду с этим в качестве дополнительных сведений об отношении предпочтения ЛПР рассматривался конечный набор пар несравнимых по отношению Парето векторов, в которых один вектор предпочтительнее другого (по существу, это был набор кантов информации). С этого доклада берет свое начало аксиоматический подход. В 1986 г. [25] аксиоматический подход был подробно изложен для двухкритериальных задач, а в 1991 г. [64] были рассмотрены задачи с произвольным конечным числом критериев. Многокритериальную задачу, дополненную (чаще всего неизвестным полностью) бинарным отношением предпочтения ЛПР впоследствии было предложено именовать «задачей многокритериального выбора», подчеркивая тем самым связь с общей теорией выбора и, в особенности, с парнодоминантным выбором, когда выбор осуществляется на основе некоторого бинарного отношения. Необходимо отметить, что в самой теории выбора векторный критерий явным образом не участвует, и, кроме того, упомянутые ранее решающие правила 80-х годов приводили к построению не самого отношения предпочтения ЛПР, а такого отношения, с помощью которого осуществлялся окончательный выбор (такое отношение в разд. 5.5 названо «мажорантным»). В [65] была доказана теорема об учете общего кванта информации, а в [29] получил логическое обоснование принцип Эджворта-Парето.

В 2003 г. вышла монография автора «Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход», в которой были систематизированы полученные к тому времени результаты. Ее второе издание появилось в 2005 г. (см. [30]). За время, прошедшее с тех пор, было опубликовано много новых интересных результатов. Кроме того, для того чтобы избежать путаницы с терминологией, используемой другими авторами, было принято решение кардинально изменить наименование ключевого понятия и, тем самым, на свет появился «квант информации» об отношении предпочтения ЛПР. К настоящему времени теорию, которая в итоге стала именоваться «аксиоматическим подходом к сужению множества Парето» можно считать вполне сформированной, и данная монография, по мнению автора, дает достаточно полное представление о ней.

Взаимосвязь развиваемого автором аксиоматического подхода с другими методами и подходами можно найти в работе [32]. В заключение также отметим, что недавние исследования ряда зарубежных авторов (см., например, [60]), которые не прибегают к аксиоматической характеризации отношения предпочтения и используют иную терминологию (не кванты, а допустимые замещения - «an allowable tradeoffs») между критериями, по существу, лежат в русле аксиоматического подхода, только в более частном, «усеченном» варианте, когда значения параметров w_i более значимой группы A приняты равными единице.

Список литературы

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. *Выбор вариантов. Основы теории*. – М.: Наука, 1990, 236 с.
2. Барыкин Е.Е., Воропаева Ю.А., Косматов Э.М., Ногин В.Д., Харитонова Н.Е. *Оптимизация годовой производственной программы энергетического объединения*// Электрические станции, 1991, 4, 9-13.
3. Басков О.В. *Алгоритм сужения множества Парето на основе конечного набора нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР* // Искусственный интеллект и принятие решений, 2014, № 1, С. 57-65.
4. Басков О.В. *Критерий непротиворечивости «квантов» информации о нечетком отношении предпочтения лица, принимающего решение* // Вестник С.-Петерб. Ун-та, Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2014, Вып. 2, С. 13-19.
5. Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. *Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты*. – М.: Наука, 1989, 128 с.
6. Беклемишев Д.В. *Дополнительные главы линейной алгебры*. – М.: Наука, 1983, 335 с.
7. Захаров А.О. *Сужение множества Парето на основе замкнутой информации об отношении предпочтения ЛПР* // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 69—83.
8. Захаров А.О. *Сужение множества Парето на основе взаимозависимой информации замкнутого типа* // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 1. С. 67—81.
9. Захаров А.О. *Сужение множества Парето на основе замкнутой информации о нечетком отношении предпочтения лица, принимающего решение* // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 3. С. 33—47.
10. Zakharov A.O. *Pareto set reduction using compound information of a closed type //* Scientific and Technical Information Processing, 2012, V. 39, No 5, pp. 293-30
11. Кини Р.Л., Райфа Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*. – М.: Радио и связь, 1981.
12. Кофман А. *Введение в теорию нечетких множеств*. М.: «Радио и связь», 1982, 432 с.
13. Ларичев О.И. *Наука и искусство принятия решений*. – М.: Наука, 1979.
14. Ларичев О.И. *Объективные модели и субъективные решения*. – М.: Наука, 1987.
15. Ларичев О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2000, 295 с.
16. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. – М.: Наука, 1985, 335 с.
17. Лотов А. В. *Введение в экономико-математическое моделирование*. М: Наука, 1984. 392 с.
18. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. *Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей*. – М.: Наука, 1997,239 с.
19. Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е. *Аппроксимация и визуализация паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач* // Доклады АН, 2002, Т. 386, № 6 С. 738-741.
20. Менделеев Д. И. Толковый тариф или исследование о развитии промышленности России в связи с ее общим таможенным тарифом 1891 года. //ПСС Д. И. Менделеева, 1891, т. 19, 1950, С. 230—937.

21. Миллер Дж. *Магическое число семь плюс минус два. О некоторых пределах нашей способности перерабатывать информацию*// Инженерная психология. М.: Прогресс, 1964.
22. *Налоговый Кодекс РФ*, Разд. VIII: Федеральные налоги; глава 21: Налог на добавленную стоимость. http://base.garant.ru/10900200/28/#20021 2002.
23. Ногин В.Д. *Новый способ сужения области компромиссов*// Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, №5, 10-14.
24. Ногин В.Д. *Оценки для множества оптимальных решений в условиях отношения предпочтения, инвариантного относительно положительного линейного преобразования*. В тез. докл. Всесоюзн. конф. «Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределенности», М.–Батуми, 1983, С. 37.
25. Ногин В.Д. и др. *Основы теории оптимизации*. – М.: Высшая школа, 1986, 384 с.
26. Ногин В.Д. *Определение и общие свойства относительной важности критериев*. – в сб. «Процессы управления и устойчивость», СПб: изд-во СПбГУ, 1998, С. 373-381.
27. Ногин В.Д. *Использование количественной информации об относительной важности критериев в принятии решений*// Научно-технические ведомости СПбГТУ, 2000, 1, С. 89-94.
28. Ногин В.Д. *Теоремы о полноте в теории относительной важности критериев*// Вестник СПбГУ, сер.: мат., мех., астрономия., 2000, 40 (25), С. 13-18.
29. Ногин В.Д. *Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето*// ЖВМиМФ, 2002, 7, С. 951-957.
30. Ногин В.Д. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход* (2-е изд., испр. и доп.). 2005, М.: ФИЗМАТЛИТ.
31. Ногин В.Д. *Принятие решений при многих критериях* (учебное пособие). СПб: ВШЭ, 2007, 104 с.
32. Ногин В.Д. *Проблема сужения множества Парето: подходы к решению*// Искусственный интеллект и принятие решений, 2008, № 1, С. 98-112.
33. Ногин В.Д. *Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа* //Искусственный интеллект и принятие решений. 2009, № 1, С. 98-109.
34. Ногин В.Д. *Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР множественно-точечного типа* // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010, № 2, С. 54-63.
35. Ногин В.Д. *Сужение множества Парето на основе учета произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения* // Доклады АН, 2011, т. 438, № 4, С. 1-4.
36. Ногин В.Д. *Сужение множества Парето на основе нечеткой информации* // Int. J. “Information Technologies&Knowledge”, 2012, Vol. 6, No. 2, P 157-168.
37. Ногин В.Д. *Алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» информации* // Искусственный интеллект и принятие решений. 2013, № 1, С. 95-101.
38. Ногин В.Д. *Линейная свертка в многокритериальной оптимизации //* Искусственный интеллект и принятие решений. 2014, № 4, С. 73-82.
39. Ногин В.Д. *Аксиоматический подход к сужению множества Парето: вычислительные аспекты // Intern. J. "Information, Theories and Applications".* 2013, vol. 20, № 4, P. 352-359.
40. Ногин В.Д. *Границы применимости аксиоматического подхода к сужению множества Парето //* Intern. J. "Information, Theories and Applications". 2013, vol. 20, № 4, P. 275-282.
41. Ногин В.Д., Прасолов А.В. *Многокритериальная оценка оптимальной величины импортной пошлины* // Труды института системного анализа, 2013, вып. 2, С. 34-44.

42. Ногин В.Д., Толстых И.В. *Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений*// ЖВМиМФ, 2000, 40(11), 1593-1601.
43. Орловский С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*. М.: Наука, 1981, 208 с.
44. Петровский А.Б. *Теория принятия решений*. М., Изд. Дом «Академия», 2009, 400 с.
45. Плаус С. *Психология оценки и принятия решений*. – М.: Филинъ, 1998, 368 с.
46. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач* (2-е изд., испр. и доп.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 256 с.
47. Прасолов А.В. Об одном возможном подходе к анализу протекционизма. // Экономика и математические методы, 1999, № 2, 153-156.
48. *Психологические измерения*. – сб. переводов с англ. яз., М.: Мир, 1967, 196 с.
49. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. – М.: Мир, 1973, 369 с.
50. Саати Т. Л. *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. — М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.
51. Саати Т., Кернс К. *Аналитическое планирование. Организация систем*. – М.: Радио и связь, 1991.
52. Салуквадзе М.Е. *О задаче линейного программирования с векторным критерием качества*// Автоматика и телемеханика, 1972, 5, С. 99-105.
53. Схрейвер Ф. *Теория линейного и целочисленного программирования*, т.1. – М.: Мир, 1991, 360 с.
54. Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений*. М.: Наука, 1978, 352 с.
55. Фишберн П. *Теория полезности*. – В кн. «Исследование операций. Методологические основы и математические методы», т.1, М.: Мир, 1981, С. 448-480.
56. Черников С.Н. *Линейные неравенства*. М.: Наука, 1968, 352 с.
57. Штоейер Р. *Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения*. – М.: Радио и связь, 1992.
58. Charns A., Cooper W.W., Ferguson R.O. *Optimal estimation of execute compensation by linear programming*// Management Science, 1955, 1 (2).
59. Charns A., Cooper W.W. *Management models and industrial applications of linear programming* (Appendix B). - John Wiley and Sons, N.Y., 1961, 1.
60. Hunt B. J., Wiecek M. M., Hughes C. S. *Relative importance of criteria in multiobjective programming: A cone-based approach* // European J. of Operational Research, 2010, v. 207, P. 936–945.
61. Kowalczyk C. and Skeath S.E., Pareto ranking optimal tariffs under foreign monopoly // Economics Letters 45 ,1994, P. 355-359.
62. Edgeworth F. Y. Appreciations of Mathematical Theories. // Economic Journal, 1908, №18(72), P. 541-556.
63. Noghin V.D. *Estimation of the set of nondominated solutions*// Numerical Functional Analysis and Applications, 1991, 12 (5&6), P. 507-515.
64. Noghin V.D. *Upper estimate for a fuzzy set of nondominated solutions*// Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67, P. 303-315.
65. Noghin V.D. *Relative importance of criteria: a quantitative approach//* J. Multi-Criteria Decision Analysis, 1997, 6, P. 355-363.
66. Noghin V.D. *What is the relative importance of criteria and how to use it in MCDM*. - In “Multiple Criteria Decision Making in the New Millenium”, Proceedings of the XV International Conference on MCDM (ed. by M Köksalan, S. Zionts) in Ankara, Turkey (July, 2000), Springer, 2001, P. 59-68.

67. Noghin V.D. *Restriction of a Pareto set based on information about a decision-maker's preferences of the point-multiple type* // Scientific and Technical Information Processing December 2010, Vol. 37, Issue 5, P. 292-300
68. Noghin V.D. *Reducing the Pareto set based on set-point information* // Scientific and Technical Information Processing, December 2011, Vol. 38, Issue 6, P. 435-439
69. Saaty T.L. *Multicriteria decision making. The analytic hierarchy process*. – Pittsburgh: RWS Publications, 1990, 287 pp.
70. Tamura K. *A method for constructing the polar cone of a polyhedral cone, with applications to linear multicriteria decision problems*//J. of Optimization Theory and Applications, 1976, V. 19, № 4, P. 547-564.
71. Yu P.L. *Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions*. – New-York – London: Plenum Press, 1985, 388 pp.

Предметный указатель