

# SISTEMA DE CONTROL DE ACTITUD DISEÑADO PARA ION

## 1. Bobinas de Torque

Hacer pasar una corriente por una espira genera un campo magnético. Los campos magnéticos interactúan para generar torques. Éste es el principio de todos los motores modernos. ION utiliza estos principios en su sistema de control de actitud mediante el uso de magnetotorquers y bobinas de torque. Las bobinas de torque consisten en un cable arrollado dentro del satélite que forma un gran bobinado. Este bobinado se usa para generar un campo magnético, el cual interactúa con el campo geomagnético para cambiar la orientación del satélite.

Un corriente que fluye por las bobinas de torque generan un momento dipolar magnético según la siguiente ecuación:

$$m = N.I.A.a_n \quad (1)$$

El parámetro A es la sección de la bobina, N es el número de vueltas de la bobina, y I es la corriente que pasa por la bobina. La dirección del momento dipolar es normal a la bobina, y queda determinado por la regla de la mano derecha de acuerdo a la dirección en la que la corriente atraviesa el bobinado, como se puede ver en la siguiente figura.

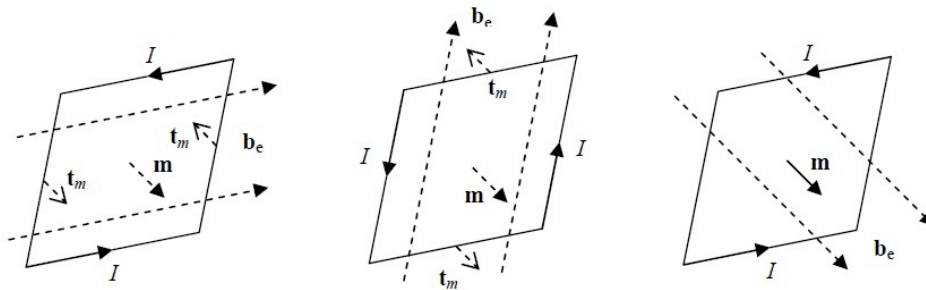


Figura 1: Operación intuitiva de un bobinado de torque

El campo magnético en el centro geométrico de esta espira rectangular,  $b_m$ , de largo  $a$  y ancho  $b$  es dado por la siguiente ecuación:

$$b_m = \frac{2\mu_0 NI \sqrt{(a^2 + b^2)}}{\pi A} a_n \quad (2)$$

El parámetro  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío y vale  $4\pi \times 10^{-7} H/m$ . La interacción entre el dipolo magnético y el campo magnético de la Tierra genera un torque,  $t_m$ , de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$t_m = m \times b_e \quad (3)$$

El parámetro  $m$  se define como en (1) y  $b_e$  es el campo magnético de la tierra en un punto determinado.

Para una comprensión intuitiva de la generación de torques magnéticos ver figura 1. Como se puede ver en esta figura, el torque generado en este campo magnético tiende a alinear el momento magnético dipolar con el campo geomagnético. Notar que no se genera un torque si el momento dipolar magnético ya está alineado con el campo geomagnético.

## 2. Dimensionado de las bobinas de torque

De acuerdo a las ecuaciones (1) y (3), el torque generado es proporcional al área de la bobina. Idealmente, los bobinados deberían ser lo más grandes posibles. Sin embargo, las dimensiones del satélite y la existencia de otros componentes dentro del satélite limitan el área del bobinado. Éstos se dimensionan lo más grande posible teniendo en cuenta estas limitaciones. Otra restricción para el número de vueltas del bobinado, es la cantidad limitada de energía disponible para el control de actitud. Se supone que la máxima potencia disponible para éste módulo es 0.1W.

La potencia total disipada viene dada por la ecuación:

$$P = \frac{V_{bus}^2}{R_{total}} \quad (4)$$

Donde  $R_{total}$  es la resistencia total del bobinado y el puente-H, y se halla mediante:

$$R_{total} = R_{puente} + R_{bobinado} \quad (5)$$

Comentario: un puente-H es un circuito electrónico que permite aplicarle un voltaje a una carga en cualquier dirección

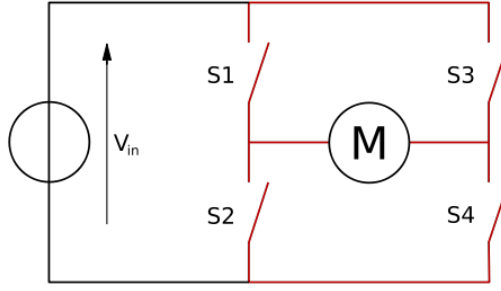


Figura 2: Estructura de un puente-H (remarcado en rojo)

La resistencia  $R_{puente}$  es la resistencia del puente-H, y la resistencia del bobinado viene dada por la fórmula:

$$R_{bobinado} = \frac{l}{\sigma S} \quad (6)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad del alambre,  $l$  es el largo del alambre, y  $S$  es la sección del alambre. Finalmente, el largo del bobinado se relaciona con las dimensiones del bobinado por geometría:

$$l = 2N(a + b) \quad (7)$$

De estas ecuaciones, y la restricción dada de 0.1W de potencia para cada bobinado de torque, es posible determinar el número de vueltas en cada uno de los bobinados. Combinando las ecuaciones (4) a (7), se obtiene el número total de vueltas como:

$$N = \frac{\sigma S}{2(a + b)} \left( \frac{V_{bus}^2}{P} - R_{puente} \right) \quad (8)$$

### 3. Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas, o marco de referencia, es simplemente una base ortogonal en tres dimensiones. En los siguientes capítulos se definen varios sistemas de coordenadas que describen la posición de varios objetos tanto terrestres como aéreos.

#### 3.1. Sistema de coordenadas inerciales geocéntricas

Este sistema de coordenadas se denota con la  $I$ , y está centrado en el centro de masa de la Tierra.

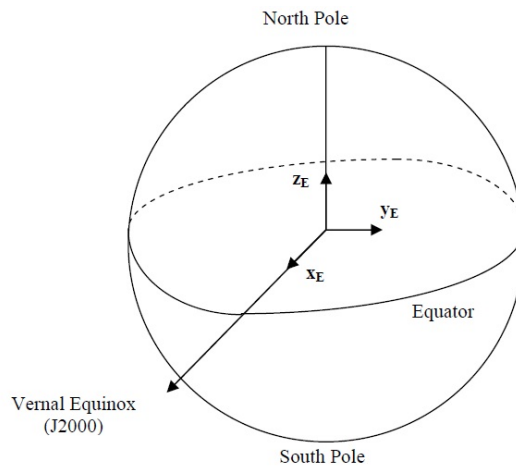


Figura 3: Sistema de coordenadas inerciales geocéntricas

### 3.2. Sistema fijo de coordenadas geocéntricas

Este sistema de coordenadas se denota con la letra  $E$ , y está también centrado en el centro de masa de la Tierra, pero es solidario a la Tierra y por lo tanto rota en el tiempo.

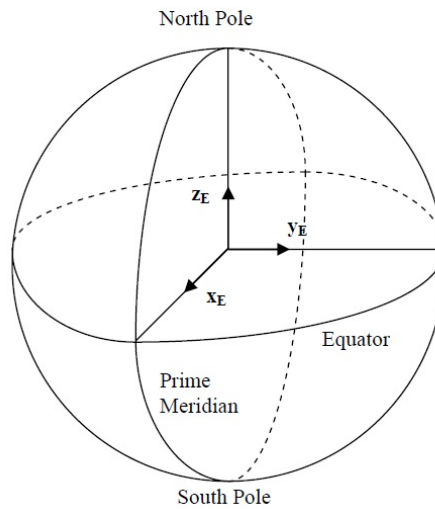


Figura 4: Sistema fijo de coordenadas geocéntricas

### 3.3. Sistema de coordenadas solidario al satélite

Este sistema de coordenadas se denota con la letra  $B$ . El marco de referencia se ubica en el centro de masa del satélite como se muestra en la siguiente figura.

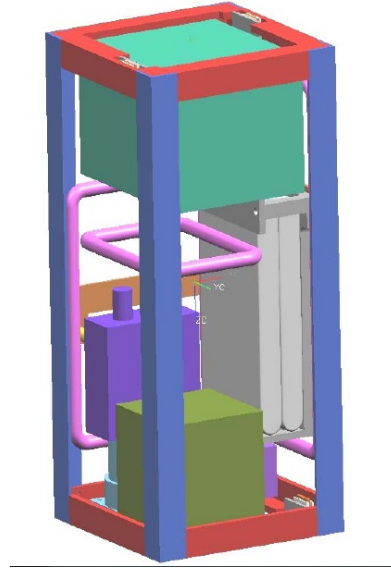


Figura 5: Sistema de coordenadas solidario al satélite

### 3.4. Sistema de coordenadas solidario a la órbita del satélite

Este sistema de coordenadas se denota con la letra  $R$ . Este sistema define la orientación nominal del satélite. El vector  $z_R$  apunta desde el centro de masa del satélite al centro de masa de la Tierra.

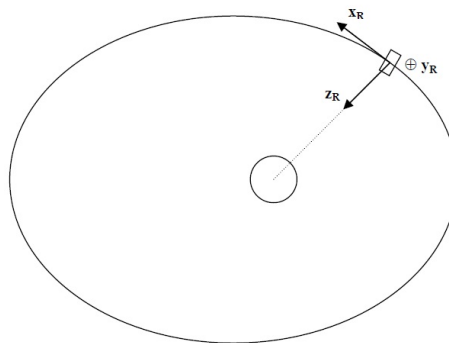


Figura 6: Sistema de coordenadas solidario a la órbita del satélite

A medida que el satélite cambia su posición dentro de una órbita, la orientación del marco de referencia también cambia. Es importante notar que cuando el satélite alcanza su posición deseada en el plano de la órbita, los sistemas de coordenadas solidarios al satélite y a la órbita del satélite coinciden.

## 4. Modelando la dinámica del satélite

El sistema dinámico del satélite se especifica por dos ecuaciones diferenciales vectoriales. La primera ecuación controla la evolución del momento angular del satélite, y por ende el grado de variación de la velocidad angular. La segunda ecuación usa la velocidad angular para describir el cambio de actitud del satélite.

### 4.1. Dinámica rotacional

La derivada del momento angular es igual al torque neto aplicado. Si se tiene que  $h$  es el vector momento angular y  $t_T$  es el torque total, la ecuación diferencial en el marco de referencia inercial se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_B = t_T \quad (9)$$

La ecuación del momento de Euler sale de derivar por la regla de la cadena:

$$\left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_B = t_T - \omega^{\frac{B}{I}} \times h \quad (10)$$

Donde  $B$  es el sistema de coordenadas solidario al satélite,  $I$  la matriz de inercia, y  $h$  el vector momento angular.

Esta es la ecuación de la dinámica, que gobierna la evolución del momento angular del satélite. Se puede multiplicar ambos lados por la inversa de la matriz  $I$ , y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene en forma explícita la evolución de la velocidad angular:

$$\left\{ \frac{d\omega^{\frac{B}{I}}}{dt} \right\}_B = \tilde{I}^{-1} \left( t_T - \omega^{\frac{B}{I}} \times \left( \tilde{I} \omega^{\frac{B}{I}} \right) \right) \quad (11)$$

## 4.2. Cinemática rotacional

La ecuación cinética se usa para determinar la velocidad con la que varía la orientación del satélite en función de la velocidad angular.

Sea  $\omega^{\frac{B}{C}}$  la velocidad angular de la nave espacial con respecto a un marco de referencia  $C$ . Luego, la ecuación cinética se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{dq^{\frac{B}{C}}}{dt} \right\}_C = \frac{1}{2} \Omega \left( \omega^{\frac{B}{C}} \right) q^{\frac{B}{C}} \quad (12)$$

El parámetro  $q^{\frac{B}{C}}$  es el vector de cuatro elementos que representa la actitud del satélite respecto al sistema de coordenadas  $C$ , y la matriz  $\Omega(\omega)$  se define de la siguiente manera:

$$\Omega \left( \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 5. Algoritmos de control de actitud

En ésta sección de la tesis se estudian los algoritmos necesarios para calcular la actitud del satélite. Luego de determinada la posición, se calcula el campo geomagnético nominal. Ésto es comparado con el campo magnético medido en un filtro extendido de Kalman para producir un estimado de la actitud del satélite. Finalmente, el regulador cuadrático lineal se utiliza para activar los bobinados de torque y el control de actitud del ION.

Como los primeros puntos se refieren al cálculo de la posición y del campo geomagnético, y estos puntos quedan por fuera del alcance del MCPC, sólomente van a ser nombrados y no estudiados.

Lo anterior se refiere a los capítulos:

- Determinación de posición
- Los elementos orbitales
- Segunda ley de Kepler
- Algoritmo de propagación orbital

Se continúa con la siguiente sección.

## 5.1. El campo geomagnético

Dado que el campo magnético es una función de la posición relativa a la tierra, es usual utilizar el Sistema fijo de coordenadas geocéntricas  $E$  para computarlo. Es posible generar el campo magnético de la tierra escribiéndolo como una suma de armónicos esféricos como se muestra a continuación:

$$b_c = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n b_{n,m} \quad (14)$$

El vector  $b_c$  es el vector campo magnético calculado en el sistema fijo de coordenadas geocéntricas, y  $b_{n,m}$  es el armónico esférico de grado  $n$  y orden  $m$ . Los componentes  $b_{n,m}$  se pueden obtener de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{b}_{n,m} = \frac{K_{n,m} a^{n+2}}{r^{n+m+1}} \left[ \left( (u A_{n,m+1}(u) + (n+m+1) A_{n,m}(u)) \hat{\mathbf{r}} - A_{n,m+1}(u) \mathbf{z}_E \right) \frac{g_{n,m} C_m + h_{n,m} S_m}{r} \right. \\ \left. - m A_{n,m}(u) ((g_{n,m} C_{m-1} + h_{n,m} S_{m-1}) \mathbf{x}_E + (h_{n,m} C_{m-1} - g_{n,m} S_{m-1}) \mathbf{y}_E) \right] \quad (15)$$

Los parámetros  $g_{n,m}$  y  $h_{n,m}$  son los coeficientes de Gauss de grado  $n$  y orden  $m$  como se define en el *IGRF* (International Geomagnetic Reference Field). El parámetro  $a$  es el radio medio de la Tierra (6371km) como lo define el *IGRF*. El parámetro  $r$  es la magnitud de  $\mathbf{r}$ , el punto en el que se desea encontrar el campo magnético en el sistema fijo de coordenadas geocéntricas. El vector unidad  $\hat{\mathbf{r}}$  está en la dirección de  $\mathbf{r}$ . El parámetro  $u$  es la tercer componente de  $\hat{\mathbf{r}}$  y puede ser hallado de la siguiente manera:

$$u = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{z}_E \quad (16)$$

El resto de los parámetros de (15) se determinan recursivamente mediante las siguientes recursiones:

$$K_{n,0} = K_{1,1} = 1, \forall n \in (1, \dots, \infty) \\ K_{n,m} = \left( \frac{n-m}{n+m} \right)^{1/2} K_{n-1,m}, \forall m \in (1, \dots, \infty), n > m \\ K_{n,m} = ((n+m)(n-m+1))^{-1/2} K_{n,m-1}, \forall m \in (2, \dots, \infty), n \geq m \quad (17)$$

$$A_{0,0}(u) = 1 \\ A_{n,n}(u) = (1)(3)(5) \dots (2n-1) \forall n \in (1, \dots, \infty) \\ A_{n,m}(u) = \frac{1}{n-m} ((2n-1)u A_{n-1,m}(u) - (n+m-1) A_{n-2,m}(u)), \forall m \in (0, \dots, \infty), n \geq m \quad (18)$$



$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{y}_E \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}_E \end{aligned} \tag{20}$$

$$S_m = S_1 C_{m-1} + C_1 S_{m-1} \tag{21}$$

$$C_m = C_1 C_{m-1} - S_1 S_{m-1} \tag{22}$$

$K_{n,m}$  son conocidos como los coeficientes de Schmitt, mientras que  $A_{n,m}$  se derivan de los polinomios de Legendre.  $S_m$  y  $C_m$  están relacionados con los coeficientes de Shmitt, pero se separaron con el objetivo de simplificar la recursión.

Es importante notar que los coeficientes de Schmitt son independientes de la posición deseada. Por ende, si se va a calcular el campo magnético en varios puntos, los coeficientes de Schmitt solo deben calcularse una única vez, y ser reusados en cada cálculo subsiguiente. Sin embargo, el resto de los parámetros dependen de la posición, y deben ser recalculados para cada ubicación.

## 5.2. Algoritmo del campo magnético

A pesar de que el valor de  $b_c$  se obtiene de una sumatoria infinita, es posible obtener buenos resultados truncando la suma ya que los términos grados y órdenes altos se aproximan rápidamente a cero. Usando las ecuaciones anteriores, es posible obtener un algoritmo para determinar el campo magnético en relación al sistema de coordenadas GCI.

## 6. Ley de control del regulador cuadrático lineal

Los magnetotorquers se han usado para controlar naves espaciales en una variedad de formas. Tradicionalmente, los magnetotorquers eran usados en conjunto con sistemas basados en ruedas a reacción. Las ruedas de reacción se usan para controles

de actitud precisos, mientras que los torquers son usados para .absorber.<sup>el</sup> momento en exceso cuando las ruedas alcanzan altas velocidades. Recientemente, varias leyes de control han sido desarrolladas para implementar controles de actitud de tres ejes sin el uso de ruedas de reacción. El primer controlador era un sistema de control de actitud basado en proyección. Técnicas más sofisticadas como reguladores cuadráticos lineales, control fuzzy y sistemas de control de deslizamiento han sido simuladas. Por lo que existe una variedad de leyes de control disponibles por el diseñador para implementar magnetotorquers.

El control magnético no es un problema trivial. Esto es porque el torque de control resulta del producto vectorial entre el momento magnético del magnetotorquer y el campo geomagnético. Por ende, el torque de control es ortogonal a ambos vectores. Y por ende, no será posible generar ningún torque de control en la dirección del campo geomagnético. Esto resulta en un subespacio incontrolable. Por suerte, este espacio varía con el tiempo, debido a que el campo geomagnético mismo varía con el tiempo a medida que va cambiando su órbita. Esto hace que el el satélite sea controlable para órbitas altamente inclinadas.

El sistema de control de actitud del ION utiliza un regulador cuadrático lineal asintótico cuasi periódico. Esto es similar al sistema planteado en la Matriz de actitud o rotación (*faltade finir*). Esta sección va a proceder con la discusión de algunas teorías asociadas al regulador cuadrático lineal. Va a proceder entonces a describir el sistema utilizado por ION para el control de actitud.

## 7. Teoría del regulador cuadrático lineal

El problema del control cuadrático lineal es un problema óptimo de control. Se cubre en la mayoría de los textos de control moderno (*como W.L.Brogan, ModernControlTheory*). En éste problema, se asume que hay un sistema en el que las dinámica de estado son constantes, pero las entradas dinámicas varían con el tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (23)$$

para un  $\mathbf{x}(t_0)$

Para este problema, se asigna la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) d\tau + \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{P}_T \mathbf{x}(t_f) \quad (24)$$

dado un  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

The matrix  $Q$  may be thought of as a penalty on the state vector to discourage the state from deviating too large,  $R$  as a matrix to penalize using too much control, and  $P_T$  as a penalty on the final state. Todas estas matrices son constantes. Desde el punto de vista del diseñador, a menos que estas matrices tengan algún tipo de designación previa, pueden ser vistas como la forma de cambiar las características del sistema dinámico. De esta forma, estas matrices dan una manera cuantitativa de compensar desviación de estado con energía de control.  $Q$ ,  $R$ , y  $P_T$  se asumen definidas positivas.

El objetivo del regulador lineal cuadrático es encontrar el control óptimo para minimizar la función costo dadas estas varias matrices y una condición de estado inicial. Es un resultado bien conocido que la solución óptima a este problema es un controlador total realimentado de estado de la siguiente forma:

$$u^* = Fx = -R^{-1}B(t)^T P(t)x \quad (25)$$

La matriz  $P(t)$  se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\dot{P}(t) = -Q - P(t)A - A^T P(t) - P(t)B(t)R^{-1}B(t)^T P(t) \quad (26)$$

dado  $P(t_f) = P_T$

En principio, esta ecuación puede ser evaluada de forma cerrada o analítica, para encontrar la matriz  $P(t)$ , que a su vez especifica  $u^*$ .

## 7.1. regulador lineal cuadrático periódico asintótico

Un caso especial del regulador cuadrático lineal es cuando la matriz  $B(t)$  es periódica. En este caso, para algún valor  $T$  y para todo  $t$ ,

$$B(t) = B(t + T) \quad (27)$$

Para este caso, si  $P_T$  se elige correctamente, se puede mostrar que la matriz ganancia de realimentación es también periódica en  $T$ . Esta periodicidad en la matriz de realimentación puede usarse para mostrar, en el caso de algunas condiciones muy generales en la matriz  $Q$ ,  $P(t)$  se aproxima a la matriz de estado permanente  $P_{ss}$  a medida que el mínimo eigenvalue (un valor de un parámetro para el cual la ecuación diferencial tiene una solución no nula bajo ciertas condiciones) de  $R$  se aproxima a infinito. Como consecuencia, para grandes valores de  $R$ , se puede esperar que la matriz  $P_{ss}$  sea usada como una aproximación razonable de  $P(t)$  para todo  $t$ . En este caso, la ley de control óptimo se convierte en:

$$u^* = Fx - R^{-1}B(t)^T P_{ss}x \quad (28)$$

Notar que para hallar  $P_{SS}$ , se puede hacer el siguiente promedio sobre un período:

$$\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(t)^T \approx \mathbf{C} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{B}(\tau)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\tau)^T d\tau \quad (29)$$

Estas aproximaciones simplifican en gran medida la implementación para el regulador cuadrático lineal. Tomando esta aproximación en la ecuación de (26), es posible resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$0 = \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{SS}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{SS} - \mathbf{P}_{SS}\mathbf{C}\mathbf{P}_{SS} \quad (30)$$

## 7.2. Diseño del regulador lineal cuadrático periódico asintótico para ION

Para aplicar el regulador lineal cuadrático al sistema de control de actitud del ION, el vector de estado consiste en la actitud y velocidad angular del sistema de coordenadas de cuerpo fijo respecto del marco de la órbita de referencia. Solamente se necesita tres elementos para representar la actitud ya que el cuarto elemento sería redundante. En consecuencia, el estado de seis elementos es como sigue:

$$\mathbf{x}_{lqr} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{R}}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

El subíndice  $lqr$  se usa para marcar la diferencia entre el vector de estado usado por el regulador cuadrático lineal y el vector de estado usado por el filtro extendido de Kalman. Los primeros tres elementos del estado son los tres elementos del vector de actitud. Los últimos tres elementos son los vectores de la velocidad angular. La entrada es el momento magnético generado por el magnetotorquer, como se explica el en APÉNDICE A y la ecuación del torque magnético. Es como sigue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{m} \quad (32)$$

Las dinámicas del sistema son claramente no lineales. Además, las variables de estado varían con el tiempo. Por ende, para aplicar la teoría del regulador cuadrático lineal, primero es necesario linealizar el sistema alrededor de una trayectoria normal. Esta derivación se puede encontrar en el APÉNDICE I. Abajo solamente se presentan los resultados. El sistema toma la forma de la ecuación de (23) con las siguientes definiciones:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I} \\ \omega_0 \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \begin{bmatrix} 8\omega_0 (I_z - I_y) & -6\omega_0 I_{xy} & 2I_{xz} & 0 & -2I_{yz} & I_x - I_y + I_z \\ -8\omega_0 I_{xy} & 6\omega_0 (I_z - I_x) & -2\omega_0 I_{xz} & 2I_{yz} & 0 & -2I_{xy} \\ 8\omega_0 I_{xz} & 6\omega_0 I_{yz} & 2\omega_0 (I_x - I_y) & -I_x + I_y - I_z & 2I_{xy} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (33)$$

El parámetro  $\omega_0$  es la magnitud de la velocidad orbital del sistema de coordenadas referencia con respecto al sistema inercial de coordenadas. Se debe notar que ésto se asume constante durante las derivaciones. Se va a tener una pequeño desviación de la velocidad angular para trayectorias no circulares. Sin embargo, la velocidad orbital media se puede usar en los cálculos. Además, la dinámica de estado anterior toman en cuenta los efectos del gradiente de gravedad cuando se compute el sistema linearizado.

La contribución de la entrada se puede tener en cuenta:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{b}(t)) \end{bmatrix} \quad (34)$$

El vector  $\mathbf{b}$  es el vector de campo geomagnético en el sistema de coordenadas de cuerpo fijo. La matriz  $\mathbf{X}$  es la matriz simétrica torcida normal asociada con el producto vectorial. Se define como:

$$\mathbf{X} \left( \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Notar que si la nave espacial se mantuviera en su actitud nominal, y los cambios en el campo geomagnético debido a la rotación de la Tierra se ignoran, entonces la matriz lineal  $\mathbf{B}(t)$  sería periódica. Consecuentemente, es razonable asumir que una matriz steady state que resuelva la ecuación algebraica de Riccati sea una aproximación razonable a la solución óptima.

### 7.3. Control Integral

El control integral tiene muchos beneficios conocidos. Notables son sus tendencias estabilizadoras y reducción de ruido. Para introducir el control integral en este diseño, el sistema anterior se argumenta como sigue. Introduciendo un nuevo vector estado que consiste en la integral de la cuaterna de tres elementos y el estado previo:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{lqr} = \begin{bmatrix} \int \mathbf{q}^{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{R}}} \\ \mathbf{q}^{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{R}}} \\ \omega^{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

El sistema modificado es:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{lqr} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_{lqr} + \tilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u} \quad (37)$$

Las matrices modificadas son:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

#### 7.4. Calculando la matriz C

En la discusión anterior, C se calcula haciendo un promedio del efecto de la matriz  $\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T$  en un período orbital. Sin embargo, ésto solo funciona si la matriz B es periódica. Dado que la matriz real no va a ser exactamente periódica, esta técnica debe ser levemente modificada haciendo el promedio sobre varios períodos orbitales para incluir aproximadamente un día entero de valores válidos. Ésto se traduce a unas 15 órbitas de datos aproximadamente. Hacer esta integración más amplia va a considerar en promedio la rotación de la tierra. Por lo tanto, C se calcula como sigue:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{15T} \int_0^{15T} \tilde{\mathbf{B}}(\tau)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}(\tau)^T d\tau \quad (40)$$

En este cálculo, el campo magnético se calcula en el marco de referencia, dado que los cálculos asumen que el satélite se encuentre en su orientación nominal. Se debe notar que solamente es necesario calcular C una vez. Esta matriz se usa después para calcular la ecuación algebraica de Riccati para  $\mathbf{P}_{ss}$