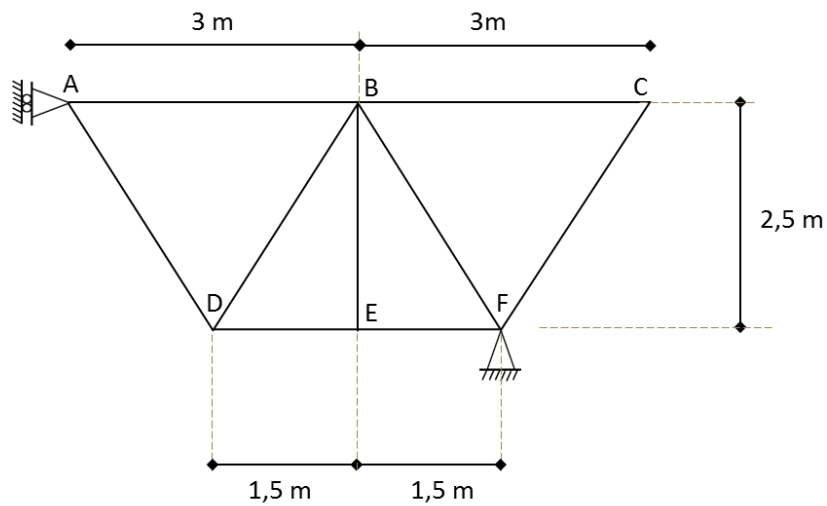


ANÁLISIS ESTRUCTURAL

TALLER 2. Matriz de Rigidez Global (de la estructura) – 2017-2

Nombre: _____

1. Determinar para la cercha de acero que se muestra a continuación su matriz de rigidez global. Los elementos internos de la cercha tienen un área transversal de 550 mm^2 y los elementos externos tienen un área transversal de 700 mm^2 .



PROCEDIMIENTO:

- a) Determinar el número de nodos y el número de elementos que conforman la cercha:

Número de nodos (Nn): _____ Número de elementos (Ne): _____

- b) Enumerar los nodos y los elementos de la cercha. Dibujarlos en el esquema (los números de los elementos enciérrelos en cuadrado para diferenciarlos de los de los nodos).

- c) ¿Cuántos grados de libertad tiene cada nodo?, ¿Cuántos tiene toda la estructura?

Número de grados de libertad de cada elemento: _____

Número de grados de libertad de toda la estructura (NGL): _____

- d) Enumerar los grados de libertad de cada nodo, teniendo en cuenta como sugerencia que los últimos grados de libertad enumerados corresponden a los desplazamientos conocidos (donde hay restricciones de desplazamiento).

e) Escribir la matriz de grados de libertad iniciales y finales de cada elemento (MGL):

$$MGL = \begin{bmatrix} gxi_1 & gyi_1 & gxf_1 & gyf_1 \\ gxi_2 & gyi_2 & gxf_2 & gyf_2 \\ gxi_3 & gyi_3 & gxf_3 & gyf_3 \\ gxi_4 & gyi_4 & gxf_4 & gyf_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ gxi_n & gyi_n & gxf_n & gyf_n \end{bmatrix} \quad MGL = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

f) Propiedades de cada elemento:

MA: Matriz con áreas

ME: matriz con módulo de elasticidad

$$MA = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad MA = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad mm^2$$

$$ME = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad ME = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad GPa$$

MC: matriz con coordenadas iniciales y finales de cada elemento

$$MC = \begin{bmatrix} xi_1 & yi_1 & xf_1 & yf_1 \\ xi_2 & yi_2 & xf_2 & yf_2 \\ xi_3 & yi_3 & xf_3 & yf_3 \\ xi_4 & yi_4 & xf_4 & yf_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ xi_n & yi_n & xf_n & yf_n \end{bmatrix} \quad MC = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad mm$$

ML: matriz con longitudes de cada elemento

$ML \leftarrow \text{ceros}(Ne, 1)$ para $i \leftarrow 1$ hasta Ne hacer: $ML(i, 1) \leftarrow \sqrt{[(MC(i, 3) - MC(i, 1))]^2 + [(MC(i, 4) - MC(i, 2))]^2}$ fin
$L = \sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}$

g) Matriz de rigidez local

MAL: Matriz tridimensional de matrices de rigidez local de cada elemento.

$MAL \leftarrow \text{ceros}(4,4,Ne)$ para $i \leftarrow 1$ hasta Ne hacer: $MAL(1,1,i) \leftarrow [MA(i,1) * ME(i,1)] / ML(i,1)$ $MAL(1,3,i) \leftarrow -MAL(1,1,i)$ $MAL(3,1,i) \leftarrow -MAL(1,1,i)$ $MAL(3,3,i) \leftarrow MAL(1,1,i)$ fin	$k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
--	--

$$k_{AB} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad k_{AD} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad k_{EB} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Unidades: kN/mm

h) Matriz de transformación

MAT: Matriz tridimensional de matrices de transformación de cada elemento.

$MAT \leftarrow \text{ceros}(4,4,Ne)$ para $i \leftarrow 1$ hasta Ne hacer: $MAT(1,1,i) \leftarrow [MC(i,3) - MC(i,1)] / ML(i,1)$ $MAT(2,1,i) \leftarrow [MC(i,4) - MC(i,2)] / ML(i,1)$ $MAT(3,3,i) \leftarrow MAT(1,1,i)$ $MAT(4,3,i) \leftarrow MAT(2,1,i)$ fin	$T = \begin{bmatrix} CX & 0 & 0 & 0 \\ CY & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & CX & 0 \\ 0 & 0 & CY & 0 \end{bmatrix}$ $CX = \frac{X_f - X_i}{L} \quad CY = \frac{Y_f - Y_i}{L}$
---	---

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad T_{AD} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad T_{EB} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

- i) Hallar la matriz de rigidez en coordenadas globales de cada elemento, teniendo en cuenta la nueva nomenclatura, expresar las matrices en [kN/mm].

MAG: matriz tridimensional de matrices de rigidez global de cada elemento.

```

MAG ← ceros (4,4,Ne)
para i ← 1 hasta Ne hacer:
    MAG(i) ← MAT(i) * MAL(i) * transpuesta(MAT(i))
fin
    
```

$$K_1 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad K_4 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad K_6 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad K_8 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

- j) En el literal (i) asocie los grados de libertad de cada nodo con las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada elemento.

- ____ filas x ____ columnas
- l) Cada posición en la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales representa una posición en la matriz de rigidez de la estructura; de acuerdo a esto ensamble la matriz de rigidez global.

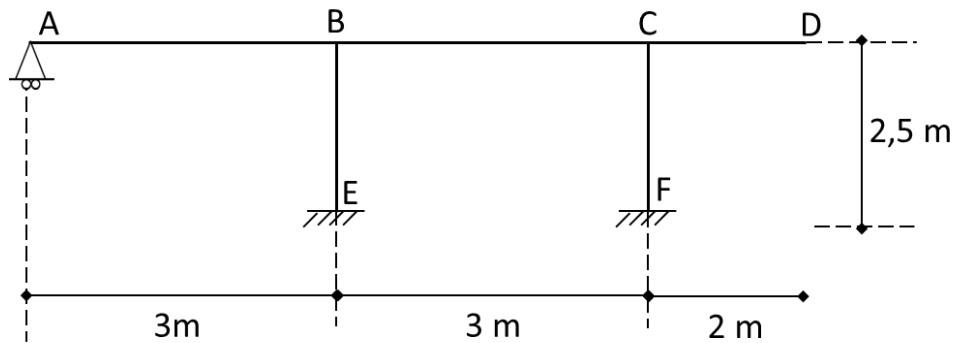
```

KG ← ceros (NGL, NGL)
para i ← 1 hasta Ne hacer:
    para j ← 1 hasta 4 hacer:
        para k ← 1 hasta 4 hacer:
             $KG(MGL(i, j), MGL(i, k)) = KG(MGL(i, j), MGL(i, k)) + MAG(k, j, i)$ 
        fin
    fin
fin

```

$$\frac{kN}{mm}$$

2. Determinar la matriz de rigidez global para el pórtico de concreto que se muestra en la figura. Las columnas tienen sección cuadrada de 200 mm de lado y las vigas tienen sección rectangular de 200 mm x 250 mm.



PROCEDIMIENTO:

- a) Enumerar los nodos, elementos y grados de libertad del pórtico, recordando la sugerencia de que los últimos grados de libertad enumerados pertenecerán a los nodos donde el desplazamiento es conocido. ¿Cuáles son las dimensiones del pórtico?

$$MGL = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Matriz de grados de libertad iniciales y finales de cada elemento (MGL)

- b) Propiedades de la estructura: Matriz de áreas (MA), matriz de módulos de elasticidad (ME), Matriz de inercias (MI) y matriz con coordenadas iniciales y finales de cada elemento (MC).

$$MA = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} m^2 \quad ME = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} MPa \quad MI = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} m^4$$

$$MC = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} m$$

c) Matriz de rigidez local

MAL: Matriz tridimensional de matrices de rigidez local de cada elemento.

<pre> MAL ← ceros (6,6,Ne) para i ← 1 hasta Ne hacer: MAL(1,1,i) ← [MA(i,1) * ME(i,1)] / ML(i,1) MAL(1,4,i) ← -MAL(1,1,i) MAL(4,1,i) ← -MAL(1,1,i) MAL(4,4,i) ← MAL(1,1,i) MAL(2,2,i) ← [12 * ME(i,1) * MI(i,1)] / ML(i,1)³ MAL(2,5,i) ← -MAL(2,2,i) MAL(5,2,i) ← -MAL(2,2,i) MAL(5,5,i) ← MAL(2,2,i) MAL(2,3,i) ← [6 * ME(i,1) * MI(i,1)] / ML(i,1)² MAL(3,2,i) ← MAL(2,3,i) MAL(2,6,i) ← MAL(2,3,i) MAL(3,5,i) ← -MAL(2,3,i) MAL(5,3,i) ← -MAL(2,3,i) MAL(6,2,i) ← MAL(2,3,i) MAL(5,6,i) ← -MAL(2,3,i) MAL(6,5,i) ← -MAL(2,3,i) MAL(3,3,i) ← [4 * ME(i,1) * MI(i,1)] / ML(i,1) MAL(6,6,i) ← MAL(3,3,i) MAL(6,3,i) ← [2 * ME(i,1) * MI(i,1)] / ML(i,1) MAL(3,6,i) ← MAL(6,3,i) fin </pre>	$k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$
--	--

d) Matriz de transformación

MAT: Matriz tridimensional de matrices de transformación de cada elemento.

$ \begin{aligned} &MAT \leftarrow \text{ceros}(6,6,Ne) \\ &\text{para } i \leftarrow 1 \text{ hasta } Ne \text{ hacer:} \\ &\quad MAT(1,1,i) \leftarrow [MC(i,3) - MC(i,1)] / ML(i,1) \\ &\quad MAT(2,1,i) \leftarrow [MC(i,4) - MC(i,2)] / ML(i,1) \\ &\quad MAT(2,2,i) \leftarrow MAT(1,1,i) \\ &\quad MAT(1,2,i) \leftarrow -MAT(2,1,i) \\ &\quad MAT(3,3,i) \leftarrow 1 \\ &\quad MAT(4,4,i) \leftarrow MAT(1,1,i) \\ &\quad MAT(4,5,i) \leftarrow -MAT(2,1,i) \\ &\quad MAT(5,5,i) \leftarrow MAT(1,1,i) \\ &\quad MAT(5,4,i) \leftarrow MAT(2,1,i) \\ &\quad MAT(6,6,i) \leftarrow 1 \\ &fin \end{aligned} $	$ T = \begin{bmatrix} CX & -CY & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CY & CX & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CX & -CY & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CY & CX & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $ $ CX = \frac{X_f - X_i}{L} \qquad CY = \frac{Y_f - Y_i}{L} $
---	--

e) Hallar la matriz de rigidez en coordenadas globales (MAG) para cada elemento en [MN y m].

$ \begin{aligned} &MAG \leftarrow \text{ceros}(6,6,Ne) \\ &\text{para } i \leftarrow 1 \text{ hasta } Ne \text{ hacer:} \\ &\quad MAG(i) \leftarrow MAT(i) * MAL(i) * Inversa(MAT(i)) \\ &fin \end{aligned} $
--

$$K_1 = \left[\begin{array}{c} \end{array} \right] \frac{MN}{m}$$

$$K_2 = \left[\begin{array}{c} \end{array} \right] \frac{MN}{m}$$

$$K_3 =$$

$$K_4 =$$

$$K_5 =$$

9

[

]

K [MN, m]