CONTENIDOS

MÓDULO 2: MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ

OBJETIVO ESPECÍFICO: Resolver cualquier tipo de sistema estructural, mediante el ensamble de la matriz global de rigidez de la estructura.

CONTENIDO:

1. Definir la matriz de rigidez local de cualquier elemento estructural
2. Deducir la matriz de transformación
3. Obtener la matriz global de rigidez
4. Obtener la solución de sistemas estructurales

MÓDULO 2: MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ

2.2. Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

Sistema global: las coordenadas del eje x coinciden con el eje del elemento.

Trabajar con tantos sistemas de coordenadas requiere de mucho esfuerzo

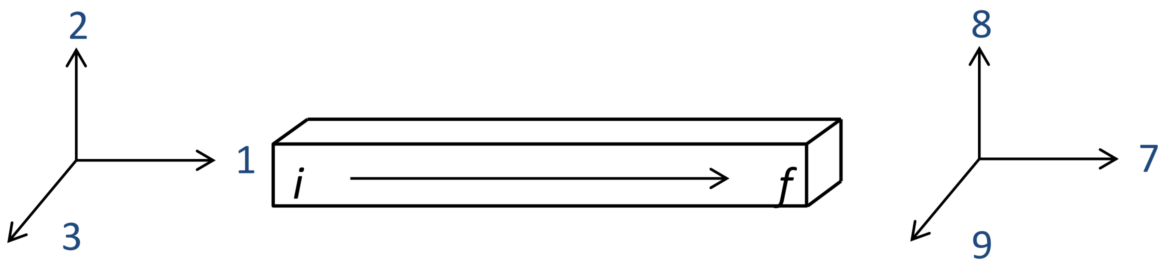
Es conveniente referir fuerzas y deformaciones a un sistema único de coordenadas: **SISTEMA DE COORDENADAS** de la estructura o **SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS**.

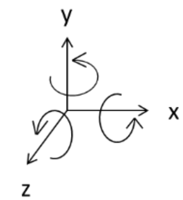
CONVENCIONES:

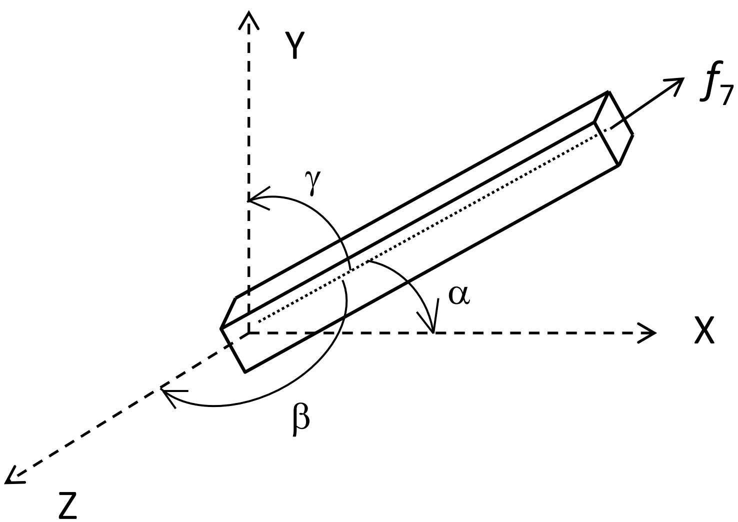
minúsculas ⟶ Sistema local

MAYÚSCULAS - - - - - - - - - - - - - - -> Sistema global

2.2.1. Matriz de transformación de coordenadas – cerchas espaciales







$$F_X = F_7 = f_7 \boxed{\cos\alpha}$$

$$F_Y = F_8 = f_7 \boxed{\cos\gamma}$$

$$F_Z = F_9 = f_7 \boxed{\cos\beta}$$

Cosenos directores (CX, CY y CZ)

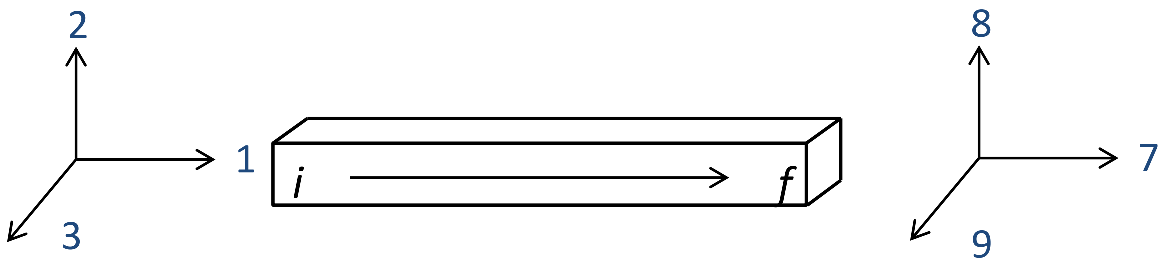
Coordenadas nudo inicial: N_i (X_i, Y_i, Z_i)

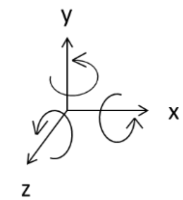
Coordenadas nudo final: N_f (X_f, Y_f, Z_f)

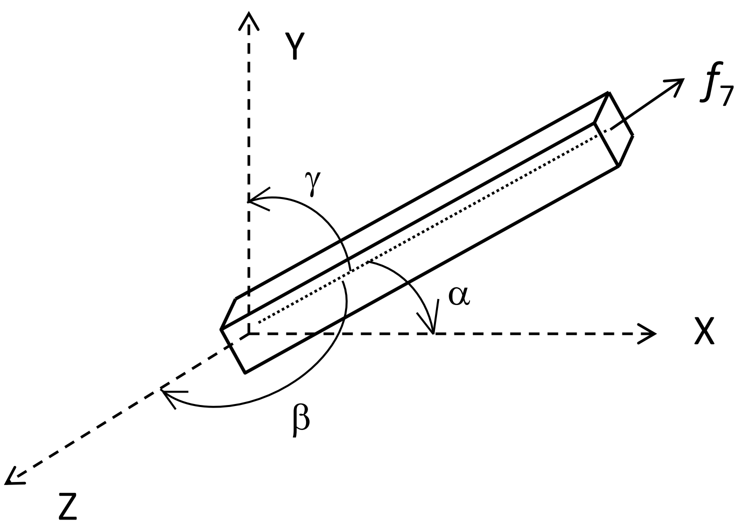
Longitud del elemento: $L = \sqrt{\left(X_f - X_i\right)^2 + \left(Y_f - Y_i\right)^2 + \left(Z_f - Z_i\right)^2}$

$$CX = \frac{X_f - X_i}{L} \qquad CY = \frac{Y_f - Y_i}{L} \qquad CZ = \frac{Z_f - Z_i}{L}$$

2.2.1. Matriz de transformación de coordenadas – cerchas espaciales







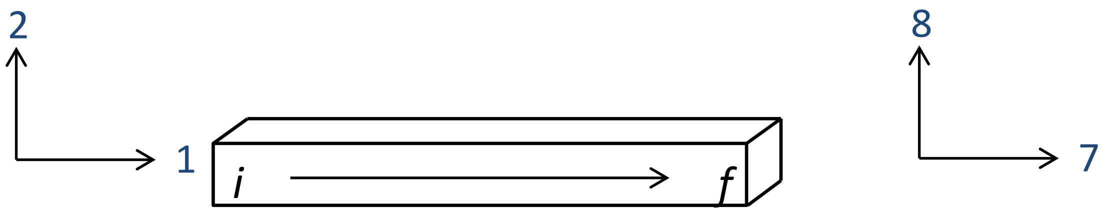
$$\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_7\\F_8\\F_9\end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}1&2&3&7&8&9\end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} CX & * & * & 0 & 0 & 0\\ CY & * & * & 0 & 0 & 0\\ CZ & * & * & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & CX & * & *\\ 0 & 0 & 0 & CY & * & *\\ 0 & 0 & 0 & CZ & * & * \end{array}\right]\end{array} * \begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_7\\f_8\\f_9\end{Bmatrix}$$

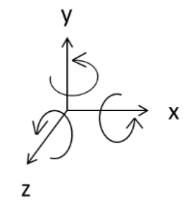
$$\{F\} = [T]\cdot\{f\}$$

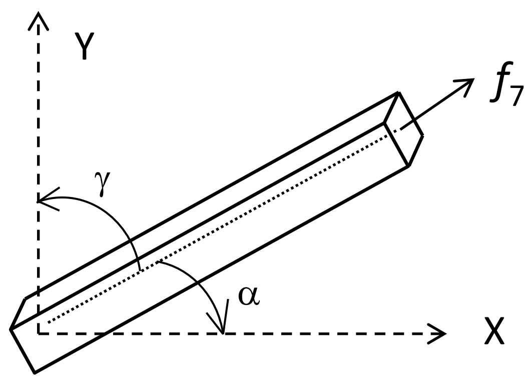
$[T]$ = matriz de transformación de coordenadas

* = términos que no son de interés práctico ya que los coeficientes f_2, f_3, f_8 y f_9 son nulos para el caso de cerchas.

2.2.2. Matriz de transformación de coordenadas – cerchas planas





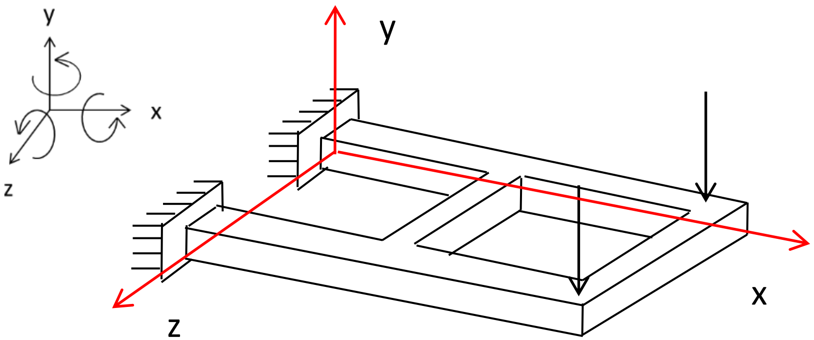


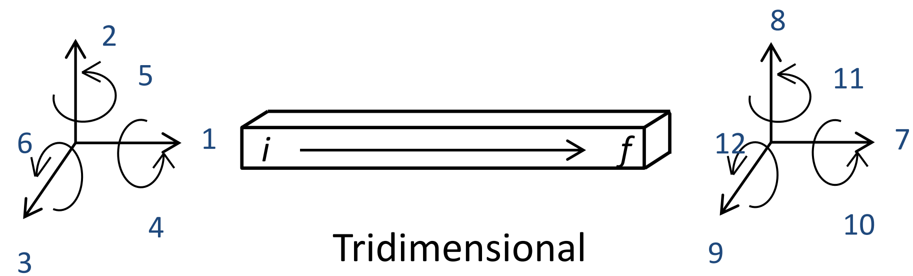
$$\begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{7} & \color{red}{8} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} CX & * & 0 & 0 \\ CY & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & CX & * \\ 0 & 0 & CY & * \end{array}\right] \end{array} * \begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_7 \\ f_8 \end{Bmatrix} \end{array}$$

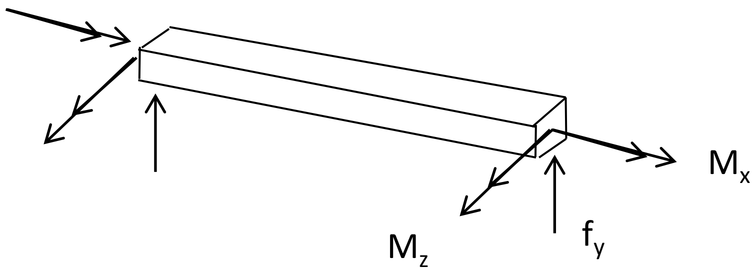
$$\{F\} = [T] \cdot \{f\}$$

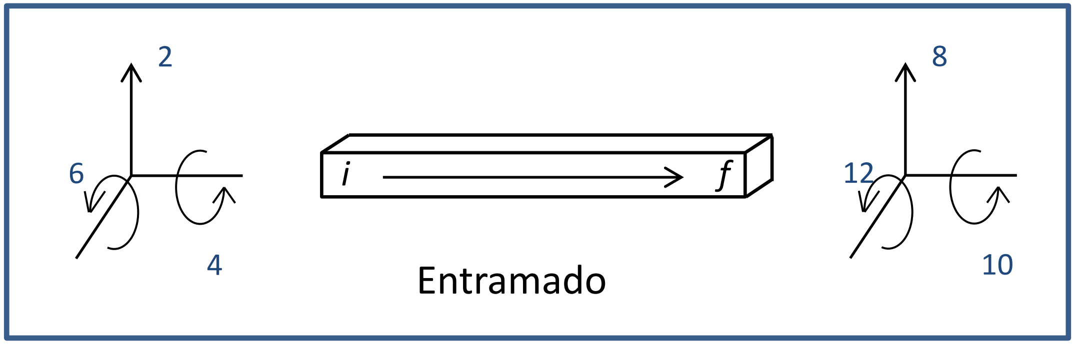
$[T]$ = matriz de transformación de coordenadas

2.2.3. Matriz de transformación de coordenadas – entramados



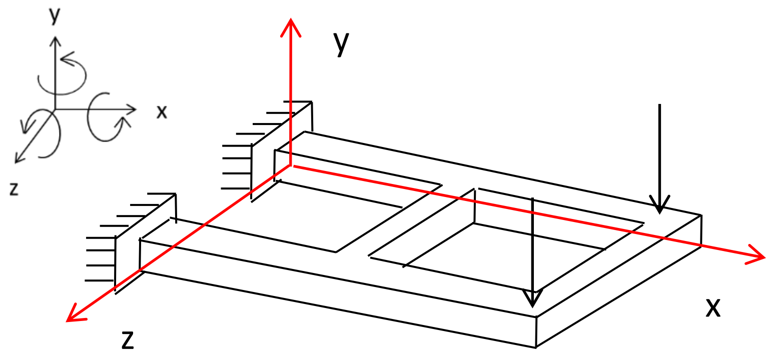


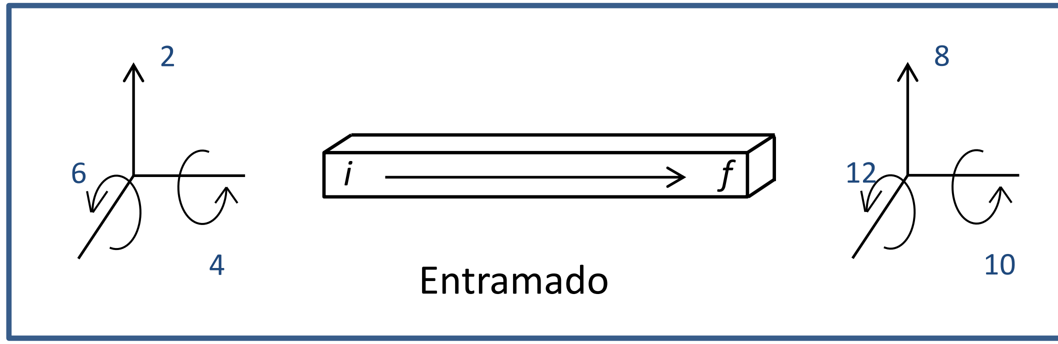




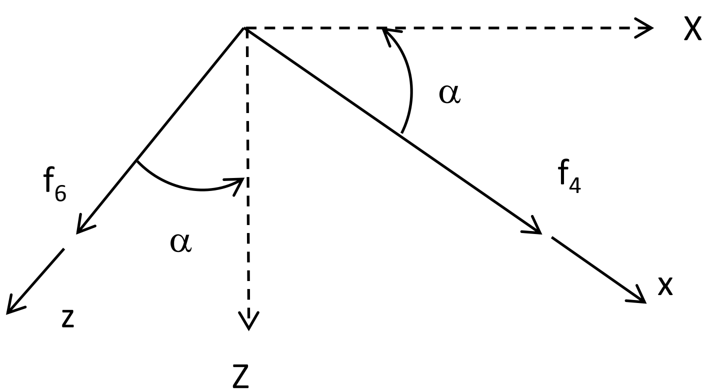
Estructuras planas localizadas en el plano XZ → Al cambiar la orientación de los elementos en el plano XZ, Y es invariante → f_2 y f_8 son las mismas en coordenadas locales y globales

2.2.3. Matriz de transformación de coordenadas – entramados





α positivo en sentido antihorario



$$F_2 = f_2$$

$$F_4 = f_4 \cos\alpha - f_6 \operatorname{sen}\alpha$$

$$F_6 = f_4 \operatorname{sen}\alpha + f_6 \cos\alpha$$

$$CX = \cos\alpha$$

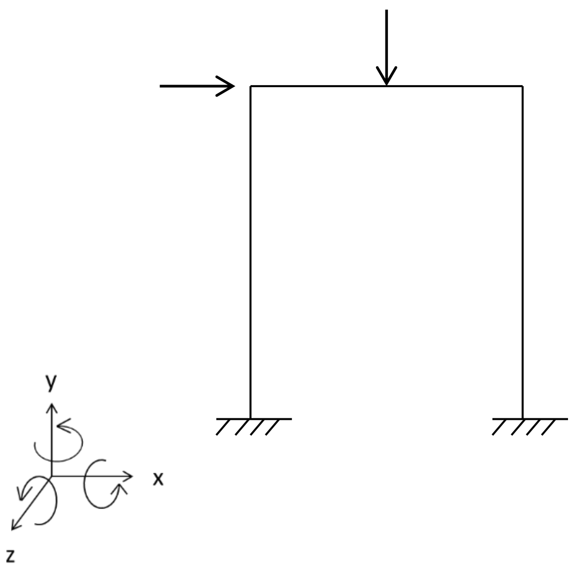
$$CZ = \operatorname{sen}\alpha$$

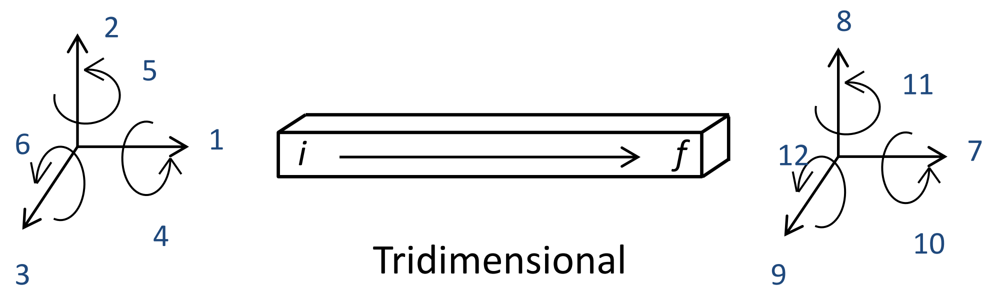
$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_6 \\ F_8 \\ F_{10} \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & CX & -CZ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & CZ & CX & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & CX & -CZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & CZ & CX \end{bmatrix} \end{array} * \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_8 \\ f_{10} \\ f_{12} \end{Bmatrix}$$

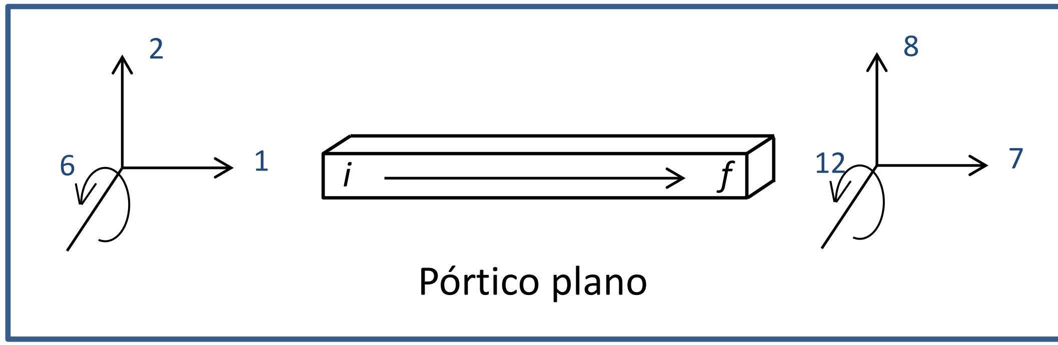
$[T]$ = matriz de transformación de coordenadas

$$\{F\} = [T] \cdot \{f\}$$

2.2.4. Matriz de transformación de coordenadas – pórticos planos





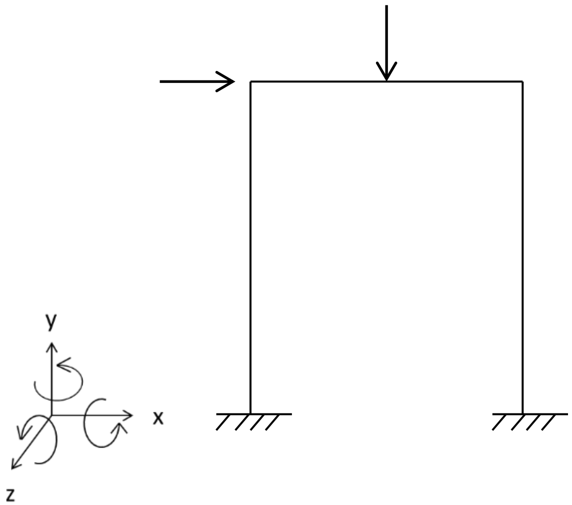


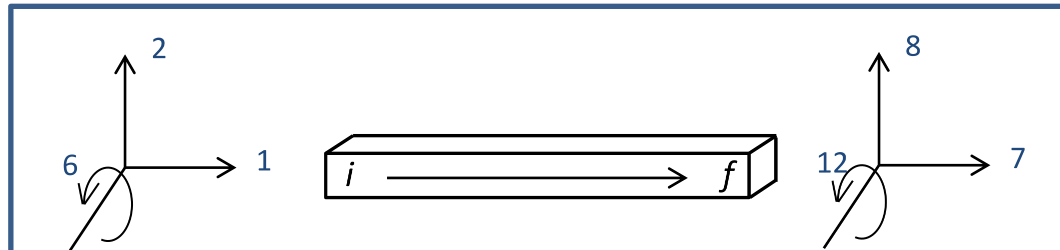
Estructuras planas localizadas en el plano XY

Al cambiar la orientación de los elementos en el plano XY, Z es invariante

f_6 y f_{12} son las mismas en coordenadas locales y globales

2.2.4. Matriz de transformación de coordenadas – pórticos planos





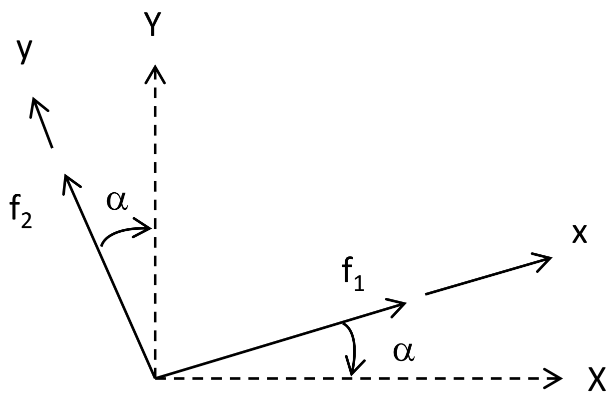
Pórtico plano

$$F_1 = f_1 \cos\alpha - f_2 \operatorname{sen}\alpha \qquad CX = \cos\alpha$$

$$F_2 = f_1 \operatorname{sen}\alpha + f_2 \cos\alpha \qquad CY = \operatorname{sen}\alpha$$

$$F_6 = f_6$$

α positivo en sentido horario



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} CX & -CY & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CY & CX & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & CX & -CY & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CY & CX & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] * \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_{12} \end{Bmatrix}$$

$[T]$ = matriz de transformación de coordenadas

$$\{F\} = [T] \cdot \{f\}$$

2.2.5. Matriz de transformación de coordenadas – pórticos espaciales

Matriz de transformación de coordenadas para un elemento de un pórtico espacial

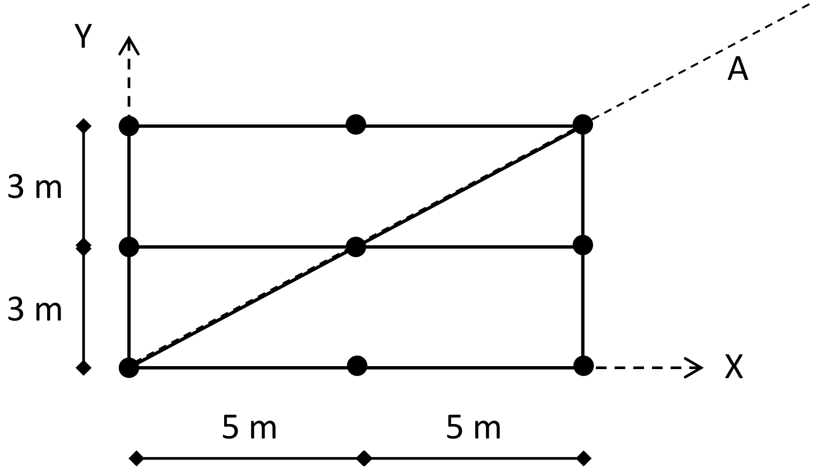
PROCEDIMIENTO:

- Definir el nudo inicial y final del elemento para determinar el vector unitario **x**.
- Calcular el vector unitario **x**

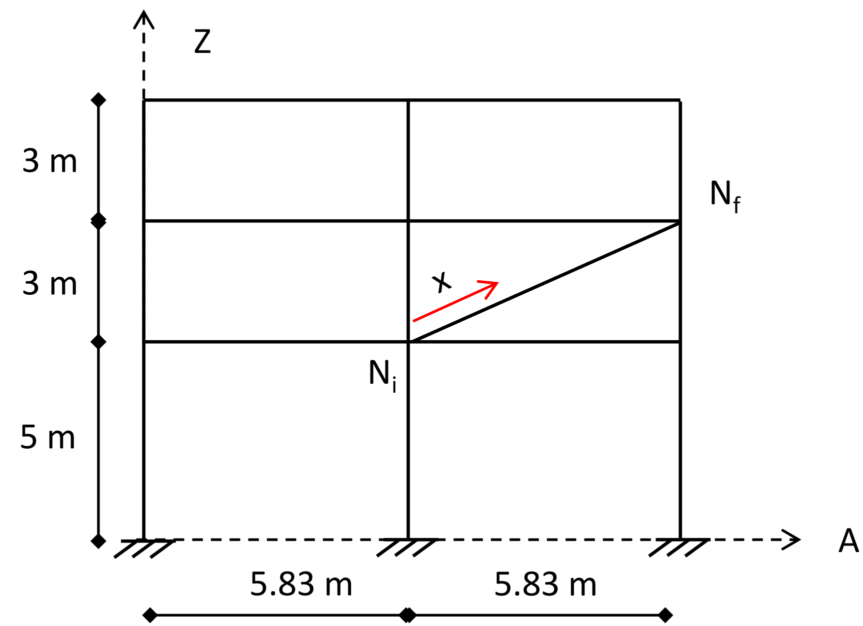
$$\boldsymbol{x} = \frac{X_f - X_i}{L}\boldsymbol{i} + \frac{Y_f - Y_i}{L}\boldsymbol{j} + \frac{Z_f - Z_i}{L}\boldsymbol{k}$$

- Definir y calcular un vector auxiliar unitario **x’** que no sea paralelo a **x** y que **x** y **x’** conformen un plano dentro del cual se encuentra el eje local **y**. El eje local **z** es perpendicular al plano formado por **x** y **x’**, formando un sistema de mano derecha con **x** y **x’**.
- Realizar el producto vectorial de **x** y **x’** condicionando de acuerdo con la regla de la mano derecha que **z** = **x** x **x’**.
- Calcular el vector **y**. **y** = **z** x **x**
- Ensamblar la matriz de transformación de coordenadas y expandirla para desplazamientos y giros en los dos extremos.

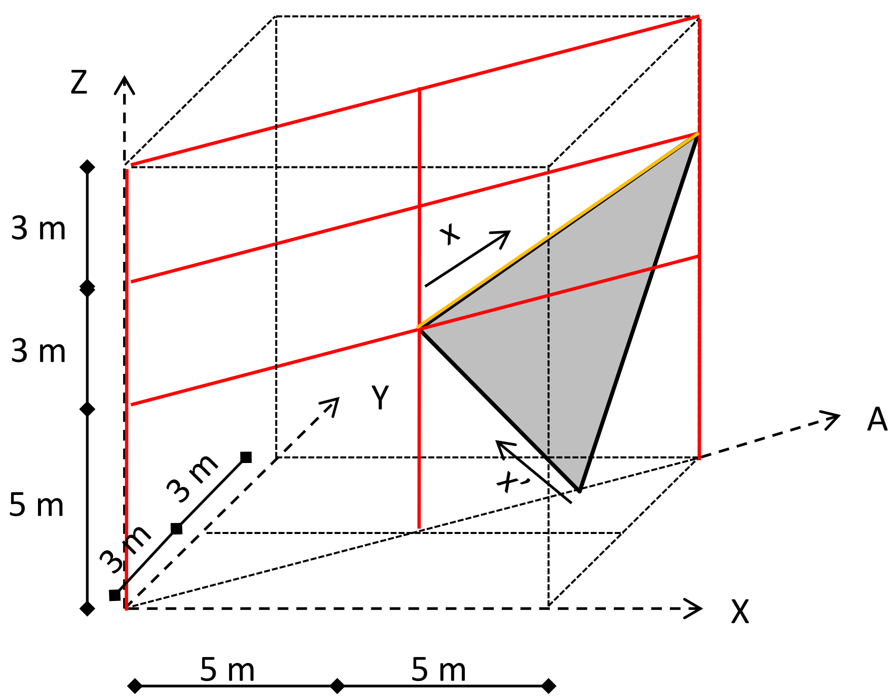
2.2.5. Matriz de transformación de coordenadas – pórticos espaciales



Planta estructura espacial



Pórtico en el eje A



2.2.5. Matriz de transformación de coordenadas – pórticos espaciales

$$T = \begin{array}{c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
0.762 & -0.391 & 0.513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.457 & -0.234 & -0.856 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.457 & 0.887 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.762 & -0.391 & 0.513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.457 & -0.234 & -0.856 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.457 & 0.887 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.762 & -0.391 & 0.513 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.457 & -0.234 & -0.856 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.457 & 0.887 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.762 & -0.391 & 0.513 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.457 & -0.234 & -0.856 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.457 & 0.887 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$\boxed{\text{Todas las matrices de transformación } [T] \text{ cumplen: } [T]^{-1} = [T]^{T}}$