

CONTENIDOS

MÓDULO 2: MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ

OBJETIVO ESPECÍFICO: Resolver cualquier tipo de sistema estructural, mediante el ensamble de la matriz global de rigidez de la estructura.

CONTENIDO:

1. Definir la matriz de rigidez local de cualquier elemento estructural
2. Deducir la matriz de transformación
3. Obtener la matriz global de rigidez
4. Obtener la solución de sistemas estructurales

MÓDULO 2: MÉTODO MATRICIAL DE RIGIDEZ

2.1. Matriz de rigidez local

Cerchas, vigas y pórticos rígidos



Ensamblaje de elementos estructurales unidos entre sí en un número finito de puntos discontinuos llamados *nodos*, y cargados solamente en esos puntos.

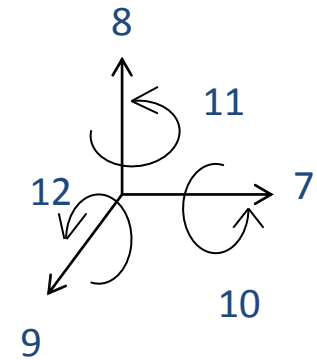
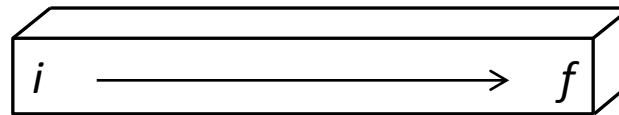
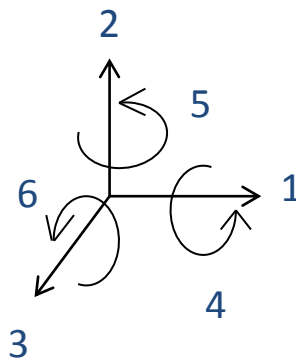
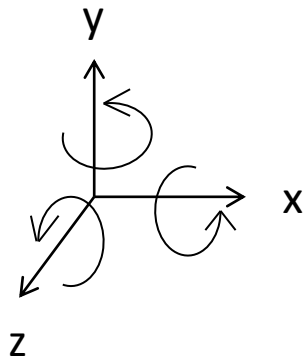
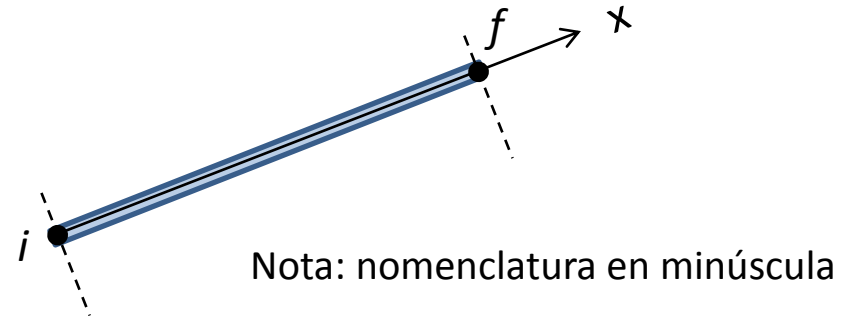
Cada elemento debe cumplir:

1. Equilibrio de fuerzas
2. Compatibilidad de desplazamientos
3. Relaciones entre fuerzas y desplazamientos (determinados según las propiedades geométricas y elásticas de los elementos)



2.1. Matriz de rigidez local

Sistema local de coordenadas: sistema de coordenadas del elemento



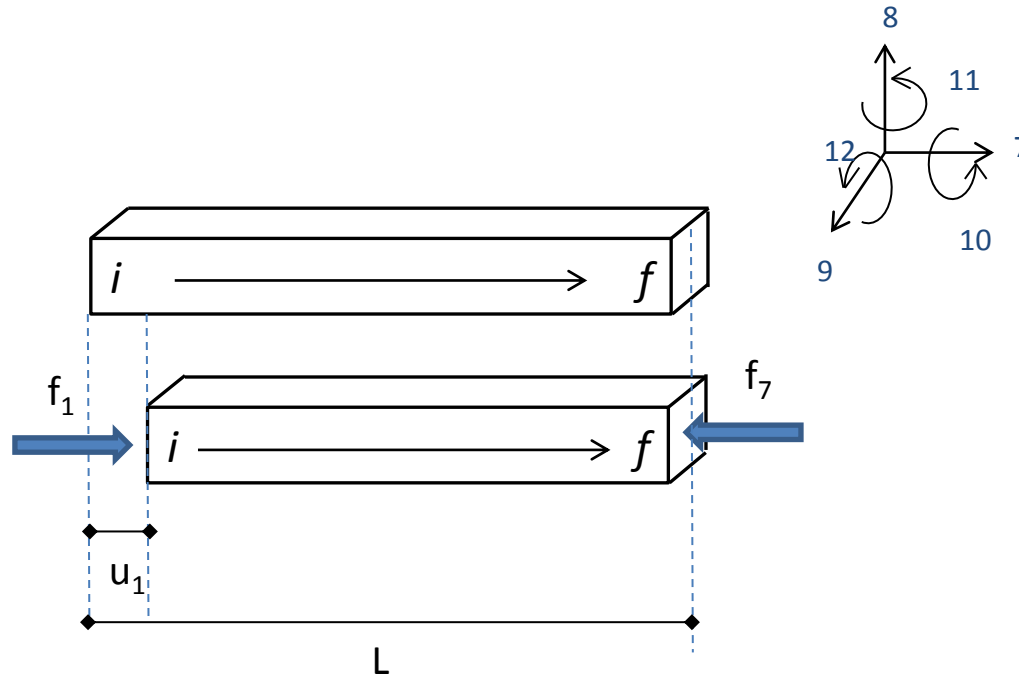
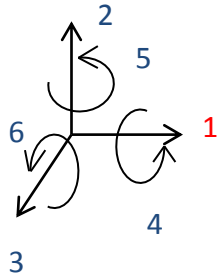
Para que la barra asuma una posición deformada: aplicar una serie de cargas en sus extremos.

Principio de superposición: permite calcular las fuerzas necesarias para producir cada uno de los desplazamientos de forma separada.

Fuerzas en los extremos de los elementos: axial, cortante, momento flector y momento torsor.

2.1. Matriz de rigidez local

Desplazamiento axial (u_1)



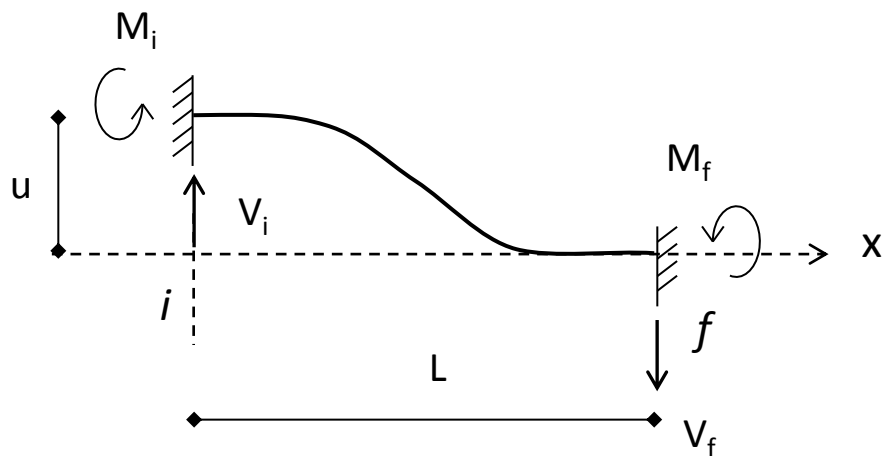
$$f_1 = \frac{AE}{L} u_1 \qquad f_7 = -\frac{AE}{L} u_1$$



Fuerzas necesarias para producir u_1 .

2.1. Matriz de rigidez local

Desplazamiento normal (u_2 y u_3)

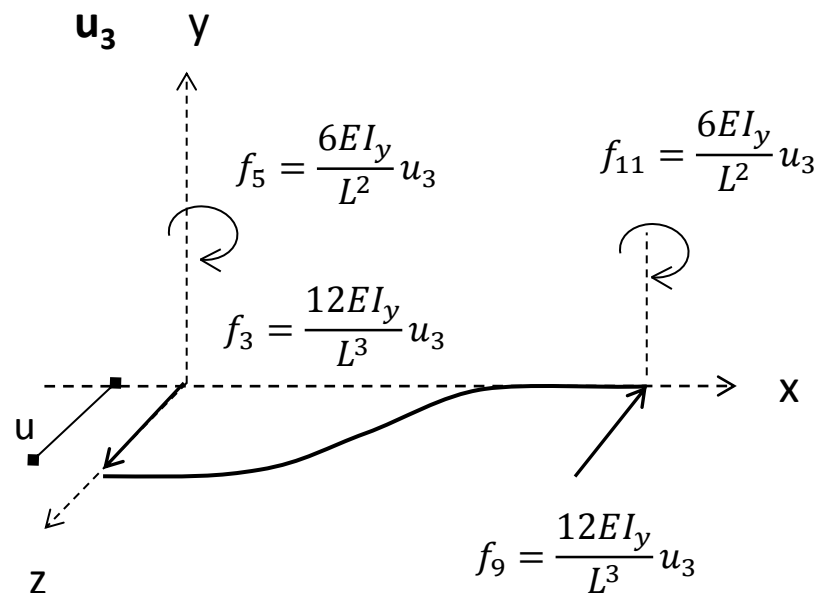
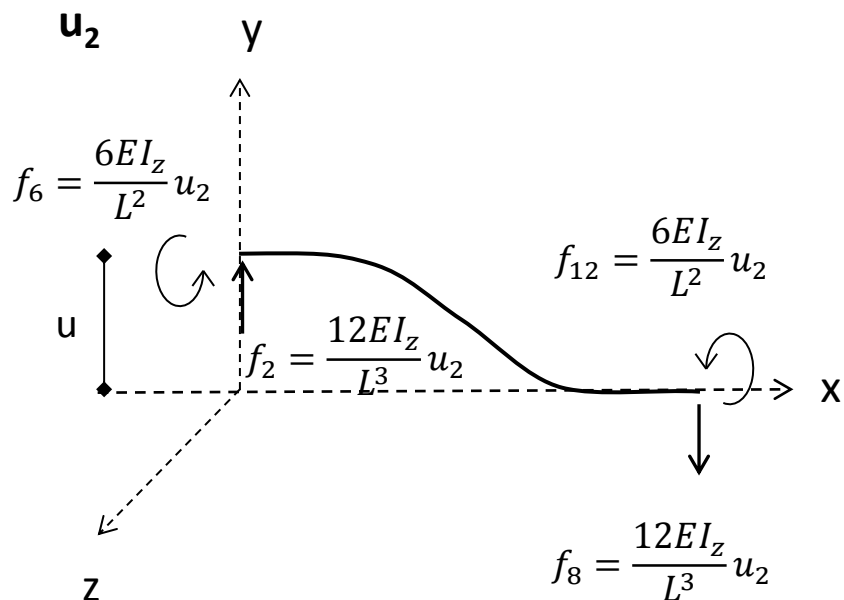
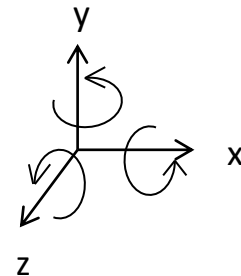


$$V_i = \frac{12EI}{L^3} u$$

$$V_f = \frac{12EI}{L^3} u$$

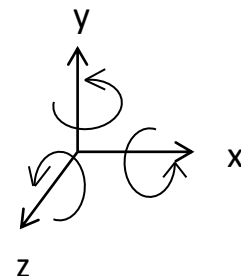
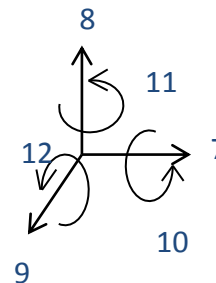
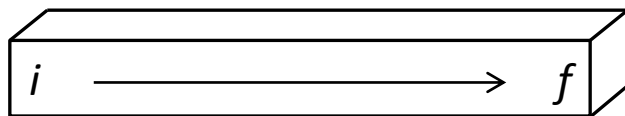
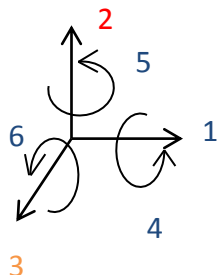
$$M_i = \frac{6EI}{L^2} u$$

$$M_f = \frac{6EI}{L^2} u$$



2.1. Matriz de rigidez local

Desplazamiento normal (u_2 y u_3)

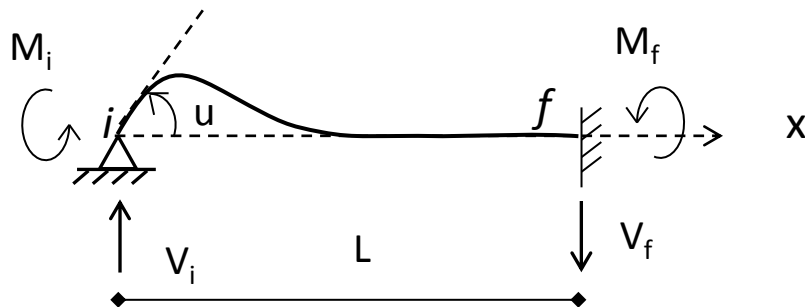


$$\underbrace{f_2 = \frac{12EI_z}{L^3}u_2 \quad f_6 = \frac{6EI_z}{L^2}u_2 \quad f_8 = -\frac{12EI_z}{L^3}u_2 \quad f_{12} = \frac{6EI_z}{L^2}u_2}_{\text{Fuerzas necesarias para producir } u_2.}$$

$$\underbrace{f_3 = \frac{12EI_y}{L^3}u_3 \quad f_5 = -\frac{6EI_y}{L^2}u_3 \quad f_9 = -\frac{12EI_y}{L^3}u_3 \quad f_{11} = -\frac{6EI_y}{L^2}u_3}_{\text{Fuerzas necesarias para producir } u_3.}$$

2.1. Matriz de rigidez local

Giro por flexión (u_5 y u_6)

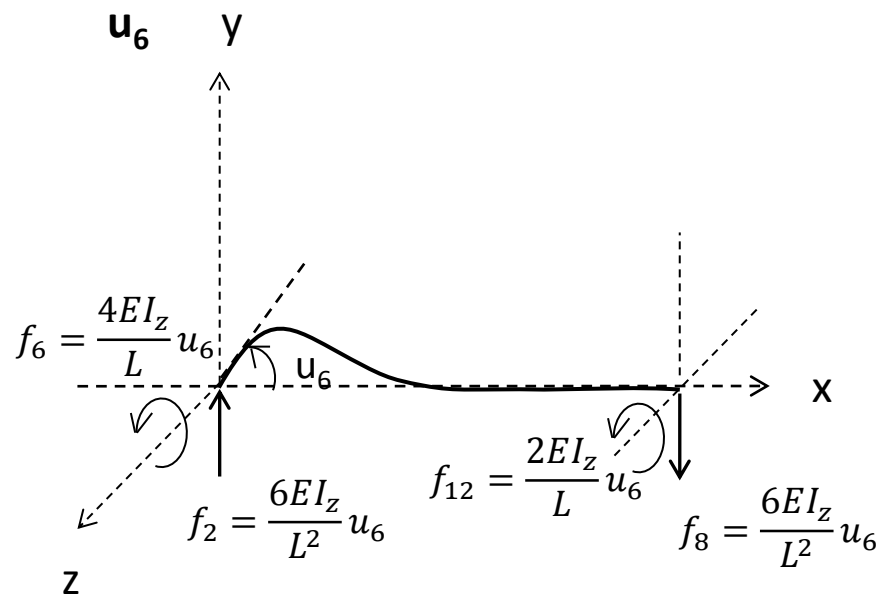
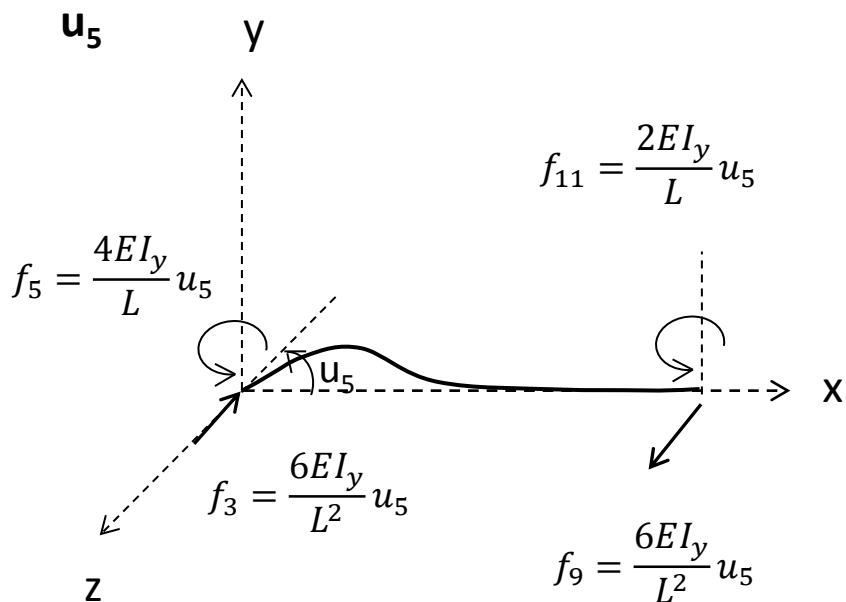
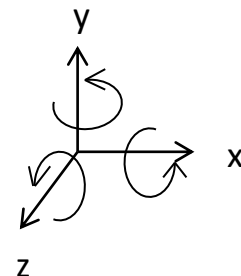


$$V_i = \frac{6EI}{L^2} u$$

$$V_f = \frac{6EI}{L^2} u$$

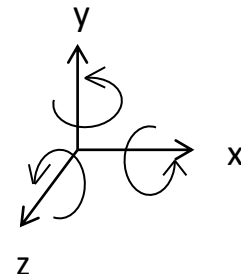
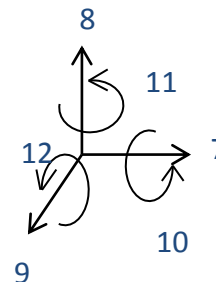
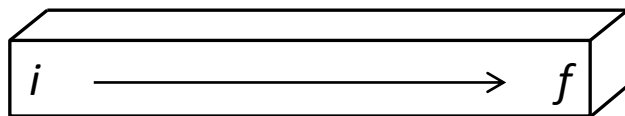
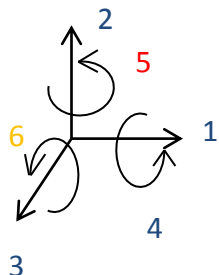
$$M_i = \frac{4EI}{L} u$$

$$M_f = \frac{2EI}{L} u$$



2.1. Matriz de rigidez local

Giro por flexión (u_5 y u_6)



$$f_3 = -\frac{6EI_y}{L^2}u_5 \quad f_5 = \frac{4EI_y}{L}u_5 \quad f_9 = \frac{6EI_y}{L^2}u_5 \quad f_{11} = \frac{2EI_y}{L}u_5$$

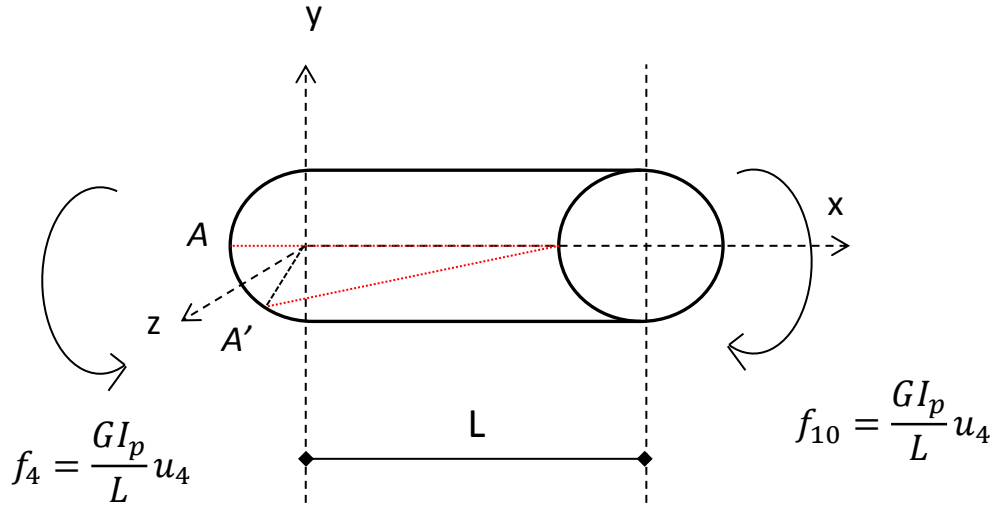
Fuerzas necesarias para producir u_5 .

$$f_2 = \frac{6EI_z}{L^2}u_6 \quad f_6 = \frac{4EI_z}{L}u_6 \quad f_8 = -\frac{6EI_z}{L^2}u_6 \quad f_{12} = \frac{2EI_z}{L}u_6$$

Fuerzas necesarias para producir u_6 .

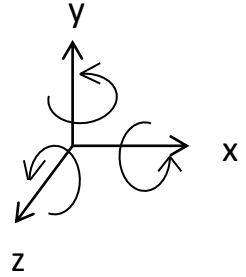
2.1. Matriz de rigidez local

Torsión (u_4)



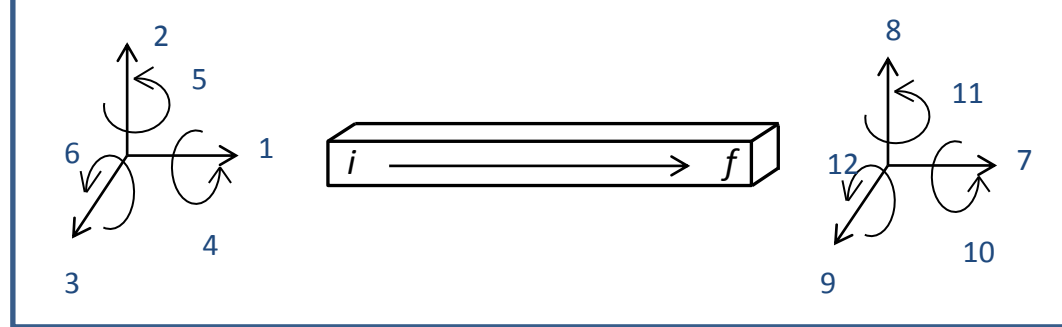
$$f_4 = \frac{GI_p}{L} u_4 \quad f_{10} = -\frac{GI_p}{L} u_4$$

Fuerzas necesarias para producir u_4 .



2.1. Matriz de rigidez local

Resumen



$$f_1 = \frac{AE}{L} u_1 \quad f_7 = -\frac{AE}{L} u_1$$

$$f_2 = \frac{12EI_z}{L^3} u_2 \quad f_6 = \frac{6EI_z}{L^2} u_2 \quad f_8 = -\frac{12EI_z}{L^3} u_2 \quad f_{12} = \frac{6EI_z}{L^2} u_2$$

$$f_3 = \frac{12EI_y}{L^3} u_3 \quad f_5 = -\frac{6EI_y}{L^2} u_3 \quad f_9 = -\frac{12EI_y}{L^3} u_3 \quad f_{11} = -\frac{6EI_y}{L^2} u_3$$

$$f_4 = \frac{GI_p}{L} u_4 \quad f_{10} = -\frac{GI_p}{L} u_4$$

$$f_3 = -\frac{6EI_y}{L^2} u_5 \quad f_5 = \frac{4EI_y}{L} u_5 \quad f_9 = \frac{6EI_y}{L^2} u_5 \quad f_{11} = \frac{2EI_y}{L} u_5$$

$$f_2 = \frac{6EI_z}{L^2} u_6 \quad f_6 = \frac{4EI_z}{L} u_6 \quad f_8 = -\frac{6EI_z}{L^2} u_6 \quad f_{12} = \frac{2EI_z}{L} u_6$$

Las fuerzas necesarias para producir u_7 , u_8 , u_9 , u_{10} , u_{11} y u_{12} se encuentran siguiendo el mismo procedimiento.

2.1. Matriz de rigidez local

$$\{f\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{u\}_{12 \times 1}$$

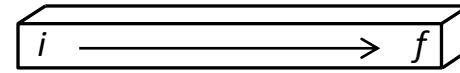
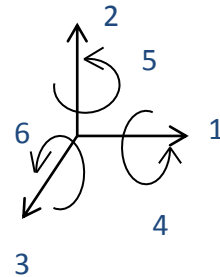
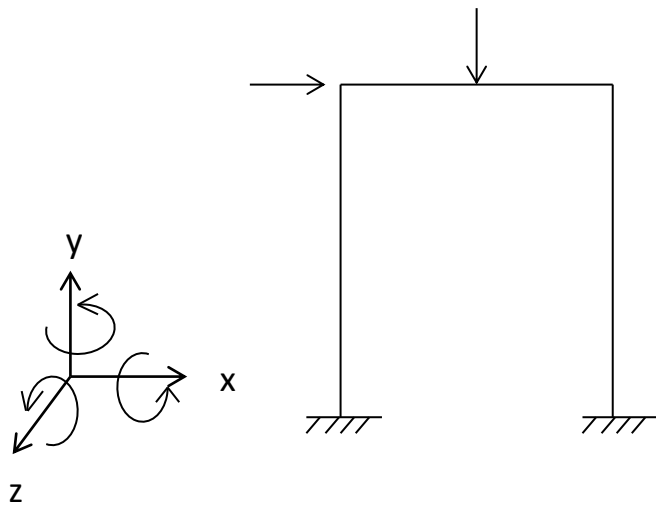
$$k = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}}^i & \overbrace{\begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}}^f \\ \begin{matrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

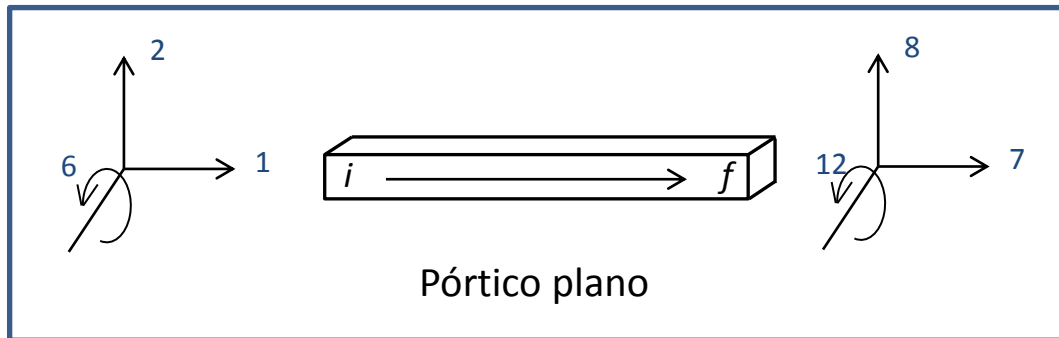
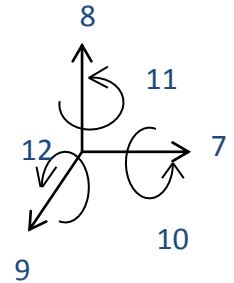
2.1. Matriz de rigidez local

- Material elástico (relación lineal entre las cargas y las deformaciones)
- Deformaciones pequeñas (cálculos con dimensiones iniciales)
- Efecto de las fuerzas axiales en la flexión despreciable
- Cargas aplicadas en los nudos de manera gradual y proporcional
- No se considera el efecto de las deformaciones debidas a las fuerzas cortantes
- No se considera la rigidez de los nudos
- Los elementos no se pandean por efecto de la carga axial y de la torsión
- Planos XY y XZ: planos principales de flexión, en ellos actúan las cargas
- Coincidencia entre el centro de cortante y el centro de torsión (por lo tanto, flexión y torsión son independientes)
- Los dos extremos del elemento son restringidos
- Para pórticos: uno de los planos de simetría debe coincidir con el plano de carga

2.1.1. Matriz de rigidez local de un elemento de pórticos planos



Tridimensional



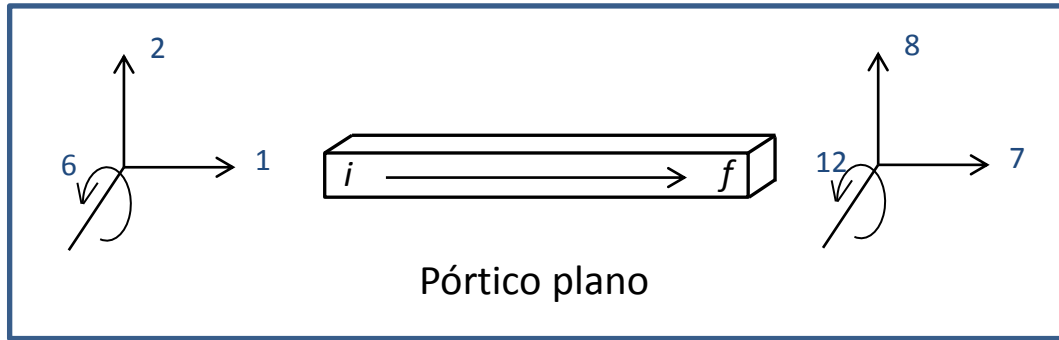
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

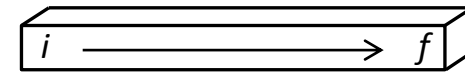
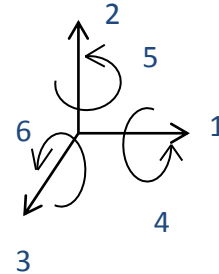
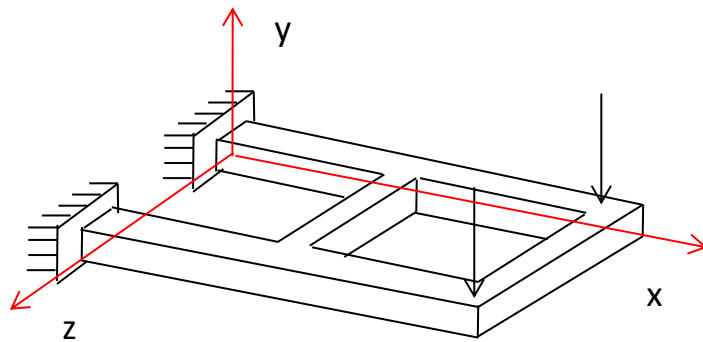
Pórtico plano: fuerzas aplicadas en el plano de la estructura

2.1.1. Matriz de rigidez local de un elemento de pórticos planos

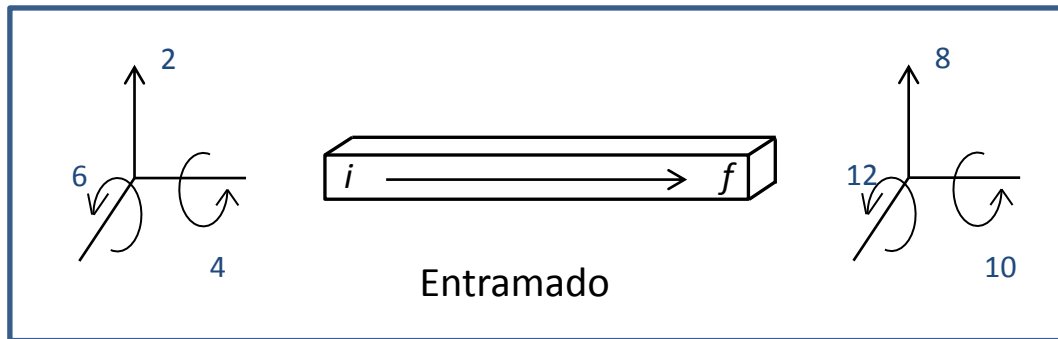
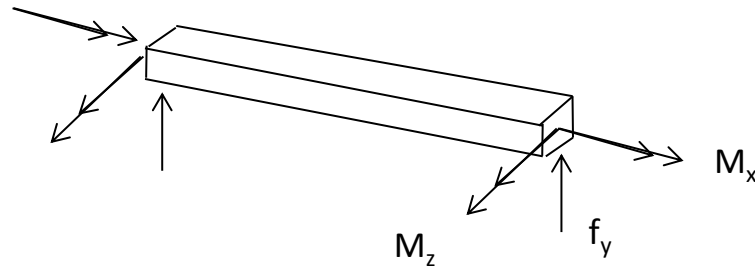
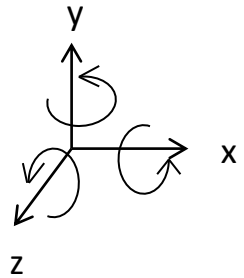
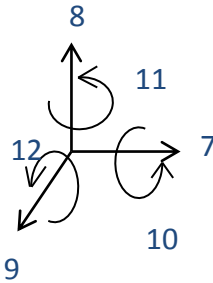


$$k = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 12 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

2.1.2. Matriz de rigidez local de un elemento de entramados



Tridimensional

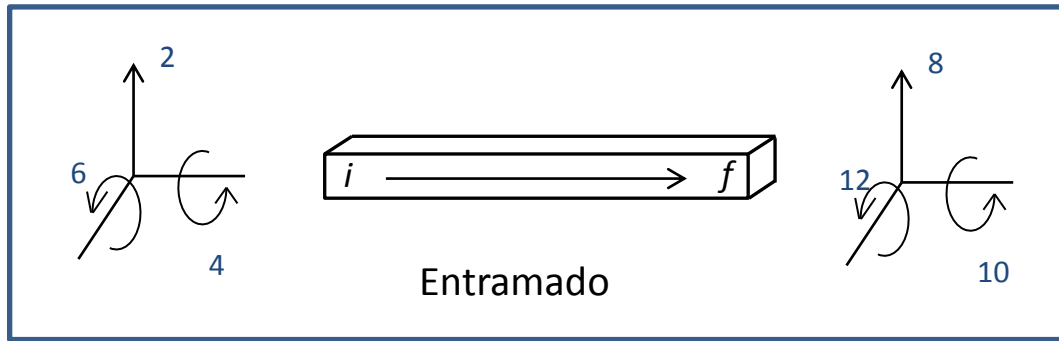


$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

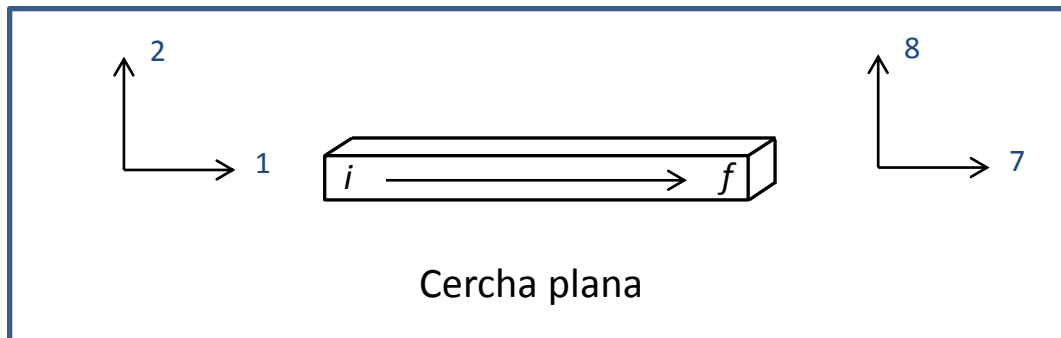
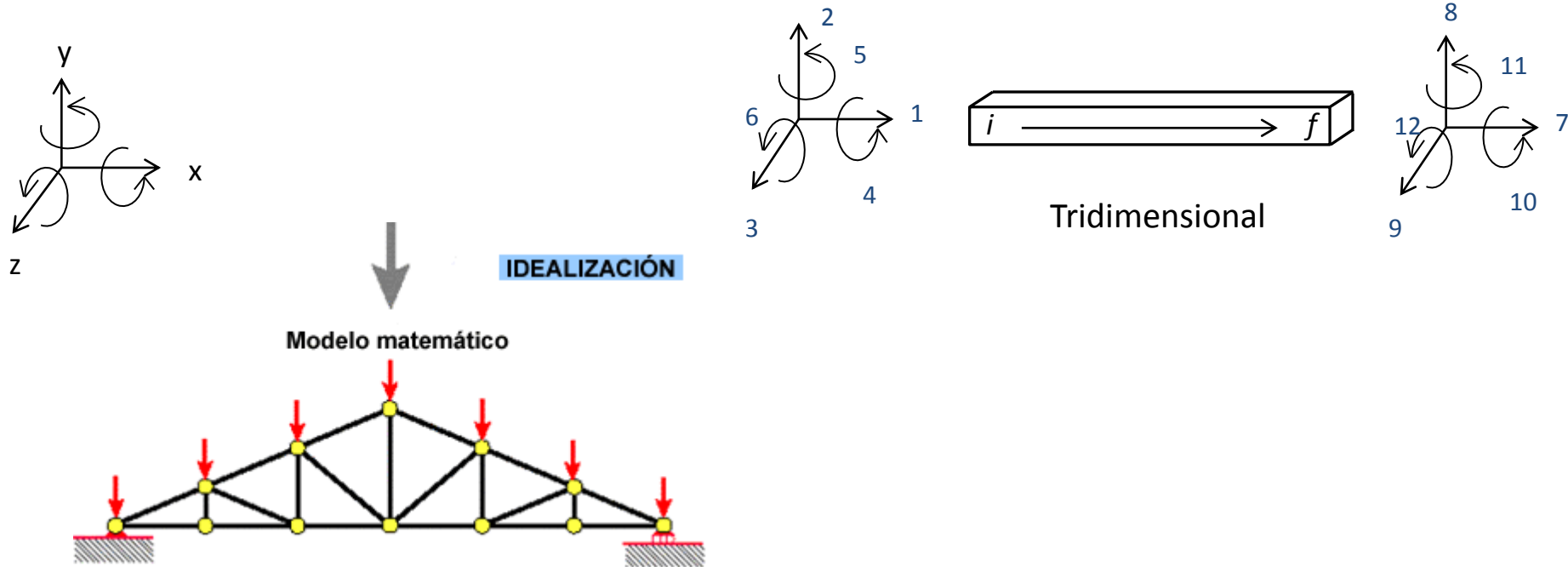
$$\sum M_z = 0$$

2.1.2. Matriz de rigidez local de un elemento de entramados



$$k = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} 8 & 10 & 12 \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

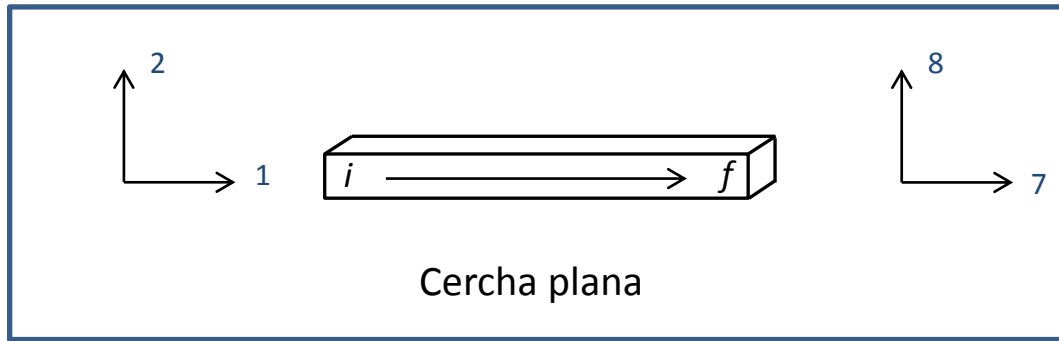
2.1.3. Matriz de rigidez local de un elemento de cercha plana



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

2.1.3. Matriz de rigidez local de un elemento de cercha plana



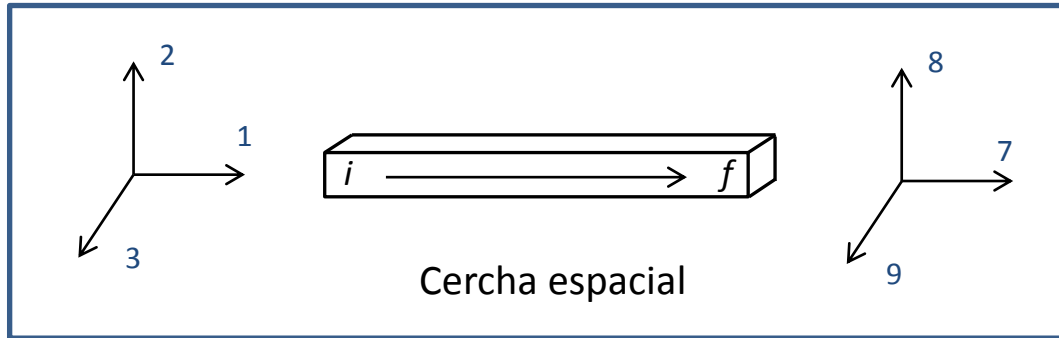
$$k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix}$$



$$k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero bajo deformaciones pequeñas u_2 y u_8 no afectan la deformación de las barras

2.1.4. Matriz de rigidez local de un elemento de cercha espacial



Solo u_1 y u_7 afectan la deformación de las barras

$$k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \end{array} \end{array}$$