Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filière : AP1
Module : Algèbre linéaire
Année Universitaire : 20/21.

Feuille de TD $n°2$

Exercice 1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix}.$$
Montrer que le déterminant de A est $(x+y+z)^3$.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A_λ, puis montrer que A_λ est inversible si et seulement si ($\lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$).
2. Discuter suivant le paramètre λ la valeur du rang de A_λ.

Exercice 3. Soit le déterminant d'ordre n suivant :
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1. Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.
2. En déduire la différence $\Delta_n - \Delta_{n-1}$, puis calculer Δ_n.

Exercice 4. (Déterminant de Vandermonde)
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant suivant :
$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Application : Calculer le déterminant de la matrice (i^j), pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$.

Exercice 5. Inverser les matrices suivantes par la méthode des cofacteurs
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $(\mathcal{S})$ le système des trois équations suivantes :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} -x+y+3z=12 \\ 2x-y+2z=-8 \\ 4x+y-4z=15 \end{array} \right.$$

1. Mettre $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $AX=b$, où ${}^tX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
3. En utilisant la matrice A^{-1} résoudre le système $(\mathcal{S})$.

Exercice 7. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0=1$, $b_0=2$, $c_0=7$ et vérifiant les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1}=3a_n+b_n \\ b_{n+1}=3b_n+c_n \\ c_{n+1}=3c_n \end{array} \right.$$

On souhaite exprimer (a_n), (b_n) et (c_n) uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne ${}^tX_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1}=AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
2. Soit
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer N^2, N^3 et N^p pour $p \geq 3$.
3. Montrer que
$$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 8. Résoudre par trois méthodes différentes (la méthode matricielle, la méthode de Cramer et la méthode d'élimination de Gauss) les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=4 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x-2y+2z=1 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+2y+z=2 \end{array} \right.$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} 2x+4y+7z=2 \\ 8x+3y+5z=1 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ 6x+y+z=-4 \\ 2x-3y-z=0 \\ -x-7y-2z=7 \\ x-y=1 \end{array} \right.$$

Solution 1.

$$A = \begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix}.$$

On a

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} c_1-c_2 & c_2 & c_3-c_2 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} -x-y-z & 2x & 0 \\ x+y+z & y-z-x & x+y+z \\ 0 & 2z & -x-y-z \end{vmatrix} & \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -x-y-z & 2x & 0 \\ 0 & x+y-z & x+y+z \\ 0 & 2z & -x-y-z \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2+\ell_1 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

$$= -(x+y+z)\begin{vmatrix} x+y-z & x+y+z \\ 2z & -x-y-z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^2\begin{vmatrix} x+y-z & -1 \\ 2z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^3.$$

2ème méthode :

$$|A| = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} & \begin{matrix} \ell_1+\ell_2+\ell_3 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2-c_1 & c_3-c_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ 2y & -x-y-z & 0 \\ 2z & 0 & -x-y-z \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (x+y+z)(-x-y-z)^2 = (x+y+z)^3.$$

Solution 2.

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1.

$$|A_\lambda| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \sum_{j=1}^4 c_j & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda+3 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2-\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1 \end{array}$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

$A_\lambda \quad \text{est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad |A_\lambda| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \neq -3 \ \text{ et } \ \lambda \neq 1).$

2. $\diamond$ $rg(A_\lambda) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |A_\lambda| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \neq -3 \ \text{ et } \ \lambda \neq 1).$

   $\diamond$ $\lambda = -3 \quad \Rightarrow \quad |A_\lambda| = 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A_{-3}) \leq 3.$

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2-c_1 & c_3-c_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 16 \neq 0.$$

   Δ est déterminant d'ordre 3, non nul extrait de A_{-3}, d'où $rg(A_{-3}) = 3$.

   $\diamond$ $\lambda = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad rg(A_1) = 1,$$

   car $a_{11} \neq 0$ et toutes les colonnes (resp. les lignes) de A sont identiques. De ce fait, tout déterminant d'ordre $2, 3$ où 4 extrait de A_1 est nul.

<u>Solution 3.</u>

1. En développant le déterminant Δ_n suivant la première colonne, on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta}$$
$$= 2\Delta_{n-1} - \Delta.$$

On développe encore une fois le déterminant Δ par rapport à la première ligne cette fois-ci, on trouve $\Delta = \Delta_{n-2}$. Ainsi, $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

2. $\diamond$ D'après la première question, on a $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta_n - \Delta_{n-1} &= \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} &= \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}, \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} &= \Delta_{n-3} - \Delta_{n-4}, \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \Delta_4 - \Delta_3 &= \Delta_3 - \Delta_2. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 4 - 3 = 1$. Car

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 - 2c_2 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$\diamond$ D'après la première partie de la deuxième qustion, on a $\Delta_n - \Delta_{n-1} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_{n-1} + 1 \\ &= \Delta_{n-2} + 2 \\ &\ \ \vdots \\ &= \Delta_2 + (n-2) \\ &= 3 + (n-2) = (n+1). \end{aligned}$$

<u>Solution 4.</u> (Déterminant de Vandermonde)

$\diamond$ Nous allons démontrer que

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{1}$$

à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, on a

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i).$$

Pour $n = 3$, on a

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i).$$

Donc, la propriété est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$.
On suppose que $V_{n-1} = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i)$ pour n fixé quelconque, et on va démontrer que

$$V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

On a

$$V_n = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 - x_n c_1 & c_3 - x_n c_2 & \dots & c_n - x_n c_{n-1} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_n x_1 & \dots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_n x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1^2 - x_n x_1 & \dots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ x_2 - x_n & x_2^2 - x_n x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{V_{n-1}}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) V_{n-1} \overset{H.R}{=} \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

D'où, le résultat.

◇ *Application* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \dots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \quad \text{(ceci d'après la formule (1))} \\ &= n!\Big((n-1)(n-2)\dots 1\Big)\Big((n-2)(n-3)\dots 1\Big)\dots\Big((3-1)(3-2)\Big)\Big((2-1)\Big) \\ &= n! \times (n-1)! \times (n-2)! \times \dots \times 2! \times 1! = \prod_{j=1}^{n} j!. \end{aligned}$$

Solution 5.

◇ Pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Alors, A est inversible. De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t Com(A),$$

avec $Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. D'où

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ Pour

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$det(B) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 + c_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

D'où, B est inversible. Et, on a

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} {}^t Com(B),$$

avec

$$Com(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$