Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filière : AP1
Module : Algèbre linéaire
Année Universitaire : 20/21.

Feuille de TD $n°2$

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix}.$$

Montrer que le déterminant de A est $(x+y+z)^3$.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A_λ, puis montrer que A_λ est inversible si et seulement si ($\lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$).
2. Discuter suivant le paramètre λ la valeur du rang de A_λ.

Exercice 3. Soit le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1. Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.
2. En déduire la différence $\Delta_n - \Delta_{n-1}$, puis calculer Δ_n.

Exercice 4. (Déterminant de Vandermonde)
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant suivant :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Application : Calculer le déterminant de la matrice (i^j), pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$.

Exercice 5. Inverser les matrices suivantes par la méthode des cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $(\mathcal{S})$ le système des trois équations suivantes :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} -x+y+3z=12 \\ 2x-y+2z=-8 \\ 4x+y-4z=15 \end{array} \right.$$

1. Mettre $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $AX=b$, où ${}^tX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
3. En utilisant la matrice A^{-1} résoudre le système $(\mathcal{S})$.

Exercice 7. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0=1$, $b_0=2$, $c_0=7$ et vérifiant les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1}=3a_n+b_n \\ b_{n+1}=3b_n+c_n \\ c_{n+1}=3c_n \end{array} \right.$$

On souhaite exprimer (a_n), (b_n) et (c_n) uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne ${}^tX_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1}=AX_n$. En déduire que $X_n = A^nX_0$.
2. Soit
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer N^2, N^3 et N^p pour $p \geq 3$.
3. Montrer que
$$A^n = 3^nI_3 + 3^{n-1}nN + 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2.$$
4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 8. Résoudre par trois méthodes différentes (la méthode matricielle, la méthode de Cramer et la méthode d'élimination de Gauss) les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=4 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x-2y+2z=1 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+2y+z=2 \end{array} \right.$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} 2x+4y+7z=2 \\ 8x+3y+5z=1 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ 6x+y+z=-4 \\ 2x-3y-z=0 \\ -x-7y-2z=7 \\ x-y=1 \end{array} \right.$$

Solution 6.

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} -x+y+3z=12 \\ 2x-y+2z=-8 \\ 4x+y-4z=15 \end{array} \right.$$

1. Soit A la matrice associée au système $(\mathcal{S})$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

De plus, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix}$. Alors, le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à l'écriture matricielle $AX = b$.

2. On a

$$det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2+c_1 & c_3+3c_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

D'où, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t Com(A)$, avec

$$Com(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 6 \\ 7 & -8 & 5 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 16 & -8 & 8 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la première question, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad AX = b \quad & \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 16 & -8 & 8 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 43 \\ 376 \\ 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution 7.

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 7 \end{array} \right.$$

1. $\diamond$ Soit A la matrice associée au système $(\mathcal{S})$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De plus, $(\mathcal{S})$ est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Si on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors, le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à l'écriture $X_{n+1} = AX_n$.

$\diamond$ Raisonnement par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, on a

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 \quad \text{(d'après ce qui précède } X_{n+1} = AX_n) \\ &= A^1 X_0. \end{aligned}$$

D'où, la propriété est vraie pour $n = 0$.
H.R. : On suppose que, $X_n = A^n X_0$ pour n fixé quelconque, et on va démontrer que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
On a,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A(A^n X_0) \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

D'où, le résultat.

2. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_3.$$

Pour $p \geq 3$, on a

$$N^p = N^{p-3} N^3 = N^{p-3} \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_3.$$

3. On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = N + 3\mathcal{I}_3.$$

D'où,

$$\begin{aligned} A^n = (N+3\mathcal{I}_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k (3\mathcal{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} C_n^k N^k \\ &= 3^n C_n^0 N^0 + 3^{n-1} C_n^1 N^1 + 3^{n-2} C_n^2 N^2 \\ &= 3^n \mathcal{I}_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2. \end{aligned}$$

4. D'une part, on a

$$\begin{aligned} A^n &= 3^n \mathcal{I}_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3^{n-1} n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} X_n = A^n X_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_n = 3^n + 2.3^{n-1} n + 7.3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2.3^n + 7.3^{n-1} n \\ c_n = 7.3^n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_n = 3^{n-2} \big(\frac{7}{2} n(n-1) + 6n + 9 \big) \\ b_n = 3^{n-1}(7n+6) \\ c_n = 7.3^n. \end{cases} \end{aligned}$$

Solution 8.

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

◇ La méthode matricielle :
Soit A la matrice associée au système $(\mathcal{S}_1)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le système $(\mathcal{S}_1)$ est équivalent à l'écriture matricielle

$AX = b$. De plus, on a

$$det(A) = \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} c_1+c_2 & c_2 & c_3+c_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

D'où, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^tCom(A)$, avec

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = b \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◇ La méthode de Cramer :
Comme $(\mathcal{S}_1)$ est un système de Cramer ($det(A) \neq 0$). Alors, $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ et $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$. Avec,

$$\Delta = det(A) = -2,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} = \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -11 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{array} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -11 & -1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = -8.$$

D'où,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -7, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -7 \quad \text{et} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 4.$$

◇ La méthode d'élimination de Gauss :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =4 \\ 2x & -y & +3z & =5 \\ 3x & -2y & +2z & =1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2-2\ell_1 \\ \ell_3-3\ell_1 \end{array}\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =4 \\ & y & +z & =-3 \\ & y & -z & =-11 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3-\ell_2 \end{array}\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & =4 \\ & y & +z & =-3 \\ & & -2z & =-8 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x & =-7 \\ y & =-7 \\ z & =4. \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+2y+z=2 \end{array}\right.$$

◇ La méthode matricielle :
Soit A la matrice associée au système $(\mathcal{S}_2)$, on a

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors le système $(\mathcal{S}_2)$ est équivalent à l'écriture matricielle $AX=b \Leftrightarrow X=A^{-1}b$. De plus, on a

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2-2\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10 \neq 0.$$

D'où, A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}{}^tCom(A)$, avec

$$Com(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & -4 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$X = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -19 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

◇ La méthode de Cramer :
Puisque, $det(A) = 10 \neq 0$, alors $(\mathcal{S}_2)$ est un système de Cramer. D'où, $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ et $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$. Avec,

$$\Delta = det(A) = 10,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -19,$$

$$\Delta y = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 + 2c_2 & c_2 & c_3 + c_2 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\Delta z = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 + 2c_1 & c_3 - c_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 17.$$

D'où,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{19}{10}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{11}{10} \quad \text{et} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{17}{10}.$$

◇ La méthode d'élimination de Gauss :

$$(\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{llll} x & -2y & +3z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = -1 \\ x & +2y & +z & = 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{llll} x & -2y & +3z & = 1 \\ & 5y & -5z & = -3 \\ & 4y & -2z & = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \frac{4}{5}\ell_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{llll} x & -2y & +3z & = 1 \\ & 5y & -5z & = -3 \\ & & 2z & = \frac{17}{5} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = -\frac{19}{10} \\ y & = \frac{11}{10} \\ z & = \frac{17}{10}. \end{array} \right.$$

Solution 9.

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + 7z = 2 \\ 8x + 3y + 5z = 1 \end{array} \right.$$

Soit A la matrice associée au système $(\mathcal{S}_1)$, alors

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculons d'abord le rang de A.
Comme A est de type $(2,3)$, alors $rg(A) \leq 2$. De plus, on a

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -26 \neq 0,$$

d'où $rg(A) \geq 2$. Par conséquent, $rg(A) = 2$.

On peut donc considérer que $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ est un déterminant principal, par suite les deux premières équations sont les équations principales et x, y sont les inconnues principales. z sera considérée comme un paramètre. Le système $(\mathcal{S}_1)$ implique donc le système de Cramer suivant :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x + 4y = 2 - 7z \\ 8x + 3y = 1 - 5z. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on va appliquer la méthode d'élimination de Gauss, qui donne :

$$\begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 - 4\ell_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} 2x & +4y & = 2 - 7z \\ & -13y & = -7 + 23z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{26}(-2 + z) \\ y & = \frac{7}{13} - \frac{23}{13}z, \ z \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Pour la solution du système $(\mathcal{S}_2)$, voir le polycopié du cours.