Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filière : AP1
Module : Algèbre linéaire
Année Universitaire : 21/22.

Feuille de TD $n°1$

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer, si possible, les produits : AB, BA, A^2, AC, CA, C^2, BC, CB et B^2.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \; A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les matrices réelles B telles que $AB = BA$.

Exercice 4. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre s. Montrer que si A et B commutent alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \; (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} \text{ (Formule du binôme de Newton).}$$

Ici, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binômial.
Application : Développer $(A+B)^4$, dans le cas où A et B commutent.

Exercice 5. Soient les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - \mathcal{I}_3,$$

avec $\mathcal{I}_3$ l'identité d'ordre 3.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire A^n.

Exercice 6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - \mathcal{I}_3)$ et $(A - \mathcal{I}_3)^2$.
2. En déduire A^n pour tout n.

Exercice 7. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2\mathcal{I}_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 9. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A + \mathcal{I}_3)$, $(A + \mathcal{I}_3)^2$ et $(A + \mathcal{I}_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10. Une matrice carrée A est nilpotente d'ordre p si p est un entier supérieur ou égal à 1, tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que la matrice $(\mathcal{I} - A)$ est inversible, avec pour inverse :

$$(\mathcal{I} - A)^{-1} = \mathcal{I} + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

2. Appliquer ce résultat, dit méthode de Waugh, pour obtenir la matrice inverse de $(\mathcal{I} - A)$ dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & sin(x) \\ 1 & 0 & -cos(x) \\ sin(x) & -cos(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $M - \mathcal{I}_4$ est nilpotente, c-à-d qu'il existe $p \geq 1$ tel que $(M - \mathcal{I}_4)^p = 0$.
2. En déduire M^n, pout tout $n \geq 1$.

Solution 1.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

BA n'existe pas,

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 8 \\ 12 & 7 \end{pmatrix},$$

AC n'existe pas,

CA n'existe pas,

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 10 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

CB n'existe pas,

$B^2 = BB$ n'existe pas.

Solution 2.

Nous allons démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n.

Pour $n = 1$,

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$,

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour n fixé quelconque, et on va démontrer que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A.A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, le résultat.

Solution 3.

On pose

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} AB = BA \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad &\left\{ \begin{array}{l} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c+d = d \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ a \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.