# Solution la série de TD n°1

**Exercice n°1 :** On souhaite étudier le comportement du circuit électrique

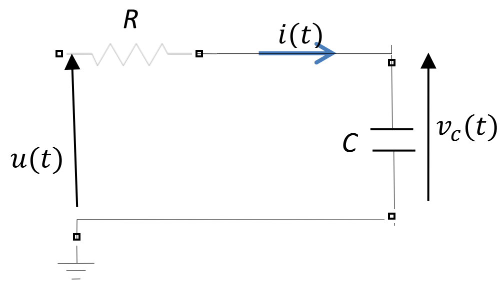


**Figure 1 :** Etude d'un circuit *R-C*

1- Donner l'équation différentielle :

$u(t) = R \times i(t) + v_c(t)$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … . (1)

- Exprimer $i(t)$ en fonction $v_c(t)$ :

Soit : $v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$ $\quad et \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow q(t) = \int i(t) \times dt$

$$\Rightarrow v_c(t) = \frac{1}{C} \times \int i(t).dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \times \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

On remplace (2) dans (1), on aura :

$u(t) = R \times C \times \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$……………………………………………………………………………..(3)

La relation (3) représente l'équation différentielle du système liant $u(t)$ et $v_c(t)$.

2- Trouver l'expression de la sortie $v_c(t)$ (Les conditions initiales sont nulles)

Résoudre l'équation différentielle donnée en (3) :

Etapes de calcul :

**a- Solution générale** $v_{c1}(t)$ (sans second membre) :

$$R.C \times \frac{dv_{c1}(t)}{dt} + v_c(t) = 0 \Rightarrow \frac{dv_{c1}(t)}{dt} = -\frac{1}{R.C} v_{c1}(t)$$

La solution est :

$v_{c1}(t) = \pm e^{\alpha} \times e^{-\frac{1}{R.C}t} = k.e^{-\frac{1}{R.C}t}$ tel que $\pm e^{\alpha} = k$

**b- Solution particulière** $v_{c2}(t)$ (avec second membre) :

Le signal d'entrée étant un signal constant (de nature échelon), $u(t) = u_0$=constant.

$$R.C \times \frac{dv_{c2}(t)}{dt} + v_{c2}(t) = u_0$$

On remarque bien que $v_{c2}(t) = u_0$ est une solution pour cette équation.

c- **La solution de l'équation différentielle (3) est** :

$$v_c(t) = v_{c1}(t) + v_{c2}(t)$$
$$v_c(t) = k.e^{-\frac{1}{R.C}t} + u_0$$

- Calcul de la constante $k$ Les conditions initiales étant nulles ($v_c(0) = 0$) :

$$v_c(0) = 0 \Rightarrow 0 = k + u_0$$
$$\Rightarrow k = -u_0$$
$$v_c(t) = u_0(1 - e^{-\frac{1}{R.C}t})$$

3- Trouver la valeur de la constante de temps $\tau$ pour laquelle la sortie atteint 63% de la valeur finale de la sortie :

- Calcul de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty} v_c(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[u_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R.C}}\right)\right] = u_0$$

$$v_c(\infty) = u_0$$

- Calcul de $\tau$ :

$$v_c(\tau) = 0.63 \times u_0$$
$$u_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{R.C}}\right) = 0.63 \times u_0$$

$$\Rightarrow \tau = R.C$$

4- Calculer le temps $t_r$pour lequel la sortie atteint 95% de la valeur finale :

$$v_c(t_r) = u_0\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95 \times u_0$$

$$\Rightarrow t_r \simeq 3.\tau$$

**Exercice 2 :** Un débit $Q_e(t)$ alimente un réservoir. Une pompe volumique soutire un débit constant $Q_s(t)$ **(voir la Figure 2 de la série de TD).**

***Les données :***

La section transversale du réservoir est : $S = 0.25m^2$

Les conditions initiales sont : $H = 1m,\ \ Q_{e0} = Q_{s0} = 0.02m^3/s$.

A $t = 0$, on augmente le débit $Q_e(t)$ d'une variation $q_e = 0.001m^3/s$

1- Exprimer la variation du volume du liquide dans le réservoir en un temps $dt$, considéré très petit, en fonction des débits $Q_e(t)$ et $Q_s(t)$ et $dt$.

$$\frac{dv(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

Sachant que les conditions initiales [ $Q_{e0} = Q_{s0}\ \ et\ \ H = 1m$]

$$S\frac{dh(t)}{dt} = [(Q_{e0} + q_e) - Q_s(t)]$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}q_e = \frac{1}{0.25} \times 0.001$$

$$H(t) = \int \frac{dh(t)}{dt}dt = \frac{1}{S} \times q_e \times t + C = \frac{1}{0.25} \times 0.001 \times t + C$$

$$H(0) = 1 = \frac{1}{0.25} \times 0.001 \times 0 + C \Rightarrow C = 1$$

L'évolution de la hauteur:

$$H(t) = 0.004 \times t + 1$$