Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Département Automatique
Module : Traitement du signal
Master I en Automatique et Systèmes/ Automatique et Informatique Industrielle
Année universitaire 2019-2020

Série de TD N°1
Echantillonnage

Exercice 1

Donner la fréquence théorique d'échantillonnage des signaux :

$x(t)=1$ $\quad$ $x(t)=\delta(t)$ $\quad$ $x(t)=e^{j2\pi f_0 t}$ $\quad$ $x(t)=\cos(2t)\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$

$x(t)=\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_2=34khz$ et $f_1=10khz$ $\quad$ $x(t)=\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}+\cos(2\pi f_1 t)$

$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t}\delta(t-2)dt$ $\quad$ $x(t)=\Lambda(t)$ $\quad$ $x(t)=e^{-\pi t^2}$

Exercice 2

Sachant que $F_{\max}$ est la fréquence maximale d'un signal $x(t)$, donner la fréquence d'échantillonnage minimale satisfaisant la condition de Shannon pour les signaux :

$\frac{dx(t)}{dt}$, $e^{j2\pi f_0 t}x(t)$, $x(2t)$, $x(t-2)$, $x^2(t)$, $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

Exercice 3

On veut numériser un signal parole $x(t)$ dont la bande spectrale est [0 5] KHz .

1)- À quelle fréquence faut-il l'échantillonner pour ne pas perdre d'information ?

2)- Si on l'échantillonne à la fréquence minimale pendant 1 minute, de combien d'échantillons est constitué le signal discret ?

3)- On voudrait coder chaque échantillon sur 8 bits, déterminer le pas de quantification sachant que la plage de variation du signal $x(t)$ est de 0-5Volts. Quelle est alors la capacité mémoire nécessaire pour sauvegarder tous les échantillons.

Exercice 4

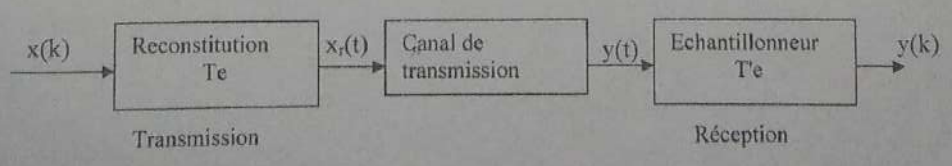
Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal dont la bande spectrale est non nulle pour:

a)- $9KHz<|f|<12KHz$ $\quad$ b)- $18KHz<|f|<22KHz$ $\quad$ c)- $30KHz<f<35KHz$

Exercice 4

On désire transmettre un signal discret $x(k)$ à travers un canal de transmission modélisé par un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c=4Khz$ conformément à la figure ci-dessous.

1)- Quelle est la fréquence d'échantillonnage T_e nécessaire pour que le signal reçu $y(k)$ soit identique à $x(k)$ (On suppose que $T'_e=T_e$ et la transmission et la réception sont parfaitement synchronisées).

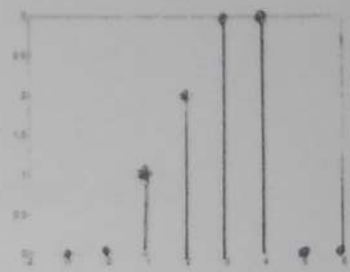


Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Département Automatique
Module : Traitement du signal
Master I en Automatique et Systèmes/ Automatique et Informatique Industrielle
Année universitaire 2019-2020

Série de TD N°2

Exercice 1

Soit le signal discret $x(k)$ de la figure ci-dessous



1)- Donner l'expression de $x(k)$

2)- Indiquer si ce signal est périodique, causal ainsi que sa durée si la période d'échantillonnage T_e est égale à 0.25s.

3)- Donner les graphes de $x(k-2)$, $x(2k)$, $x(-k)$, $x(-k-2)$ et $x(-k+2)$

Exercice 2

1)- Montrer que si $x(k)$ est paire alors $\sum_{l=-k}^{k} x(l) = x(0) + 2\sum_{l=1}^{k} x(l)$

2)- Soit le signal discret $x(k) = e^{j2\pi f_0 k}$ obtenu avec une période d'échantillonnage T_e. Pour quelle condition $x(k)$ est périodique ?

3)- Indique la nature énergétique des signaux $x(k) = u(k)$ et $x(k) = \mathrm{Rect}_K(k)$

Exercice 3

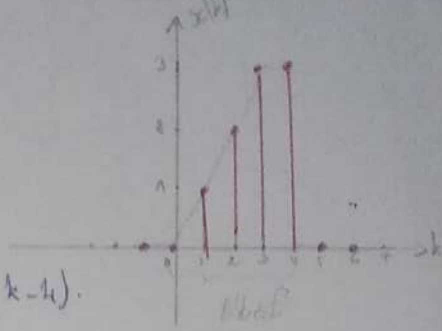
Démontrer les relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & si\ \alpha \neq 1 \\ N & si\ \alpha = 1 \end{cases} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{avec} \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{k=l}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^l}{1-\alpha} \quad \text{avec} \quad |\alpha| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad \text{avec} \quad |\alpha| < 1$$

Serie TD N° 02.

Exercice 1



1/ Expression de $X(k)$

→ Séquence du echantillons.

$\{ \ldots 0000\ 123300 \ldots \}$

* $X(k) = \delta(k-1) + 2\delta(k-2) + 3\delta(k-3) + 3\delta(k-4)$.

$$x(k) = \begin{cases} k \text{ si } 1 \leq k \leq 3 \\ 3 \text{ si } k = 4 \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

2/ Signal non périodique car il ne se repete pas.

$x(k)$ est ni paire ni impaire

$x(k)$ est causal car $x(k) = 0$. $\forall k < 0$.

$x(k)$ est a support borné → Durée finie

→ Nbre d'echantillons finie.

→ Energie finie.

$$W_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

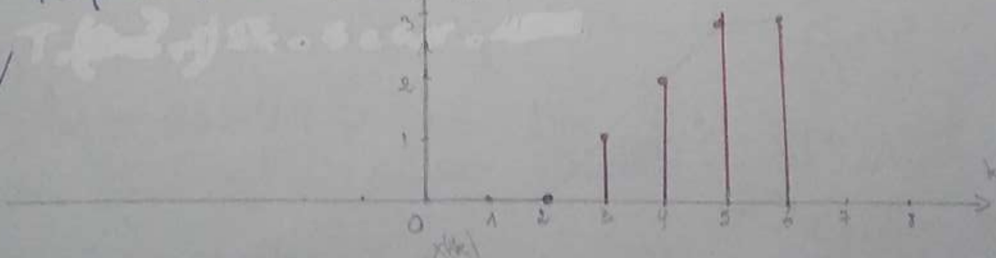
$$W_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x(k))^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 3^2$$

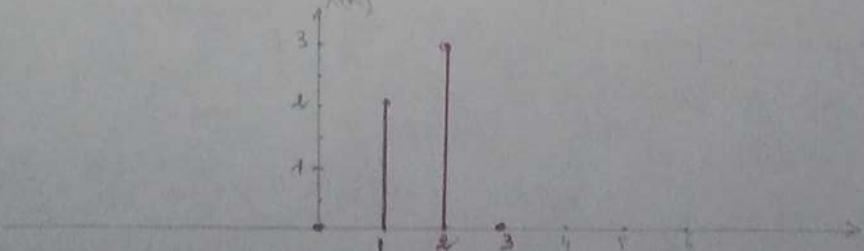
$$= 23 < \infty.$$

* Durée du signal si $T_e = 0{,}25$ s.

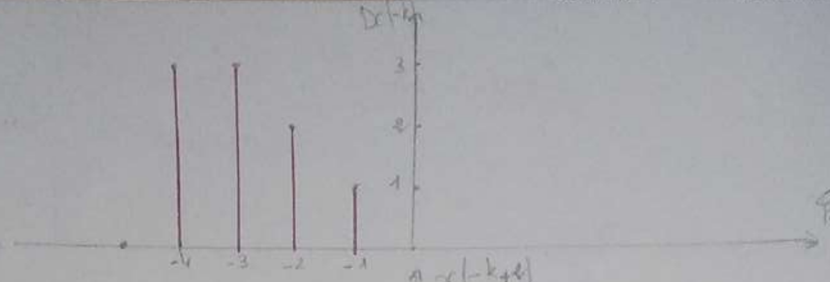
$T = (Nbech-1) \times Te = 4 \times 0{,}25 = 1$ s.

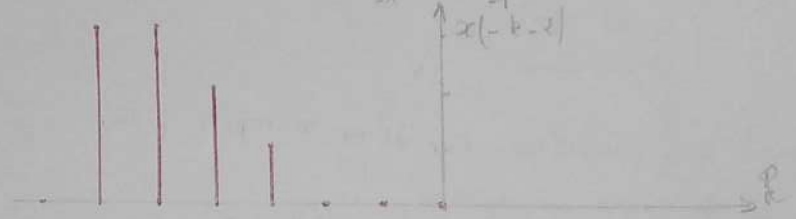
3/





(1)





Exercice 02

1/ x(k) paire

Montrer que $\sum_{\ell=-k}^{k} x(\ell) = x(0) + 2\sum_{\ell=1}^{k} x(\ell)$.

$$S = \sum_{\ell=-k}^{k} x(\ell) = \sum_{\ell=-k}^{-1} x(\ell) + x(0) + \sum_{\ell=+1}^{k} x(\ell).$$

$$S = \sum_{\ell=k}^{1} x(-\ell) + x(0) + \sum_{\ell=1}^{k} x(\ell).$$

// paire.

$$S = \sum_{\ell=1}^{k} x(\ell) + x(0) + \sum_{\ell=1}^{k} x(\ell)$$

$$S = x(0) + 2\sum_{\ell=1}^{k} x(\ell)$$ CQFD → ce que il fallait démontrer

2/ $x(k) = e^{j2\pi f_0 k}$; Te

Condition pour que x(k) soit périodique

x(k) est périodique de période K si $x(k) = x(k+\alpha K)$ $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$x(k) = e^{j2\pi f_0 k} = e^{j2\pi f_0 k T_e}.$$

$$x(k+\alpha K) = e^{j2\pi f_0 (k+\alpha K)T_e} = e^{j2\pi f_0 k T_e} \cdot e^{j2\pi f_0 \alpha K T_e}$$

$$= x(k)\, e^{j2\pi f_0 \alpha K T_e}.$$

k)

3)- On voudrait coder chaque échantillon sur 8 bits, déterminer
de variation du signal $x(t)$ est de 0-5Volts. Quelle est alors la c
tous les échantillons.

Exercice 4

Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal

a)- $9KHz < |f| < 12KHz$ b)- $18KHz < |f| < 22KHz$

pour que $x(k)$ Soit Périodique, il faut que:

$$e^{J2\pi f_0 \alpha k T_e} = 1 \quad \cos(2\pi f_0 \alpha k T_e) + J \sin(2\pi f_0 \alpha k T_e)$$

$$f_0 \alpha k T_e = \beta \in \mathbb{Z}$$

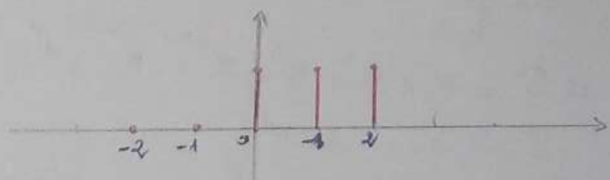
$$f_0 T_e = \frac{\beta}{\alpha k}$$

$$\boxed{\frac{T_e}{T_0} = \frac{\beta}{\alpha k}}$$ ← Entier ← Entier

Rationel

3/ Indique la nature énergetique des signaux:

$$x(k) = u(k)$$



Nbre d'echantillons infini

$\to W_x = \infty$.

$$W_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^2 = 1+1+1+\dots+\dots$$

$x(k)$ est à puissance moyenne finie si $0 < P_x < 0$

$$P_x = \lim \frac{1}{K+1} \sum_{k=-K/2}^{K/2} x^2(k) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K/2} 1^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K+1}\left(\frac{K}{2}+1\right)$$

$$P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{K+2}{2K+2} = \frac{K}{2K} = \frac{1}{2}.$$

$u(k)$ est à puissance moyenne finie.

• $x(k) = rect(k)$

Nbre d'ech est en principe $x(k)$ est a énergie finie

Verification:

$$W_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = \sum_{k=0}^{K-1} 1^2 = K \Rightarrow \text{Energie finie.}$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x^2(k)$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{K-1} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N+1} = 0.$$

(3)

...urée finie N tel que :

$x(k) = \begin{cases} ... & ...our\ k=0\ et\ k=3 \\ 2 & pour\ k=1\ et\ k=2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

...alculer la transformée de Fourier discrète $X(n)$ de ce...

...nsformée de Fourier discrète inverse.

$$\left.\begin{array}{l} W_x = k \\ P_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(k) \text{ est à énergie finie}$$

Exercice 03 : Démontrer les relations suivantes.

* $$S = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ N & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

* Cas (1) : $\alpha = 1$

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = \underset{k=0}{1} + 1 + 1 + \dots + \underset{k=N-1}{1} = N$$

* cas (2) : $\alpha \neq 1$

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots \alpha^{N-1}$$

$$\alpha \cdot S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^{N-1} + \alpha^N$$

$$S - \alpha S = 1 - \alpha^N$$

$$S(1-\alpha) = 1 - \alpha^N \qquad \boxed{S = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}} \quad \text{CQFD.}$$

* $$S = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{si } |\alpha| < 1$$

$$S = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \lim_{N \to \infty} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0.$$

$$S = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{si } \lim \alpha^N = 0 \Rightarrow -1 < \alpha < 1 \quad |\alpha| < 1 \quad \text{CQFD}$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^p}{1-\alpha} \quad \text{si } |\alpha| < 1$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \alpha^p + \alpha^{p+1} + \alpha^{p+2} + \dots = \alpha^p(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)$$

$$= \alpha^p \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^p}{1-\alpha} \quad \text{si } |\alpha| < 1$$

CQFD.

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha^{k} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad \text{si } |\alpha| < 0.$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^{k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha^{k-1}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k}\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \quad \text{si } |\alpha| < 1 = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad |\alpha| < 1$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha^{k-1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad \boxed{S = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha^{k} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} \quad \text{si } |\alpha| < 1$$

CQFD

Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Département Automatique
Module : Traitement du signal
Master I en Automatique et Systèmes/ Automatique et Informatique Industrielle
Année universitaire 2019-2020

Série de TD N°3

Exercice 1

Calculer la transformée de Fourier des signaux discrets (TFSD) suivants :

$x(k) = \delta(k)$ $\quad x(k) = 1$ $\quad x(k) = \delta(k) + 6\delta(k-1)$

$x(k) = \cos(2\pi f_0 k)$ $\quad x(k) = a^k u(k)\ |a| \prec 1$

Exercice 2

1)- Montrer que :

$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{dX(f)}{df}$ avec $y(k) = kx(k)$

2)- Trouver les signaux discrets $x(k)$ dont les transformées de Fourier (TFSD) sont $\cos^2(2\pi f)$ et $\Pi_{2f_e}(f)$

Exercice 3

Montrer que :

$TFD\{x(k-k_0)\} = e^{-\frac{j2\pi k_0 n}{N}} X(n)$ $\quad TFD\left\{e^{\frac{j2\pi km}{N}} x(k)\right\} = X(n-m)$ $\quad TFD\{x(ak)\} = X\left(\frac{n}{a}\right)$

Exercice 4

Calculer la transformée de Fourier Discrète (TFD) des signaux suivants :

$x(k) = \delta(k)$ $\quad x(k) = 1$ $\quad x(k) = \delta(k) + 2\delta(k-5)$

$x(k) = \cos\left(\frac{2\pi mk}{N}\right)$ $\quad x(k) = a^k u(k)\ |a| \neq 1$

Exercice 5

Soit $x(k)$ un signal discret de durée finie N tel que :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & pour\ k=0\ et\ k=3 \\ 2 & pour\ k=1\ et\ k=2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier discrète $X(n)$ de ce signal puis déterminer $x(k)$ en utilisant la transformée de Fourier discrète inverse.

Serie TD N° 03.

Echantillonage

Exercice 01

- Calculer la transformée de Fourier des Signaux discrets (TFSD) :

TFSD

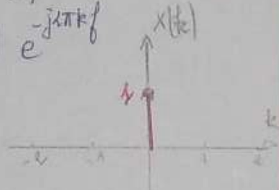
$$TFSD\{x(k)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

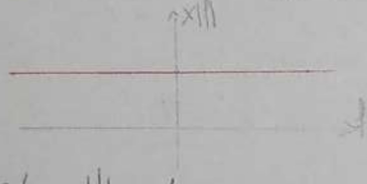
$$x(k) = TFSD^{-1}\{X(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi fk}\, df.$$

1/ $x(k) = \delta(k)$

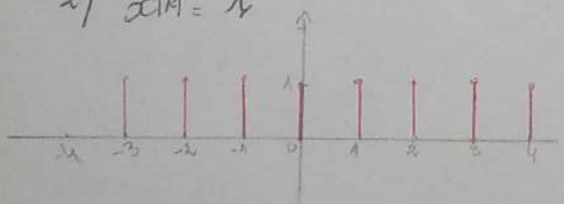
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

$$X(f) = 1e^{0} = 1$$





2/ $x(k) = 1$



Condition :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty \quad \text{(signal est absolument sommable)}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 = \infty.$$

$x(k)$ n'est pas absolument sommable

→ On peut pas calculer sa TFSD avec la formule classique.

avec :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi kf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fk}.$$

utilisons la propriétés de dualité (similitude)

$$x(k) \xrightarrow{TFSD} X(f) \;/\; \delta(k) \to 1$$

$$x(k) \xrightarrow{TFSD} x(-f) \Rightarrow 1 \to \delta(-f) = \delta(f)$$

$$TFSD\{x(k) = 1\} = \delta(f).$$

Remarque :

$$TFSD^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(f)\, e^{j2\pi kf}\, df = e^{0} = 1$$

$$\delta(t) \xrightarrow{TFSD} 1$$

$$1 \longrightarrow \delta(f)$$

- $x(k) = \delta(k) + 6\,\delta(k-1)$

$$X(f) = TFSD\{\delta(k)\} + 6\, TFSD\{\delta(k-1)\}$$

$$X(f) = 1 + 6e^{-j2\pi f}.$$

$$= 1 + \cos(2\pi f) - j\sin(2\pi f)$$

$$x(k) \to x(f)$$

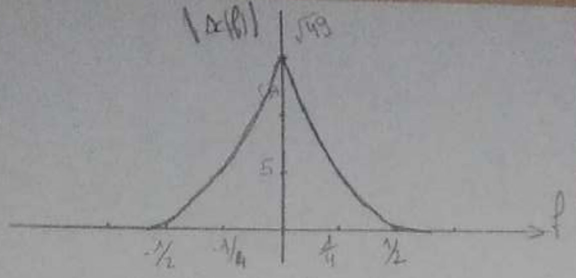
$$x(k-k_0) \to X(f)\, e^{-j2\pi f k_0}$$

$$|X(f)| = \sqrt{(1+6\cos(2\pi f))^2 + (6\sin(2\pi f))^2}$$

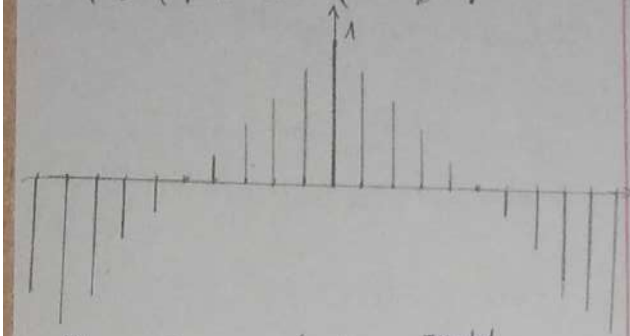
$$|x(f)| = \sqrt{37 + 12\cos(2\pi f)}$$

$$\varphi(f) = \arctg\left(\frac{-6\sin(2\pi f)}{1+6\cos(2\pi f)}\right)$$

(1)



• $x(k) = \cos(2\pi f_0 k)$



$$X(f) = \sum_{k=-\infty} \cos(2\pi f_0 k)\, e^{-j2\pi k f}$$

$$\cos(2\pi f_0 k) = \frac{e^{-j2\pi f_0 k} + e^{-j2\pi f_0 k}}{2}$$

$$X(f) = \text{TFSD}\{\cos(2\pi f_0 k)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{TFSD}\{e^{-j2\pi f_0 k}\} + \text{TFSD}\{e^{-j2\pi f_0 k}\}\right]$$

$$x(k) \longrightarrow X(f)$$

$$x(k)\, e^{-j2\pi f_0 k} \longrightarrow X(f+f_0)$$

$$x(k)\, e^{j2\pi f_0 k} \longrightarrow X(f-f_0)$$

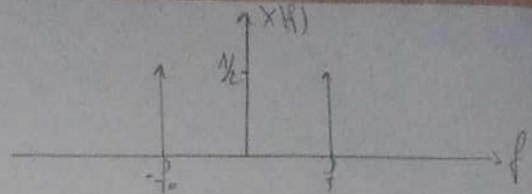
$$1 \xrightarrow{\text{TFSD}} \delta(f)$$

$$e^{-j2\pi f_0 k} \longrightarrow \delta(f+f_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 k} \longrightarrow \delta(f-f_0)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

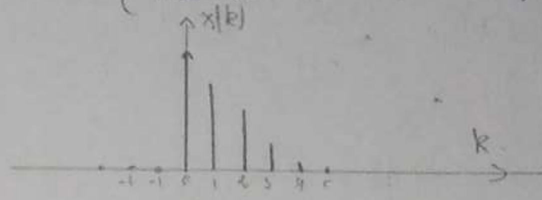
$$= \text{TF}\{x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\}$$



• $x(k) = a^k U(k) \quad |a| < 1$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k U(k) < \infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

(Absolument Sommable)



$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k U(k)\, e^{-j2\pi k f}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a e^{-j2\pi f}\right)^k$$

$$\boxed{X(f) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}}}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi f)}}$$

Exercice 02

1/ Montrer que

$$Y(f) = \text{TFSD}\{y(k)\} = \text{TFSD}\{k\, x(k)\}$$

$$X(f) = \text{TFSD}\{x(k)\} = \frac{J}{2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

$$y(k) = k\, x(k).$$

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, x(k)\, e^{-j2\pi k f}.$$

on ne peut pas continuer le calcul

Autrement :