Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Département Automatique
Module : Traitement du signal
Master I en Automatique et Systèmes/ Automatique et Informatique Industrielle
Année universitaire 2019-2020

Correction de la série de TD N°4

Exercice 1

Linéarité, invariance dans le temps et causalité

$y(k) = kx(k)$

- Linéaire car pour $x(k) = x_1(k)$ et $x(k) = x_2(k)$ on a respectivement $y_1(k) = kx_1(k)$ et $y_2(k) = kx_2(k)$ et pour $x(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$ on a $y(k) = k(ax_1(k) + bx_2(k)) = ay_1(k) + by_2(k)$.
- Variant car pour $x(k-k')$ on a $y(k) = kx(k-k') \neq y(k-k') = (k-k')x(k-k')$
- Causal car $y(k)$ un instant donné k_0 ne dépend pas de $x(k)$ des instants ultérieurs à k_0 .

$y(k) = 2x(k) + 1$

- Linéaire car pour $x(k) = x_1(k)$ et $x(k) = x_2(k)$ on a respectivement $y_1(k) = 2x_1(k) + 1$ et $y_2(k) = 2x_2(k) + 1$ et pour $x(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$ on a: $y(k) = 2(ax_1(k) + bx_2(k)) + 1 \neq ay_1(k) + by_2(k)$.
- Invariant car pour $x(k-k')$, on $y(k) = 2x(k-k') + 1 = y(k-k')$
- Causal car $y(k)$ un instant donné k_0 ne dépend pas de $x(k)$ des instants ultérieurs à k_0 .

$y(k) = x(k+4)$

- Linéaire car pour $x(k) = x_1(k)$ et $x(k) = x_2(k)$ on a respectivement $y_1(k) = x_1(k+4)$ et $y_2(k) = x_2(k+4)$ et pour $x(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$ on a: $y(k) = ax_1(k+4) + bx_2(k+4) = ay_1(k) + by_2(k)$.
- Invariant car pour $x(k-k')$, on a $y(k) = x(k-k'+4) = y(k-k')$
- Non Causal car $y(k)$ à un instant donné k_0 (2s) dépend de $x(k)$ à des instants ultérieurs à k_0 (4s).

$y(k) = x(-k)$

- Linéaire car pour $x(k) = x_1(k)$ et $x(k) = x_2(k)$ on a respectivement $y_1(k) = x_1(-k)$ et $y_2(k) = x_2(-k)$ et pour $x(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$ on a: $y(k) = ax_1(-k) + bx_2(-k) = ay_1(k) + by_2(k)$.
- Invariant car pour $x(k-k')$, on a $y(k) = x(-(k-k')) = x(-k+k') = y(k-k')$
- Non Causal car $y(k)$ à un instant donné k_0 (-2s) dépend de $x(k)$ à des instants ultérieurs à k_0 (2s) .

$y(k) = \frac{1}{3}[x(k-1) + x(k) + x(k+1)]$

- On peut utiliser le même raisonnement que précédemment. Cependant, si on peut écrire $y(k)$ comme un produit de convolution entre l'entrée $x(k)$ et la réponse impulsionnelle $h(k)$, alors on peut déduire que le système est linéaire et invariant dans le temps.

$$y(k) = \frac{1}{3}[x(k-1) + x(k) + x(k+1)] = \sum_{l=-1}^{1} \frac{1}{3} x(k-l)$$

$$y(k) = \sum_{l=-1}^{1} h(l)x(k-l) \quad \text{avec} \quad h(l) = \frac{1}{3} \quad \forall \ l = -1,0,1$$

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l)$$

$$\boxed{y(k) = h(k) * x(k)} \quad \text{avec} \quad h(k) = \begin{cases} 1/3 & si \ k = -1,0,1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- Non Causal car $h(k)$ n'est pas causal .

Exercice 2

$h(k) = (0.5)^{k-2} u(k-2)$

1)- Equation aux différences:

Déterminons d'abords la TFSD de $h(k)$:

$$H(f) = TFSD\{h(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0.5)^{k-2} u(k-2) e^{-j2\pi fk} = (0.5)^{-2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(0.5 e^{-j2\pi f}\right)^k = (0.5)^{-2} \frac{(0.5)^2 e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}}$$

$$\boxed{H(f) = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}}}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} \quad \Rightarrow \quad Y(f)\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right) = X(f)\left(e^{-j4\pi f}\right)$$

$$Y(f) - 0.5e^{-j2\pi f} Y(f) = e^{-j2\pi f 2} X(f)$$

En appliquant la TF inverse, on obtient l'équation aux différences suivante:

$$\boxed{y(k) - 0.5 y(k-1) = x(k-2)}$$

2)- Résoudre l'équation aux différences $y(k) - 0.5y(k-1) = x(k-2)$ sachant $x(k) = (0.5)^k u(k)$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} \Rightarrow Y(f) = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} X(f)$$

$$x(k) = (0.5)^k u(k) \quad \Rightarrow \quad TFSD\{x(k)\} = \frac{1}{1-0.5e^{-j2\pi f}} \text{ et } TFSD\{x(k-2)\} = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}}$$

$$Y(f) = \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} \frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} = \left(\frac{e^{-j4\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}}\right)^2 = \frac{e^{-j8\pi f}}{\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right)^2} = \frac{0.5e^{-j2\pi f}}{\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right)^2} 2e^{-j6\pi f}$$

En appliquant la TFSD inverse, on obtient:

$$\boxed{y(k) = 2(k-3)(0.5)^{k-3} u(k-3)}$$

Exercice 3

$$y(k) = y(k-1) - y(k-2) + 0.5x(k) + 0.5x(k-1) \qquad x(k) = (0.5)^k u(k).$$

La solution générale de l'équation aux différences est donnée par $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$ où $y_p(k)$ est la solution particulière et $y_h(k)$ la solution de l'équation homogène.

1)- Calculons $y_p(k)$ sachant qu'elle est de la forme $y_p(k) = C(0.5)^k$ pour $k \geq 0$.

Déterminons la constante C en remplaçant $y(k)$ par $y_p(k)$ dans l'équations aux différences

$$y_p(k) = y_p(k-1) - y_p(k-2) + 0.5x(k) + 0.5x(k-1)$$

$$C(0.5)^k = C(0.5)^{k-1} - C(0.5)^{k-2} + 0.5(0.5)^k + 0.5(0.5)^{k-1}$$

$$C(0.5)^k - C(0.5)^{k-1} + C(0.5)^{k-2} = 0.5(0.5)^k\left(1+(0.5)^{-1}\right)$$

$$C(0.5)^k\left(1-(0.5)^{-1}+(0.5)^{-2}\right) = +0.5(0.5)^k\left(1+(0.5)^{-1}\right)$$

$$3C(0.5)^k = \frac{3}{2}(0.5)^k \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Par conséquent:

$$\boxed{y_p(k) = \frac{1}{2}(0.5)^k}$$

2)- Equation homogène

Elle correspond à l'équation aux différences sans les termes de $x(k)$

$$y_h(k) - y_h(k-1) + y_h(k-2) = 0$$

Pour la résoudre, on pose $y_h(k) = z^{-k}$:

$$z^{-k} - z^{-k+1} + z^{-k+2} = 0 \;\Rightarrow\; z^{-k}(1 - z^1 + z^2) = 0 \;\Rightarrow\; z^2 - z + 1 = 0$$

La résolution de ce polynôme donne deux racines complexes

$$z_1 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{+j\frac{\pi}{3}}$$

Ainsi la solution homogène est:

$$y_h(k) = \alpha_1 z_1^k + \alpha_2 z_2^k$$

$$\boxed{y_h(k) = \alpha_1 e^{-j\frac{k\pi}{3}} + \alpha_2 e^{j\frac{k\pi}{3}}}$$

3)- La solution générale est donnée par:

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

$$y(k) = \alpha_1 e^{-j\frac{k\pi}{3}} + \alpha_2 e^{j\frac{k\pi}{3}} + \frac{1}{2}(0.5)^k$$

Pour déterminer les constantes α_1 et α_2 , on utilisera les conditions initiales suivantes:

$$y(-1) = 0.75 \quad \text{et} \quad y(-2) = 0.25$$

Il faut alors définir deux équations linéaires en fonction de α_1 et α_2 à partir de la solution générale et de l'équation aux différences pour k=0 et k=1 car x(k) et la solution particulière sont causales.

Pour k=0 et k=1, on a conformément à l'équation aux différences:

$$y(0) = y(-1) - y(-2) + 0.5x(0) + 0.5x(-1) = 0.75 - 0.25 + 0.5 = 1$$

$$y(1) = y(0) - y(-1) + 0.5x(1) + 0.5x(0) = 1 - 0.75 + 0.25 + 0.5 = 1$$

et à partir de la solution générale:

$$y(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + 0.5$$

$$y(1) = \alpha_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} + \alpha_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0.25$$

On obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0.5 = 1 \\ \alpha_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} + \alpha_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0.25 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0.5 \\ \alpha_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} + \alpha_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0.75 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = j\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 0.75 - 0.5e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 0.5e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 0.75 \end{bmatrix}$$

Finalement, la solution générale est: $\boxed{y(k)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{3}\right)+(0.5)^{k+1}}$

Exercice 4

1)- $y(k)$ est périodique de période K si $y(k+\alpha K)=y(k) \quad \alpha\in N$

$$y(k)=x(k)*h(k)=h(k)*x(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)x(k-l)$$

$$y(k+\alpha K)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)x(k+\alpha K-l)$$

or $x(k)$ est périodique de période K $\Rightarrow$ $x(k)=x(k+\alpha K)$ $\Rightarrow$ $x(k-l)=x(k-l+\alpha K)$

Par conséquent, $y(k+\alpha K)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)x(k-l)=y(k)$ $\Rightarrow$ $y(k)$ est périodique de période K

2)- Calcul de $y(k)=x(k)*h(k)$ avec $x(k)=a^k u(k)$ et $h(k)=rect_N(k)$.

$h(k)=rect_N(k)=u(k)-u(k-N)$

$y(k)=x(k)*h(k)=x(k)*[u(k)-u(k-N)]=[x(k)*u(k)]-[x(k)*u(k-N)]$

$s(k)=x(k)*u(k)\Rightarrow y(k)=s(k)-s(k-N)$

Calculons $s(k)$:

$$s(k)=x(k)*u(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)u(k-l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a^l u(l)u(k-l)$$

$$s(k)=\sum_{l=0}^{\infty}a^l u(k-l)=\begin{cases}\sum_{l=0}^{k}a^l & si\ k\geq 0\\ 0 & \sin on\end{cases}=\begin{cases}\frac{1-a^{k+1}}{1-a} & si\ k\geq 0\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

$$s(k)=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}u(k)$$

$$y(k)=s(k)-s(k-N)=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}u(k)\frac{1-a^{k-N+1}}{1-a}u(k-N)$$

$$y(k)=\begin{cases}0 & si \quad k<0\\ \frac{1-a^{k+1}}{1-a} & si \quad 0\leq k<N\\ \frac{1-a^{k+1}}{1-a}-\frac{1-a^{k-N+1}}{1-a} & si \quad k\geq N\end{cases} \Rightarrow \boxed{y(k)=\begin{cases}0 & si \quad k<0\\ \frac{1-a^{k+1}}{1-a} & si \quad 0\leq k<N\\ \frac{a^{k-N+1}-a^{k+1}}{1-a} & si \quad k\geq N\end{cases}}$$

Remarque: On peut également utiliser la méthode graphique.

Exercice 5

$$y(k)=\frac{1}{3}[x(k-1)+x(k)+x(k+1)]$$

1)- Réponse impulsionnelle $h(k)$ du système

$h(k)$ est la réponse du système lorsque $x(k)=\delta(k)$

$$\boxed{h(k)=\frac{1}{3}(\delta(k-1)+\delta(k)+\delta(k+1))}$$

2)- Ce système n'est pas causal car $h(k)\neq 0$ pour $k\prec 0$

Il est stable car c'est un filtre RIF(sa réponse impulsionnelle contient un nombre fini (3) d'échantillons).

Exercice 6

$$y(k) = x(k) + ax(k-1) + bx(k-2)$$

1)- Réponse impulsionnelle $h(k)$

$h(k)$ correspond à la réponse du système lorsque $x(k) = \delta(k)$

$h(k) = \delta(k) + a\delta(k-1) + b\delta(k-2)$

$h(k) = 0 \ \forall \ k < 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ Le filtre est causal.

$h(k)$ possède 3 échantillons, le filtre est donc à RIF et il toujours stable.

2)- Gain complexe

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Appliquons la TFSD à l'équation aux différences

$$Y(f) = X(f) + aX(f)e^{-j2\pi f} + bX(f)e^{-j4\pi f} \Rightarrow \boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = 1 + ae^{-j2\pi f} + be^{-j4\pi f}}$$

3)- Exprimons les coefficients *a* et *b* en fonction de α et β.

$$H(f) = \left(1 - \alpha e^{-j2\pi f}\right)\left(1 - \beta e^{-j2\pi f}\right) = 1 + (-\alpha - \beta)e^{-j2\pi f} + \alpha\beta e^{-j4\pi f}$$

or $H(f) = 1 + ae^{-j2\pi f} + be^{-j4\pi f}$

$\boxed{a = (-\alpha - \beta)}$ et $\boxed{b = \alpha\beta}$

4)- Calcul des valeurs de α et de β et les valeur des coefficients *a* et *b*.

$$H(f_0) = 0 \Rightarrow H(f_0) = \left(1 - \alpha e^{-j2\pi f_0}\right)\left(1 - \beta e^{-j2\pi f_0}\right) = 0 \Rightarrow \left(1 - \alpha e^{-j2\pi f_0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = e^{j2\pi f_0}}$$

$$H(-f_0) = 0 \Rightarrow H(-f_0) = \left(1 - \alpha e^{j2\pi f_0}\right)\left(1 - \beta e^{j2\pi f_0}\right) = 0 \Rightarrow \left(1 - \beta e^{j2\pi f_0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = e^{-j2\pi f_0}}$$

$$a = (-\alpha - \beta) = -(e^{j2\pi f_0} + e^{-j2\pi f_0}) = -2\frac{e^{j2\pi f_0} + e^{-j2\pi f_0}}{2} \Rightarrow \boxed{a = -2\cos(2\pi f_0)}$$

$$b = \alpha\beta = (e^{j2\pi f_0}e^{-j2\pi f_0}) \Rightarrow \boxed{b = 1}$$