Chapitre 4. Analyse des systèmes échantillonnés

4.1 Introduction

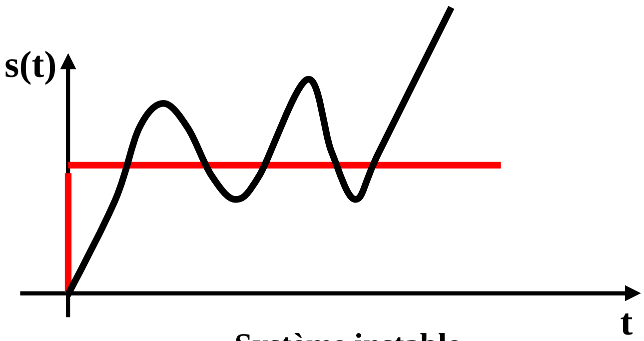
Dans ce chapitre, nous allons étudier les méthodes principales permettant l'analyse de la stabilité et la précision des systèmes échantillonnés (discrets).

4.2 La stabilité

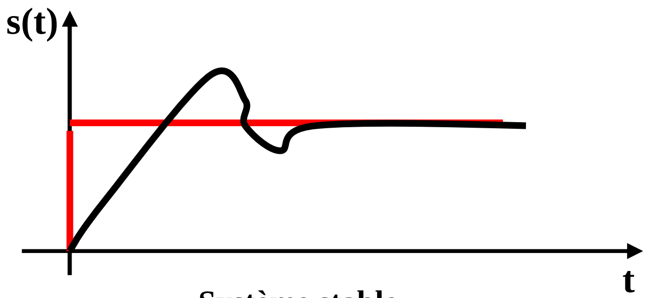
Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être données.

- **Première définition**: On dit qu'un système est stable, lorsque celui-ci tend à revenir à son état d'équilibre lorsqu'on lui applique une perturbation de courte durée.

- **Deuxième définition**: un système est dit stable si et seulement si à une entrée bornée e(t) correspond une sortie bornée s(t). Cette définition permet de qualifier la stabilité des systèmes forcés.



Système instable



Système stable

4.2.1 Conditions de stabilité

Soit un système discret décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}, \ n \geq m$$

La réponse impulsionnelle du système est donnée par :

$S(z) = F(z)E(z) = F(z)$, (l'entrée est une impulsion de Dirac , i.e., E(z)=1).
Soient $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$, les pôles de $F(z)$, supposés et réels simples, alors F(z) peut être décomposée comme suit:

$$S(z) = F(z) = \frac{A_1 z}{(z - z_1)} + \frac{A_2 z}{(z - z_2)} + \ldots\ldots + \frac{A_n z}{(z - z_n)}$$

D'où : $s(k) = Z^{-1}\{S(z)\} = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k + \ldots\ldots + A_n z_n^k$

djeghalinadial2csp@gmail.com

Pour que le système soit stable, il faut que $\lim_{k \to +\infty} s(k) = 0$.

La réponse impulsionnelle s(k) tend vers zéro si $\forall i, |z_i| < 1$, d'où la définition suivante.

- Un système discret (échantillonné, numérique) est **stable**, si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle de rayon 1, c'est-à-dire, les pôles z_i sont de module strictement inférieur à 1 ($|z_i| < 1$).
- Le système est **juste oscillant** si ses pôles sont de module 1 (i.e., situés sur le cercle unité)

Ces conditions sont valables pour tout système, qu'il soit en boucle ouverte ou fermée.

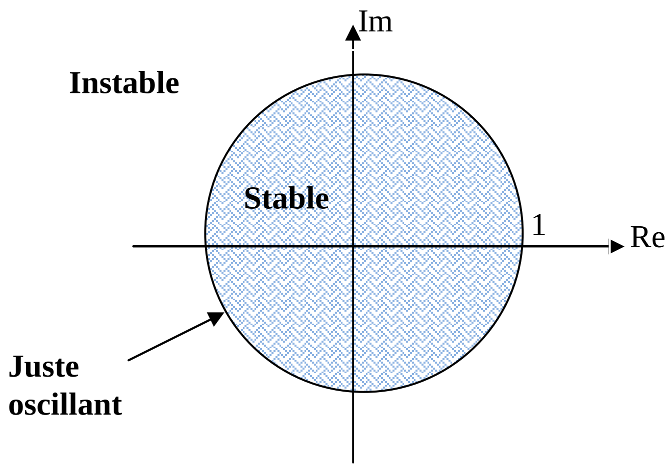


Figure 4.1 Zones de stabilité des systèmes discrets (échantillonnés)

Exemple : Soit la fonction de transfert suivante

$$G(z) = \frac{b}{z-a}$$

Le système est stable si $|a| < 1$.

Pour un système d'ordre élevé, le calcul des pôles devient difficile. Cependant, il y'a des critères qui permettent d'analyser la stabilité d'un système échantillonné sans le calcul des pôles. Ces critères sont:

– Critères algébriques (Jury, Routh et Schur-Cohn)

– Critères graphiques (Lieu d'Evans et critère de Nyquist).

4.2.2 Critères de stabilité algébriques

a) Critère de Jury : Considérons un système échantillonné de fonction de transfert:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

L'étude de l'équation caractéristique $D(z) = 0$ permet de conclure sur la stabilité du système.

Soit l'équation caractéristique: $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n > 0$

- **Construction du tableau de Jury**

	z^0	z	…	z^{n-k}	…	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	…	a_{n-k}	…	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	…	a_k	…	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	…	b_{n-k}	…	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	…	b_{k-1}	…	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	…	…	…	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	…	…	…	c_0		
… …	… …	… …	… …	… …	… …			
2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3				
2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0				
2n-3	q_0	q_1	q_2					

Avec : $b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$; $c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$;…… ;

$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}$; $q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$; $q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$

- **Enoncé du critère de Jury**

Le système est stable si :

$D(1) > 0$

$D(-1) > 0$ si n est pair , $D(-1) < 0$ si n est impair et les (n-1) conditions suivantes :

$|a_0| < a_n$,

$|b_0| > |b_{n-1}|$,

$|c_0| > |c_{n-2}|$,

.

.

.

$|q_0| > |q_2|$

Exemple : Soit $F(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$, la fonction de transfert d'un système échantillonné (discret).
D(z) est le polynôme caractéristique du système donné par :

$$D(z)=z^3+1.9z^2+.2.26z+0.6=0, \quad (n=3:\text{impair})$$

Etudier la stabilité du système par le critère de Jury.

Solution : $a_0=0.6,\ a_1=2.26,\ a_2=1.9,\ a_3=1$.
Le système est stable si :

$D(1)>0 \qquad D(1)=5.76>0$
$D(-1)<0 \qquad D(-1)=-0.76<0$

et si les 2 conditions suivantes sont vérifiées:
$|a_0|<a_3 \quad (*)$
$|b_0|>|b_2| \quad (**)$
On a : $a_0=0.6,\ a_3=1$, donc (*) est vérifiée, i.e., $0.6<1$
-Calcul de b_0 et $b2$
On a : $b_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$
D'où : $b_0=\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}=-0.64$ et $b_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=-1.12$

Donc la condition (**) n'est pas vérifiée. On conclue que le système est instable.

b) Critère de Routh-Hurwitz
La méthode consiste à remplacer z par $\dfrac{1+w}{1-w}$ dans la fonction de transfert du système F(z).
On obtient ainsi F(w). Apres transformation en w, on peut alors appliquer le critère de Routh-Hurwitz à l'équation caractéristique de F(w).

c) Critère de Schur-Cohn

Considérons un système échantillonné dont l'équation caractéristique est donnée comme suit : $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0=0$

Soit la matrice de Schur-Cohn suivante :

$$SC_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} \\
a_0 & \cdot & & 0 & 0 & \cdot & & 0 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & 0 & \cdot & & \cdot & a_{n-1} \\
a_{k-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\
\hline
a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \\
a_{n-1} & \cdot & & 0 & 0 & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & 0 & \cdot & & \cdot & a_1 \\
a_{n-k+1} & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0
\end{array}\right]$$

Soit : $\Delta_k = \det(SC_k)$

- **Enoncé du critère de Schur**

Le système est stable si pour k=1,…,n :

$$\det(\Delta_k) < 0 \quad \text{si k est impair}$$
$$\det(\Delta_k) > 0 \quad \text{si k est pair}$$

4.2.3 Critères géométriques

a) Critère de Nyquist simplifié (critère de Revers)

Un système asservi échantillonné en boucle fermée est stable, si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(e^{j\omega\Delta})$ parcouru dans le sens des pulsations (ω) croissantes, laisse le point critique (-1,0) à gauche.

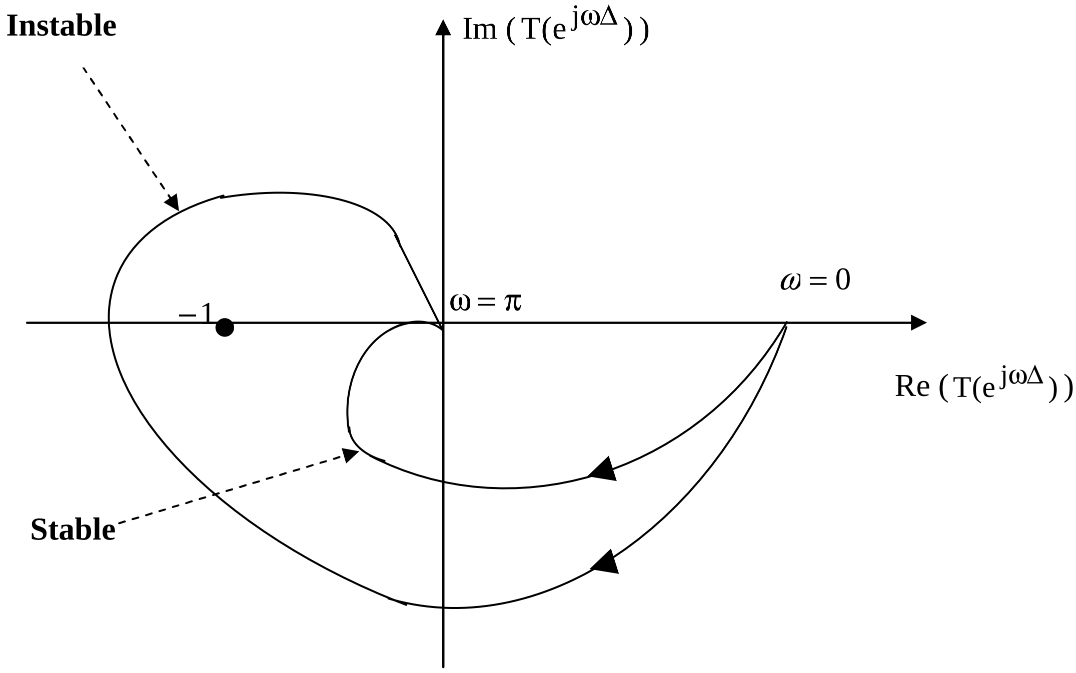


Figure 4.2 : Stabilité dans le plan de Nyquist

b) Lieu d'Evans (Lieu des racines)

Soit T(z) la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissent échantillonné, avec T(z) peut être en fonction du gain statique : T(z)=KG(z)

Cette approche consiste à tracer les racines de l'équation caractéristique 1+T(z)=0 dans le plan complexe en fonction du gain statique K, lorsqu' il varie de 0 à l'infini.

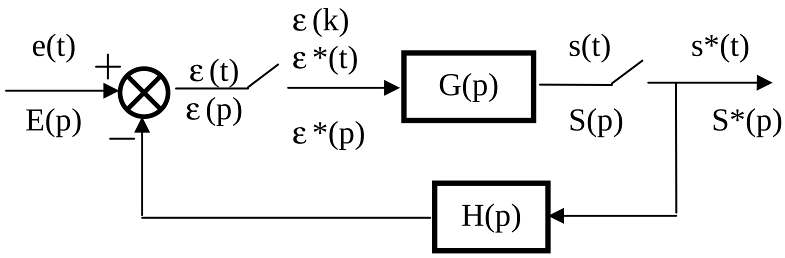
A partir de ce tracé, on déduit les valeurs de K pour lesquelles les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sortent du disque unité.

4.3 Précision statique des asservissements échantillonnés

La précision d'un système asservi est évaluée par le calcul de l'écart entre la consigne et la sortie. Un système sera précis si cet écart tend vers 0, c'est-à-dire que la sortie tend vers la valeur désirée (consigne). La précision statique consiste à l'analyse de l'écart en régime permanent. L'écart statique (l'écart en régime permanent) est la valeur de $\varepsilon(k)$ quand k tend vers l'infini:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z)$$

Considérons le système asservi échantillonné suivant:



où : $G(p) = B_0(p)\, F_1(p)$ et $H(p) = B_0(p)\, F_2(p)$.

- Calcul de l'écart $\varepsilon(z)$

$\varepsilon(p)= E(p)- H(p)\, S^*(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p)= E^*(p)- H^*(p)\, S^*(p)$

On a : $S(p)=G(p)\, \varepsilon^*(p) \Rightarrow S^*(p)= G^*(p)\, \varepsilon^*(p)$

D'où:

$\varepsilon^*(p)= E^*(p)- H^*(p)\, G^*(p)\, \varepsilon^*(p)$

$\varepsilon^*(p)[1+G^*(p)H^*(p)]= E^*(p)$

$$\varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+G^*(p)H^*(p)} \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Soit $T(z)= G(z)H(z)$, la fonction de transfert en BO.

On voit que l'écart dépend de l'entrée et de la fonction de transfert en boucle ouverte.
La forme générale de $T(z)$ est:

$$T(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K}{(z-1)^{\alpha}}\ z^{-r}\ \frac{N(z)}{D(z)}$$

Où α correspond à la classe du système qui représente le nombre d'intégrateurs présents dans la fonction de transfert.

a) Ecart statique de position ε_p

C'est l'écart quand l'entrée $e(k)$ est un échelon. Soit $e(k) = E_0\, u(k) \Rightarrow E(z) = \frac{E_0\, z}{z-1}$

$$\varepsilon_p = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\,\frac{E(z)}{1+T(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{E_0(z-1)^{\alpha}}{(z-1)^{\alpha}+K}$$

- Si $\alpha = 0$ (absence d'intégrateurs), on obtient:
  $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$
- Si $\alpha \geq 1$ (présence d'intégrateurs), on obtient:
  $\varepsilon_p = 0$.

b) Ecart statique de vitesse (trainage) ε_v

C'est l'écart quand l'entrée e(k) est une rampe. Soit $e(k) = ak\Delta u(k) \Rightarrow E(z) = \dfrac{a\Delta z}{(z-1)^2}$

$$\varepsilon_v = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+T(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{a\Delta(z-1)^{\alpha-1}}{(z-1)^{\alpha}+K}$$

- Si $\alpha = 0$, on obtient:
  $\varepsilon_v = +\infty$
- Si $\alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon_v = \dfrac{a\Delta}{K}$
- Si $\alpha \geq 2 \Rightarrow \varepsilon_v = 0$

c) Ecart statique d'accélération ε_a

C'est l'´ecart quand l'entrée e(k) est sous forme parabolique. Soit $e(k) = \dfrac{a(k\Delta)^2}{2}u(k)$

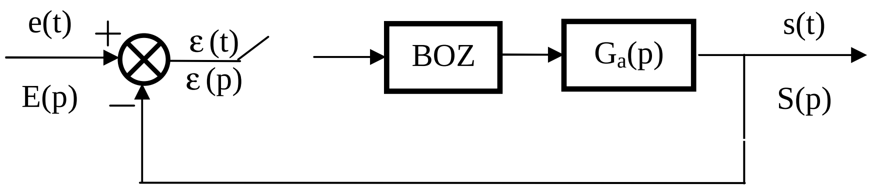
$\Rightarrow E(z) = \dfrac{a\Delta^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$.

$$\varepsilon_a = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+T(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{a\Delta^2(z-1)^{\alpha-2}}{(z-1)^{\alpha}+K}$$

- Si $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ on obtient: $\varepsilon_a = +\infty$.
- Si $\alpha = 2 \Rightarrow \varepsilon_a = \dfrac{a\Delta^2}{K}$
- Si $\alpha \geq 3 \Rightarrow \varepsilon_a = 0$.

Conclusion: Pour diminuer l'écart statique (l'écart en régime permanent), il faut augmenter soit:
– Le gain K
– La classe α du système, c'est-à-dire le nombre d'intégrateurs dans T(z).

Exemple : Considérons l'asservissement échantillonné suivant :



On donne $G(z) = \dfrac{z-1}{z} Z\left\{\dfrac{G_a(p)}{p}\right\} = \dfrac{0.16z}{(z-1)(z-0.37)}$

-Calculer l'érreur de position en régime permanent.

- **Solution**: Calcul de l'écart $\varepsilon(z)$

ε (p)= E(p)- S(p)$\Rightarrow$ ε* (p)= E*(p)- S*(p)

On a : S(p)=G(p) ε*(p) $\Rightarrow$ S*(p)= G*(p) ε*(p)

D'où

ε* (p)= E*(p) - G*(p) ε*(p)

ε*(p)[1+G*(p)]= E*(p)

$$\varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+G^*(p)} \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

L'écart statique de position ε_p**,** c'est l'´ecart quand l'entrée e(k) est un échelon. Soit e(k) = $E_0\, u(k) \Rightarrow E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$

$$\varepsilon_p = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+G(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{z}{z-1}\frac{E_0}{1+\frac{0.16z}{(z-1)(z-0.37)}}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{z\to 1} \frac{E_0}{1+\frac{0.16z}{(z-1)(z-0.37)}} = 0$$

On constate que l'erreur statique de position est nulle, parce que la fonction de transfert en boucle ouverte G(z) contient un intégrateur (un pôle en z=1).

4.4 Rapidité des systèmes discrets

La rapidité d'un système échantillonné, est aussi mesurée par son temps de réponse comme dans le cas des systèmes continus. Le temps de réponse à 5% (tr(5%)), est le temps au bout duquel la sortie s(k) atteint 95% de sa valeur finale (s(∞)).

Comme la réponse du système échantillonné (discret) n'existe qu'aux instants d'échantillonnage, le temps de réponse est donné en fonction de nombre de périodes d'échantillonnage:

tr(5%) = mΔ, m : est un entier positif.

Plus le temps de réponse est petit, plus le système est rapide.

Références

1- A. Jutard, M. Betemps, Systèmes asservis linéaires échantillonnés, institut national des sciences appliquées, Lyon, 1998.

2- D. Peaucelle, Systèmes à temps discret, Commande numérique des procédés, 2003.

3- Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier, Commande par calculateur. Identification, Eyrolles, 1998.

4- R. Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques, P. P. U. R., 1995.

5- I. D. Landau, Identification et commande des systèmes, Hermès, 1993.

6- Y. Granjon, Automatique-Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Cours et exercices corrigés, 2ieme édition, Dunod, Paris, 2001, 2010.

7- C. L. Phillips, H. T. Nagle, Digital control system- analysis and design, Prentice Hall, 1990.