ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la
Formation des cadres

Présidence
du Concours National d'Accès aux
Écoles de Management
CNAEM 2014

CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS

Aux Écoles de Management (CNAEM)

Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRE : **ECT**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :

L'épreuve se compose de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

✧✧✧

On considère les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -6 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \textit{ et } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice T est inversible et calculer la matrice inverse T^{-1}.
2. Calculer T^2.
3. Vérifier, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer le produit, PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
5. Calculer PTQ.
6. En déduire que A est inversible et calculer son inverse en fonction de P, T^{-1} et Q (on vous ne demande pas de donner l'expression de A^{-1}.)
7. Donner l'expression de A^n en fonction de n, P, Q et T^n.
8. Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la matrice A^n en fonction de n uniquement.
9. On considère trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par des conditions initiales a_0, b_0, c_0 et par les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -3a_n + 2b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = -6a_n + 4b_n - 5c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

10. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.

En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A^n, X_0 et de l'entier naturel n.

11. En déduire l'expression des suites a_n, b_n et c_n en fonction de n uniquement dans le cas où $a_0 = 1, b_0 = 2$ et $c_0 = 4$.

EXERCICE 2

✧✧✧

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$$

1. Calculer I_0.

2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1.

2.*a*. Quel est le signe de I_n ?

2.*b*. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

2.*c*. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

2.*d*. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2.*e*. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

2.f. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

3. **3.a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$$

3.b. Établir les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{2n+4}$$

3.c. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n$$

4. À l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

Quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

✧✧✧

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant 4 boules numérotées 1,2,3,4 et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

$[|1,4|]$ désignera les entiers naturels i tel que $1 \leq i \leq 4$ c'est-à-dire $i = 1,2,3,4$. k désigne un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [|1,4|]$, on pose X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Pour $i \in [|1,4|]$, donner la loi de X_i puis son espérance $E(X_i)$ et sa variance $V(X_i)$.

2. Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 sont-elles indépendantes ?

3. Soient $(i,j) \in [|1,4|]^2$tel que $i \neq j$

3.*a*. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

3.*b*. En déduire la covariance du couple $(X_i + X_j)$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

5. Pour k un entier supérieur ou égal à 1.

5.*a*. Déterminer $P(Z_k = 1)$

5.*b*. Déterminer $P(Z_k = k)$

5.*c*. Montrer que pour tout $j \in [|1,4|]$,

$$P(Z_{k+1} = j) = \frac{j}{4} P(Z_k = j) + \frac{5-j}{4} P(Z_k = j-1)$$

5.*d*. En déduire que $E(Z_{k+1}) = \frac{3}{4} E(Z_k) + 1$

6. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_k = E(Z_k) - 4$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

7. Déterminer $P(Z_k \geq 5)$

8. Montrer que

$$P(Z_k = 2) = 6\frac{2^k - 2}{4^k}$$

EXERCICE 4

✧✧✧

Pour cet exercice, on donne $e^{-1} = 0.37$

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = \quad 0 & si\ x < 0 \\ f(x) = xe^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f puis construire sa courbe représentative.

4. **4.*a*.** Soit a un réel strictement positif ; en utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_0^a xe^{-x}\,dx$$

4.*b*. Déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$$

5. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

6. Calculer l'espérance E(X) de X.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE