L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Exercice

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$; Y est donc la variable aléatoire dite partie entière de X et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité des événements :

$$(Y = k) = (k \leqslant X < k + 1).$$

1. Rappeler la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Étude de la variable aléatoire Y

2.1. Montrer que la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

2.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.

2.3. En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

2.4. Calculer l'espérance et la variance de $Y + 1$ puis en déduire l'espérance et la variance de Y.

3. Étude de la variable aléatoire $Z = X - Y$

On considère la variable aléatoire $Z = X - Y$.

3.1. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs de la variable aléatoire Z.

3.2. En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que

$$P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad x \in [0, 1[.$$

3.3. En déduire une densité de la variable aléatoire Z.

3.4. Déterminer l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

Problème 1

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité d'ordre 3. On considère les matrices éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$1^{\text{ère}}$ Partie
Détermination d'un polynôme annulateur de la matrice A

1.1. Recherche d'un polynôme annulateur de la matrice A

1.1.1. Calculer $(A - 2I_3)^2$.

1.1.2. Calculer de même le produit matriciel $(A - I_3)(A - 2I_3)^2$.

1.1.3. En déduire un polynôme de degré 3 annulateur de la matrice A.

1.2. Étude des racines d'un polynôme

On considère le polynôme R définie par : $R(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,\ x \in \mathbb{R}$.

1.2.1. Vérifier que 1 est racine de R.

1.2.2. Déterminer un polynôme R_1, de degré 2 et à coefficients entiers, tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = (x-1)R_1(x).$$

1.2.3. En déduire que 2 est aussi racine de R.

1.3. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice A ? Justifier votre réponse.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Réduction de la matrice A et calcul de ses puissances

2.1. Valeurs propres de la matrice A

2.1.1. Vérifier que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice A et préciser les valeurs propres aux quelles ils sont respectivement associés.

2.1.2. Préciser alors les valeurs propres de la matrice A.

2.2. Inversibilité et inverse de P

2.2.1. Calculer le produit matriciel PQ.

2.2.2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser son inverse P^{-1}.

2.3. Relation entre les puissances des matrices A et T

2.3.1. Calculer les produits matriciels PT et AP.

2.3.2. Montrer, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, l'égalité $A^k = PT^kP^{-1}$.

2.4. Calcul des puissances des matrices A et T

2.4.1. En faisant un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$,

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & -k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

2.4.2. En déduire la valeur de A^k, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.

2.5. Une autre méthode de calcul des puissances de la matrice T

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5.1. Calculer N^2.

2.5.2. Vérifier que $T = D + N$ et que $DN = ND$.

2.5.3. En utilisant la formule du binôme de Newton, donner l'expression de T^k, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.

Problème 2
Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

1ère Partie
Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère l'ensemble Σ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1.1. Soit $r \in \mathbb{R}^*$; on considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = r^n.$$

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ si, et seulement si,

$$r^2 - r - 1 = 0. \tag{1}$$

1.2. On note r_1 la racine positive de l'équation (1) ci-dessus. Justifier que $r_1 > 1$ et que cette équation admet une seconde racine réelle, notée r_2, vérifiant $r_1 + r_2 = 1$ et $r_1 r_2 = -1$.

1.3. Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels, la suite $(\alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de Σ.

1.4. Dans cette section, on cherche à montrer que

$$\Sigma = \left\{ (\alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \;;\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On considère donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ et on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - r_1\, u_n.$$

1.4.1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = r_2\, v_n$.

1.4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n et de v_0.

1.4.3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r_1^k v_{n-k} = u_{n+1} - r_1^{n+1}\, u_0$ puis en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{u_1 - r_2\, u_0}{r_1 - r_2}\, r_1^n + \frac{u_1 - r_1\, u_0}{r_2 - r_1}\, r_2^n.$$

1.4.4. Conclure.

1.5. On note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelles définie par $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$ et la relation $\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} + \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r_1^n + \frac{(-1)^{n+1}}{r_1^n} \right).$$

1.6. Écrire un code Scilab prenant en entrée l'entier naturel $n \geqslant 2$ et retournant γ_n.

2ème Partie
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

- ✓ X_0 *et* X_1 *sont* indépendantes *et suivent chacune une loi de* Poisson *de paramètres respectifs* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$ *;*
- ✓ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

2.1. Calculer l'espérance $E(X_0)$ de la variable aléatoire X_0.

2.2. Calculer la variance $V(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

2.3. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

2.4. Étude de l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

2.4.1. Justifier que $X_2 \geqslant X_1$ puis donner la probabilité de l'événement

$$A = \{w \in \Omega \ ; \ X_1(w) = 2 \text{ et } X_2(w) = 1\}.$$

2.4.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

2.5. Expression de X_n en fonction de X_0 et X_1 pour $n \in \mathbb{N}$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \gamma_{n-1} X_0 + \gamma_n X_1,$$

où $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **1.5.** de la première partie.
On pourra raisonner par récurrence double.

2.6. Éspérance et variance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}$

2.6.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une espérance, notée $E(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.6.2. Montrer que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu\, r_1}{\sqrt{5}}\, r_1^{n-1}$.

2.6.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une variance, notée $V(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.7. Soient n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

2.7.1. Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$ des deux variables aléatoires X_n et X_m.

2.7.2. Que peut-on alors en conclure au sujet des variables aléatoires X_n et X_m ?

2.8. Soient n et m deux entiers naturels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple (n, m) pour que les variables aléatoires X_n et X_m soient indépendantes.

Fin de l'épreuve