ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي وتكوين الأطر

جامعة الحسن الأول
UNIVERSITÉ HASSAN 1er

ENCG Settat

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Formation des Cadres

PRÉSIDENCE DU CNAEM 2015

CONCOURS NATIONAL D'ACCES AUX ÉCOLES DE MANAGEMENT

CNAEM 2015

Filière : **ECT**

Épreuve de Mathématiques

Durée **4** heures

Notes à lire par le candidat

- *Chaque candidat n'a droit qu'à un seul « CAHIER D'EPREUVE ».*
- *Le candidat doit écrire son nom de famille, prénom(s), centre et numéro d'examen dans la partie réservée à ceci en haut de la $1^{ère}$ page du CAHIER D'EPREUVE, avant de commencer à rédiger, pour valider sa feuille de composition.*
- *L'usage de toutes machines (calculatrice, traductrice, etc.) ou dictionnaire est strictement interdit.*
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Page de garde

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :

L'épreuve se compose de quatre exercices indépendants.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

EXERCICE 1

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

1. **a)** Montrer que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse.

b) Vérifier que $P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$.

2. **a)** Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

c) Pour tout entier naturel n, calculer D^n en fonction de n.

d) Pour tout entier naturel n, en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Partie II

Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les conditions initiales $x_0 = -4$, $y_0 = -2$ et $z_0 = -1$ et pour tout entier naturel n.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ z_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - z_n - 2 \end{cases}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$. (1)

2. On se propose de trouver la matrice colonne $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U = AU + B$. (2)

a) Montrer que, la relation (2) est équivaut à $(I - A)U = B$.

b) Vérifier que $A^2 - A - 2I = 0$ où 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $(\frac{-1}{2}A)(I - A) = I$.

c) En déduire que la matrice I-A est inversible et calculer son inverse.

d) En déduire que $U = \frac{-1}{2}AB$ et vérifier que $u = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

4. En utilisant l'expression de A^n obtenue dans la partie I, question 2.d), calculer (x_n), (y_n) et (z_n), en fonction de n.

5. Posons (a_n), (b_n) et (c_n) les suites qui sont définies par les conditions initiales $a_0 = e^{-4}$, $b_0 = -2$ et $c_0 = e^{-1}$, telles que (a_n) et (c_n) sont positives et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} \ln(a_{n+1}) & = \frac{7}{2}\ln(a_n) - \frac{3}{2}b_n - 3\ln(c_n) + 1 \\ b_{n+1} & = \frac{3}{2}\ln(a_n) + \frac{1}{2}b_n - 3\ln(c_n) + 1 \\ \ln(c_{n+1}) & = \frac{3}{2}\ln(a_n) - \frac{3}{2}b_n - \ln(c_n) - 2 \end{cases}$$

. En utilisant un changement de variable convenable, calculer (a_n), (b_n) et (c_n), en fonction de n.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2)e^{\frac{-x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Partie I

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout x réel positif, $f'(x) = \frac{-1}{16}x(x^2 - 4x - 8)e^{\frac{-x}{2}}$.

3. En déduire que pour tout x réel positif,

$$f'(x) = \frac{-1}{16}x(x - x_1)(x - x_2)e^{\frac{-x}{2}}, \text{ avec } x_1 \text{ et } x_2 \text{ à déterminer.}$$

4. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II

1. On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{2}}dx$ et pour tout entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-x}{2}}dx$.

a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à 2.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}e^{\frac{-x}{2}}dx = -2A^{n+1}e^{\frac{-A}{2}} + 2(n+1)\int_0^A x^n e^{\frac{-x}{2}}dx$$

c) Montrer que $\lim_{A \to +\infty} A^{n+1}e^{\frac{-A}{2}} = 0$, on pourra faire un changement de variable en posant $t = \frac{A}{2(n+1)}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, I_n est convergente et que $I_{n+1} = 2(n+1)I_n$.

e) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $I_n = 2^{n+1}n!$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{16}f(x)$

a) Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera S.

b) Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de S.

Partie III

Posons pour tout entier naturel non nul N, $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{I_{k-1}}{(k+1)!2^k}$

1. **a)** Vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul N, $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n+1)!2^n}$ est convergente et calculer sa valeur.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce de monnaie équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat. Si celui-ci est un nombre pair c'est-à-dire 2 ou 4 ou 6, on lance la pièce de monnaie deux fois.

Dans tous les autres cas, on lance la pièce de monnaie une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. **a)** Vérifier que X suit une loi uniforme.

b) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. **a)** Montrer que pour $k \in \{1, 3, 5\}, P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour $k \in \{2, 4, 6\}, P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{4}$.

c) En déduire la valeur de $P(Y = 0)$.

3. Montrer que $P(Y = 2) = P((Y = 2) \cap (X = 2)) + P((Y = 2) \cap (X = 4)) + P((Y = 2) \cap (X = 6)) = \frac{1}{8}$.

4. Donner finalement la loi de la variable aléatoire Y, calculer son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

5. **a)** Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple (X, Y).

b) Est-ce que les deux variables X et Y sont indépendantes ? Justifier votre réponse.

c) Calculer la covariance de X et Y.

d) Déterminer le coefficient de corrélation entre les deux variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t) = 0, & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{\frac{-1}{4}t} - e^{\frac{-1}{3}t}, & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. **a)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, 1[$, montrer que $\theta^3 - \theta^4 > 0$.

c) Montrer que si $t > 0$ alors $e^{\frac{-1}{12}t}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

d) En déduire que pour tout réel t, $f(t) \geq 0$, (on pourra poser $\theta = e^{\frac{-1}{12}t}$).

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel x, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2. **a)** Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$? Justifier que si $x > 0$, $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$.

b) Montrer que pour tout couple de réels (x, a) tel que $x > 0$ et $a > 0$,

$$\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$$

c) En déduire que pour tout réel x strictement positif, $F(x) = 1 - 4e^{\frac{-1}{4}x} + 3e^{\frac{-1}{3}x}$

d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

On considère alors une variable aléatoire X admettant une densité f et de fonction de répartition F.

3. Vérifier que $P(3 < X \leq 4) = -7e^{-1} + 3e^{\frac{4}{3}} + 4e^{\frac{3}{4}}$.

4. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée (E) : $P(X \leq \mu) = P(X > \mu)$, équation dont l'inconnue est le réel strictement positif μ.

a) i) Justifier que pour tout réel x, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.

ii) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.

iii) Montrer que (E') est équivalente à l'équation (E'') : $1 - 8e^{\frac{-1}{4}\mu} + 6e^{\frac{-1}{3}\mu} = 0$.

b) Montrer que la fonction g définie sur $]0, 1[$ par $g(\theta) = 1 - 8\theta^3 + 6\theta^4$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-1, 1[$.

c) En déduire que l'équation (E) admet une et une seule solution (qu'on ne cherchera pas à calculer).

Fin de l'épreuve