المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
قطاع التعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENCG EL JADIDA
المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - الجديدة
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION

جامعة شعيب الدكالي
Université Chouaïb Doukkali

Concours National d'Accès aux Ecoles de Management

Présidence CNAEM 2020
Edition 2020

Epreuve : **Mathématiques**

Filière : ECT

Durée : 4h

Note à lire par le candidat :

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Angle Avenue Ahmed chaouki et Rue de Fès B.P : 122 - 24000 El Jadida Maroc
Tél : 05 23 39 44 35 / 05 23 39 00 70 - Fax : 05 23 39 48 08 - Site : www.encg.ucd.ac.ma

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -9 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 1
Puissances de la matrice A

1. a) Vérifier que $PQ = I$.
   b) En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. a) Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PT^nP^{-1}$.
3. a) Trouver une matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$.
   b) Déterminer N^2 et en déduire pour tout entier naturel $k \geq 3$, la valeur de la matrice N^k.
   c) Déterminer pour tout entier naturel n, T^n en fonction de n et des deux matrices I et N, (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).
4. a) Vérifier que $A = 3I + PNP^{-1}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = 3^{n-1}\Big(3(1-n)I + nA\Big)$.

Partie 2
Application à un système de suites

On considère les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ qui sont définies par les conditions initiales suivantes $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2 \\ y_{n+1} = 3x_n - 3y_n - 9z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 9z_n \end{cases}.$$

On pose $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$. (1)

2. Recopier et compléter le programme scilab suivant afin qu'il affiche X_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(..........................................)
A=..........................................
B=..........................................
U=..........................................
for i = ....................................
    U=..........................................
end
disp(....................)
```

3. On se propose de trouver la matrice colonne U de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U = AU + B$. (2)

   a) Montrer que la relation (2) est équivalente à $(I - A)U = B$.

   b) i) Vérifier que $A^2 - 6A + 9I = O$.

   ii) En déduire que $(I - A)\left[\frac{1}{4}(A - 5I)\right] = I$.

   iii) En déduire que la matrice $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

   c) En déduire que $U = \frac{1}{4}(A - 5I)B$ et vérifier que $U = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

   b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

5. En utilisant l'expression de A^n obtenue dans la question 4. b) de la partie 1, calculer x_n , y_n et z_n, en fonction de n.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4e^{-4x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Partie 1
Étude d'une variable aléatoire à densité

1. a) Calculer, pour tout réel positif A, $\int_0^A f(x)dx$ en fonction de A.

   b) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   c) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   On considère par la suite, la variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F_X sa fonction de répartition.

2. a) Déterminer pour tout réel x, $F_X(x)$.

   b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $P(n \leq X \leq n+1) = (1 - e^{-4})e^{-4n}$.

   c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} P(n \leq X \leq n+1)$ converge et déterminer sa somme.

   d) On considère la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ telle que, pour tout entier naturel n, $W_n = \sum_{k=0}^{n} P(k \leq X \leq k+1)$. Écrire un programme scilab qui détermine la valeur de W_n, l'entier naturel n étant donné par l'utilisateur.

3. a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A xf(x)dx = -(A + \frac{1}{4})e^{-4A} + \frac{1}{4}$$

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et déterminer sa valeur.

c) Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et déterminer sa valeur.

Partie 2
Étude de quelques variables aléatoires

1. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = e^X$ et on note F_Y sa fonction de répartition.

   a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $F_Y(x) = F_X(\ln(x))$.

   b) Donner, en distinguant les cas x supérieur ou égal à 1 et x strictement inférieur à 1, l'expression de $F_Y(x)$.

   c) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

   d) Déterminer la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

2. On considère par la suite deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant la même loi que X.

   a) On pose $Z = \sup(X_1, X_2)$.

      i) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z, on pourra utiliser, pour tout réel x positif, la relation $(Z \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)\Big)$.

      ii) En déduire une densité g de Z.

      iii) Déterminer la valeur de l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

   b) On pose $T = \inf(X_1, X_2)$.

      i) Déterminer la fonction de répartition F_T de T, $\Big($on pourra utiliser, pour tout réel x positif, la relation $(T > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x)\Big)$.

      ii) En déduire une densité h de T.

      iii) Déterminer la valeur de l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

EXERCICE 3

On dispose de deux pièces de monnaies truquées : une pièce notée M_1, pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{3}$ et celle d'obtenir "pile" est $\frac{2}{3}$ et la deuxième pièce est notée M_2, pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{4}$ et celle d'obtenir "pile" est $\frac{3}{4}$. On choisit l'une de ces deux pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout entier naturel non nul k, on note l'événement F_k : "obtenir face au k-ième lancer", et on note P_k : "obtenir pile au k-ième lancer". On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "face". On considère aussi, la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "pile". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile".

1. a) Montrer que $P(X = 1) = \frac{7}{24}$.

   b) Déterminer $P(Y = 1)$.

2. a) Vérifier que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $P_{M_1}(X = n) = P_{M_1}(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n)$.

   b) Vérifier que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $P_{M_1}(Y = n) = P_{M_1}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n)$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P_{M_1}(X = n) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$.

   b) Déterminer pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P_{M_2}(X = n)$ en fonction de n.

   c) En déduire pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P(X = n)$ en fonction de n.

4. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P(Y = n) = (\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}(\frac{1}{4})^n$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $P\Big((X = 1) \cap (Y = n)\Big) = P(Y = n)$.

   c) Est ce que les deux variables X et Y sont indépendantes? justifier votre réponse.

5. Pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$ et pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq 2$, on considère l'expression suivante : $U_n(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} x^{k-1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $U_n(x) = x(\frac{1-x^{n-1}}{1-x})$.

   b) En déduire que pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geq 2} x^{n-1}$ est une série convergente et déterminer sa somme.

   c) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} P(X = n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

   d) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

6. Pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$ et pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq 2$, on considère l'expression suivante : $V_n(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} kx^{k-1}$.

   a) Vérifier que pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$ et pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq 2$,

   $$V_n(x) = xU_n'(x) + U_n(x)$$

   b) Montrer que pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$ et pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq 2$,

   $$V_n(x) = x\left(\frac{2 - x - (n+1)x^{n-1} + nx^n}{(1-x)^2}\right)$$

   c) En déduire que pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geq 2} nx^{n-1}$ est une série convergente et déterminer sa somme.

   d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} nP(X = n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

   e) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et déterminer sa valeur.

7. Écrire un programme scilab qui détermine la plus petite valeur de n, telle que,

$$E(X) - \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \leq 10^{-5}$$

FIN DE L'ÉPREUVE

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆