ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la
Formation des Cadres

Présidence
du Concours National d'Accès aux
Écoles de Management
CNAEM 2013

CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS

Aux Écoles de Management (CNAEM)

Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRES : **ECT**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :
L'épreuve se compose de quatres exercices indépendants.

EXERCICE 1

✧✧✧

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et que sa matrice inverse est donnée par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 1 & 2 + 2(-1)^{n+1} & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 1 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2(-1)^{n+1} + 2^n + 1 & 2(-1)^n - 2^n - 1 & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $P.D.P^{-1} = A$

4. Donner l'expression de A^n en fonction de n, P, P^{-1} et D^n.

5. Retrouver, pour tout entier naturel n, les coefficients de la matrice A^n en fonction de n uniquement.

6. On considère quatres suites (u_n) (v_n) (w_n) et (t_n) définies par des conditions initiales

u_0, v_0, w_0, t_0 et par les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 4v_n - 2w_n - 2t_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n + t_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n + t_n \\ t_{n+1} = 5u_n - 5v_n + 3w_n + 4t_n \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$

7. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A^n, X_0 et de l'entier naturel n.

8. En déduire l'expression des suites u_n, v_n w_n et t_n en fonction de n uniquement dans le cas où $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$, et $t_0 = 2$.

EXERCICE 2

✧✧✧

On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x^2-1)(2x-3) \end{aligned}$$

1. **1.a.** Montrer que

$$\forall x \in [3, +\infty[\quad (x-1)(2x-3) \geq 4$$

1.b. En déduire que

$$\forall x \in [3, +\infty[\; f(x) \geq 4(x+1)$$

1.c. En déduire que

$$\forall x \in [3, +\infty[\; f(x) \geq 3$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \geq 3^{n+1}$$

2.b. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$

2.c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 9^9$

3. **3.a.** Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [3, +\infty[\quad \frac{1}{f(x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x-3}$$

3.b. Montrer que l'intégral $\int_3^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ est convergente et Calculer sa valeur.

EXERCICE 3

✧✧✧

Pour cette exercice on donne $e^{-1} = 0.368$
Dans un centre d'appel, une étude a montré que la durée en minute d'une communication téléphonique est assimilée à une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition F est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) &= 0 \; si \; x < 0 \\ F(x) &= 1 - e^{-x} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer $P(0 \leq X \leq 1)$

2. Déterminer la densité f de la loi X.

3. Calculer E(X), l'espérance mathématique de X.

4. On considère 1000 appels et on décide de comptabiliser le nombre d'appels dont la durée est comprise entre 0 et 1.
Soit Y le nombre d'appels dont la durée ne dépasse pas 1.

4.*a*. donner la loi de Y.

4.*b*. Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

PROBLÈME

✧✧✧

1ère partie

on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \; pour \; tout \; entier \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) définit par $v_n = u_n - \frac{1}{4}$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

2. Donner l'expression de v_n en fonction de n seulement.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n seulement.

2$^{\text{ème}}$ partie

Une entreprise a mis en observation quatres techniciens en stage dans chacun de ses quatres sites différents numéroté 1, 2, 3, et 4. Afin d'évaluer leur compétence en fin de stage, l'ingénieur chef se déplace d'une façon aléatoire dans les quatres sites selon le protocole suivant :

- Au départ l'ingénieur passe le premier jour au site 1.
- Lorsque l'ingénieur est un jour donné dans un site, il se déplace le jour suivant sur l'une quelconque des trois autres site, et ceci d'une façon équiprobable.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du site dans lequel se trouve l'ingénieur au jour n. On a donc $X_0 = 1$.

4. Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4)$$

5. En déduire que pour pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

6. Utiliser la première partie pour donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n seulement.

7. En procédant de la même façon que la question précédente, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$$

8. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$$

9. Déterminer l'espérance $E(X_n)$ de X_n

10. Étudier les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 4)$. Interpreter le résultat.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE