L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 5 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précisions les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux exercices et de deux problèmes indépendants entre eux.

Exercice 1
Des probabilités avec Scilab

Dans cet exercice, on s'intéresse au maximum de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\{1,\dots,p\}$: concrètement, on tire $n=4$ fois un dé à $p=6$ faces : quel est le maximum des tirages ?

On considère donc deux entiers n, p, et n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,p\}$:

$$\forall\, k\in\{1,\dots,p\},\quad X_k\hookrightarrow\mathcal{U}([[1,p]]).$$

On définit par ailleurs la variable aléatoire $Y=\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$.

1. Que vaut $Y(\Omega)$?

2. Déterminer $P(Y=1)$.

3. Pour tout $k\in\{1,\dots,p\}$, déterminer $P(Y\leqslant k)$, puis $p_k=P(Y=k)$.

4. Écrire un code Scilab qui produit un affichage graphique représentant ces probabilités, c'est-à-dire la ligne polygonale reliant les points de coordonnées (k,p_k), pour $k\in Y(\Omega)$.

5. Écrire une fonction Scilab prenant en entrée n et p, tirant n entiers aléatoires entre 1 et p, et retournant le maximum de ces valeurs (l'appel de cette fonction est donc une expérience qui simule la variable aléatoire Y).

Exercice 2
Un résultat sur les suites

Dans cet exercice a et q sont deux réels strictement positifs.

On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leqslant x_{n+1}-q\,x_n\leqslant a.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $b_n=x_{n+1}-q\,x_n$.

1. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$x_n=q^n x_0+\sum_{k=0}^{n-1} b_k q^{n-1-k}.$$

2. Dans cette question, on suppose que $0<q<1$.

2.1. Montrer qu'il existe une suite géométrique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_n-y_n|\leqslant\dfrac{a}{1-q}$.

2.2. Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Dans cette question, on suppose que $q > 1$ et on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

3.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{a}{q-1}$ puis justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
Dans la suite, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.3. Montrer que, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{n+p} - u_n \leqslant \dfrac{a}{q^n(q-1)}$ puis en déduire que

$$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{a}{q^n(q-1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4. Montrer qu'il existe une unique suite géométrique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{a}{1-q}.$$

On pourra remarquer que $x_n = q^n(x_0 + u_n)$, $n \geqslant 1$.

Problème 1
Des probabilités avec de l'algèbre linéaire

Dans ce problème, a, b et c sont des réels, et M désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}.$$

La deuxième et la troisième partie de ce problème sont indépendantes entre elles et utilisent toutes les deux les résultats de la première partie.

1ère Partie
Étude de la diagonalisabilité de M

1.1. Recherche du rang de M

1.1.1. Justifier que le rang de M est $\leqslant 1$. La matrice M est-elle inversible ?

1.1.2. Préciser le rang de M selon que $(a,b,c) = (0,0,0)$ ou bien $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

1.2. Dans cette question, on pose $s = a + b + c$.

1.2.1. Calculer M^2 en fonction de M et s.

1.2.2. En déduire que $M^2 = M$ si, et seulement si, $(a,b,c) = (0,0,0)$ ou bien $s = 1$.

1.3. Dans cette question, on pose aussi $s = a + b + c$.

1.3.1. Vérifier que si $s = 0$ alors M admet 0 pour unique valeur propre.

1.3.2. Si $s = 0$, montrer que la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $(a,b,c) = (0,0,0)$.

1.4. Dans cette question, on pose $s = a + b + c$ et on suppose que $s \neq 0$.

1.4.1. On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que les vecteurs $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$, et $f_3 = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$ forment une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$.

1.4.2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

1.4.3. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 0 et s. On pourra pour cela déterminer une matrice diagonale Δ telle que $M = P\Delta P^{-1}$.

1.4.4. On considère la matrice $K_\alpha = M - \alpha I_3$, où α est un réel.

(i) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ_α que l'on calculera, telle que $K_\alpha = P\Delta_\alpha P^{-1}$.

(ii) Pour quelles valeurs du réel α la matrice K_α est-elle inversible ?

1.5. Application : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant ce qui précède, montrer que la matrice A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et dire si A est inversible.

$2^{\text{ème}}$ Partie

Dans cette partie, X, Y et Z désignent trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p.

On considère la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$.

Pour traiter cette partie, on utilisera avec profit les résultats de la première partie.

2.1. Rappeler les expressions de la loi, l'espérance et la variance de X.

2.2. Montrer que $X+Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$. Quelle est la loi de la variable $S = X+Y+Z$?

2.3. Quelle est la probabilité que M_1 soit une matrice inversible ?

2.4. Quelle est la probabilité que la matrice M_1 vérifie $M_1^2 = M_1$?

2.5. Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M_1. Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T.

2.6. Quelle est la probabilité que M_1 soit diagonalisable ?

2.7. On suppose que $p = \frac{1}{2}$.

2.7.1. Quelle est la probabilité qu'au moins une des lignes de M_1 soit égale à la somme des deux autres ?

On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$, valable pour $(n,m,r) \in \mathbb{N}^3$ avec $r \leqslant n+m$.

2.7.2. Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M_1 soient des entiers pairs ?

$3^{\text{ème}}$ Partie

3.1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \lambda e^x e^{-\lambda e^x}$, avec $\lambda > 0$.

3.1.1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3.1.2. Soit U une variable aléatoire de densité f et soit $V = \exp(U)$. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U. En déduire que V est une variable aléatoire à densité. Reconnaître la loi de V.

Dans la suite de cette partie, X, Y et Z désignent trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où λ est un réel strictement positif.

On considère la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$.

3.2. Rappeler l'espérance et la variance de X.

3.3. Dire, sans chercher sa loi, pourquoi $X+Y$ ne peut suivre une loi exponentielle.

3.4. On rappelle que pour tout couple (U,V) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V, la variable $W = U+V$ admet une densité f_W définier par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\, dt.$$

3.4.1. Vérifier que si f_U et f_V sont nulles sur $\mathbb{R}^-$, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x-t)\, dt.$$

3.4.2. En déduire que $S = X + Y + Z$ est une variable aléatoire à densité et montrer qu'une densité de la variable aléatoire S est donnée par

$$f_S(x) = \begin{cases} \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour traiter la suite de cette partie, on utilisera avec profit les résultats de la première partie.

3.5. Étude de la matrice aléatoire M_2

3.5.1. Montrer que la probabilité que la matrice M_2 ne soit pas diagonalisable est nulle.

3.5.2. Quelle est la probabilité que M_2 ait une valeur propre de valeur absolue $\geqslant 1$?

Problème 2
Un résultat de probabilité

Dans ce problème, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ désigne une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux à deux indépendantes et prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q = 1 - p, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On définit une nouvelle suite $(S_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires par

$$\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Si x est un réel, $\lfloor x \rfloor$ désignera sa partie entière.

4.1. Préciser l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

4.2. Calculer la loi de la variable aléatoire S_N pour tout entier naturel non nul N.

4.3. Soit x un nombre réel.

4.3.1. Si $x \geqslant 1$, montrer que $e^{x^2} + x \geqslant e^x$.

4.3.2. Montrer que

$$e^{x^2} + x - e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} \Big(\frac{1}{k!} - \Big(\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \Big) \Big).$$

4.3.3. En déduire que si $x \leqslant 1$ alors $e^{x^2} + x \geqslant e^x$. On pourra distinguer les cas $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x \leqslant 0$.

Dans la suite, on considère ε et λ, deux réels strictement positifs.

4.4. Montrer que $pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p} \leqslant e^{\lambda^2}$.

4.5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$P\Big(\Big| \frac{S_n}{n} - p \Big| \geqslant \varepsilon \Big) = \sum_{k=0}^{\lfloor n(p-\varepsilon) \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+\lfloor n(p+\varepsilon) \rfloor}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

4.6. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$P\Big(\Big| \frac{S_n}{n} - p \Big| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant e^{-\lambda n \varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\lambda(np-k)} p^k q^{n-k} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} e^{\lambda(k-np)} p^k q^{n-k} \right).$$

4.7. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant e^{-\lambda n \varepsilon}\Big((pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n + (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n\Big).$$

On pourra remarquer que $p + q = 1$.

4.8. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant 2e^{\lambda^2 n - \lambda n \varepsilon},$$

puis que

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}.$$

4.9. Comparer cette majoration avec celle obtenue en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4.10. Donner une estimation de la probabilité de l'événement $\bigcup_{n \geqslant m} \{w \in \Omega\,;\, \Big|\frac{S_n(w)}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\}$, pour tout entier $m \geqslant 1$.

4.11. Peut-on avoir une estimation de cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Fin de l'épreuve