Donc, φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et puisqu'elle continue sur cet intervalle alors φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\varphi(]-\infty;+\infty[) = \left]\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right);+\infty\right[$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall y \in \left]\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right);+\infty\right[$$

$$\varphi(x) = y \iff x = \varphi^{-1}(y)$$

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = y \iff \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 3y$$
$$\iff \frac{1+e^x}{2} = e^{3y}$$
$$\iff 1+e^x = 2e^{3y}$$
$$\iff e^x = 2e^{3y}-1$$

$2e^{3y}-1$ est toujours positive sur $\left]\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right);+\infty\right[$

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = y \iff x = \ln\left(2e^{3y}-1\right)$$

Donc, $\forall x \in \left]\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right);+\infty\right[\quad \varphi^{-1}(x) = \ln\left(2e^{3x}-1\right)$

2ème Partie

1/

- $t \longrightarrow \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $t \longrightarrow 0$ est continue sur $]-\infty,0[$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0. De plus, f admet clairement des limites finies en 0^+ et 0^- donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Sur $]-\infty,0[$, f est nulle donc positive. Si $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc f est bien positive sur $\mathbb{R}$.
- Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$, on a $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$ et donc sous réserve d'existence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$$

On pose $\quad I_A = 2\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt \quad$ avec $A > 0$

$$I_A = 2\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = 2\int_0^A \frac{(1+e^t)'}{(1+e^t)^2}\,dt$$

$$= 2\left[\frac{-1}{(2-1)(1+e^t)^{2-1}}\right]_0^A$$
$$= -2\left[\frac{1}{1+e^t}\right]_0^A = -2\left(\frac{1}{1+e^A}-1\right)$$
$$= 1-\frac{2}{1+e^A}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} I_A = \lim_{A\to+\infty} 1-\frac{2}{1+e^A} = 1$$

Ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

En conclusion, f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2/

a/ Fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R}. \qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ Si $x < 0$ alors $]-\infty,x] \subset]-\infty,0]$ donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$\Rightarrow$ Sinon $x \geq 0$ et en utilisant la relation de Chasles

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$$
$$= 2\int_0^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = 2\left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^x$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^x}\right) = 1-\frac{2}{1+e^x}$$

Ainsi, la fonction de répartition F de X est bien donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1-\frac{2}{1+e^x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

b/

on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

Donc, $\quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad 0 \leq F(x) < 1$

c/

$$P(\ln(2) \leq X \leq \ln(3)) = F_X(\ln(3)) - F_X(\ln(2))$$
$$= \left(1-\frac{2}{1+e^{\ln(3)}}\right)-\left(1-\frac{2}{1+e^{\ln(2)}}\right)$$
$$= \left(1-\frac{2}{4}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

3/

a/ $\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{e^{-t}} \times \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt$
$= -\int_0^A \frac{-e^{-t}}{e^{-t}+1}dt$
$= -\int_0^A \frac{(e^{-t}+1)'}{e^{-t}+1}dt$
$= -[\ln(e^{-t}+1)]_0^A$
$= -(\ln(e^{-A}+1) - \ln(2))$
$= \ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$

b/ $\int_0^A tf(t)dt = \int_0^A t\,\frac{2e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \int_0^A 2t\,\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$
on procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\frac{1}{1+e^t} \end{cases}$

$\int_0^A 2t\,\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \left[-\frac{2t}{1+e^t}\right]_0^A + 2\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt$
$= \frac{-2A}{1+e^{-A}} + 2\ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$

c/ $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{1+e^A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{Ae^{-A}}{1+e^{-A}} = \frac{0}{1} = 0$
Car $\lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{A}{e^A} = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$

d/ on sait que $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$
$= \lim_{A\to+\infty} \frac{-2A}{1+e^{-A}} + 2\ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)$
$= \lim_{A\to+\infty} \frac{-2A}{1+e^{-A}} + 2\ln(2) - 2\ln(1+e^{-A})$
$= 2\ln(2)$

D'après la question précédente $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{1+e^A} = 0$

Et $\lim_{A\to+\infty} 2\ln(1+e^{-A}) = 2\ln(1) = 0$

4/

a/ $P\left(Y \le \frac{-\ln(2)}{3}\right) = P\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+e^X}{2}\right) \le \frac{-\ln(2)}{3}\right)$
$= P\left(\ln\left(\frac{1+e^X}{2}\right) \le -\ln(2)\right)$
$= P\left(\frac{1+e^X}{2} \le \frac{1}{2}\right) = P(1+e^X \le 1) = P(e^X \le 0) = 0$

Car e^x est toujours strictement positive.

b/

$\Rightarrow$ Si $x \le \frac{-\ln(2)}{3}$

D'après la question précédente $F_Y(x) = P(Y \le x) = 0$

$\Rightarrow$ Si $x > \frac{-\ln(2)}{3}$

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+e^X}{2}\right) \le x\right)$
$= P\left(\ln\left(\frac{1+e^X}{2}\right) \le 3x\right)$
$= P\left(\frac{1+e^X}{2} \le e^{3x}\right)$
$= P(1+e^X \le 2e^{3x})$
$= P(e^X \le 2e^{3x} - 1)$
$= P(X \le \ln(2e^{3x} - 1))$

Donc, $F_Y(x) = F_X(\ln(2e^{3x} - 1))$

$F_Y(x) = 1 - \frac{2}{1+e^{\ln(2e^{3x}-1)}} = 1 - \frac{2}{1+2e^{3x}-1} = 1 - \frac{1}{e^{3x}}$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le \frac{-\ln(2)}{3} \\ 1 - \frac{1}{e^{3x}} & si\ x > \frac{-\ln(2)}{3} \end{cases}$$

c/

$F_Y(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^{3\alpha}} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{3\alpha}} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow e^{3\alpha} = 2 \Leftrightarrow \ln(e^{3\alpha}) = \ln(2)$
$\Leftrightarrow 3\alpha = \ln(2) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln(2)}{3}$

5/

a/ Fonction de répartition F_{Z_1} :

Soit x dans $\mathbb{R}$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :
$F_{Z_1}(x) = P(Z_1 \le x) = P([X_1 \le x]) \cap P([X_2 \le x])$
$= F_{X_1}(x) \times F_{X_1}(x) = (F_X(x))^2$

Fonction de répartition F_{Z_2} :

Soit x dans $\mathbb{R}$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :
$Z_2 = \sup(\varphi(X_1), \varphi(X_2)) = \sup(Y_1, Y_2)$
$F_{Z_2}(x) = P(Z_2 \le x) = P([Y_1 \le x]) \cap P([Y_2 \le x])$

Scanné avec CamScanner

$$= F_{Y_1}(x) \times F_{Y_1}(x) = (F_Y(x))^2$$

Fonction de répartition F_{Z_3} :

Soit x dans $\mathbb{R}$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$F_{Z_3}(x) = P(Z_3 \leq x) = P(\varphi(Z_1) \leq x) = P\left(\varphi\left(P(Z_1 \leq x)\right) \leq x\right)$$
$$= P\left(\varphi\left(\left(F_X(x)\right)^2\right) \leq x\right)$$

On sait que $Y = \varphi(X)$

Donc, $F_{Z_3}(x) = F_Y\left(\left(F_X(x)\right)^2\right)$

b/

i/ $E(Z_1 + Z_4) = E(\sup(X_1, X_2) + \inf(X_1, X_2))$
$= E(X_1 + X_2)$
$= E(X_1) + E(X_2)$
$= 2E(X) = 2(2\ln(2)) = 4\ln(2)$

ii/ $V(Z_1 + Z_4) = V(\sup(X_1, X_2) + \inf(X_1, X_2))$
$= V(X_1 + X_2) = 2V(X)$

iii/ Fonction de répartition F_{Z_4} :

Soit x dans $\mathbb{R}$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$F_{Z_4}(x) = P(Z_4 \leq x) = P([X_1 \leq x]) \cap P([X_2 \leq x])$$
$$= F_{X_1}(x) \times F_{X_1}(x) = (F_X(x))^2$$

Exercice 2

1/

a/ $\forall x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n

$$0 < \frac{1}{1+e^x} < 1 \iff 0 < \frac{1}{e^{nx}(1+e^x)} < \frac{1}{e^{nx}} \iff 0 < g_n(x) < e^{-nx}$$

$$0 < \frac{1}{(1+e^x)^2} < 1 \iff 0 < \frac{1}{e^{nx}(1+e^x)^2} < \frac{1}{e^{nx}} \iff 0 < h_n(x) < e^{-nx}$$

b/

D'après la question précédente, on a :

$0 < g_n(x) < e^{-nx}$ et $0 < h_n(x) < e^{-nx}$

Donc, $0 < I_n < \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$ et $0 < J_n < \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$

Les deux suites I_n et J_n sont bornées donc elles sont convergentes.

c/

On a $0 < I_n < \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-nt}dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-nt}dt$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{n}e^{-nA} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Et $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

D'après le théorème de gendarme, on déduit que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

On a $0 < J_n < \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Et $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

D'après le théorème de gendarme, on déduit que $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

d/

i/ $I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt$
$= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt$ avec $A > 0$
$= \lim_{A \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{2}{1+e^{-A}}\right)\right)$
$= \lim_{A \to +\infty} \ln(2) - \ln(1+e^{-A}) = \ln(2)$

Car $\lim_{A \to +\infty} \ln(1+e^{-A}) = \ln(1) = 0$

ii/ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1+e^t)^2} = \frac{a}{1+e^t} + \frac{be^t}{(1+e^t)^2} \iff \frac{1}{(1+e^t)^2} = \frac{a(1+e^t)+be^t}{(1+e^t)^2}$$
$$\iff 1 = a + ae^t + be^t$$
$$\iff 1 = a + e^t(a+b)$$

Par identification

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{(1+e^t)^2} = \frac{1}{1+e^t} - \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$

iii/ $J_0 = \int_0^{+\infty} h_0(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t)^2}\,dt$
$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$
$= I_0 - \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$

On pose $K_A = \int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$ avec $A > 0$

Scanné avec CamScanner

$$K_A = \int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \int_0^A \frac{(1+e^t)'}{(1+e^t)^2}\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+e^A}$$

Donc, $J_0 = I_0 - \lim\limits_{A\to+\infty} K_A = \ln(2) - \lim\limits_{A\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{1+e^A}\right)$
$$= \ln(2) - 1$$

2/

a/

$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n + I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)} + \frac{1}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^t+1}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(n+1)t}}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt$$
$$= \left[\frac{-1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{n+1}$$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(n+1)t} = 0$

b/

```
n = input('Donner une valeur de l''entier naturel non nul n:')
I = log(2)
for k = 1:n
    I = 1/(n + 1) - I
end
disp(I,'la valeur de I est :')
```

c/

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)}\,dt$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(n+1)t}(1+e^t)} - \frac{1}{e^{nt}(1+e^t)}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1-e^t}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt$$
$$t \geq 0 \iff e^t \geq e^0 \iff 1 - e^t \leq 0$$

Donc, $\frac{1-e^t}{e^{(n+1)t}(1+e^t)} \leq 0 \iff \int_0^{+\infty} \frac{1-e^t}{e^{(n+1)t}(1+e^t)}\,dt \leq 0$

Donc, la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

d/

D'après la question précédente on a : $\forall n \geq 0 \quad I_{n+1} - I_n \leq 0$

CNAEM 2018, CORRIGÉ

Et $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n \leq 0 \iff \frac{1}{n+1} - I_n - I_n \leq 0$
$$\iff \frac{1}{n+1} \leq 2I_n$$
$$\iff \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n$$

e/ d'après la question précédente on a : $\forall n \geq 0 \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n$

Donc, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{n\geq 0} I_n$

Donc, si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2(n+1)}$ diverge alors la série $\sum_{n\geq 0} I_n$ diverge.

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ (On procède par un changement de variable)
$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

On sait que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors la série $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Conclusion : La série $\sum_{n\geq 0} I_n$ est divergente.

3/

a/ $J_{k-1} + J_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(k-1)t}(1+e^t)^2}\,dt + J_k$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{(k)t}(1+e^t)^2}\,dt + J_k$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(k)t}}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt + J_k$$

On procède par intégration par partie :

Posons $\begin{cases} u(x) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \\ v'(x) = \frac{1}{e^{(k)t}} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{1+e^t} \\ v(x) = -e^{-kt} \end{cases}$

$J_{k-1} + J_k = \left[-\frac{e^t}{e^{kt}(1+e^t)^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{kt}(1+e^t)}\,dt + J_k$
$$= \left[\frac{1}{e^{(k-1)t}(1+e^t)^2}\right]_{+\infty}^{0} - I_k + J_k = 1 - I_k + J_k$$

Donc, $\forall k \geq 1 \quad J_{k-1} + J_k = 1 - I_k + J_k \iff J_{k-1} = 1 - I_k$
$$\iff J_k = 1 - I_{k+1}$$

b/

On sait que $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$ donc, $I_1 = 1 - \ln(2)$

```
n = input('Donner une valeur de l''entier naturel non nul n :')
I = 1 - log(2)
```

```
for k = 1:n
    I = 1/(n + 1) - I
    J = 1 - I
end
disp(J,'la valeur de J est :')
```

e/

On sait que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} I_k = I_0 + (-1)^{n+1} J_n$

```
n = input('Donner une valeur de l''entier naturel non nul n :')
I = 1 - log(2)
for k = 1:n
    I = 1/(n + 1) - I
    J = 1 - I
end
S = log(2) - 1 + (-1)^(n + 1) * J
disp(S,'la valeur de S est :')
```

Exercice 3

1ère Partie

1/

a/ $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+2 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1+1-2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

b/ D'après la question précédente : $PQ = 3I$

$$PQ = 3I \iff P\frac{1}{3}Q = I.$$

Donc, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

2/

a/ on a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

$E = \{x + y + z = 0\}$ est l'équation d'un plan

On cherche $f_2 = (1, a, b)$ tel que $1 + a + b = 0$ et $f_3 = (c, 1, d)$ tel que $c + 1 + d = 0$ avec f_2 et f_3 soient libre pour que $dim(Vect\{f_2, f_3\}) = 2$

On remarque que $f_2 = (1,-1,0)$ et $f_3 = (0,1,-1)$

b/ Pour que la famille (f_1, f_2, f_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre et génératrice

- Famille libre

Une famille d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est dite libre lorsque $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (0,0,0)$$
$$\iff \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(0,1,-1) = (0,0,0)$$
$$\iff (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2, 0) + (0, \lambda_3, -\lambda_3) = (0,0,0)$$
$$\iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre

- Famille génératrice

On pose $U = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$

$$U = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(0,1,-1)$$
$$\iff (x,y,z) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2, 0) + (0, \lambda_3, -\lambda_3)$$
$$\iff (x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) : (E)$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_1 - y + \lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_1 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ \lambda_2 = x - \lambda_2 + x - \lambda_2 - z - y \\ \lambda_3 = x - \lambda_2 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ \lambda_2 = x - \lambda_2 + x - \lambda_2 - z - y \\ \lambda_3 = x - \lambda_2 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}y \\ \lambda_3 = x - \lambda_2 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3}(x+y+z) \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}(2x-y-z) \\ \lambda_3 = \frac{1}{3}(x+y-2z) \end{cases}$$

Donc, l'équation (E) admet des solutions en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ existent bien et donc la famille est génératrice.
Donc, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

3/

a/

$$A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = \left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^2 - \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9+1+1 & 3+3+1 & 3+1+3 \\ 3+3+1 & 1+9+1 & 1+3+3 \\ 3+1+3 & 1+3+3 & 1+1+9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} - \frac{7}{25}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{10}{25}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{25} - \frac{21}{25} + \frac{10}{25} & \frac{7}{25} - \frac{7}{25} & \frac{7}{25} - \frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} - \frac{7}{25} & \frac{11}{25} - \frac{21}{25} + \frac{10}{25} & \frac{7}{25} - \frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} - \frac{7}{25} & \frac{7}{25} - \frac{7}{25} & \frac{11}{25} - \frac{21}{25} + \frac{10}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b/ On a : $A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = 0$

$$A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = 0 \iff A^2 - \frac{7}{5}A = -\frac{2}{5}I$$

$$\iff A\left(A - \frac{7}{5}I\right) = -\frac{2}{5}I$$

$$\iff A\left(-\frac{5}{2}\right)\left(A - \frac{7}{5}I\right) = I$$

Donc, A est une matrice inversible et $A^{-1} = \frac{7}{2}I - \frac{5}{2}A$

c/ D'après la question 3/a $A^2 - \frac{7}{5}A + \frac{2}{5}I = 0$

Donc, $P(X) = X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{2}{5}$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Donc, $\gamma = -\frac{7}{5}$ et $\delta = \frac{2}{5}$

d/ $P(X) = X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{2}{5}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - 4.\frac{2}{5} = \frac{49}{25} - \frac{8}{5} = \frac{49-40}{25} = \frac{9}{25}$$

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{5}+\frac{3}{5}}{2} = \frac{5}{10}.2 = 1$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{5}-\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}.\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

Les valeurs propres éventuelles de A sont : $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{2}{5}$

e/

- $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f/

α et β sont les valeurs propres de la matrice A. Car elles vérifient l'équation $AX = \lambda X$.

4/

a/

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{5} & 0\\ 1 & 0 & \frac{2}{5}\\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\frac{4}{5} & 1-\frac{2}{5} & 1-\frac{2}{5}\\ 1-\frac{2}{5} & 1+\frac{4}{5} & 1-\frac{2}{5}\\ 1-\frac{4}{5}+\frac{2}{5} & 1+\frac{2}{5}-\frac{4}{5} & 1+\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{9}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=A$$

b/

On procède par récurrence sur n. Notons P_n la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$. Or $A = PDP^{-1}$ donc $AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} \Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurreoce, la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

5/ D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & \left(\frac{2}{5}\right)^n & 0\\ 1 & 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n\\ 1 & -\left(\frac{2}{5}\right)^n & -\left(\frac{2}{5}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\end{pmatrix}$$

2ème Partie

1/

a/ a_n, b_n et c_n forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

b/ a_n, b_n et c_n forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.

$$P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

c/ a_n, b_n et c_n forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.

$$P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5}c_n$$

2/ $$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{5}b_n+\frac{1}{5}c_n\\ \frac{1}{5}a_n+\frac{3}{5}b_n+\frac{1}{5}c_n\\ \frac{1}{5}a_n+\frac{1}{5}b_n+\frac{3}{5}c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$$

3/

```
A = 1/5 * [3 1 1; 1 3 1; 1 1 3]
U = [1/2 ; 1/3 ; 1/6]
for i = 1: 15
  U = A * U
end
```

$disp(U,' les\ valeurs\ de\ a_{15}, b_{15}\ et\ c_{15}\ sont:)$

4/

On a : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

La suite $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est une suite géométrique de raison A et du premier terme $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{6}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{6}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{5}{6}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(2+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{6}\left(6-3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(2+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18}\left(6-3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{6}\left(2+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$
$$b_n = \frac{1}{3}$$
$$c_n = \frac{1}{18}\left(6-3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

5/

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\left(2+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{6}$$

Car, $-1 < \frac{2}{5} < 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{18}\left(6-3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{3}$$

Car, $-1 < \frac{2}{5} < 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Exercice 3

1/

a/ A et B forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.

$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D)$
$= 0{,}4 \times 0{,}05 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}08$

b/ $P(D \cap A) = P(A)P_A(D)$
$= 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$

c/ $P_A(D) = \frac{P(D\cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$

2/

a/ On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier k : $P(X = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$

$E(X) = \lambda = 10$ et $V(X) = \lambda = 10$

b/ Quand $(X = n)$, Y est le nombre d'objet défectueux parmi n, qui sont défectueux indépendamment les un des autres avec une même probabilité 0,05. Donc, $Y/X = n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0{,}1)$

i/ $k > n$

$P(Y = k/X = n) = 0$

Car, on ne peut pas trouver un nombre d'ampoules défectueux supérieur au nombre produit des ampoules par la machine A.

ii/ $k \leq n$

$$P(Y = k/X = n) = \binom{n}{k}(0.1^k)(0.9^{n-k})$$

c/ Comme $(X = j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement on a pour tout entier k :

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[Y = k/X = n]P(X = n)$$

Série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $k > n$ ou $k \leq n$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{M} P[Y = k/X = n]P(X = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P[Y = k/X = n]P(X = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^{M} P[Y = k/X = n]P(X = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^{M} P[Y = k/X = n]P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k}(0.1^k)(0.9^{n-k})e^{-10}\frac{10^n}{n!} \\ &= e^{-10}\sum_{n=k}^{M}\binom{n}{k}(0.1^k)\left(\frac{1}{0.9}\right)^k(0.9)^n\frac{10^n}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10}\sum_{n=k}^{M}\frac{n!}{k!(n-k)!n!}(0.9\times 10)^n \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{M}\frac{1}{(n-k)!}(9)^n \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{M-k}\frac{1}{(m)!}(9)^{m+k} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10}\frac{1}{k!}9^k\sum_{m=0}^{M-k}\frac{(9)^m}{(m)!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10}\frac{1}{k!}9^k e^9 \\ &= 1^k\frac{e^{-1}}{k!}\end{aligned}$$

Donc, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

d/

$$Y = grand(1{,}1000,'poi',1)$$

-FIN DU CORRIGÉ-