Royaume du Maroc

Ministère de l'Enseignement Supérieur,

de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

Université Ibn Tofaïl

المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - القنيطرة

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion - Kénitra

Présidence du CNAEM 2022

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion de Kénitra

Université Ibn Tofaïl

CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS AUX ECOLES DE MANAGEMENT

Edition 2022

Epreuve : Mathématiques

Filière : ECT

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de tout document ou de tout appareil électronique est strictement interdit.

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision $\boxed{\textit{les références}}$ *des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Remarques générales :

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

EXERCICE 1

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie 1
Puissances de la matrice A

1. a) Vérifier que $PQ = -6I$.

   b) En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

2. a) Déterminer les réels α, β et γ tels que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Qu'est ce que vous pouvez conclure pour α, β et γ ? Justifier votre réponse.

3. a) Vérifier que $AP = PD$, avec $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, α, β et γ sont les valeurs qui sont déterminées dans la question de la partie 1, 2. a).

   b) Qu'est ce que vous pouvez conclure pour la matrice A ? Justifier votre réponse.

   c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n P = PD^n$.

4. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de n.

Partie 2
Application à la détermination de l'expression d'une suite

On considère la suite $(x_n)_n$ qui est définie par les conditions initiales suivantes $x_0 = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$x_{n+3} = 2x_n + x_{n+1} - 2x_{n+2}$$

On pose pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$. (1)

2. Recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il affiche X_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(..........................................)
A=..........................................
U=..........................................
for i = ....................................
    U=..........................................
end
disp(....................)
```

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

4. En utilisant l'expression de A^n obtenue dans la question 4. b) de la partie 1, montrer que pour tout entier naturel n,
$$x_n = \frac{1}{3} + 2(-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n$$

5. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{3x_n - 1}{(-3)^n}$ est une série convergente et déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3x_n - 1}{(-3)^n}$.

6. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3x_k - 1}{(-3)^k}$, l'entier naturel n étant donné par l'utilisateur.

7. On considère la suite $(y_n)_n$ qui est définie par les conditions initiales suivantes $y_0 = e^2$, $y_1 = e^{-1}$, $y_2 = e^1$ et pour tout entier naturel n, $y_{n+3} = \left(\frac{y_n}{y_{n+2}}\right)^2 y_{n+1}$. Déterminer l'expression de y_n en fonction de n.

EXERCICE 2

On dispose d'une urne qui contient deux boules blanches et trois boules rouges. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise (c'est-à-dire, il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage). L'opération de gains des points est la suivante :
Pendant le deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur de la boule tirée est la même que celle qui a été obtenue au premier tirage. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.
Pendant le troisième tirage, le joueur reçoit deux points à chaque fois que la couleur de la boule tirée est la même que celle qui a été obtenue au deuxième tirage. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.
Soit X_2 la variable aléatoire qui est égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. Soit X_3 la variable aléatoire qui est égale au gain du joueur lors du troisième tirage.
Par exemple, si les trois tirages successifs amènent : blanc, rouge, rouge alors $X_2 = 0$ et $X_3 = 2$.
On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3 les événements B_k : " obtenir une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage" et R_k : " obtenir une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ".

1. a) Justifier que $(X_2 = 0) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$.

b) Vérifier que $P(X_2 = 0) = \dfrac{12}{25}$.

c) Calculer $P(X_2 = 1)$.

d) Déterminer $E(X_2)$ l'espérance de la variable aléatoire X_2.

e) Déterminer $V(X_2)$ la variance de la variable aléatoire X_2.

2. a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 2)$.

   b) Déterminer $E(X_3)$ l'espérance et $V(X_3)$ la variance de la variable aléatoire X_3.

3. Soit G la variable aléatoire égale au nombre total des points gagnés à la fin des trois tirages. Déterminer $E(G)$ l'espérance et $V(G)$ la variance de la variable aléatoire G.

4. a) Exprimer l'événement $\Big((X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)\Big)$ en fonction de B_1, B_2, B_3 et R_1, R_2, R_3.

   b) En déduire que $P\Big((X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)\Big) = \dfrac{7}{25}$.

   c) Déterminer la loi conjointe du couple (X_2, X_3) sous forme d'un tableau.

   d) En déduire que la covariance entre les deux variables aléatoires X_2 et X_3 est $Cov(X_2, X_3) = \dfrac{12}{625}$.

5. Déterminer $\rho(X_2, X_3)$, le coefficient de corrélation linéaire de (X_2, X_3).

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que le joueur effectue n fois l'opération citée auparavant (les trois tirages). On considère la variable aléatoire Y qui est égale au nombre de fois la réalisation de l'événement $(G = 3)$ pendant les n expériences.

   a) Préciser la loi de Y en déterminant ses paramètres.

   b) Dans cette question, on prend $n = 5$, déterminer la probabilité d'avoir exactement 3 fois l'événement $(G = 3)$.

   c) Écrie un programme Scilab qui permet de simuler la variable aléatoire Y et qui renvoie une matrice d'une ligne et de mille colonnes de valeurs. La valeur de n est donnée par l'utilisateur.

EXERCICE 3

Soit θ un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{\theta - x}{2}\right) & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

Partie 1
Étude d'une variable aléatoire à densité

1. a) Vérifier que, pour tout réel $A \geq \theta$, $\displaystyle\int_\theta^A f(x)dx = 1 - \exp\left(\dfrac{\theta - A}{2}\right)$.

   b) Montrer que $\int_\theta^{+\infty} f(x)dx$ converge et déterminer sa valeur.

   c) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère par la suite, la variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F_X sa fonction de répartition.

2. Déterminer pour tout réel x, $F_X(x)$.

3. a) Vérifier que $P(3\theta \leq X \leq 3\theta + 2) = e^{-\theta}(1 - e^{-1})$ et que $P(X \geq 3\theta) = e^{-\theta}$.

   b) En déduire $P_{(X \geq 3\theta)}\Big(X \leq 3\theta + 2\Big)$, la probabilité de l'événement $\Big(X \leq 3\theta + 2\Big)$ sachant l'événement $\Big(X \geq 3\theta\Big)$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{2}(X - \theta)$.

   a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est définie par : $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$.

   b) En déduire que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.

   c) En déduire $E(X)$ l'espérance de X et $V(X)$ la variance de X.

Partie 2
Estimateur de θ

1. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.
   On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - 2)$.

   a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de θ.

   b) Déterminer la variance de la variable aléatoire S_n.

   c) En déduire $r(S_n)$ le risque quadratique de l'estimateur S_n.

2. Soit ε un réel strictement positif. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$P(|S_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

3. Soit α un réel de $]0, 1[$ et $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}$. Montrer que $[S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour θ de niveau de confiance $1 - \alpha$.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★