CNAEM 2017, corrigé

Exercice 1
À propos de la loi exponentielle.

1/ On a X suit la loi exponentielle de paramètre λ

Donc, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

2/ Fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

⇒ Si $x \leq 0$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 0]$ donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

⇒ Sinon $x > 0$ et en utilisant la relation de Chasles

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Ainsi, la fonction de répartition F de X est bien donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

3/ On a $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $[X](\Omega) = \mathbb{N}$ et $([X]+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\qquad p(Y \leq 0) = 0$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= p([X] + 1 = k) \\ &= p([X] = k - 1) \\ &= p(k - 1 \leq X \leq k) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - 1 + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - \frac{e^{-\lambda k}}{e^{-\lambda k}e^{\lambda}}\right) \\ &= e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\left(1 - e^{-\lambda}\right) \in [0,1]$

Donc, Y suit la loi géométrique de paramètre $\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

$$Y \hookrightarrow G\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

4/ $\quad \lambda = 1 \quad$ et $\quad X_1$ et X_2 sont indépendantes

4.1

On sait que $Z = \max(X_1, X_2)$.

$\Rightarrow$ Si $\max(X_1, X_2) = X_1$ alors $X_1 \leq x$ (i)

Et $x \geq X_1 \geq X_2$ donc $X_2 \leq x$ (ii)

D'après (i) et (ii)

$$\{Z \leq x\} = \{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\}$$

$\Rightarrow$ Si $\max(X_1, X_2) = X_2$ alors $X_2 \leq x$ (i)

Et $x \geq X_2 \geq X_1$ donc $X_1 \leq x$ (ii)

D'après (i) et (ii)

$$\{Z \leq x\} = \{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{Z \leq x\} = \{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\}$

4.2

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= p(\{Z \leq x\}) \\ &= p(\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\}) \\ &= p(\{X_1 \leq x\})\, p(\{X_2 \leq x\}) \quad \textit{car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indp} \\ &= F_X(x) F_X(x) = (F_X(x))^2 \end{aligned}$$

Donc, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ (1-e^{-x})^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Si $x \leq 0$

$$f_z(x) = F_Z(x)' = 0$$

$\Rightarrow$ Si $x > 0$

$$\begin{aligned} f_z(x) = F_Z(x)' &= [(1-e^{-x})^2]' \\ &= 2.(1-e^{-x})'.(1-e^{-x})^{2-1} \\ &= 2.e^{-x}.(1-e^{-x}) \end{aligned}$$

Conclusion : $f_z(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 2.e^{-x}.(1-e^{-x}) & si\ x > 0 \end{cases}$

4.3 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$

Z admet une espérance si cette intégrale converge.

Et comme $f_z(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ alors $E(Z) = \int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$

On pose $I_A = \int_0^A t f(t)\, dt$ avec $A > 0$

$$\begin{aligned} I_A = \int_0^A t f(t)\, dt &= \int_0^A t 2e^{-t}(1-e^{-t})\, dt \\ &= \int_0^A 2te^{-t}\, dt - \int_0^A 2te^{-2t}\, dt \end{aligned}$$

- $\int_0^A 2te^{-t}\,dt$ on procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$\int_0^A 2te^{-t}\,dt = [-2te^{-t}]_0^A + 2\int_0^A e^{-t}\,dt$$
$$= -2Ae^{-A} + 2[-e^{-t}]_0^A = -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2$$

- $\int_0^A 2te^{-2t}\,dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-2t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{cases}$

$$\int_0^A 2te^{-2t}\,dt = [-te^{-2t}]_0^A + \int_0^A e^{-2t}\,dt$$
$$= -Ae^{-2A} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^A = -Ae^{-2A} - \frac{1}{2}e^{-2A} + \frac{1}{2}$$

Donc, $I_A = -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2 + Ae^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2A} - \frac{1}{2}$

$$E(Z) = \lim_{A\to\infty} I_A = \lim_{A\to\infty} -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2 + 2Ae^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2A} - \frac{1}{2}$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Car $\lim_{A\to\infty} -Ae^{-A} = 0$, $\lim_{A\to\infty} e^{-A} = 0$

Et $\lim_{A\to\infty} Ae^{-2A} = \lim_{A\to\infty} e^{\ln(Ae^{-2A})} = \lim_{A\to\infty} e^{\ln(A)-2A} = \lim_{A\to\infty} e^{-A(2-\frac{\ln(A)}{A})} = 0$

5/ $T = \min(X_1, X_2)$

5.1

$$Z + T = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

5.2

$$E(Z+T) = E(X_1 + X_2) \Rightarrow E(Z) + E(T) = E(X_1) + E(X_2)$$
$$\Rightarrow E(Z) + E(T) = 2E(X)$$
$$\Rightarrow E(T) = 2E(X) - E(Z)$$
$$\Rightarrow E(T) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Exercice 2
Étude d'une suite récurrente.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 2(c+d)x + cd + 2(c+d))$$

$$(u_n)_{n\in N} = \begin{cases} u_0 = \lambda \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Dans cette question, on suppose que c=d=0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2)$$

1.1 Si $\lambda = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

1.2 on suppose que $\lambda \neq 0$

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$

Notons P_n la proposition : « $u_n > 0$ »

Initialisation : Pour $n = 1$

$$u_1 = g(u_0) = \frac{3}{4}\lambda^2 > 0 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \quad \text{donc } P_1 \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit $n \geq 1$

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 0$. Or, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(u_n) > g(0) \Leftrightarrow u_{n+1} > 0$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$, à savoir

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n > 0$$

1.3 on pose $\quad w_n = \ln(u_n) \qquad \forall n \geq 1$

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) \Leftrightarrow w_{n+1} = \ln(g(u_n))$$
$$\Leftrightarrow w_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{4}u_n\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2\ln(u_n)$$

On constate que $(w_n)_{n\in N^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

a / Recherche du point fixe.

on résout l'équation suivante :

$$X = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2X \quad \Leftrightarrow \quad X - 2X = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad -X = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad X = -\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

b / Construction d'une suite.

On pose $\quad v_n = w_n - \left(-\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

2.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12)$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) - u_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4}{u_n}^2 - 2u_n + 3 - u_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4}{u_n}^2 - 3u_n + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\ell^2 - 3\ell + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.\frac{3}{4}.3 = 9 - 9 = 0$

Donc. $\ell = \frac{3}{2\frac{3}{4}} = 2$

2.2 On suppose que $\lambda > 2$

$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}{u_n}^2 - 2u_n + 3 - u_n$

$= \frac{3}{4}{u_n}^2 - 3u_n + 3$

$= 3\left(\frac{1}{4}{u_n}^2 - u_n + 1\right) = 3(\frac{1}{2}u_n - 1)^2$

Donc, $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} > u_n$

On constate donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de plus elle est minorée et non majorée. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $(+\infty)$.

2.3 $u_1 = 2 \quad ssi \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$

$g(u_0) = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 2$

$\Leftrightarrow \quad (3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 8$

$\Leftrightarrow \quad 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16 = 4^2$

Alors $\exists\{\lambda_1, \lambda_2\} \in \mathbb{R}^2 \quad tels\ que \quad u_1 = 2$

$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{2\times3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{2\times3} = \frac{12}{6} = 2$

Conclusion : $\lambda \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

2.4 On suppose que $\lambda \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$

Il suffit de démontrer par récurrence que $u_n < 2$

- Notons P_n la proposition : « $u_n < 2$ »

Les valeurs propres possible de la matrice A sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Car R est un polynôme annulateur de A or 1 et $-\frac{1}{2}$ sont les racines de R.

2ème Partie
Réduction de la matrice A et calcul de ses puissances.

2.1/ Valeurs propres de la matrice A.

<u>2.1.1</u>

$$A\,V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ \frac{4}{2} \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = V_1$$

Donc, V_1 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1.

$$A\,V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}V_2$$

Donc, V_2 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

<u>2.1.2</u>

D'après la question précédente les valeurs propres de la matrice A sont 1 et $-\frac{1}{2}$.

2.2/ inversibilité et inverse de P.

<u>2.2.1</u>

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 3-3 & 3-3 \\ 2-8+6 & 2+10-3 & 2+1-3 \\ 4+8-12 & 4-10+6 & 4-1+6 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

<u>2.2.2</u>

On a constaté que $PQ = I_3$, ce qui suffit à démontrer que P est inversible, d'inverse Q :

$$P^{-1} = Q$$

2.3/ relation entre les puissances des matrices A et T.

<u>2.3.1</u>

$$PT=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$AP=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

<u>2.3.2</u>

On procède par récurrence sur k. Notons P_k la proposition :
« $A^k = PT^kP^{-1}$ ».

Initialisation : Pour $k=1$

$PT^1P^{-1} = APP^{-1} = A^1$ donc $A^1 = PT^1P^{-1}$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geq 1$.

Supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $A^k = PT^kP^{-1}$ donc en multipliant à gauche par A, il vient $AA^k = APT^kP^{-1}$.

Or, $AP = PT$ d'où $A^{k+1} = PT^{k+1}P^{-1}$ donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $k \geq 1$, à savoir

$$\forall k \geq 1 \qquad A^k = PT^kP^{-1}$$

2.4/ Calcul des puissances des matrices A et T.

<u>2.4.1</u>

On procède par récurrence sur k. Notons P_k la proposition :

« $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : Pour $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & 1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = T$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geq 1$.

Supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$

Par suite :

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^k + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^{k+1} & (k+1)(-\frac{1}{2})^{k+1} \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $k \geq 1$, à savoir

$$\forall k \geq 1 \qquad T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

<u>2.4.2</u>

On a $\forall k \geq 1 \quad A^k = PT^kP^{-1}$ avec $P^{-1} = Q$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & (k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 4 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^k & -(K+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 2-8\left(-\frac{1}{2}\right)^k+6(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2-10\left(-\frac{1}{2}\right)^k-3(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2-\left(-\frac{1}{2}\right)^k-3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 4+8\left(-\frac{1}{2}\right)^k-6(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4-10\left(-\frac{1}{2}\right)^k+3(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4-\left(-\frac{1}{2}\right)^k+3(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

$3^{ème}$ Partie

Application à l'étude d'une marche aléatoire sur le net.

3.1/ D'après l'énoncé.

$\mathcal{P}_{1,3}=\frac{1}{2}$; $\mathcal{P}_{2,1}=0$; $\mathcal{P}_{2,3}=\frac{1}{2}$; $\mathcal{P}_{3,1}=1$

Donc, $$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.2/ soit $j\in(1,2,3)$

$$\sum_{j=1}^{3} \mathcal{P}_{1,j}+\mathcal{P}_{2,j}+\mathcal{P}_{3,j}=(\mathcal{P}_{1,1}+\mathcal{P}_{2,1}+\mathcal{P}_{3,1})+(\mathcal{P}_{1,2}+\mathcal{P}_{2,2}+\mathcal{P}_{3,2})$$
$$+(\mathcal{P}_{1,3}+\mathcal{P}_{2,3}+\mathcal{P}_{3,3})$$
$$=(0+0+1)+(\tfrac{1}{2}+0+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+0)$$
$$=(1+1+1)=3$$

3.3/ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n(1)$, $\mathcal{P}_n(2)$ et $\mathcal{P}_n(3)$ forment un système complet d'évènement et d'après la Formule de Probabilité Totale (FPT).

$$\mathcal{P}_{n+1}(1)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{1,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{1,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{1,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2)+\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$

3.4/ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_{n+1}(2)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{2,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{2,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{2,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{2,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(3)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{3,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{3,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{3,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{3,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\mathcal{P}_n(1)+\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2)$$

3.5/

3.5.1 on a $X_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_n(1) \\ \mathcal{P}_n(2) \\ \mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix}$

Et d'après la question précédente on a

$$\mathcal{P}_{n+1}(1) = 0\mathcal{P}_n(1) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$
$$\mathcal{P}_{n+1}(2) = 0\mathcal{P}_n(1) + 0\mathcal{P}_n(2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$
$$\mathcal{P}_{n+1}(3) = 1(1) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + 0\mathcal{P}_n(3)$$

On calcule que :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_n(1) \\ \mathcal{P}_n(2) \\ \mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\mathcal{P}_n(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(3) \\ 0\mathcal{P}_n(1) + 0\mathcal{P}_n(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(3) \\ 1(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + 0\mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{n+1}(1) \\ \mathcal{P}_{n+1}(2) \\ \mathcal{P}_{n+1}(3) \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = AX_n$

<u>3.5.2</u>

On procède par récurrence sur n. Notons P_n la proposition :

« $X_n = A^n X_0$ »

Initialisation : Pour $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(1) \\ \mathcal{P}_0(2) \\ \mathcal{P}_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(3) \\ \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(3) \\ \mathcal{P}_0(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(1) \\ \mathcal{P}_1(2) \\ \mathcal{P}_1(3) \end{pmatrix} = X_1$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $X_n = A^n X_0$ donc en multipliant à gauche par A, il vient$AX_n = AA^n X_0$.
Or, $X_{n+1} = AX_n$ d'où $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$ donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$, à savoir

$$\forall n \geq 1 \qquad X_n = A^n X_0$$

3.5.2

On a $\quad \forall n \geq 1 \quad X_n = A^n X_0$

$$\begin{pmatrix} P_n(1) \\ P_n(2) \\ P_n(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0(1) \\ P_0(2) \\ P_0(3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} P_0(1)\left(3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ P_0(1)\left(2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ P_0(1)\left(4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_n(1) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$P_n(2) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$P_n(3) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

3.6/

3.6.1

- on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad$ si $-1 < q < 1$

  or $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$

- Si la suite converge absolument alors elle converge simplement. On calcule la limite de $\left|n(-\frac{1}{2})^n\right|$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|n(-\tfrac{1}{2})^n\right| &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n|(-\frac{1}{2})^n|)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)+\ln(|(-\frac{1}{2})^n|)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)+n\ln(|-\frac{1}{2}|)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n(\frac{\ln(n)}{n}+\ln(\frac{1}{2}))} = 0 \end{aligned}$$

Car $\ln(\frac{1}{2}) < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to\infty} = e^{-X} = 0$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} n(-\frac{1}{2})^n = 0$

3.6.2

$P_0(1), P_0(1)$ *et* $P_0(1)$ forment un système complète d'événement.

Donc,
$$P_0(1) + P_0(1) + P_0(1) = 1$$

3.6.3

$$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[3P_0(1) + P_0(1)6(-\tfrac{1}{2})^n + 3P_0(2) - P_0(2)3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + 3P_0(3) - 3P_0(3)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{9}[3(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{3}{9}$$
$$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(2) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[P_0(1)(2 + 6n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(2)(2 + 7\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(3)(2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n)\right]$$
$$= \frac{1}{9}[2(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{2}{9}$$
$$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(2) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[P_0(1)(4 - 6n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(2)(4 + 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(3)(4 + 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + 5\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n)\right]$$
$$= \frac{1}{9}[4(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{4}{9}$$

Donc, $\ell_1 = \frac{3}{9}$ $\quad \ell_2 = \frac{2}{9}$ $\quad \ell_3 = \frac{4}{9}$

3.7

3.7.1

D'après la question précédente :

$$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(1) = \frac{3}{9} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} P_n(2) = \frac{2}{9} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} P_n(3) = \frac{4}{9}$$

Donc l'ordre des 3 sites est le suivant :

1^{er} Rang : le site n° 3
2^{eme} Rang : le site n° 1
3^{eme} Rang : le site n° 2

3.7.2

le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ représente un vecteur propre de la matrice de transition (matrice A).

-FIN DU CORRIGÉ-