CNAEM 2016, corrigé

Exercice 1
Des probabilités avec Scilab

1. On a $\forall k \in \{1,\dots p\}$, $X_k \hookrightarrow U([\![1,p]\!])\ X(\Omega) = [\![1,p]\!]$ et $P(X_k = j) = \frac{1}{p}$
   Or, $Y = \max(X_1, \dots\dots\dots, X_n)$ donc, $Y(\Omega) = [\![1,p]\!]$
2. $(Y = 1) = (\max(X_1, \dots\dots\dots, X_n) = 1) = ((X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_n = 1))$
   $$P(Y = 1) = P(\cap_{k=1}^{n}(X_k = 1)) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{p}\right)^n$$
3. Soit $k \in \{1, \dots p\}$
   $(Y \leq k) = (\max(X_1, \dots\dots\dots, X_n) \leq k) = ((X_1 \leq k) \cap \dots \cap (X_n \leq k))$
   $= (\cap_{i=1}^{n}(X_i \leq k))$
   $P(Y \leq k) = P(\cap_{i=1}^{n}(X_i \leq k)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k)$
   Or, $P(X_i \leq k) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i \leq k)$
   $= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$
   Donc, $P(Y \leq k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k)$
   $= \left(\frac{k}{p}\right)^n$
   $p_k = P(Y = k)$
   On sait que : $P(Y = k) = P(Y = k) - P(Y = k - 1)$
   $P(Y = k) = P(Y = k) - P(Y = k - 1)$
   $= \left(\frac{k}{p}\right)^n - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n$
4.

```
X = [1,p]
Z = [0,p - 1]
Y = (X/p)^n - (Z/p)^n
plot = (X,Y)
```

```
X = [1,p]
Y = (X/p)^n - ((X - 1)/p)^n
plot = (X,Y)
```

5.

```
function Y = Y(n,p)
  Y = max(grand(1,n,'uin',1,p))
endfunction
```

Exercice 2
Un résultat sur les suites

1. On a $\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k = x_{k+1} - q x_k$
   $$b_k = x_{k+1} - q x_k \iff q^{n-1-k} b_k = q^{n-1-k} x_{k+1} - q^{n-k} x_k$$
   $$\iff q^{n-1-k} b_k = q^{n-(k+1)} x_{k+1} - q^{n-k} x_k$$
   $$\iff \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (q^{n-(k+1)} x_{k+1} - q^{n-k} x_k)$$
   $$\iff \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k = q^{n-n} x_n - q^n x_0$$
   $$\iff x_n = q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k q^{n-1-k}$$
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k$

7)

2.

2.1 D'après la question précédente on a, $\forall n \in \mathbb{N}\quad x_n = q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k$

Donc, $x_n - q^n x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k \iff |x_n - q^n x_0| = |\sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k|$

Donc, $|x_n - q^n x_0| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k q^{n-1-k}|$

On a $0 \leq b_k \leq a$, $q > 0$ et $a > 0$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k q^{n-1-k}| = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |q^{n-1-k}|$
$= \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k$

Or, $b_k \leq a$. Donc, $\sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a.q^{n-1-k}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a.q^{n-1-k} = a\sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k}$$
$$= a.q^{n-1}.\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= \frac{a}{1-q}q^{n-1} - \frac{a}{1-q}q^{2n-1}$$

Or, $0 < q < 1$ donc $1 - q > 0$ Donc, $\frac{a}{1-q}q^{n-1} \geq 0$ et $\frac{a}{1-q}q^{2n-1} \geq 0$

Donc, $\frac{a}{1-q}q^{n-1} - \frac{a}{1-q}q^{2n-1} \geq \frac{a}{1-q}q^{n-1}$ et $q < 1 \iff q^{n-1} < 1$

Donc, $\frac{a}{1-q}q^{n-1} \leq \frac{a}{1-q}$

On pose $y_n = q^n x_0$ donc, $|x_n - q^n x_0| = |x_n - y_n|$

Conclusion : $\forall n \geq 1\quad |x_n - y_n| \leq \frac{a}{1-q}$

2.2 On prend $0 < q' < q$ et $0 \leq x_{n+1} - q'x_n \leq a$

D'après questions 1 et 2, on déduit que $|x_n - q'^n x_0| \leq \frac{a}{1-q'}$

Il reste de montrer que $\frac{a}{1-q'} \leq \frac{a}{1-q}$

$$\frac{a}{1-q'} - \frac{a}{1-q} = \frac{a(q'-q)}{(1-q')(1-q)} \leq 0$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}\quad |x_n - q'^n x_0| \leq \frac{a}{1-q'}$

Il y a une infinité de q' dans $]0, q[$. Alors il y a une infinité de telle suites géométriques $(y_n)_{n\in N}$.

3.

3.1 $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{q^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} = \frac{b_n}{q^{n+1}} \geq 0$ Car $b_n > 0$ et $q > 0$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est croissante.

3.2 On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a$

$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} \leq u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{q^{k+1}}$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{q^{k+1}} = a\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^{k+1}} = a.\frac{1}{q}.\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}$

$$= a.\frac{1}{q}.\frac{q}{q-1}\left(1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$$
$$= \frac{a}{q-1}\left(1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$$
$$= \frac{a}{q-1} - \frac{a}{q-1}\left(\frac{1}{q}\right)^n$$

Or, $q > 1$ et $a \geq 0$ donc, $\frac{a}{q-1} \geq 0$ et $\frac{a}{q-1}\left(\frac{1}{q}\right)^n \geq 0$

Donc, $\frac{a}{q-1} - \frac{a}{q-1}\left(\frac{1}{q}\right)^n < \frac{a}{q-1}$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{a}{1-q}$

3.3 soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante donc $u_{n+p} \geq u_n$ donc $u_{n+p} - u_n \geq 0$

$$u_{n+p} - u_n = \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} + \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$$

Or. $b_k \leq a$. Donc, $\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{a}{q^{k+1}}$

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{a}{q^{k+1}} = a \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{q^{k+1}}$$
$$= a\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}$$
$$= a\left(\frac{1}{q}\right)^{n} \left(\frac{1}{q}\right) \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}$$
$$= \frac{a}{q^n} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{q\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)\right)}$$
$$= \frac{a}{q-1}\frac{1}{q^n}\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)^p\right) = \frac{a}{(q-1)q^n} - \frac{a}{(q-1)q^n}\left(\frac{1}{q}\right)^p$$

Or. $q > 1$ et $a \geq 0$ donc, $\frac{a}{(q-1)q^n} \geq 0$ et $\frac{a}{(q-1)q^n}\left(\frac{1}{q}\right)^p \geq 0$

Donc, $\frac{a}{(q-1)q^n} - \frac{a}{(q-1)q^n}\left(\frac{1}{q}\right)^p \leq \frac{a}{(q-1)q^n}$

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{a}{q^n(q-1)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On fait passage à la limite où $p \to +\infty$

$$\lim_{p\to+\infty} 0 \leq \lim_{p\to+\infty} (u_{n+p} - u_n) \leq \lim_{p\to+\infty} \frac{a}{q^n(q-1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{a}{q^n(q-1)}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{a}{q^n(q-1)}$

3.4 On a $\quad \forall n \geq 1 \quad x_n = q^n(x_0 + u_n)$

$$\Leftrightarrow \quad x_n = q^n(x_0 + \ell - \ell + u_n)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_n = q^n(x_0 + \ell) + q^n(u_n - \ell)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_n - q^n(x_0 + \ell) = -q^n(\ell - u_n)$$
$$\Leftrightarrow |x_n - q^n(x_0 + \ell)| = |q^n(\ell - u_n)|$$

Or. $q > 0$ et $\ell - u_n \geq 0$. Donc $|x_n - q^n(x_0 + \ell)| = q^n(\ell - u_n)$

D'après la question 3.3 $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{a}{q^n(q-1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, $q^n(\ell - u_n) \leq \frac{a}{(q-1)}$ donc, $|x_n - q^n(x_0 + \ell)| \leq \frac{a}{(q-1)}$

On pose $y_n = q^n(x_0 + \ell)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_n - y_n| \leq \frac{a}{q-1}$

Supposons qu'il existe deux suites y_n et z_n telle que

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_n - y_n| \leq \frac{a}{q-1}$ et $|x_n - z_n| \leq \frac{a}{q-1}$

$$|y_n - z_n| = |y_n - x_n + x_n - z_n|$$
$$\Leftrightarrow \quad |y_n - z_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n - z_n|$$

$$\Leftrightarrow \quad |y_n - z_n| \leq \frac{a}{q-1} + \frac{a}{q-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad |y_n - z_n| \leq \frac{2a}{q-1}$$

On fait tendre q vers $+\infty$

$$\lim_{q\to+\infty} |y_n - z_n| \leq \lim_{q\to+\infty} \frac{a}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad |y_n - z_n| \leq 0 \qquad \text{Absurde}$$

Donc $|y_n - z_n| = 0$ donc $y_n = z_n$ donc il existe une unique suite géométrique.

Problème 1
Des probabilités avec l'algèbre linéaire

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

1ère Partie
Étude de la diagonalisation de M

1.1

1.1.1 $Rg(M) = Rg(M^t) = Rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $Rg(M) = Rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + Rg(a,b,c) \leq 1$

1.1.2 On a $Rg(M) = Rg(a,b,c)$

Donc, $Rg(M) = \begin{cases} 0 & si \ (a,b,c) = (0,0,0) \\ 1 & si \ (a,b,c) \neq (0,0,0) \end{cases}$

1.2 On pose $S = a + b + c$

1.2.1
$$M^2 = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a(a+b+c) & a(a+b+c) & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & b(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & c(a+b+c) & c(a+b+c) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} S.a & S.a & S.a \\ S.b & S.b & S.b \\ S.c & S.c & S.c \end{pmatrix} = S.M$$

1.2.2
$$\begin{aligned} M^2 = M \quad &\Leftrightarrow \quad SM - M = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (S-1)M = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S - 1 = 0 \quad ou \quad M = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S = 1 \quad ou \quad \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S = 1 \quad ou \quad (a,b,c) = (0,0,0) \end{aligned}$$

1.3

1.3.1 D'après la question 1.2.1/ on a $M^2 = SM$

Donc, si $S = 0$ alors $M^2 = 0$

Donc le polynôme annulateur de la matrice M est $P(x) = x^2$

Les valeurs propres possible de la matrice M sont les racines de P. Or, P admet une unique racine qui est 0.

Vérification :

$$M\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & a & a\\ b & b & b\\ c & c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc, 0 est une valeur propre de la matrice M.

1.3.2 M est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que $M = PDP^{-1}$. Or la diagonale de D est formée par les valeurs propres de M et d'après 1.3.1 M admet 0 pour unique valeur propre donc

$$D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M = PDP^{-1} &\iff M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a & a & a\\ b & b & b\\ c & c & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff (a, b, c) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

1.4

1.4.1 Pour que la famille (f_1, f_2, f_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre et génératrice.

- Famille libre

Une famille d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est dite libre lorsque $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (0,0,0)$$

$$\iff \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(a,b,c) = (0,0,0)$$

$$\iff (\lambda_1, -\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) + (a\lambda_3, b\lambda_3, c\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\iff (\lambda_1 + a\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3, -\lambda_2 + c\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + a\lambda_3 = 0\\ -\lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3 = 0\\ -\lambda_2 + c\lambda_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 + L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2\end{matrix} \begin{cases}\lambda_1 + a\lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + \lambda_3(a+b) = 0\\ \lambda_3(a+b+c) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + a\lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + \lambda_3(a+b) = 0\\ \lambda_3 S = 0\end{cases} \qquad S \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + a\lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + \lambda_3(a+b) = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$$

Donc, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre

- Famille génératrice

On pose $U = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$

$U = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(a,b,c)$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\lambda_1,-\lambda_1,0) + (0,\lambda_2,-\lambda_2) + (a\lambda_3,b\lambda_3,c\lambda_3)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\lambda_1 + a\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3, -\lambda_2 + c\lambda_3) : (E)$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + a\lambda_3 \\ y = -\lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3 \\ z = -\lambda_2 + c\lambda_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_1 + y - b\lambda_3 \\ c\lambda_3 = z + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\lambda_3 \\ \lambda_2 = x - a\lambda_3 + y - b\lambda_3 \\ c\lambda_3 = (z + \lambda_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\lambda_3 \\ \lambda_2 = x - a\lambda_3 + y - b\lambda_3 \\ c\lambda_3 = z + x - a\lambda_3 + y - b\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\lambda_3 \\ \lambda_2 = x - a\lambda_3 + y - b\lambda_3 \\ \lambda_3(a + b + c) = z + x + y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\lambda_3 \\ \lambda_2 = x - a\lambda_3 + y - b\lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{s}(z + x + y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - a\frac{1}{s}(z + x + y) \\ \lambda_2 = x + y - \frac{1}{s}(z + x + y)(a + b) \\ \lambda_3 = \frac{1}{s}(z + x + y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{s}\big(Sx - a(z + x + y)\big) \\ \lambda_2 = \frac{1}{s}\big(Sx + Sy - (z + x + y)(a + b)\big) \\ \lambda_3 = \frac{1}{s}(z + x + y) \end{cases}$$

Donc, l'équation (E) admet des solutions en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ existent bien et donc la famille est génératrice. Donc, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

1.4.2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & c + b \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \text{et} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 0 & a + c + b \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{s} L_3$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{S} & -\frac{a}{S} & -\frac{a}{S} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{S} & \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - (a+b)L_3$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{S} & -\frac{a}{S} & -\frac{a}{S} \\ \frac{c}{S} & \frac{c}{S} & -\frac{a+b}{S} \\ \frac{1}{S} & \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{S}\begin{pmatrix} b+c & -a & -a \\ c & c & -(a+b) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.3 M est diagonalizable.

$$M = P\Delta P^{-1} \iff P^{-1}MP = \Delta$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{S}\begin{pmatrix} b+c & -a & -a \\ c & c & -(a+b) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{S}\begin{pmatrix} (b+c)(a-a) & (b+c)(a-a) & (b+c)(a-a) \\ (a+b)(c-c) & (a+b)(c-c) & (a+b)(c-c) \\ S & S & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{S}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S & S & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$$

Donc, M est diagonalizable et ses valeurs propres sont S et 0

1.4.4

i) On a $M = P\Delta P^{-1}$ donc $K_a = P\Delta P^{-1} - \alpha I_3$

$$\begin{aligned} K_a = P\Delta P^{-1} - \alpha I_3 &\iff K_a = P\Delta P^{-1} - \alpha PP^{-1} \\ &\iff K_a = P\Delta P^{-1} - \alpha P I_3 P^{-1} \\ &\iff K_a = P\Delta P^{-1} - P\alpha I_3 P^{-1} \\ &\iff K_a = P(\Delta - \alpha I_3)P^{-1} \\ &\iff K_a = P\Delta_a P^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta_a = \Delta - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & S-\alpha \end{pmatrix}$$

ii) On a $K_\alpha = P\Delta_a P^{-1}$

P et P^{-1} sont inversible donc K_a est inversible et Δ_a est aussi inversible.

Donc, la matrice K_α est inversible si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq S$

1.5

$$A = M - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-a & a & a \\ b & b-a & b \\ c & c & c-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $a = -1$

On a $A = M - (-1)I_3 = M + I_3 = K_{-1}$ et d'après 1.4.4/

$$\Delta_{-1} = \Delta + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 0. A n'est pas inversible car $a = S$.

$2^{ème}$ Partie

2.1
$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \end{cases}$$

2.2 On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $0 \leq X + Y \leq 2n$

Donc, $(X+Y)(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$

$$\begin{aligned} \forall k \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=k) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k-i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} P(X = i)(Y = k-i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{2n-k} \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} \end{aligned}$$

Et d'après le théorème de Vandermonde : $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}$

$$\forall k \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=k) = \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k}$$

Donc, $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$

La loi de la variable $S = X + Y + Z$

On a $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

On va suivre le même processus ci-dessus on va trouver que $S \hookrightarrow \mathcal{B}(3n, p)$

2.3 D'après la question 1.1.1/ on a $Rg(M_1) \leq 1$ et $M_1 \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$

Donc, M_1 n'est jamais inversible donc l'événement "M_1 est inversible" est impossible et sa probabilité vaut 0.

2.4 D'après 1.2.2/ $M_1^{\,2} = M_1$ si $(a, b, c) = (0,0,0)$ ou $S = 1$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } P(M_1^{\,2} = M_1) &= P(X+Y+Z = 0) + P(X+Y+Z = 1) \\ &= P(S = 0) + P(S = 1) \\ &= \binom{3n}{0} p^0 (1-p)^{3n} + \binom{3n}{1} p^1 (1-p)^{3n-1} \\ &= q^{3n} + 3npq^{3n-1} \end{aligned}$$

2.5 T = nombre de valeurs propres de M_1

D'après 1.3.1/ on a si $S = 0$ alors M_1 admet 0 comme unique valeur proper.

D'après 1.4.3/ si $S \neq 0$ M_1 admet 2 valeurs propres 0 et S.

Donc, $T(\Omega) = \{1, 2\}$

La loi de T

$$\begin{aligned} P(T = 1) &= P(S = 0) \\ &= \binom{3n}{0} p^0 (1-p)^{3n} = q^{3n} \end{aligned}$$

$$P(T = 2) = P(S \neq 0)$$

$$= 1 - P(S \neq 0)$$
$$= 1 - q^{3n}$$

$$E(T) = 1 \times P(T = 1) + 2 \times P(T = 2) = q^{3n} + 2(1 - q^{3n})$$
$$= 2 - q^{3n}$$

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$
$$= 1^2 \times P(T = 1) + 2^2 \times P(T = 2) - (2 - q^{3n})^2$$
$$= q^{3n} + 4(1 - q^{3n}) - (4 - 4q^{3n} + q^{6n})$$
$$= q^{3n} + 4 + 4q^{3n} - 4 - 4q^{3n} - q^{6n} = q^{3n} - q^{6n}$$

2.6 D'après 1.3.2/ on a si $S = 0$ alors M_1 est diagonalisable si seulement si $(X, Y, Z) = (0,0,0)$.

Et d'après 1.4.3/ on a si $S \neq 0$ alors M_1 est toujours diagonalizable.

On pose $M_1 D$ l'événement : "M_1 est diagonalisable".

$(S = 0)$ et $(S \neq 0)$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.

$$P(M_1 D) = p(S = 0)P_{S=0}(M_1 D) + p(S \neq 0)P_{S\neq 0}(M_1 D)$$
$$= q^{3n}\, p\big((X, Y, Z) = (0,0,0)\big) + \big(1 - p(S = 0)\big) \times 1$$
$$= q^{3n}q^{3n} + 1 - q^{3n} = 1 + q^{3n}(q^{3n} - 1)$$

2.7

2.7.1 Notons B : "au moins une ligne de M_1 est égale à la somme des deux autres"

$$B = (X = Y + Z)\ ou\ (Y = X + Z)\ ou\ (Z = X + Y)$$
$$P(B) = P\big((X = Y + Z) \cup (Y = X + Z) \cup (Z = X + Y)\big)$$
$$= P\big((X = Y + Z)\big) + P\big((Y = X + Z)\big) + P\big((Z = X + Y)\big)$$
$$-P\big((X = Y + Z) \cap (Y = X + Z)\big) - P\big((X = Y + Z) \cap (Z = X + Y)\big)$$
$$-P\big((Y = X + Z) \cap (Z = X + Y)\big) + P\big((X = Y + Z) \cap (Y = X + Z) \cap (Z = X + Y)\big)$$

Par symétrie de X, Y, Z

On a $P\big((X = Y + Z)\big) = P\big((Y = X + Z)\big) = P\big((Z = X + Y)\big)$

$$\begin{cases} X = Y + Z \\ Y = X + Z \end{cases} \Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \begin{cases} Y + Z = X \\ X + Y + 2Z = X + Y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y + Z = X \\ Z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y \\ Z = 0 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} (X = Y + Z) \cap (Y = X + Z) = (X = Y) \cap (Z = 0) \\ (X = Y + Z) \cap (Z = X + Y) = (Y = 0) \cap (X = Z) \\ (Y = X + Z) \cap (Z = X + Y) = (X = 0) \cap (Y = Z) \end{cases}$

$$\begin{cases} X = Y + Z \\ Y = X + Z \\ Z = X + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - Y - Z = 0 \\ -X + Y - Z = 0 \\ -X - Y + Z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} X - Y - Z = 0 \\ -2Z = 0 \\ -2Y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Donc $\big((X = Y + Z) \cap (Y = X + Z) \cap (Z = X + Y)\big) = \big((X = 0) \cap (Y = 0) \cap (Z = 0)\big)$

Par symétrie de X, Y, Z on a $P(X = Y) = P(X = Z) = P(Y = Z)$

$$P(B) = 3P\big((X = Y + Z)\big) - 3P(X = 0)P(Y = Z) + P(X = 0)^3$$

$$\begin{aligned}P(X=Y+Z)&=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,X+Z=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(X+Z=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{2n}{k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\binom{3n}{n}\end{aligned}$$

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\begin{aligned}P(Y=Z)&=\sum_{k=0}^{n}P(Y=k,Z=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}P(Y=k)P(Z=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B)&=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\binom{3n}{n}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\\&=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\binom{3n}{n}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\binom{2n}{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\end{aligned}$$

2.7.2 Notons V : "Toutes les valeurs propres de M_1 sont des entiers pairs"
$(S=0)$ et $(S\neq 0)$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale.
$P(C)=P(S=0)P_{S=0}(C)+P(S\neq 0)P_{S\neq 0}(C)$

- $P(S=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$
- $P(S\neq 0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$
- $P_{S=0}(C)=1$ Car si $(S=0)$ est réalisé, alors M_1 admet une seule valeur proper 0 et elle est paire.
- $P_{S\neq 0}(C)$? si $(S=0)$ est réalisé, alors M_1 admet deux valeurs propres 0 et S donc C est réalisé si S est pair et non nul.

$$\begin{aligned}P_{S\neq 0}(C)&=\sum_{1\le k\ pair\le 3n}P(S=k)\\&=\sum_{1\le k\ pair\le 3n}\binom{3n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\sum_{1\le k\ pair\le 3n}\binom{3n}{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}2^{3n-1}-1\end{aligned}$$

Donc, $P(C)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}2^{3n-1}-1\right)$

3.1

3ème Partie

3.1.1

- $t \longrightarrow \lambda e^t e^{-\lambda e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- f est toujours positive car $e^x \geq 0$ et $\lambda > 0$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$

Soit $A < 0$. On pose $I_A = \int_A^0 f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} I_A = \int_A^0 f(t)\,dt &= \int_A^0 \lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_A^0 -\lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_A^0 (e^{-\lambda e^t})' e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\left[e^{-\lambda e^t}\right]_A^0 = -\left(e^{-\lambda} - e^{-\lambda e^A}\right) = e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$\lim_{A\to-\infty} I_A = \lim_{A\to-\infty} e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$

Soit $A < 0$. On pose $K_A = \int_0^A f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} K_A = \int_0^A f(t)\,dt &= \int_0^A \lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_0^A -\lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_0^A (e^{-\lambda e^t})' e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\left[e^{-\lambda e^t}\right]_0^A = -\left(e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda} - e^{-\lambda e^A} \end{aligned}$$

$\lim_{A\to+\infty} K_A = \lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda} - e^{-\lambda e^A} = e^{-\lambda}$

Donc $I_A + k_A = 1 - e^{-\lambda} + e^{-\lambda} = 1$

Ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

En conclusion, f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3.1.2 $\forall x \in \mathbb{R}$. $\quad F_U(x) = P(U \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Soit $A < x$. On pose $I_A = \int_A^x f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} I_A = \int_A^x f(t)\,dt &= \int_A^x \lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_A^x -\lambda e^t e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\int_A^x (e^{-\lambda e^t})' e^{-\lambda e^t}\,dt \\ &= -\left[e^{-\lambda e^t}\right]_A^x = -\left(e^{-\lambda e^x} - e^{-\lambda e^A}\right) \\ &= e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda e^x} \end{aligned}$$

$F_U(x) = \lim_{A\to-\infty} I_A = \lim_{A\to-\infty} e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda e^x} = 1 - e^{-\lambda e^x}$

$$\begin{aligned} F_V(x) = P(V \leq x) &= P(\exp(U) \leq x) \\ &= P(U \leq \ln(x)) \\ &= 1 - e^{-\lambda e^{\ln(x)}} = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Donc la variable aléatoire V suit une loi exponentielle de paramètre λ.

CNAEM 2017, corrigé

Exercice 1
À propos de la loi exponentielle.

1/ On a X suit la loi exponentielle de paramètre λ

Donc, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

2/ Fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

⇒ Si $x \le 0$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 0]$ donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

⇒ Sinon $x > 0$ et en utilisant la relation de Chasles

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Ainsi, la fonction de répartition F de X est bien donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

3/ On a $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $[X](\Omega) = \mathbb{N}$ et $([X] + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\qquad p(Y \le 0) = 0$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= p([X] + 1 = k) \\ &= p([X] = k - 1) \\ &= p(k - 1 \le X \le k) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - 1 + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= e^{-\lambda(k-1)} \left(1 - \frac{e^{-\lambda k}}{e^{-\lambda k} e^{\lambda}}\right) \\ &= e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\left(1 - e^{-\lambda}\right) \in [0,1]$

Donc, Y suit la loi géométrique de paramètre $\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

$$Y \hookrightarrow G\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

4/ $\qquad \lambda = 1 \qquad et \qquad X_1\ et\ X_2\ sont\ indépendantes$

4.1

On sait que $Z = \max(X_1, X_2)$.

$\Rightarrow$ Si $\max(X_1, X_2) = X_1$ alors $X_1 \le x$ (i)

Et $x \ge X_1 \ge X_2$ donc $X_2 \le x$ (ii)

D'après (i) et (ii)

$$\{Z \le x\} = \{X_1 \le x\} \cap \{X_2 \le x\}$$

$\Rightarrow$ Si $\max(X_1, X_2) = X_2$ alors $X_2 \le x$ (i)

Et $x \ge X_2 \ge X_1$ donc $X_1 \le x$ (ii)

D'après (i) et (ii)

$$\{Z \le x\} = \{X_1 \le x\} \cap \{X_2 \le x\}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{Z \le x\} = \{X_1 \le x\} \cap \{X_2 \le x\}$

4.2
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= p(\{Z \le x\}) \\ &= p(\{X_1 \le x\} \cap \{X_2 \le x\}) \\ &= p(\{X_1 \le x\})\, p(\{X_2 \le x\}) \quad \textit{car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indp} \\ &= F_X(x) F_X(x) = (F_X(x))^2 \end{aligned}$$

Donc, $$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ (1 - e^{-x})^2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si $x \le 0$

$$f_z(x) = F_Z(x)' = 0$$

$\Rightarrow$ Si $x > 0$

$$\begin{aligned} f_z(x) = F_Z(x)' &= [(1 - e^{-x})^2]' \\ &= 2.(1 - e^{-x})'.(1 - e^{-x})^{2-1} \\ &= 2.e^{-x}.(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

Conclusion : $$f_z(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ 2.e^{-x}.(1 - e^{-x}) & si\ x > 0 \end{cases}$$

4.3 $$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$$

Z admet une espérance si cette intégrale converge.

Et comme $f_z(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ alors $E(Z) = \int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$

On pose $I_A = \int_0^A t f(t)\, dt$ avec $A > 0$

$$\begin{aligned} I_A = \int_0^A t f(t)\, dt &= \int_0^A t 2e^{-t} (1 - e^{-t})\, dt \\ &= \int_0^A 2te^{-t}\, dt - \int_0^A 2te^{-2t}\, dt \end{aligned}$$

- $\int_0^A 2te^{-t}\,dt$ on procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$\int_0^A 2te^{-t}\,dt = [-2te^{-t}]_0^A + 2\int_0^A e^{-t}\,dt$$
$$= -2Ae^{-A} + 2[-e^{-t}]_0^A = -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2$$

- $\int_0^A 2te^{-2t}\,dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-2t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{cases}$

$$\int_0^A 2te^{-2t}\,dt = [-te^{-2t}]_0^A + \int_0^A e^{-2t}\,dt$$
$$= -Ae^{-2A} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^A = -Ae^{-2A} - \frac{1}{2}e^{-2A} + \frac{1}{2}$$

Donc, $I_A = -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2 + Ae^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2A} - \frac{1}{2}$

$$E(Z) = \lim_{A\to\infty} I_A = \lim_{A\to\infty} -2Ae^{-A} - 2e^{-A} + 2 + 2Ae^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2A} - \frac{1}{2}$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Car $\lim_{A\to\infty} -Ae^{-A} = 0$, $\lim_{A\to\infty} e^{-A} = 0$

Et $\lim_{A\to\infty} Ae^{-2A} = \lim_{A\to\infty} e^{\ln(Ae^{-2A})} = \lim_{A\to\infty} e^{\ln(A)-2A} = \lim_{A\to\infty} e^{-A(2-\frac{\ln(A)}{A})} = 0$

5/ $T = \min(X_1, X_2)$

5.1

$$Z + T = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

5.2

$$E(Z+T) = E(X_1 + X_2) \Longrightarrow E(Z) + E(T) = E(X_1) + E(X_2)$$
$$\Longrightarrow E(Z) + E(T) = 2E(X)$$
$$\Longrightarrow E(T) = 2E(X) - E(Z)$$
$$\Longrightarrow E(T) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Exercice 2
Étude d'une suite récurrente.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 2(c+d)x + cd + 2(c+d))$$

$$(u_n)_{n\in N} = \begin{cases} u_0 = \lambda \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Dans cette question, on suppose que c=d=0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2)$$

1.1 Si $\lambda = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

1.2 on suppose que $\lambda \neq 0$

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$

Notons P_n la proposition : « $u_n > 0$ »

Initialisation : Pour $n = 1$

$$u_1 = g(u_0) = \frac{3}{4}\lambda^2 > 0 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \text{ donc } P_1 \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit $n \geq 1$

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 0$. Or, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(u_n) > g(0) \Leftrightarrow u_{n+1} > 0$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$, à savoir

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n > 0$$

1.3 on pose $\quad w_n = \ln(u_n) \qquad \forall n \geq 1$

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) \Leftrightarrow w_{n+1} = \ln(g(u_n))$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{4}u_n\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2\ln(u_n)$$

On constate que $(w_n)_{n\in N^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

a / Recherche du point fixe.

on résout l'équation suivante :

$$X = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2X \quad \Leftrightarrow \quad X - 2X = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -X = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad X = -\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

b / Construction d'une suite.

On pose $\quad v_n = w_n - \left(-\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

2.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12)$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) - u_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4}{u_n}^2 - 2u_n + 3 - u_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4}{u_n}^2 - 3u_n + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\ell^2 - 3\ell + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.\frac{3}{4}.3 = 9 - 9 = 0$

Donc. $\ell = \frac{3}{2.\frac{3}{4}} = 2$

2.2 On suppose que $\lambda > 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}{u_n}^2 - 2u_n + 3 - u_n$$
$$= \frac{3}{4}{u_n}^2 - 3u_n + 3$$
$$= 3\left(\frac{1}{4}{u_n}^2 - u_n + 1\right) = 3\left(\frac{1}{2}u_n - 1\right)^2$$

Donc, $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} > u_n$

On constate donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de plus elle est minorée et non majorée. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $(+\infty)$.

2.3 $u_1 = 2 \quad ssi \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$

$g(u_0) = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 2$

$\Leftrightarrow \quad (3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 8$

$\Leftrightarrow \quad 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16 = 4^2$

Alors $\exists \{\lambda_1, \lambda_2\} \in \mathbb{R}^2 \quad tels\ que \quad u_1 = 2$

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{2\times 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Conclusion : $\lambda \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

2.4 On suppose que $\lambda \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$

Il suffit de démontrer par récurrence que $u_n < 2$

- Notons P_n la proposition : « $u_n < 2$ »

Les valeurs propres possible de la matrice A sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Car R est un polynôme annulateur de A or 1 et $-\frac{1}{2}$ sont les racines de R.

2ème Partie
Réduction de la matrice A et calcul de ses puissances.

2.1/ Valeurs propres de la matrice A.

2.1.1

$$A\,V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ \frac{4}{2} \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = V_1$$

Donc, V_1 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1.

$$A\,V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\,V_2$$

Donc, V_2 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

2.1.2

D'après la question précédente les valeurs propres de la matrice A sont 1 et $-\frac{1}{2}$.

2.2/ inversibilité et inverse de P.

2.2.1

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 3-3 & 3-3 \\ 2-8+6 & 2+10-3 & 2+1-3 \\ 4+8-12 & 4-10+6 & 4-1+6 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

<u>2.2.2</u>

On a constaté que $PQ = I_3$, ce qui suffit à démontrer que P est inversible, d'inverse Q :

$$P^{-1} = Q$$

2.3/ relation entre les puissances des matrices A et T.

<u>2.3.1</u>

$$PT=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$AP=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

<u>2.3.2</u>

On procède par récurrence sur k. Notons P_k la proposition :
« $A^k = PT^kP^{-1}$ ».

Initialisation : Pour $k=1$
$PT^1P^{-1} = APP^{-1} = A^1$ donc $A^1 = PT^1P^{-1}$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geq 1$.
Supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $A^k = PT^kP^{-1}$ donc en multipliant à gauche par A, il vient $AA^k = APT^kP^{-1}$.
Or, $AP = PT$ d'où $A^{k+1} = PT^{k+1}P^{-1}$ donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $k \geq 1$, à savoir

$$\forall k \geq 1 \qquad A^k = PT^kP^{-1}$$

2.4/ Calcul des puissances des matrices A et T.

2.4.1

On procède par récurrence sur k. Notons P_k la proposition :

« $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : Pour $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & 1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = T$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geq 1$.

Supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$

Par suite :

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^k + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^{k+1} & (k+1)(-\frac{1}{2})^{k+1} \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $k \geq 1$, à savoir

$$\forall k \geq 1 \qquad T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

2.4.2

On a $\forall k \geq 1 \quad A^k = PT^kP^{-1}$ avec $P^{-1} = Q$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k & k(-\frac{1}{2})^k \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & (k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 4 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^k & -(K+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 2-8\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 6(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2-10\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 2-\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 4+8\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 6(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4-10\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 3(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k & 4-\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 3(k+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

$3^{ème}$ Partie

Application à l'étude d'une marche aléatoire sur le net.

3.1/ D'après l'énoncé.

$\mathcal{P}_{1,3}=\frac{1}{2}$; $\mathcal{P}_{2,1}=0$; $\mathcal{P}_{2,3}=\frac{1}{2}$; $\mathcal{P}_{3,1}=1$

Donc, $$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.2/ soit $j\in(1,2,3)$

$$\sum_{j=1}^{3} \mathcal{P}_{1,j}+\mathcal{P}_{2,j}+\mathcal{P}_{3,j}=(\mathcal{P}_{1,1}+\mathcal{P}_{2,1}+\mathcal{P}_{3,1})+(\mathcal{P}_{1,2}+\mathcal{P}_{2,2}+\mathcal{P}_{3,2})$$
$$+(\mathcal{P}_{1,3}+\mathcal{P}_{2,3}+\mathcal{P}_{3,3})$$
$$=(0+0+1)+(\tfrac{1}{2}+0+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+0)$$
$$=(1+1+1)=3$$

3.3/ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n(1)$, $\mathcal{P}_n(2)$ et $\mathcal{P}_n(3)$ forment un système complet d'évènement et d'après la Formule de Probabilité Totale (FPT).

$$\mathcal{P}_{n+1}(1)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{1,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{1,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{1,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{1,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2)+\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$

3.4/ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_{n+1}(2)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{2,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{2,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{2,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{2,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(3)=\sum_{k=1}^{3}\mathcal{P}_{3,k}\mathcal{P}_n(k)=\mathcal{P}_{3,1}\mathcal{P}_n(1)+\mathcal{P}_{3,2}\mathcal{P}_n(2)+\mathcal{P}_{3,3}\mathcal{P}_n(3)$$
$$=\mathcal{P}_n(1)+\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2)$$

3.5/

3.5.1 on a $X_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_n(1) \\ \mathcal{P}_n(2) \\ \mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix}$

Et d'après la question précédente on a

$$\mathcal{P}_{n+1}(1) = 0\mathcal{P}_n(1) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$
$$\mathcal{P}_{n+1}(2) = 0\mathcal{P}_n(1) + 0\mathcal{P}_n(2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(3)$$
$$\mathcal{P}_{n+1}(3) = 1(1) + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + 0\mathcal{P}_n(3)$$

On calcule que :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_n(1) \\ \mathcal{P}_n(2) \\ \mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\mathcal{P}_n(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(3) \\ 0\mathcal{P}_n(1) + 0\mathcal{P}_n(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(3) \\ 1(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_n(2) + 0\mathcal{P}_n(3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{n+1}(1) \\ \mathcal{P}_{n+1}(2) \\ \mathcal{P}_{n+1}(3) \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = AX_n$

<u>3.5.2</u>

On procède par récurrence sur n. Notons P_n la proposition :

« $X_n = A^n X_0$ »

Initialisation : Pour $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(1) \\ \mathcal{P}_0(2) \\ \mathcal{P}_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(2) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(3) \\ \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(3) \\ \mathcal{P}_0(1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(1) \\ \mathcal{P}_1(2) \\ \mathcal{P}_1(3) \end{pmatrix} = X_1$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $X_n = A^n X_0$ donc en multipliant à gauche par A, il vient $AX_n = AA^n X_0$.
Or, $X_{n+1} = AX_n$ d'où $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$ donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$, à savoir

$$\forall n \geq 1 \qquad X_n = A^n X_0$$

3.5.2

On a $\quad \forall n \geq 1 \quad X_n = A^n X_0$

$$\begin{pmatrix} P_n(1) \\ P_n(2) \\ P_n(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(1) \\ P_0(2) \\ P_0(3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} P_0(1)\left(3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ P_0(1)\left(2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ P_0(1)\left(4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_n(1) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(3+6\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$P_n(2) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(2+(6n-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(2+(7-3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(2-(2+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$P_n(3) = \frac{1}{9}\left[P_0(1)\left(4-(6n+4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(2)\left(4+(3n-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + P_0(3)\left(4+(3n+5)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

3.6/

3.6.1

- on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad$ si $-1 < q < 1$

  or $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$
- Si la suite converge absolument alors elle converge simplement. On calcule la limite de $\left|n(-\frac{1}{2})^n\right|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|n(-\tfrac{1}{2})^n\right| = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n|(-\frac{1}{2})^n|)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)+\ln(|(-\frac{1}{2})^n|)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)+n\ln(|-\frac{1}{2}|)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n(\frac{\ln(n)}{n}+\ln(\frac{1}{2}))} = 0$$

Car $\ln(\frac{1}{2}) < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to\infty} = e^{-X} = 0$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} n(-\frac{1}{2})^n = 0$

3.6.2

$P_0(1), P_0(1)$ *et* $P_0(1)$ forment un système complète d'événement.

Donc,
$$P_0(1) + P_0(1) + P_0(1) = 1$$

3.6.3

$$\lim_{n\to\infty} P_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[3P_0(1) + P_0(1)6(-\tfrac{1}{2})^n + 3P_0(2) - P_0(2)3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + 3P_0(3) - 3P_0(3)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{9}[3(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{3}{9}$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[P_0(1)(2 + 6n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(2)(2 + 7\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(3)(2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n)\right]$$
$$= \frac{1}{9}[2(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{2}{9}$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left[P_0(1)(4 - 6n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(2)(4 + 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n) + P_0(3)(4 + 3n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + 5\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n)\right]$$
$$= \frac{1}{9}[4(P_0(1) + P_0(1) + P_0(1))] = \frac{4}{9}$$

Donc, $\ell_1 = \frac{3}{9}$ $\quad \ell_2 = \frac{2}{9}$ $\quad \ell_3 = \frac{4}{9}$

3.7

3.7.1

D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to\infty} P_n(1) = \frac{3}{9} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(2) = \frac{2}{9} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(3) = \frac{4}{9}$$

Donc l'ordre des 3 sites est le suivant :

1^{er} Rang : le site n° 3
2^{eme} Rang : le site n° 1
3^{eme} Rang : le site n° 2

3.7.2

le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ représente un vecteur propre de la matrice de transition (matrice A).

-FIN DU CORRIGÉ-

3.2 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

3.3 $X + Y$ ne peut pas suivre une loi exponentielle. Car la distribution exponentielle ne garde pas la mémoire (Perte de mémoire).

Problème 2
Un résultat de probabilité

4.1 $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$

4.2

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \qquad P(S_N = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$