Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2024/ 2025**

Chapitre 1 : Diagonalisation des matrices

Mots Clés :
les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée, matrice diagonalisable.
Objectif :
À l'issue de ce PEG l'étudiant sera capable de :

— Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
— Décider si une matrice carrée est diagonalisable ou pas.
— Diagonaliser une matrice.
— Résoudre un problème lié á la notion d'une matrice diagonalisable.

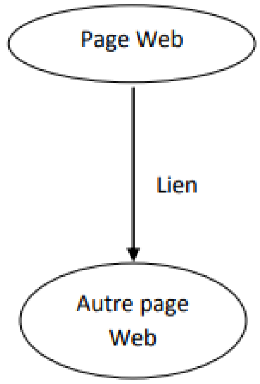
1 Activité introductive :

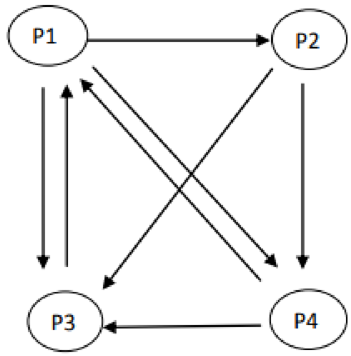
1.1 Le Pagerank, comment ça marche ?

L'algorithme pagerank calcule un indice de popularité associé à chaque page web. C'est cet indice qui est utilisé pour trier le résultat d'une recherche de mot clé. L'indice est défini ainsi : **L'indice de popularité d'une page est d'autant plus grand quelle a un grand nombre de pages populaires la référençant (ayant un lien vers elle)**. Cette définition est autoréférente car pour connaître l'indice d'une page il faut d'abord connaître l'indice des pages ayant un lien vers elle... Il existe cependant un moyen assez simple d'approcher une valeur numérique de l'indice. Tout d'abord il faut voir le web comme un nœud du graphe, chaque lien entre page est un arc entre deux nœuds.

Pour représenter de telles relations on utilise une matrice : Chaque ligne et colonne représentant un nœud (donc un site) et chaque case de la matrice représente la présence d'un lien entre les deux pages correspondantes.

Voici un exemple de graphe :





Les concepteurs de Google, ont adoptés pour la suite des scores x_1, x_2, x_3, x_4 reliés aux pages P_1, P_2, P_3, P_4. La définition est la suivante :

— Soit n_j le nombre de liens issues d'une page j vers d'autres pages et on convient qu'un lien d'une pages vers elle-même est ignoré

— On ecrit $j \to i$ si la page j a un lien vers la page i

— Alors $x_i = \sum_{j \to i} \frac{x_j}{n_j}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

Vérifier que le graphe ci-dessus conduit au système suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

Ecrire (S) sous forme matricielle :

On représente la probabilité de présence d'un internaute sur tous les nœuds de notre A_G par un vecteur X. Dire que l'internaure est sur la page 4 s'écrit : $A_G.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons maintenant que l'internaute se trouve sur la page 2 :

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A_G.X = X'$.
2. Que représente le vecteur X'.
3. En déduire la probabilité de présence de l'internaute après un seul 'CLIC'.
4. Dans quelles pages se trouvera l'internaute aprés un double 'CLIC'.

Conclusion 1.

Le processus tel que l'on a définit permet, maintenant de modéliser raisonnablement un déplacement aléatoire d'internautes sur un réseau d'ordre n de pages.
Il suffit maintenant de supposer que les internautes se répartissent initialement uniformément sur tout le réseau et on les laissent se déplacer jusqu'à ce que leur répartitions (le vecteur X) se stabilise au fur et à mesure des itérations de multiplication par A_G : $X' = A_G^n.X$.

Comment calculer A_G^n
L'idée est de rendre A_G diagonale!!.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (i.e f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même), $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ (i.e une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$) et $A = \mathcal{M}(f, B, B) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de l'application f dans la base B.
Notre objectif sera donc de trouver s'il est possible une base $B' = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{M}(f, B', B')$ soit diagonale.

2 Eléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sa matrice associée.

— $\lambda \in \mathbb{R}$ est dite **valeur propre** de f (resp. de A) s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ (resp. un vecteur V qui correspond à l'écriture matricielle du vecteur v dans la base B) telque $f(v) = \lambda v$ (resp. $A.V = \lambda.V$)

— Le vecteur v (resp. V) est appelé **vecteur propre** de f (resp. de A) associé à la valeur propre λ.

— L'ensemble des valeurs propres de f (ou encore de A) est appelé **le spectre** de f (ou encore de A) noté par $sp(f)$ (ou encore $sp(A)$).

Exercice 1 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, -x + y + 3z)$$

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de A.*
3. *Montrer que 3 est une valeur propre de A.*
4. *Déduire $sp(A)$.*

2.2 Sous espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non nul, tel que :

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow f(v) - \lambda v = ... \Longleftrightarrow v \in \ker(................)$$

Définition 3.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sa matrice associée. L'ensemble

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}) \quad (resp. \quad E_\lambda(A) = \{V \in M_{n,1}(\mathbb{R}); \quad A.V = \lambda.V\})$$

est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}^n$ appelé le sous espace propre de f (resp. de A) associé à la valeur propre λ.

Remarque 4.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Longleftrightarrow E_\lambda(A) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \dim(E_\lambda(A)) \geq 1.$$

Exercice 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Soient* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A.X$ *et* $A.Y$. *En déduire que* -1 *et* 5 *sont deux valeurs propres de* A.
2. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres* $E_{-1}(A)$ *et* $E_5(A)$.

3 Détermination pratique des valeurs propres :

3.1 Rappels sur les polynômes :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

- $\lambda \in \mathbb{R}$ est dite racine de P si et seulement si $P(\lambda) = 0$.
- L'ordre de la multiplicité de λ dans P est le plus grand entier m tel que : $P(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$, $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ s'il s'écrit de la forme : $P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}.......(X - \lambda_r)^{m_r}$ avec les λ_i sont deux à deux distinctes et m_i leurs ordres de multiplicités.

  Répondre par vrai ou faux

  1. $P(X) = (X - 1)(X^2 - 1)$ admet 1 comme racine double. ....
  2. Le polynôme $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 6)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. ....

3. Le polynôme $P(X) = (X-1)(X^2+X+2)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. ....

3.2 Polynôme caractéristique :

Définition 5.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant $det(A - \lambda.Id_n)$ est un polynôme de degré n appelé **le polynôme caractéristique** de A. On le note χ_A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non nul, tel que :

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow \ker(f - \lambda.Id_n)...\{0_{\mathbb{R}^n}\} \Longleftrightarrow \text{..............n'est pas injective}$$

$\Longleftrightarrow$ ....n'est pas bijective $\Longleftrightarrow$ .....n'est pas inversible $\Longleftrightarrow$ $det(A-\lambda Id_n)...0 \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.

Proposition 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. les racines du polynôme caractéristique de A sont exactement les valeurs propres de A.

Exercice 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.*
2. *Déterminer les racines du polynôme caractéristique χ_A de A*
3. *Déduire $sp(A)$.*

3.3 Ordre de multiplicité d'une valeur propre :

Exemple 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A*
2. *Déterminer les racines du polynôme caractéristique χ_A ainsi que leurs ordres de multiplicité dans χ_A*

Définition 7.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ordre de multiplicité de λ et on note m_λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A.

Exemple 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique* χ_A *de* A
2. *En déduire que les valeurs propres de* A *sont* 1 *et* 2*. Déterminer* m_1 *et* m_2*.*
3. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres* E_1 *et* E_2*. En déduire* $dim(E_1)$ *et* $dim(E_2)$*.*
4. *Comparer* $dim(E_1)$ *et* m_1 *puis* $dim(E_2)$ *et* m_2*.*
5. *Que peut-on remarquer ?*

Proposition 8.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute valeur propre λ de A on a :

$$1 \leq dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda.$$

3.3.1 Relations entre les valeurs propres

Exemple 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
2. *Calculer la somme des valeurs propres de* A*. Comparer cette somme avec* $tr(A)$*.*
3. *Calculer le produit des valeurs propres de* A*. Comparer ce produit avec* $det(A)$*.*

Proposition 9.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ayant exactement n valeurs propres dont $r \leq n$ sont distinctes. Alors le polynome caractérisitique de la matrice A est scindé dans $\mathbb{R}$ et

$$\chi_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_1}.(X-\lambda_2)^{m_2}.....(X-\lambda_r)^{m_r}.$$

ou λ_i est une valeur propre de A de multiplicité m_i pour tout $1 \leq i \leq r \leq n$.
De plus

* Le déterminant est égal au produit des valeurs propres λ_i élevées à leur ordre de multiplicité m_i
$$det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$$
* La trace est égale à la somme des valeurs propres multipliées par leur ordre de multiplicité
$$tr(A) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i m_i$$

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -6 \\ -5 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. *En déduire que* 3 *est une valeur propre de* A.
3. *Déterminer les autres valeurs propres de* A.

4 Matrices diagonalisables :

Exemple 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* P *est inversible et déterminer son inverse* P^{-1}.
2. *En déduire que* $A = P.D.P^{-1}$

Définition 10.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que A diagonalisable s'il existe une matrice **diagonale** D et une matrice **inversible** P telles que $A = P.D.P^{-1}$.

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.*
2. *On pose $D = P^{-1}.A.P$. Montrer que D est une matrice diagonale.*
3. *déduire que A est diagonalisable.*

5 Diagonalisation d'une matrice carrée

5.1 Critères de diagonalisation :

Exemple 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*. On suppose que A est diagonalisable. Soient D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = P.D.P^{-1}$.*

1. *Montrer que $det(D) = det(A) = 1$.*
2. *Montrer que $tr(D) = tr(A) = 2$*
3. *En déduire* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. *Aboutir à une contradiction et conclure que A n'est pas diagonalisable.*

Remarque 11.

On remarque donc qu'il existe des matrices diagonalisables et des matrices qui ne le sont pas.
Comment peut-on donc décider si une matrice est diagonalisable ou pas.

5.1.1 Une condition nécessaire et suffisante :

Exemple 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Soient* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*.Montrer que $A = P.D.P^{-1}$*

2. *En déduire que A est diagonalisable.*
3. *Montrer que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.*
4. *En déduire les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité.*
5. *Montrer que $dim(E_1) = m_1$ et $dim(E_2) = m_2$*

Proposition 12.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est diagonalisable si et seulement si :

— χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

— Pour toute valeur propre λ de A, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2+1)$.*
2. *En déduire que A n'est pas diagonalisable.*

Exercice 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que 1 est une valeur propre de A. Quel est son ordre de multiplicité ?*
2. *Calculer la dimension du sous-espace propre de A.*
3. *En déduire que A n'est diagonalisable.*

Exercice 8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda+3)^2$.*
2. *Calculer la dimension de chaque sous-espace propre de A.*
3. *En déduire que A est diagonalisable.*

5.1.2 Une condition suffisante :

Exemple 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes qu'on déterminera.*

2. *Pour chaque valeur propre, déterminer la dimension du sous-espace propre associée. En déduire que A est diagonalisable.*
3. *Peut-on prétendre ce résultat sans aucun calcul ?*

Proposition 13.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si A admet n valeurs propres **distinctes**, alors A est diagonalisable.

6 Pratique de diagonalisation

6.1 Exemple avec valeurs propres simples

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractérestique χ_A de A. En déduire que les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3.
2. En résolvant les systèmes $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $E_1 = vect\{V_1\}$, $E_2 = vect\{V_2\}$, $E_3 = vect\{V_3\}$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $B = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
4. Montrer que la matrice de f dans la base B est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que la matrice de passage de la base B_c à la base B est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Exprimer A en fonction de D et P.

6.2 Exemple avec une valeur propre double

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^3$.

1. Calcul du polynôme caractérestique :$\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$. Donc les valeurs propres de A sont :

   a) 0 : de multiplicité 1

   b) 2 de multiplicité 2

2. Sous-espace propre :

   a) En résolvant le systéme $AX = 0$, on trouve, $E_0 = vect\{V_1\}$, avec $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) En résolvant le systéme $AX = 2X$, on trouve, $E_2 = vect\{V_2, V_3\}$, avec $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Diagonalisabilité : Le polynôme caractéristique de A est scindé et on a :

   a) $dim(E_0) = 1 = m_0$

   b) $dim(E_2 = 2 = m_2$

   Donc A est diagonalisable.

4. Diagonalisation : La famille $B = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a : $AV_1 = 0$, $AV_2 = 2V_2$, $AV_3) = 2V_3$, la matrice de $\mathbb{R}^3$ dans la base B s'écrit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   la matrice de passage de la base B_c à la base B est $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   D'après le théorème du changement de base on a : $A = P.D.P^{-1}$.

Remarque 14.

La matrice de passage de la basse canonique B vers la la base B formée par les vecteurs propres de la matrice A, notée P dans ce cours, est parfois notée $\mathcal{M}_{B_c \to B}$.

7 Synthèse de la méthode

Soit à diagonaliser une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A puis on détermine les racines dans $\mathbb{R}$ de ce polynôme.
2. Si le polynôme caractéristique χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors A .... diagonalisable.
3. Si au contraire χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors pour chaque racine λ de χ_A, on résoud le systéme homogéne $(A-\lambda.Id_n).X = 0$, où X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions de ce systéme est le sous-espace propre E_λ. La résolution conduit à une base B_λ de E_λ donc $dim(E_\lambda)$.
4. S'il existe λ tel que $dim(E_\lambda(A)) < m_\lambda$ où m_λ est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_A, alors A .... diagonalisable.
5. Sinon A .... diagonalisable, et la juxtaposition des bases B_λ donne une base B de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. On en déduit la matrice de passage P de la base canonique B_c à la base B et l'égalité $A = P.D.P^{-1}$.
6. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A placées dans l'ordre des vecteurs propres de la base B.

8 Application : Calcul des puissances d'une matrice carrée

Exemple 8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3 *et* A^4

On se rend compte que les calculs sont pénibles. Par contre, si A est diagonalisable, les calculs peuvent se simplifier énormément.

Vérifions d'abord que A est diagonalisable : Pour cela :

1. *Montrer que* $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$
2. *Montrer que* $E_1 = vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $E_2 = vect\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
3. *En déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que* $A = P.D.P^{-1}$.

Calculons maintenant A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer* D^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1}$.
3. *Calculer alors* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.