

THEORIE DES COPULES

Étude de la dépendance entre les rendements
journaliers en utilisant les copules

Préparé par :

CHARET Mohamed

DHAIQUIR Youssef

Encadré par : KHALIL SAID

1^{er} janvier 2024
RABAT

Introduction

L'objectif de ce projet est d'explorer les méthodes d'analyse de la dépendance financière entre les rendements de deux actifs, en l'occurrence les actions de la Banque Populaire (BCP) et de la Banque of Afrique (BOA). Le projet se divise en plusieurs étapes, allant de l'importation des données financières à l'estimation de la copule décrivant la dépendance entre ces deux actifs.

Dans un premier temps, les données financières sont importées à partir de la plateforme investing.com, couvrant la période de 2005 à 2021. Les prix de clôture des actions sont utilisés pour calculer les rendements journaliers, facilitant ainsi l'analyse ultérieure.

Ensuite, une analyse des lois marginales est réalisée en tentant d'ajuster les données à des lois normales et de Student. Cependant, les résultats des tests de normalité indiquent que les rendements ne suivent pas ces distributions, mettant en évidence la nécessité de recourir à des méthodes plus flexibles.

La dépendance entre les rendements de BCP et BOA est ensuite explorée à travers différents outils graphiques tels que le diagramme de corrélation, le diagramme de dispersion, le Rank-Rank plot, le Khi-plot, et le K-plot. Ces analyses visuelles confirment une dépendance positive entre les deux actifs.

Enfin, l'estimation de la copule est abordée en utilisant la méthode des moments. Cette méthode est basée sur l'idée d'exprimer le paramètre de la copule en fonction d'une mesure de dépendance.

Generalités sur les copules

I Définition et propriétés

I.1 Définition d'une copule

Une copule est une fonction de répartition multivariée ayant des lois marginales uniformes sur $[0,1]$. Dans le cas bivarié, elle est définie par :

$$C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$(u, v) \rightarrow c(u, v)$$

avec la propriété que $c(u, v) = P(U \leq u, V \leq v)$ où U, V suivent des lois uniformes sur $[0,1]$.

I.2 Théorème de Sklar

Soit F une fonction de distribution en deux dimensions ayant des marginales F_X et F_Y . Alors, il existe une copule C telle que :

$$\forall (x, y) : F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

Et pour tout $(u, v) : C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))$. Cette dernière formule est un point de départ pour construire une copule bivariée à partir d'une fonction de distribution conjointe et des lois marginales.

II Familles de copules

II.1 Les Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes, popularisées par Christian Genest, sont définies sur $[0,1]$. Elles sont exprimées de la manière suivante :

$$C(u, v) = \phi(\phi^{-1}(u) + \phi^{-1}(v))$$

Où $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, convexe et strictement décroissante, avec $\phi(1) = 0$ et $\phi(0) = +\infty$. ϕ est appelée le générateur de la copule C . Les principales copules archimédiennes utilisées sont :

II.2 Les Copules elliptiques

Cette famille de Copules se construit à l'aide de lois dites elliptiques.

Distribution elliptique

Une loi est dite elliptique de paramètre de position $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ et de matrice de forme symétrique définie positive Σ si sa densité f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = e^{-\sqrt{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}}$$

II.3 Définition de la distribution elliptique

La densité d'une distribution elliptique de paramètre de position $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ et de matrice de forme symétrique définie positive Σ est donnée par :

$$f(X) = (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} g((X - \mu)\Sigma^{-1}(X - \mu)')$$

où g est une fonction à valeurs positives vérifiant : $\int g(XX') dX = 1$ sur \mathbb{R}^d .

Définition de la copule elliptique

Une copule est dite elliptique si elle est la copule d'une loi elliptique.

Exemple de copule elliptique

- **Copule gaussienne** : La copule normale, ou gaussienne, de dimension d est définie sur $[0,1]$ par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

où Φ et Φ_{Σ} sont respectivement les fonctions de répartition des lois $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0_d, \Sigma)$.

- **Copule de Student** : Soit T_{Σ}, ν la fonction de répartition d'une loi de Student multivariée de matrice de corrélation Σ et de ν degrés de liberté. Et t_{ν} la fonction de répartition d'une loi de Student univariée de ν degrés de liberté. Alors, on définit la copule de Student par la fonction qui vérifie :

$$C(u_1, \dots, u_d) = T_{\Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d))$$

III Estimation du paramètre d'une Copule

Pour déterminer les relations entre les variables, il faut choisir la copule qui résume le mieux la structure de dépendance. Cependant, pour choisir la meilleure copule et donc estimer les paramètres de cette copule, on utilise deux méthodes :

III.1 Méthode du maximum de vraisemblance

À partir du théorème de Sklar :

$$f(X_1, \dots, X_p) = C(F_1(X_1), \dots, F_p(X_p)) \prod_{i=1}^p f_i(X_i)$$

La fonction de log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\theta) = \sum \ln(C_\theta(F_1(X_{i1}), \dots, F_p(X_{ip}))) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \ln(f_{ij}(X_{ij}))$$

L'estimateur de θ est alors $\hat{\theta}_{ML} = \arg \max L(\theta)$.

IV Mesure de dépendance

IV.1 Tau de Kindall



Théorème

$$\tau = 1 - 4 \iint_{I^2} \frac{\partial C(v, z)}{\partial v} \frac{\partial C(v, z)}{\partial z} dv dz$$

V Copule à Noyau

En statistiques, de nombreuses méthodes d'estimation non paramétriques reposent sur une structure de noyau . Le terme "noyau" fait référence à une forme fonctionnelle, généralement choisie pour ses propriétés de régularité, qui est utilisée comme élément de base pour obtenir l'estimateur souhaité. Scaillet (2000) propose une approche basée sur les noyaux à appliquer à un cadre de copules, qui présente l'avantage de fournir une estimation lisse et différentiable de la fonction de copule sans faire d'hypothèses a priori particulières sur la structure de dépendance entre les marges. Cette approche est développée dans le contexte de processus stationnaires multivariés satisfaisant des conditions de mélange fort. Une fois les estimations des copules (et de leurs dérivées) disponibles, d'autres concepts

exprimés en termes de copules peuvent être analysés empiriquement. Le point le plus important est la nécessité de différentiabilité, ce qui dicte le choix d'une approche basée sur les noyaux.

Les estimateurs non paramétriques de copules peuvent également conduire à des procédures de test d'indépendance entre les marges, dans le même esprit que les méthodes basées sur les noyaux pour tester la dépendance sérielle dans une série temporelle stationnaire univariée.

Estimer une copule revient en effet à estimer les valeurs prises par une fonction de répartition cumulative en m points distincts dans un espace \mathcal{R}^n , selon la formule :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

où $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ sont des quasi-inverses de F_1, F_2, \dots, F_n .

Pour des valeurs données $u_{ij} \in]0, 1[, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, on suppose que la fonction de répartition F_j de Y_{jt} est telle que l'équation $F_j(y) = u_{ij}$ admet une solution unique notée ξ_{ij} . Comme communément connu, les noyaux sont des fonctions réelles bornées et symétriques $k_{ij}(x)$ sur \mathbb{R} telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(x) dx = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

et

$$K_i(x; h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^n k_{ij} \left(\frac{x_j}{h_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

où la largeur de bande h est une matrice diagonale avec des éléments $\{h_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ et le déterminant $|h|$, tandis que les largeurs de bande individuelles h_j sont des fonctions positives de T telles que

$$|h| + \frac{1}{T}|h| \rightarrow 0 \text{ lorsque } T \rightarrow \infty$$

La densité de probabilité de Y_{jt} en y_{ij} , c'est-à-dire $f_j(y_{ij})$, sera estimée par

$$\hat{f}_j(y_{ij}) = \frac{1}{Th_j} \sum_{t=1}^T k_{ij} \left(\frac{y_{ij} - Y_{jt}}{h_j} \right)$$

tandis que la densité de probabilité conjointe de Y_t en $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})$ sera estimée par

$$\hat{f}(y_i) = \frac{1}{T|h|} \sum_{t=1}^T \prod_{j=1}^n k_{ij} \left(\frac{y_{ij} - Y_{jt}}{h_j} \right)$$

Ainsi, l'estimateur de la fonction de répartition cumulative de Y_{jt} en des points distincts y_{ij} est obtenu comme

$$\hat{F}_j(y_{ij}) = \int_{-\infty}^{y_{ij}} \hat{f}_j(x) dx$$

tandis que les estimateurs de la fonction de répartition cumulative de Y_t en $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})$ sont

obtenus comme

$$\hat{F}(y_i) = \int_{-\infty}^{y_{i1}} \int_{-\infty}^{y_{i2}} \cdots \int_{-\infty}^{y_{in}} \hat{f}(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Si un seul noyau gaussien $k_{ij}(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est adopté, on obtient

$$\hat{F}_j(y_{ij}) = \frac{1}{Th_j} \sum_{t=1}^T \phi\left(\frac{y_{ij} - Y_{jt}}{h_j}\right)$$

et

$$\hat{F}(y_i) = \frac{1}{T|h|} \sum_{t=1}^T \prod_{j=1}^n \phi\left(\frac{y_{ij} - Y_{jt}}{h_j}\right)$$

où ψ et ϕ désignent respectivement la fonction de densité de probabilité (*p.d.f.*) et la fonction de répartition cumulative (*c.d.f.*) d'une variable gaussienne standard.

Pour estimer la copule en des points distincts u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ avec $u_{ij} < u_{lj}$ pour $i < l$, on utilise une méthode de "plug-in" comme suit :

$$\hat{C}(u_i) = \hat{F}\left(\hat{\xi}_i\right)$$

où

$$\hat{\xi}_i = \left(\hat{\xi}_{i1}, \hat{\xi}_{i2}, \hat{\xi}_{i3}, \dots, \hat{\xi}_{in}\right)$$

et $\hat{\xi}_{ij} = \inf\{y \in \mathbb{R} : \hat{F}_j(y) \geq u_{ij}\}$. L'estimation $\hat{\xi}_{ij}$ correspond à une estimation par noyau du quantile de Y_{jt} avec un niveau de probabilité u_{ij} .

— **La distribution asymptotique des estimateurs par noyau de certaines mesures de dépendance bivariées.**

Les coefficients de corrélation de Schweizer-Wolff σ et de Hoeffding ϕ peuvent être exprimés en termes de copule comme suit :

$$\sigma = \frac{1}{2} \iint |C(u_1, u_2) - u_1 u_2| du_1 du_2$$

$$\phi = \frac{3}{10} \iint (C(u_1, u_2) - u_1 u_2)^2 du_1 du_2$$

Une fois qu'une copule est estimée de manière empirique, il est facile de calculer l'équivalent par noyau de toutes ces mesures de dépendance, et toutes les autres propriétés peuvent être vérifiées au moins localement.

Présentation et analyse des données

I Importation des données

Nous allons procéder au téléchargement de deux bases de données provenant de investing.com, contenant les données financières de la Banque Populaire (BCP) et de la Banque of Afrique (BOA) pour la période de 2005 à 2021. Notre objectif est de se concentrer sur les prix de fermeture, puis de calculer les rendements journaliers afin de faciliter l'analyse ultérieure.

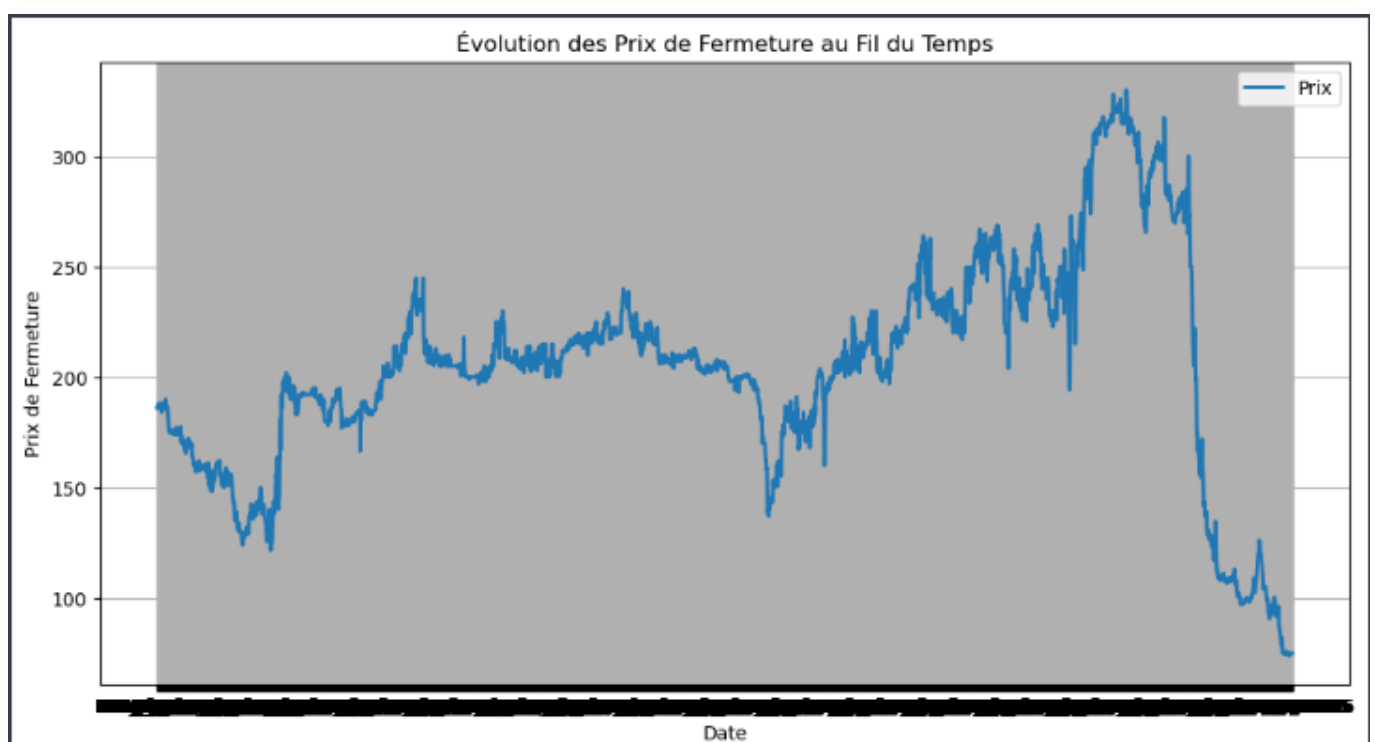


FIGURE 3.1 – Evoluton des prix du BOA

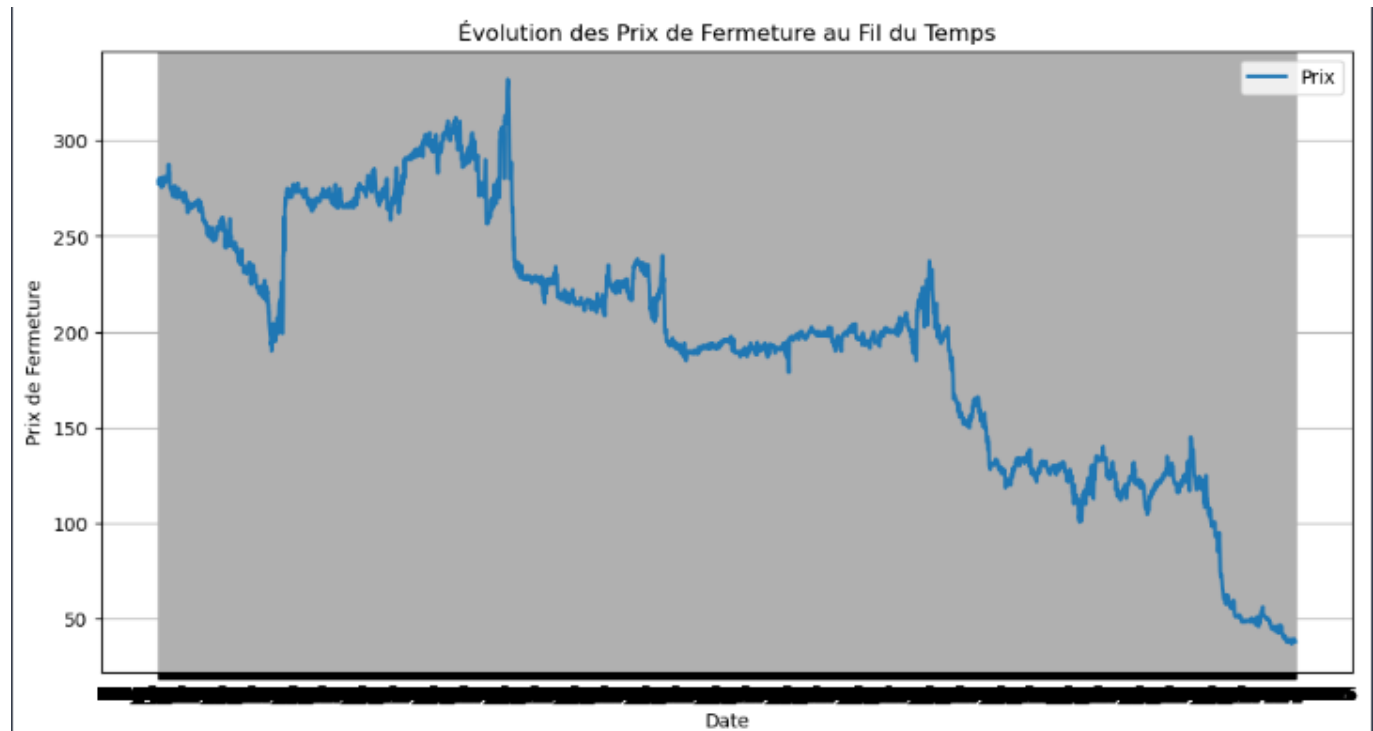


FIGURE 3.2 – Evolution des prix du BCP

I.1 Lois marginales

I.2 Loi normale

Après avoir importé les données, nous nous intéressons à approcher les distributions marginales par la loi normale et student. Pour la loi normale, les lois marginales se distribuent comme suit :

Depuis ces deux figures, on constate que les deux marginales ont une queue assez épaisse qui échappe à la loi normale. Donc on peut constater que la loi normale ne peut pas nous servir dans ce cas. Ainsi dit, on peut tester aussi avec les qqplots et voir qu'est-ce que ça donne :

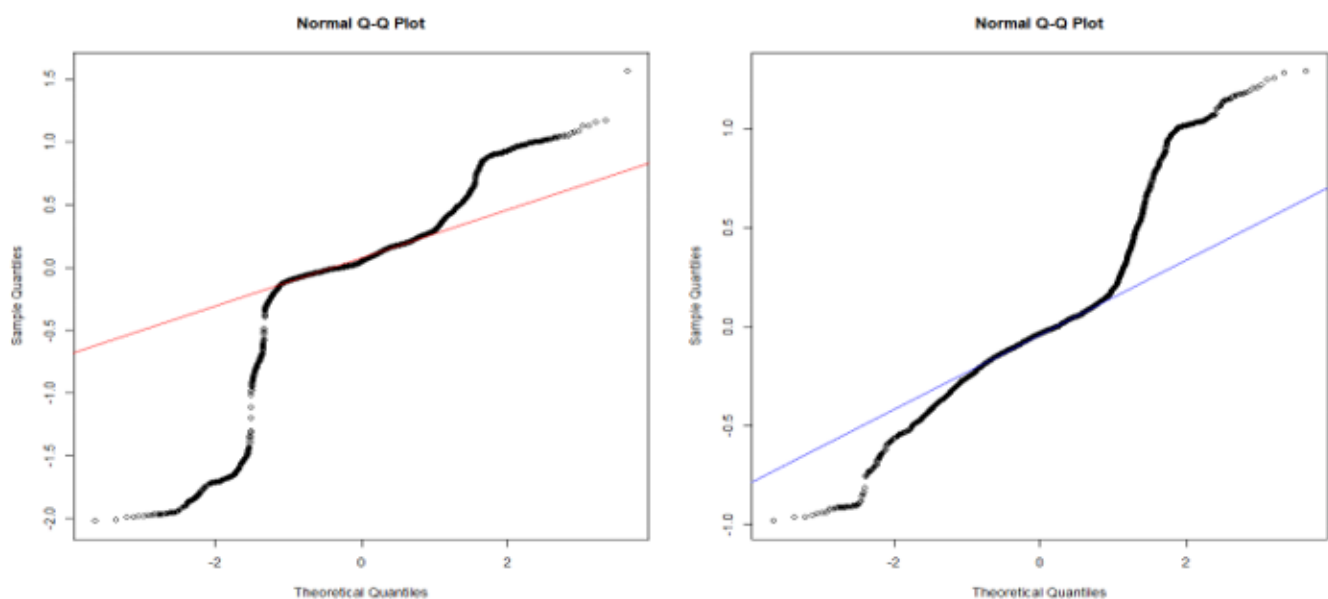


FIGURE 3.3 – qqplot pour les rendements de BOA et BCP

En observant les qqplots, il devient évident qu'une portion significative des données, particulièrement celles situées aux extrêmes, ne suit pas la distribution normale. Cette constatation concorde avec l'hypothèse que nous avons émise précédemment. Afin de renforcer cette analyse, nous avons recours à des tests de normalité. Nous avons réalisé divers tests pour approfondir notre compréhension :

Test de Kolmogorov-Smirnov :

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: BOA
D = 0.15862, p-value 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

```
L One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: BCP
D = 0.2648, p-value <2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

Test de lillie :

```
lilliefors(Kolmogorov-Smirnov) normality test
data: BOA
D= 0.15862, p-value< 2.2e-16
```

```
lilliefors(Kolmogorov-Smirnov) normality test
data: BCP
D= 0.2648, p-value< 2.2e-16
```

Test de Shapiro Wilk

```
Shapiro-Wilk normality test
data:BOA
W=0.8918, p-value 2.2e-16
```

```
Shapiro-Wilk normality test
data:BCP
W=0.76182, p-value <2.2e-16
```

CONCLUSION :

On remarque que les p-values sont tous inférieurs à 5% pour tous les tests, ce qui confirme l'hypothèse que nous avons faite ultérieurement. Donc, on peut conclure que l'hypothèse de la normalité des rendements est fausse.

Loi de student

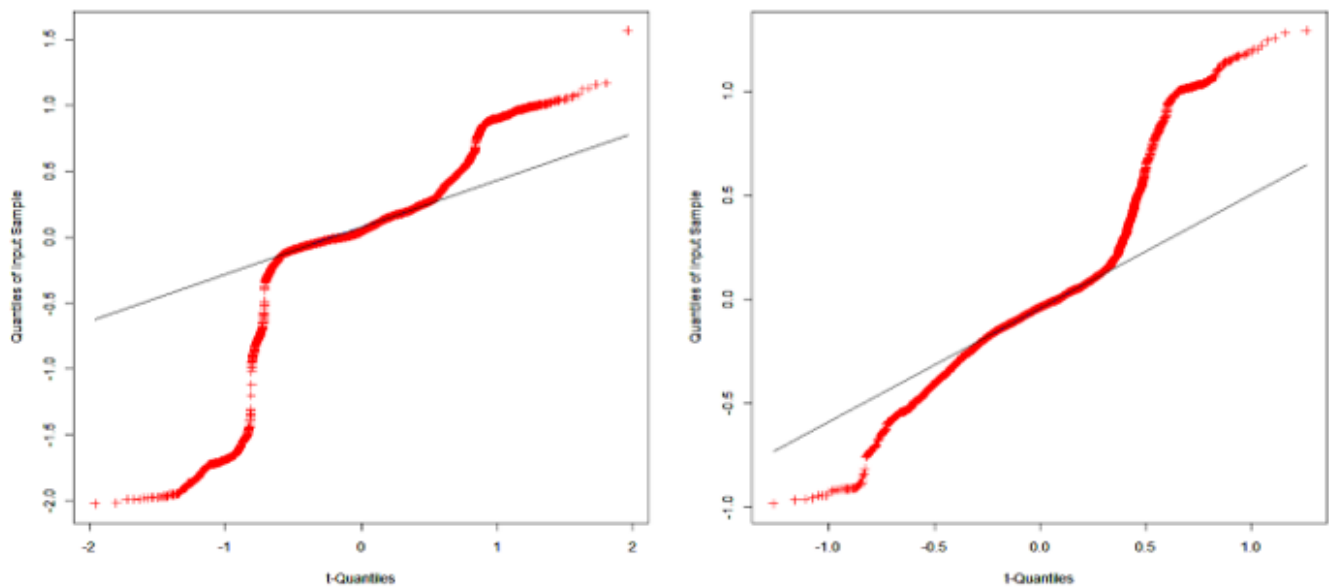


FIGURE 3.4 – qqplot de loi de student pour les rendements BCP et BOA

• Test de Kolmogorov-Smirnov

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
 data:
 $D = 0.2723$, $p\text{-value} < 2.2e-16$
 alternative hypothesis: two-sided

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
 data: BCP-R
 $D = 0.3093$, $p\text{-value} < 2.2e-16$
 alternative hypothesis: two-sided

CONCLUSION :

Avec la même démarche que pour la loi normale, en se basant sur le graphique QQ-plot et les résultats de notre test qui donne une p-value inférieure à 5%, on peut confirmer que la loi de Student n'est pas adéquate avec notre base de données.

I.3 Détection de la dépendance

Diagramme de corrélation

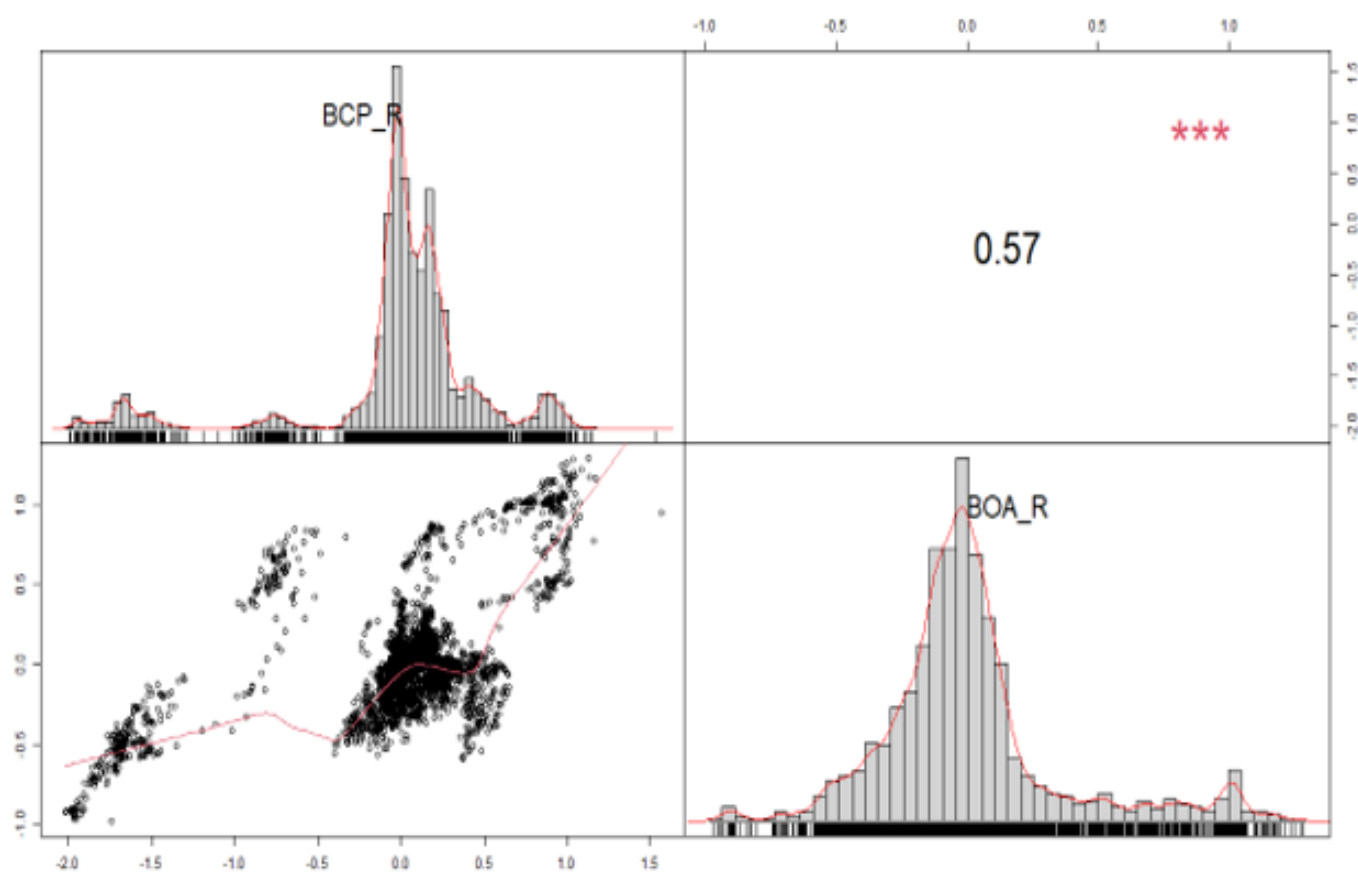


FIGURE 3.5 – Diagramme de corrélation entre BCP et BOA

Le diagramme donne une idée qu'il existe une corrélation positive entre les deux vecteurs de valeur égale à 0.57.

Diagramme de dispersion

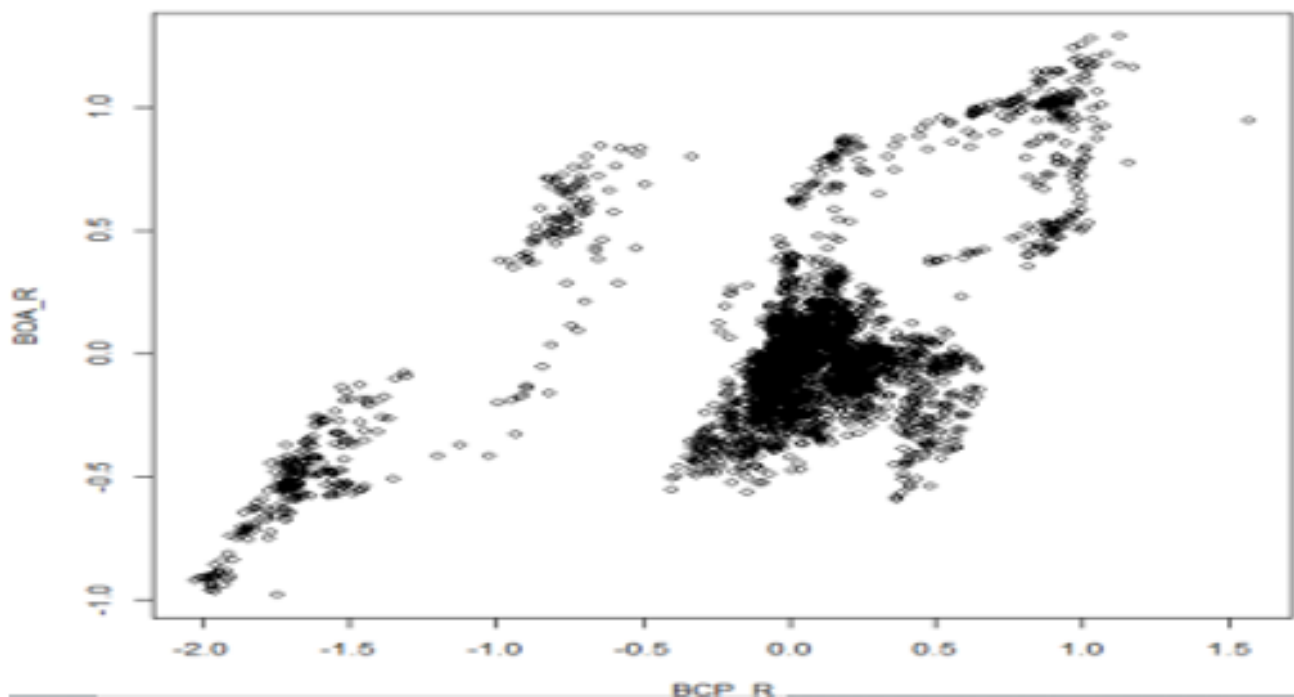


FIGURE 3.6 – Diagramme de dispersion entre BOA et BCP

Diagramme Rank Ran plot

On souhaite également créer le graphique *Rank-Rank plot*. Ce diagramme vise à détecter la dépendance en évitant la visualisation des paires (X_i, Y_i) pour $i \in \{1, \dots, n\}$, contrairement au diagramme de dispersion. Au lieu de cela, l'attention est portée sur la partie uniforme de l'échantillon, représentée par les paires (F_i, G_i) pour $i \in \{1, \dots, n\}$, où

$$F_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i : X_j \leq X_i\}$$

et

$$G_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i : Y_j \leq Y_i\}.$$

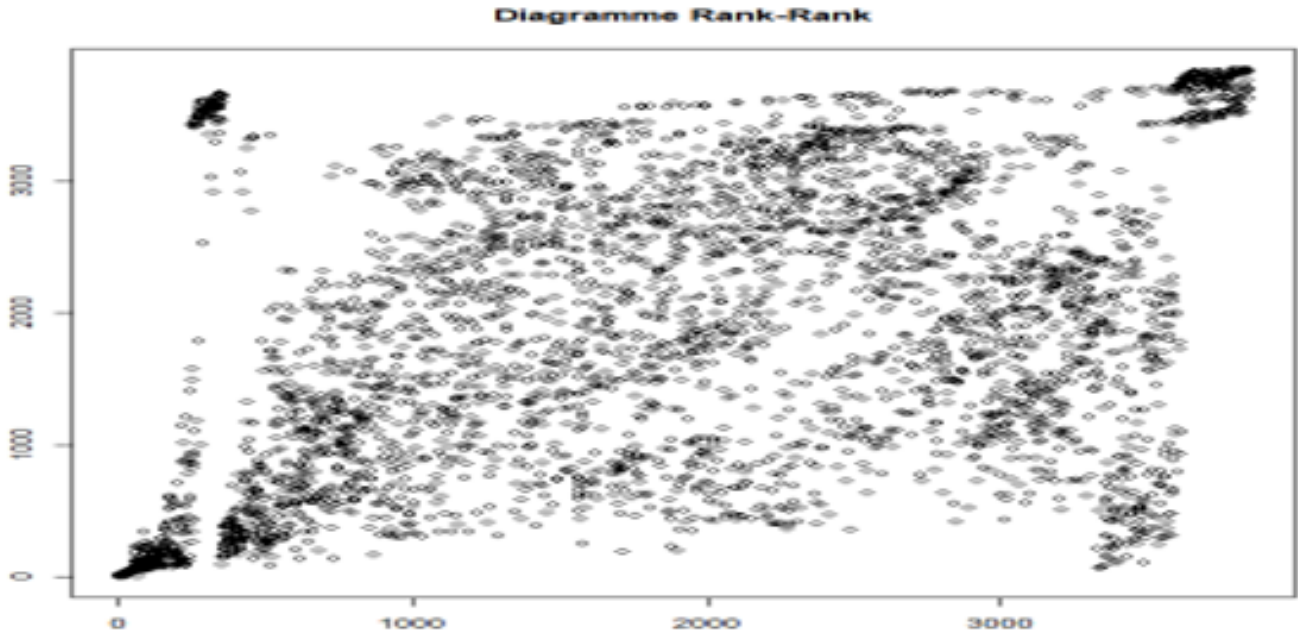


FIGURE 3.7 – Diagramme de RANK RANK plot BCP-BOA

Le graphique Khi-plot

Le graphique Khi-plot permet également de tracer le Khi-plot associé à la distribution. Cet outil graphique facilite la détection de la présence d'une association entre deux variables à partir d'un échantillon aléatoire. Lors de sa construction, nous nous basons sur les rangs des observations. Si nous considérons la paire (X_i, Y_i) issue des deux échantillons (X_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$ et (Y_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$, alors les rangs des observations sont définis par :

$$H_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i : X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\}$$

$$F_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i : X_j \leq X_i\}$$

$$G_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i : Y_j \leq Y_i\}$$

Le graphique Khi-plot est représenté par les paires (X_i, Y_i) où :

$$\theta_i = \sqrt{\frac{H_i - F_i G_i}{F_i(1 - F_i)G_i(1 - G_i)}}$$

et

$$\varphi_i = 4 \text{signe}(F_i - 0.5, G_i - 0.5) \sqrt{(F_i - 0.5)^2 + (G_i - 0.5)^2}$$

Il est établi que la mesure statistique $|\varphi_i|$ est la distance entre la paire (X_i, Y_i) et on a :

$$|\varphi_i| < 4 \sqrt{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n}}$$

Ainsi, pour nos deux échantillons de rendements *BCP* et *BOA*, une implémentation du Khi-plot construit sur la base des rangs des observations conduit aux sorties suivantes :

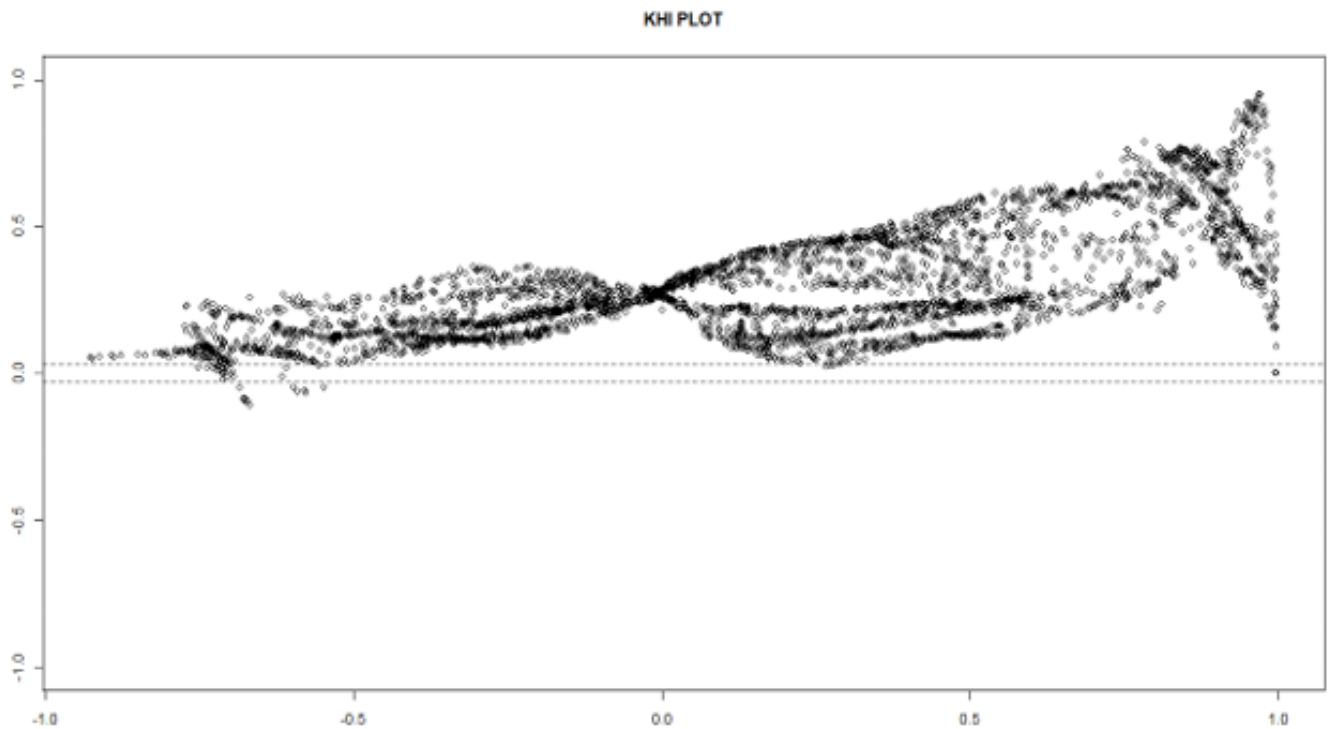


FIGURE 3.8 – Diagramme de Khi du BCP et BOA

Diagramme K-plot

Finalement, nous tentons de tracer le K-plot en utilisant la fonction associée au package *lcopula* sous R, et on obtient :

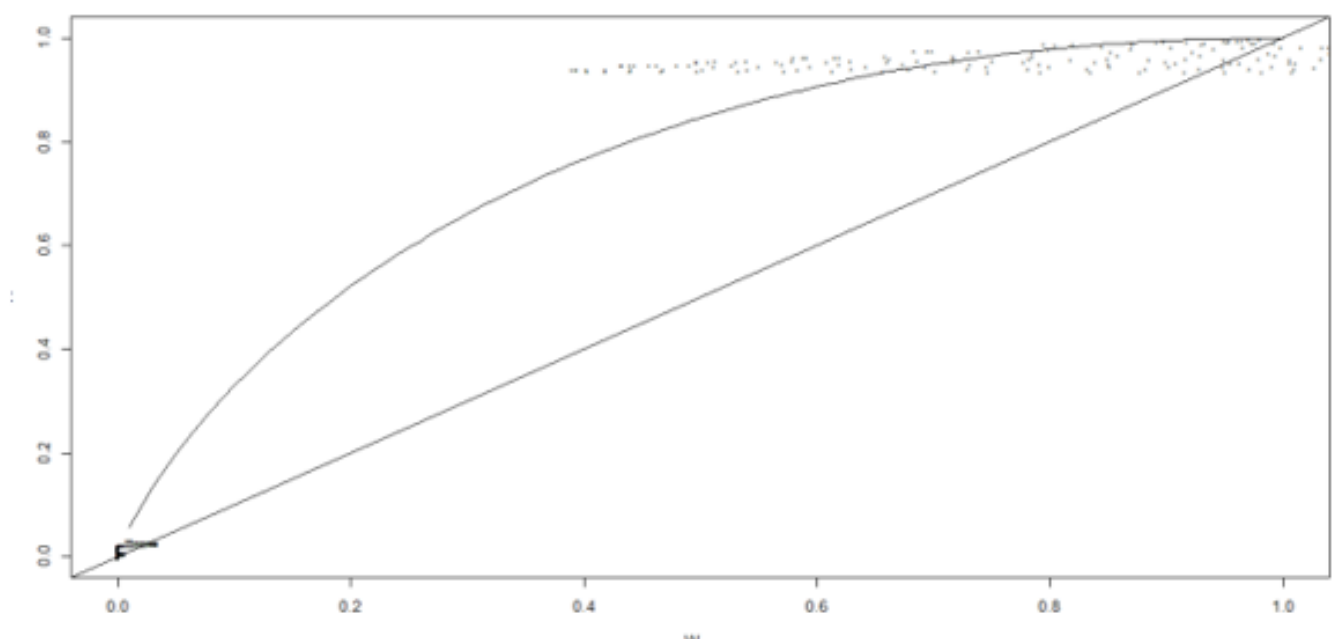


FIGURE 3.9 – Diagramme de K plot du BCP-BOA

CONCLUSION :

Après la visualisation et l'analyse de tous les diagrammes, on peut confirmer qu'il y a une dépendance forte et positive.

II Estimation de la copule :

II.1 Méthode des moments :

C'est une méthode utilisée pour les mesures de dépendance où l'on peut exprimer le paramètre de copule à estimer à l'aide d'une mesure de dépendance k sous forme :

$$k = f(\theta)$$

Ainsi, en choisissant un estimateur non-paramétrique de la mesure de dépendance k , nous pouvons déduire un estimateur non-paramétrique du paramètre de copule θ , moyennant l'inversion de la fonction f comme suit :

$$\theta = f^{-1}(k)$$

Si nous prenons la mesure de dépendance comme étant le tau de Kendall, nous parlerons de la méthode des moments par l'inversion de tau de Kendall. Cette mesure est définie par :

$$\tau(X_1; X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1; u_2) dC(u_1; u_2)$$

Un estimateur non-paramétrique de cette mesure de dépendance est donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sgn}((X_j - X_i)(Y_j - Y_i))$$

En vue de l'utilisation du tau de Kendall pour estimer les paramètres des copules candidates, nous avons créé une fonction **estim-tau-ken** qui renvoie l'estimation du tau de Kendall dans le cas des rendements logarithmiques de notre échantillon. Cette fonction est construite sur la base de l'estimation :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sgn}((X_j - X_i)(Y_j - Y_i))$$

En vérifiant ceci avec le résultat trouvé à l'aide de la fonction prédéfinie sous R, nous tombons sur les mêmes estimations. Ainsi, nous obtenons : $\hat{\tau} = 0.311$.

```
>estim_tau_kend(BCP,BOA)
```

```
[1] 0.3113043
```


Sous R, nous créons une fonction `estim_para` qui renvoie l'estimation du paramètre de copule en se basant sur l'inversion du tau de Kendall. Les résultats obtenus sont les suivants :

Copule	Gumbel	Clayton	FGM	Gaussienne	Sudent	FRANK
Paramètre	1.45202	0.9040402	1.40069	1	0.4697395	3.03

TABLE 3.1 – Estimation des Paramètres des Copules

Test d'adéquation :

Cadre théorique :

Une fois la copule ou les copules sont estimées moyennant une des méthodes d'estimation des copules, cette estimation était implicitement sous la base d'une hypothèse nulle à savoir :

$$H_0 : C = C^*$$

Cette hypothèse a amené à la conclusion suivante :

Pour choisir la copule adéquate, il est question de tester cette hypothèse nulle moyennant une statistique bien déterminée. En effet, pour pouvoir tester H_0 , nous comparons la copule obtenue de paramètre n à la copule empirique. Il s'agit de calculer la distance de ma copule estimée et jugée adéquate par rapport à la copule empirique. Si cette distance s'avère très petite, nous pouvons conclure quant à l'adéquation de la copule choisie et estimée. Alors il est question d'obtenir des tests fondés sur la distance.

Avec : n est la copule empirique dont nous rappelons l'expression :

$$C_n(u; v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[\frac{i}{n} \leq u; \frac{R_i}{n} \leq v \right]$$

Il s'agit de mesurer la distance :

$$D_n = n \int_{[0;1]^2} [C_n(u; v) - n(u; v)]^2 dn(u; v)$$

Les propriétés souhaitables dans les techniques à entreprendre pour pouvoir tester cette hypothèse doivent :

- Présenter une indépendance par rapport aux marges puisqu'on s'intéresse aux copules. Cette dernière doit être bien évidemment fondée sur les rangs R_i et S_i .
- Simplicité d'implémentation et robustesse quant à la modification des données.

Tests fondés sur les copules empiriques :

Un exemple simplifiant la distance D_n est celui de la statistique de Cramér-Von-Mises donnée par :

$$D_n = \sum_{i=1}^n \left[\frac{C_n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)}{S_i \left(\frac{R_i}{n+1} \right)} - n \left(\frac{R_i}{n+1} \right) \right]^2$$

Nous pouvons aussi avoir la même distance pour les L_p en utilisant la distance de Kolmogorov-Smirnov :

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left| C_n \left(\frac{R_i}{n+1} \right) - n \left(\frac{R_i}{n+1} \right) \right|$$

Ces deux distances sont facilement cotables, basées sur les rangs et garantissent une convergence grâce au comportement asymptotique de la copule empirique.

$C_n(u; v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \left[u; \frac{i}{n} \right] \left[v; \frac{i}{n} \right]$ pour $(u; v) \in [0; 1]$ En appliquant les distances aux rangs des observat

Copule	D1	D2	D infini
Gumbel	0.07916977	0.07924163	0.28137123
Clayton	0.07924610	0.07955619	0.28150685
Frank	0.1047177	0.1057376	0.3236012
Student	0.355894279291828	0.366868298592194	
Choix optimal	Gumbel	Gumbel	Gumbel

TABLE 3.2 – Résultats des distances pour différentes copules

Interprétation

La copule optimale est la copule qui minimise la distance (entre la copule empirique et la copule paramétrique), et donc dans notre cas c'est la copule de Gumbel.

Pour s'assurer, on peut se baser sur les critères AIC & BIC. Sous R, on a :

— Critère AIC (Information Criterion Akaike) :

$$\text{AIC} = -2 \log(L) + 2k$$

où L est la fonction de vraisemblance maximale et k est le nombre de paramètres du modèle.

— Critère BIC (Bayesian Information Criterion) :

$$\text{BIC} = -2 \log(L) + k \log(n)$$

où n est la taille de l'échantillon.

Valeur	Loglik	AIC	BIC
Gaussienne	683.3505	-1364.7010	-1358.4459
Student	1180.819	-2357.638	-2345.128
FGM	465.2510	-928.5020	-922.2469
FRANK	465.2510	-928.5020	-922.2469
Clayton	698.7832	-1395.5663	-1389.3113
Gumbel	845.6036	-1689.2071	-1682.9521
Best	Gumbel	Gumbel	Gumbel

TABLE 3.3 – Résultats des critères pour différentes copules en utilisant les critères AIC et BIC



Conclusion

La copule de Gumbel de paramètre 1.45202 est la copule optimale pour modéliser la dépendance entre les rendements de BCP et BOA.

Densité de la copule de Gumbel

$$\forall u, v \in]0, 1 \left[2, c_\alpha(u, v) = C_\alpha(u, v) \frac{\phi_{\alpha-1}(u)\phi_{\alpha-1}(v)}{uv} [\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v)]^{\frac{1}{\alpha}-2} \left[\alpha - 1 + (\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v))^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

L'expression supra de la densité n'est pas valable sur les bords du pavé $[0, 1] \times [0, 1]$. En effet, si on cherche à calculer la dérivée seconde croisée $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}$ en des points du bord, alors on constate qu'elle n'est pas définie. Dans un premier, on calcule $\frac{\partial C}{\partial u}(0, v)$:

$$\begin{aligned} \frac{C(0+h, v) - C(0, v)}{h-0} &= \frac{C(h, v)}{h} = e^{-\ln h} e^{-[(-\ln h)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{-\ln h} e^{+\ln h \left[1 + \left(\frac{\ln v}{\ln h}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= e^{\ln h \left[1 + \left(\frac{\ln v}{\ln h}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1, \end{aligned}$$

Puisque en réalisant un développement limité (DL) de l'exposant, on a :

$$\left[1 + \left(\frac{\ln v}{\ln h}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\ln v}{\ln h}\right)^\alpha + O\left(\left(\frac{\ln v}{\ln h}\right)^\alpha\right)$$

Donc, on a

$$\frac{\partial C}{\partial u}(0, v) = 1 \text{ et par symétrie } \frac{\partial C}{\partial v}(u, 0) = 1.$$

De même, on trouve

$$\frac{\partial C}{\partial u}(0, 0) = 0 \text{ et par symétrie } \frac{\partial C}{\partial v}(0, 0) = 0.$$

Puisque $C(0+h, 0) = C(0, 0) = 0$. Enfin, on aboutit à la non-existence de $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(0, 0)$, par

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}(0, h) - \frac{\partial C}{\partial u}(0, 0)}{h-0} = \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

En se servant des calculs précédents, on trouve que $\forall 0 < u, v < 1, \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(0, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, 0) = 0$ En appliquant le même raisonnement (i.e. avec un DL), on trouve que

$$\frac{\partial C}{\partial u}(1, v) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(1, v) - C(1-h, v)}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial u}(1, 1) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(1, 1) - C(1 - h, 1)}{h} = 1$$

D'où, la non-existence de $\frac{\partial^2 C}{\partial w \partial \delta v}(1, 1)$ par

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}(1, 1) - \frac{\partial C}{\partial u}(1, 1 - h)}{1 - (1 - h)} = \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

Enfin, on a aussi, $\forall 0 < u, v < 1$, $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial v}(1, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial v}(u, 1) = 0$.

Valeur particulière de α : Pour $\alpha = 1$, on a

$$C_1(u, v) = C_\alpha(u, v) = \exp \left[- \left((-\ln u)^1 + (-\ln v)^1 \right)^1 \right] = uv$$

Autrement dit, C_1 est la copule d'indépendance. De plus, si on suppose $u \leq v$, alors

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left[- \left((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \exp \left[\ln u \left(\left(\frac{\ln v}{\ln u} \right)^\alpha + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} v$$

Ainsi $C_\infty = C^+$ la copule de la borne supérieure de Fréchet, i.e. la copule comonotone. Il est important de noter que quel que soit α , la copule de Gumbel permet de modéliser seulement des dépendances positives. Dépendance des extrêmes : Par un résultat de Nelsen (2006), on a que

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \phi^{-1}(2t)}{1 - \phi^{-1}(t)} \text{ et } \lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi^{-1}(2t)}{\phi^{-1}(t)}.$$

Pour notre copule de Gumbel, on a :

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-(2t)^{\frac{1}{a}}}}{1 - e^{-t^{\frac{1}{a}}}} = 2 - \frac{1 - \left(1 - (2t)^{\frac{1}{a}} + O\left(t^{\frac{1}{a}}\right) \right)}{1 - \left(1 - t^{\frac{1}{a}} + O\left(t^{\frac{1}{a}}\right) \right)} = 2 - \frac{(2t)^{\frac{1}{a}} + O\left(t^{\frac{1}{a}}\right)}{t^{\frac{1}{a}} + O\left(t^{\frac{1}{a}}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 2 - 2^{\frac{1}{a}},$$

et

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(2t)^{\frac{1}{a}}}}{e^{-t^{\frac{1}{a}}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(2^{\frac{1}{a}} - 1)t^{\frac{1}{a}}} = 0.$$

La copule de Gumbel vérifie la propriété de max-stabilité :

$$\begin{aligned} C_\alpha(u^{1/r}, v^{1/r})^r &= \left[\exp \left[- \left((-\ln u^{1/r})^\alpha + (-\ln v^{1/r})^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right]^r = \exp \left[-r \left(\left(-\frac{1}{r} \ln u \right)^\alpha + \left(-\frac{1}{r} \ln v \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\ &= \exp \left[- \left((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = C_\alpha(u, v) \end{aligned}$$

Bibliographie

1. Cherubini, U. (2004). *Copula Methods in Finance*.
2. Said, KHALIL (2023). *Cours théorie des copules*.
3. Yassine, EL QALLI. (2023). *Cours théorie des options* .