1 Введение

Дадим некоторые базовые определения. Абелевой группой будем называть множество G с определенной на нем операцией $+$ для которого выплонены следующие аксиомы:

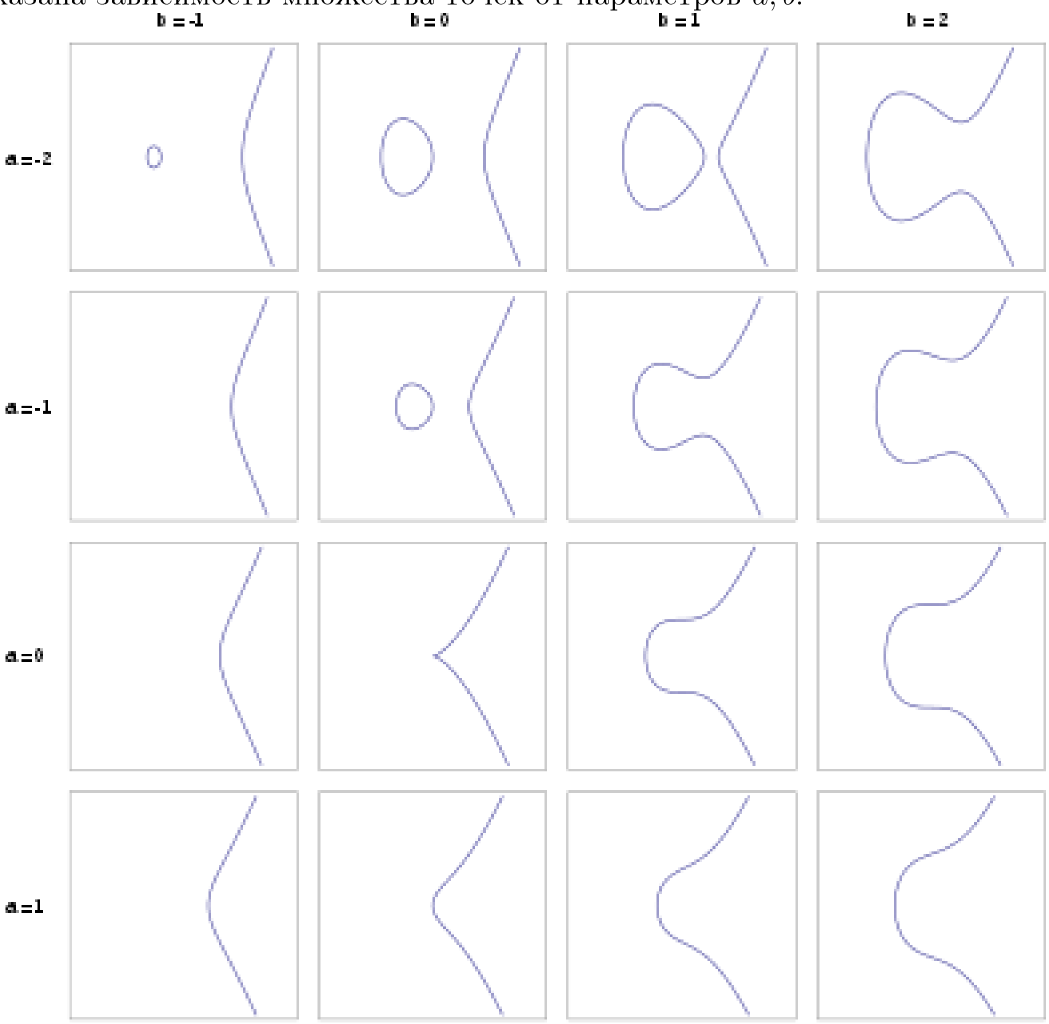
1. $\forall a, b \in G \; a + b \in G$
2. $\exists 0 : a + 0 = 0 + a \in G$
3. $\forall a \in G \; \exists -a \in G : a + (-a) = 0$
4. $\forall a, b \in G \; a + b = b + a$
5. $\forall a, b, c \in G \; a + (b + c) = (a + b) + c$

Проще говоря группой назовем множество элементы которого можно складывать, вычитать и в котором имеется нейтральный элемент относительно данной операции.

Предположим что мы сейчас работаем в $\mathbb{R}^2$. Дадим общее определение того что такое эллиптическая кривая. *Эллиптической кривой* назовем множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_5$, где a_i – некоторый числа. Множество таких точек обозначим как

$$E = \{(x, y) | y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_5\}.$$

Это было достаточно общее определение, далее будем предполагать что эллиптическая кривая задана уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$. Далее картинка на которой показана зависимость множества точек от параметров a, b.



Как можно видеть, имеем 2 разные ситуации: когда график кривой представляет из себя множество, состоящие из одной связной компоненты и из двух. Так же можно видеть, что при некоторый значениях параметров возникают особенности: кривая может пересечь саму себя, а так же есть точка излома. Кривые, обладающие такими особенностиями называют вырожденными. Для определения всех этих ситуаций введем понятие *дискриминанта*. *Дискриминантом* эллиптической кривой назовем величину

$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$$

Если $\Delta < 0$, то кривая имеет две компоненты, если $\Delta > 0$, то кривая имеет одну компоненту. Если же $\Delta = 0$, то кривая является вырожденной.

Далее будем предполагать что кривая является невырожденной, то есть ее дискриминант отличен от нуля.

Последнее что нам потребуется это ввести понятие бесконечно удаленной точки. Чтобы не углубляться в науку скажем что это точка, находящаяся где-то за пределами плоскости и принадлежащая нашей эллиптической кривой. Таким образом будем рассматривать кривые вида

$$E = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b, -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0\} \cup \{\infty\}$$

2 Сложение точек на кривой

Сперва определим эту операцию геометрически. Введем понятие нейтрального элемента. Нейтральным элементом назовем точку ∞. Рассмотрим 3 точки $P, Q, R' \in E$. Будем говорить что их сумма равна нулю, если они лежат на одной прямой. $P+Q+R' = 0$. Чтобы получить именно сумму точек P и Q введем понятие обратного элемента. Точкой, обратной к точке $R' = (x_r, y_r)$, назовем точку с координатами $R = (x_r, -y_r)$.

Заметим, что в определении имеются определенные неточности. Например, что будет если окажется что $P = Q$? Тогда мы будем проводить касательную к точке P. Что будет если $P = 0$? Тогда чисто формально, $P + Q = 0 + Q = Q$. Что будет если сложить $P + (-P)$? Тогда можно сказать, что прямая проходит через точки $P, -P, \infty$, таким образом $P + (-P) = 0$.