

1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A -алгебру \tilde{A} .

В [Ссылка на статью] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \tilde{A} \otimes_A M$. Алгебра \tilde{A} получается при этом следующим образом: $\tilde{A} = \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A ;

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 1.1 Пусть $I \subset A$ идеал. Алгеброй раздутия идеала I назовем выражение $\hat{A} := \bigoplus_{s \geq 0} I^s$.

Определение 1.2 Пусть M – произвольный A -модуль. Подмодулем кручения $\text{tors}(M)$ называется множество

$$\text{tors}(M) = \{x \in M \mid \exists a \in A \setminus \{0\}, ax = 0\}.$$

Определение 1.3 Будем говорить, что A -модуль M является модулем без кручения, если $\text{tors}(M) = 0$.

Пусть M – A -модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия \hat{A} в модуле $\hat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\text{tors}(\hat{A} \otimes_A I)$ A -модуля $\hat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \dots, xy^{s-1}, y^s)$.

Доказательство. Методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно значений $s \leq r$. При $s = r + 1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^r a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \mid a_n, b_m \in A \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \{b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \dots + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} \mid a_n, b_m \in A\}$$

Таким образом,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, x y^r, y^{r+1}),$$

Что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы [сослаться на соответствующую главу], то справедлива цепочка равенств:

$$\hat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A -модулей. Кольцо A – целостное. Тогда

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) \subset \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Пусть $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus \{0\}$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число t_j отлично от нуля. Так как в прямой сумме умножение производится по координатам, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \text{tors} (M_0), t_1 \in \text{tors} (M_1), \dots, t_j \in \text{tors} (M_j), \dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Теперь покажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все элементы t , отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо целостное, то ни при каких a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что $at = 0$. Значит $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 1.1, можно записать следующее:

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I) \right) = \bigoplus_{s \geq 0} \text{tors} (I^s \otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\text{tors} (I^s \otimes_A I)$ A -модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 1.2 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда $\text{tors} (I^s \otimes_A I)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors} (I^s \otimes_A I) = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечнопорожденными A -модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения [Ссылка на это свойство], имеем

$$I^s \otimes_A I = \langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0, s} \rangle_A.$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \rightarrow I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}, x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что

$\ker \mu = \text{tors}(I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\text{tors}(I^s \otimes_A I) \subset \ker \mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker \mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y \otimes x) + \cdots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ b_1(x^s \otimes y) + \cdots + b_s(xy^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$.

$\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0x^{s+1} + (a_1 + b_1)x^sy + \cdots + (a_s + b_s)xy^s + b_{s+1}y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условие на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 0 \\ \dots & \\ a_s + b_s &= 0 \\ b_{s+1} &= 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1, s}$ и

$$\ker \mu = \langle x^ny^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

Покажем, что любая образующая $\ker \mu - x^ny^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y$ является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^ny^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} xy(x^ny^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y) &= \\ x(x^ny^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1}y^{s-n-1}) \otimes xy &= \\ x^{n+1}y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1}y^{s-n} \otimes xy &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включение $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker \mu$ и имеет место равенство

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \langle x^ny^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n, m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0, s}, m = \overline{0, r} \rangle_A.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \rightarrow I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker \mu = \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручений из чего следует, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) \subset \ker \mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker \mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих модуля

$$z = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$ получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}.$$

Покажем, что $z \in \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем $k, n \leq \min(s, k)$. Рассмотрим произвольную образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим на $x^r y^r$. Имеем

$$\begin{aligned} x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) &= \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} &= \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r. \end{aligned}$$

При фиксированном k мы получили сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij} . Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ■