1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В **[Ссылка на статью]** автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A.

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 1.1 Пусть $I \subset A$ идеал. *Алгеброй раздутия* идеала I назовем выражение

$$\widehat{A} := \bigoplus_{s \geq 0} I^s.$$

Определение 1.2 Пусть M – произвольный A-модуль. *Подмодулем кручения* $\operatorname{tors}(M)$ называется множество

$$\operatorname{tors}(M) = \{x \in M | \exists a \in A \setminus \{0\}, ax = 0\}.$$

Определение 1.3 Будем говорить, что A-модуль M является *модулем без кручения*, если $\operatorname{tors}(M) = 0$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 *Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно значений $s \leq r$. При $s = r + 1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) | a_n, b_m \in A \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \left\{ b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \cdots + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A \right\}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, xy^r, y^{r+1}),$$

Что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы **[сослаться на соответствующее свойство]**, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 *Пусть* $\{M_j | j \in J\}$ *– семейство* A*-модулей. Кольцо* A *– целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors} (M_j) .$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus \{0\}$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число t_j отлично от нуля. Так как в прямой сумме умножение производится покоординатно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0), t_1 \in \operatorname{tors}(M_1), \dots, t_j \in \operatorname{tors}(M_j), \dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь покажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все элементы t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus \{0\}$, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 1.1, можно записать седующее:

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I) \right) = \bigoplus_{s \geq 0} \operatorname{tors} (I^s \otimes_A I) .$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ A-модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 1.2 *Пусть образующие иделала* $I = (x, y)$ *алгебраически независимы. Тогда* $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors} (I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечнопорожденными A-модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения **[Ссылка на это свойство]**, имеем

$$I^s \otimes_A I = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0,s} \right\rangle_A .$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \to I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}$, $x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker \mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) \subset \ker \mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker \mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) &+ a_1(x^{s-1} y \otimes x) + \dots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ b_1(x^s \otimes y) + \dots + b_s(x y^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$. $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0 x^{s+1} + (a_1 + b_1) x^s y + \dots + (a_s + b_s) x y^s + b_{s+1} y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условие на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 + b_1 & = 0 \\ \dots \\ a_s + b_s & = 0 \\ b_{s+1} & = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1,s}$ и

$$\ker \mu = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

Покажем, что любая образующая $\ker \mu$ — $x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y$ является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} & xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y) = \\ & \qquad x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1} y^{s-n-1}) \otimes xy = \\ & \qquad\qquad x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy = 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включнение $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker \mu$ и имеет место равенство

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3 *Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда* *подмодуль кручения* $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0\le n\le s\\ 0\le m\le r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0,s}, m = \overline{0,m} \right\rangle_A.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \to I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker\mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручений из чего следует, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes I^r) \subset \ker\mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker\mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих модуля

$$z = \sum_{\substack{0\le n\le s\\ 0\le m\le r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$ получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0\le n\le s\\ 0\le m\le r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}.$$

Покажем, что $z \in \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем k, $n \le \min(s,k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим на $x^r y^r$. Имеем

$$x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) = \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} = \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r.$$

При фиксированном k мы получили сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{nk-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij}. Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ■

Следствие 1.4 *Пусть числа a, b – натуральные, $I = (x,y)^a$, $J = (x,y)^b$, тогда*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A J) = \left\{ \sum_{\substack{0 \le n \le as \\ 0 \le m \le b}} a_{nm} x^n y^{as-n} \otimes x^m y^{b-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Исходную задачу можно обобщить, заменив алгебру раздутия на алгебру

$$\widetilde{A} := \bigoplus_{s \ge 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}),$$

где t – элемент, трансцендентный над A. Отметим, что алгебра $\widetilde{A}$ является A-алгеброй без кручения, однако, если рассматривать $\widetilde{A}$ как алгебру над $\widetilde{A}$, то возникают элементы кручения, например, $(0, t, 0, \dots)$. Далее будем работать с $\widetilde{A}$ как с A-алгеброй.

Обозначим s-ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s := (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 1.1

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1} \right\rangle_I + \langle t^s \rangle_A. \tag{1}$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s, так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени обратятся в 0. Рассмотрим произведение

$$\prod_{n=1}^{s} a_{n0} + (a_{n1} + b_n)t + a_{n2}t^2 + \dots + a_{ns}t^s.$$

Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при t^k, $0 \le k \le s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k, которые имеют вид

$$[t^k] = b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_k} a_{j_{k+1}0} \dots a_{j_s 0},$$

где множества $\{j_1, \dots, j_k\}, \{j_{k+1}, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, s\}$ непересекаются, а $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k}, при этом взять в произведение большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I нельзя, так как мы ограничены степеню k. Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k. Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r, где $r \geq s-k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k, что оно принадлежит I^r, например, пусть $r = l + (s-k)$

$$a_{11}a_{21}\dots a_{l1}b_{l+1}\dots b_k a_{k+1,0}\dots a_{s0} \in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s в сумму своих подмодулей

$$I_t^s = \langle 1, t, \dots, t^s \rangle_{I^s} + \left\langle t, t^2, \dots, t^s \right\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}, t^s \right\rangle_I + \langle t^s \rangle_A .$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s \subset I^{s-1} \subset \dots \subset I \subset A$, то справедливы включения $\left\langle t^k \right\rangle_{I^s} \subset \left\langle t^k \right\rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1} \right\rangle_I + \langle t^s \rangle_A .$$

■

Заметим, что сумма (1) является прямой, так как I_t^s – подмодуль A-модуля $A[t]$. Теперь, зная строение A-модуля I_t^s, можно сформулировать теорему

Теорема 1.5 *Пусть $J \subset A$ – идеал в A, тогда*

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A J\right).$$

В частности,

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A I\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A I\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A I\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A I\right).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и в силу теоремы 1.1 можно записать

$$\begin{aligned} \operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = \operatorname{tors}\left(\left\langle t^0 \right\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^1 \right\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^{s-1} \right\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\langle t^s \rangle_A \otimes_A J\right). \end{aligned}$$

Так как t – элемент трансцендентный над A, то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A. Значит он не даст вклада в кручения и его можно вынести за знак $\operatorname{tors}(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(\langle 1 \rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(\langle 1 \rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(\langle 1 \rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + t^s \operatorname{tors}\left(\langle 1 \rangle_A \otimes_A J\right). \end{aligned}$$

Но $\langle 1 \rangle_{I^k}$, очевидно, является самим идеалом I^k. Таким образом, имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A J\right).$$

■

Задача свелась к вычислению $\operatorname{tors}\left(I^s \otimes J\right)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 1.6 *Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручения A-модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:*

$$
\begin{aligned}
t^0 \left\langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \ldots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y \right\rangle_A + \\
t^1 \left\langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \ldots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y \right\rangle_A + \\
\cdots + \\
t^{s-1} \left\langle x \otimes y - y \otimes x \right\rangle_A .
\end{aligned}
$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5 и для каждого $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ применим теорему 1.2. ∎