1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В [3] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s\geq 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A;

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей. Пусть $I \subset A$ идеал. Алгеброй раздутия идеала I назовем выражение $\widehat{A} := \bigoplus_{s\geq 0} I^s$.

Определение 1.1 Пусть M – произвольный A-модуль. Подмодулем кручения $\operatorname{tors}(M)$ называется множество

$$\operatorname{tors}(M) = \{x \in M | \exists a \in A \setminus \{0\}, ax = 0\}.$$

Определение 1.2 Будем говорить, что A-модуль M является модулем без кручения, если $\operatorname{tors}(M) = 0$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 *Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно значений $s \leq r$. При $s = r + 1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) | a_n, b_m \in A \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \left\{ b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \cdots + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A \right\}$$

Таким образом,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \ldots, x y^r, y^{r+1}),$$

Что завершает доказательство теоремы. ∎

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы **[сослаться на соответствующую главу]**, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 *Пусть* $\{M_j | j \in J\}$ *– семейство A-модулей. Кольцо A – целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus \{0\}$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число t_j отлично от нуля. Так как в прямой сумме умножение производится покоординатно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0), t_1 \in \operatorname{tors}(M_1), \dots, t_j \in \operatorname{tors}(M_j), \dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь покажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все элементы t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1}t_{i_1} = a_{i_2}t_{i_2} = \dots = a_{i_k}t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$. Так как кольцо целостное, то ни при каких a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1,k}$. Тем самым мы показали, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. ■