

1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A -алгебру \tilde{A} .

В [?] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \tilde{A} \otimes_A M$. Алгебра \tilde{A} получается при этом следующим образом: $\tilde{A} = \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A .

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 1.1 Пусть $I \subset A$ – идеал. Алгебра раздутия идеала I задается выражением

$$\hat{A} := \bigoplus_{s \geq 0} I^s.$$

При этом сложение и умножение элементов кольца \hat{A} и действие элементов кольца A на элементы кольца \hat{A} наследуются с операций кольца A .

Кольцо \hat{A} градуировано, то есть, если $x \in I^s, y \in I^t$, то $xy \in I^{s+t}$.

Определение 1.2 Пусть M – произвольный A -модуль, A – целостное кольцо. Подмодулем кручения $\text{tors}(M)$ называется множество

$$\text{tors}_A M = \{x \in M \mid \exists a \in A \setminus 0 : ax = 0\}.$$

Определение 1.3 Будем говорить, что A -модуль M является модулем без кручения, если $\text{tors}_A M = 0$.

Заметим, если A не является целостным кольцом, то $\text{tors}_A M$ не обязательно является подмодулем в M .

Далее в тексте под $\text{tors}(M)$ без нижнего индекса будем подразумевать $\text{tors}_A M$.

Пусть M – A -модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия \hat{A} в модуле $\hat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\text{tors}(\hat{A} \otimes_A I)$ A -модуля $\hat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \dots, xy^{s-1}, y^s)$.

Доказательство. Действуем методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно для значений $s \leq r$. При $s = r+1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^r a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \mid a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \{b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \dots \\ + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1}\}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j ,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, x y^r, y^{r+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы, то справедлива цепочка равенств:

$$\hat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A -модулей, и кольцо A – целостное. Тогда

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) \subset \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Пусть $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число компонент t_j отлично от нуля. Так как умножение на элементы прямой суммы производится покомпонентно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \text{tors} (M_0), t_1 \in \text{tors} (M_1), \dots, t_j \in \text{tors} (M_j), \dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Теперь докажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все компоненты t , отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in A$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Значит $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 1.1, можно записать следующее:

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I) \right) = \bigoplus_{s \geq 0} \text{tors} (I^s \otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\text{tors}(I^s \otimes_A I)$ A -модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 1.2 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда $\text{tors}(I^s \otimes_A I)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечно порожденными A -модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения для двух конечно порожденных модулей, имеем

$$I^s \otimes_A I = \langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0, s} \rangle_A.$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \rightarrow I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}$, $x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker \mu = \text{tors}(I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\text{tors}(I^s \otimes_A I) \subset \ker \mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker \mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y \otimes x) + \dots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ b_1(x^s \otimes y) + \dots + b_s(xy^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$. Тогда $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0 x^{s+1} + (a_1 + b_1) x^s y + \dots + (a_s + b_s) x y^s + b_{s+1} y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 0 \\ \dots & \\ a_s + b_s &= 0 \\ b_{s+1} &= 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1, s}$ и

$$\ker \mu = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

Покажем, что любая образующая $\ker \mu$, то есть $x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y$, является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y) &= \\ x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1} y^{s-n-1}) \otimes xy &= \\ x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включение $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker \mu$, и имеет место равенство

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n, m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0, s}, m = \overline{0, r} \rangle_A.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \rightarrow I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker \mu = \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме, мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручения, из чего следует, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) \subset \ker \mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker \mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих

$$z = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$ получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}, \quad (1)$$

докажем, что $z \in \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем $k, n \leq \min(s, k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим ее на $x^r y^r$, где r — показатель степени идеала I^r . Имеем

$$\begin{aligned} x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) &= \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} &= \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r. \end{aligned}$$

Умножив выражение (1) на $x^r y^r$, мы получим сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \sum_{k=0}^{s+r} \left[\left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r \right] = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij} . Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ■

Следствие 1.4 Пусть числа a, b — натуральные, $I = (x, y)^a$, $J = (x, y)^b$, тогда

$$\text{tors}(I^s \otimes_A J) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq as \\ 0 \leq m \leq b}} a_{nm} x^n y^{as-n} \otimes x^m y^{b-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n, m.$$

Исходную задачу можно обобщить, заменив алгебру раздутья на алгебру

$$\tilde{A} := \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}),$$

где t — элемент, трансцендентный над A . Отметим, что алгебра \tilde{A} является A -алгеброй без кручения, однако, если рассматривать \tilde{A} как алгебру над \tilde{A} , то возникают элементы кручения, например, $(0, t, 0, \dots)$. Далее будем работать с \tilde{A} как с A -алгеброй.

Обозначим s -ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s := (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 1.1 A -модуль I_t^s допускает следующее разложение в сумму своих A -подмодулей

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A. \quad (2)$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s , так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени

обратятся в 0. По определению, $(I[t] + (t))^s$ состоит из произведений s произвольных элементов $I[t] + (t)$. Поэтому, чтобы выяснить структуру $(I[t] + (t))^s$, необходимо рассмотреть произведение

$$\prod_{n=1}^s (a_{n0} + (a_{n1} + b_n)t + a_{n2}t^2 + \dots + a_{ns}t^s),$$

где $a_{nj} \in I, b_n \in A, n = \overline{1, s}, j = \overline{0, s}$. Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при $t^k, 0 \leq k \leq s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k , которые имеют вид

$$b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_k} a_{j_{k+1}0} \dots a_{j_s0},$$

где множества $\{j_1, \dots, j_k\}, \{j_{k+1}, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, s\}$ не пересекаются, а $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k} , при этом взять в произведении большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I , нельзя, так как мы ограничены степенью k . Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k . Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r , где $r \geq s - k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k , что оно принадлежит I^r , например, пусть $r = l + (s - k)$

$$a_{11} a_{21} \dots a_{l1} b_{l+1} \dots b_k a_{k+1,0} \dots a_{s0} \in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s , как A -модуля, в сумму своих A -подмодулей

$$I_t^s = \langle 1, t, \dots, t^s \rangle_{I^s} + \langle t, t^2, \dots, t^s \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1}, t^s \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s \subset I^{s-1} \subset \dots \subset I \subset A$, то справедливы включения $\langle t^k \rangle_{I^s} \subset \langle t^k \rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

■

Заметим, что сумма (2) является прямой внутренней суммой своих подмодулей. Теперь, зная строение A -модуля I_t^s , можно сформулировать теорему

Теорема 1.5 Пусть $J \subset A$ – идеал в A , тогда

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A J) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A J).$$

В частности,

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A I) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A I) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A I) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A I).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и, в силу теоремы 1.1, можно записать

$$\begin{aligned} \text{tors}(I_t^s \otimes_A J) &= \text{tors}(\langle t^0 \rangle_{I^s} \otimes_A J) + \text{tors}(\langle t^1 \rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J) + \dots \\ &\quad + \text{tors}(\langle t^{s-1} \rangle_I \otimes_A J) + \text{tors}(\langle t^s \rangle_A \otimes_A J). \end{aligned}$$

Так как t – элемент, трансцендентный над A , то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A . Значит, он не даст вклада в кручение и его можно вынести

за знак $\text{tors}(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \text{tors}(I_t^s \otimes_A J) &= t^0 \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^s} \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J) + \dots \\ &\quad + t^{s-1} \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^1} \otimes_A J) + t^s \text{tors}(\langle 1 \rangle_A \otimes_A J). \end{aligned}$$

Но $\langle 1 \rangle_{I^k}$, очевидно, является самым идеалом I^k . Таким образом, имеем

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A J) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A J) + t^s \text{tors}(I \otimes_A J).$$

■

Задача свелась к вычислению $\text{tors}(I^s \otimes J)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 1.6 Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручения A -модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:

$$\begin{aligned} &t^0 \langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \dots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y \rangle_A + \\ &t^1 \langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \dots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y \rangle_A + \\ &\quad \dots + \\ &t^{s-1} \langle x \otimes y - y \otimes x \rangle_A. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5 и для каждого $\text{tors}(I^s \otimes_A I)$ применим теорему 1.2. ■

Как было отмечено ранее, \tilde{A} является алгеброй с кручением как алгебра над \tilde{A} с покомпонентным умножением. Выясним, какой вид имеет $\text{tors}_{\tilde{A}} \tilde{A}$. Заметим следующее

$$\text{tors}_{\tilde{A}} \tilde{A} = \text{tors}_{\bigoplus I_t^s} \bigoplus I_t^s = \bigoplus \text{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

так как умножение в прямой сумме осуществляется покомпонентно. Таким образом, мы свели исходную задачу к следующей: описать $\text{tors}_{I_t^s} I_t^s$. Справедлива

Теорема 1.7

$$\text{tors}_{I_t^s} I_t^s = \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент I_t^s следующего вида

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \tag{3}$$

где $a_i \in I^{s-i}$, и умножим его на $1 \cdot t^s \neq 0$.

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s) t^s = a_1 t^{s+1} + a_2 t^{s+2} + \dots + a_s t^{2s} = 0,$$

то есть, мы показали, что элементы вида (3) действительно являются элементами кручения. Покажем, что никакие другие элементы вклада в кручение не дадут. Предположим, что

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s \in \text{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

где $a_0 \neq 0$. По определению, существует такой элемент $g \in I_t^s \setminus 0$, что $fg = 0$. Пусть

$$g = b_0 + b_1 t + \dots + b_s t^s \neq 0.$$

Рассмотрим коэффициенты при t^k , $k = \overline{0, s}$ в произведении fg . Коэффициент при t^k

обозначим как $[t^k]$.

$$\begin{aligned} [t^0] &= a_0 b_0 = 0 \\ [t^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ &\vdots \\ [t^s] &= a_0 b^s + \dots + a_{s-1} b_1 + a_s b_0 = 0. \end{aligned}$$

Так как кольцо целостное, $a_0 \neq 0$, то, из уравнения на $[t^0]$, получаем $b_0 = 0$. Подставив $b_0 = 0$ в уравнение на $[t^1]$ и воспользовавшись целостностью кольца, получим $b_1 = 0$. Повторяя эти рассуждения далее, получим, что $b_0 = b_1 = \dots = b_s = 0$. Таким образом, f аннулирует только 0, значит $f \notin \text{tors}_{I_t^s} I_t^s$.

Таким образом, действительно, только элементы вида (3) являются элементами кручения. Все такие элементы описываются суммой

$$\langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

■

Рассмотрим следующую задачу. Описать кручения \widehat{A} -модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, если он включается в короткую точную последовательность вида

$$0 \rightarrow I_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varepsilon} I_2 \rightarrow 0,$$

где $I_1, I_2 \subset A$ — идеалы в кольце A , A — целостное, нетерово.

Обозначим $\widehat{M} := M \otimes_A \widehat{A}$. Так как тензорное умножение не точно слева, то имеем последовательность вида

$$\widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \rightarrow 0,$$

в которой $\widehat{i} := i \otimes 1$, $\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \otimes 1$. Пусть $\tau := \ker \widehat{i}$. Тогда получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \tau \rightarrow \widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \rightarrow 0.$$

Справедливы вложения

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & \widehat{I}_1 & \xrightarrow{\widehat{i}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \widehat{I}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \tau & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 & \xrightarrow{\widehat{i}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где гомоморфизмы в нижней строке получены путем ограничения гомоморфизмов верхней строки на соответствующие множества. Разложим гомоморфизм \widehat{i}' в композицию сюръективного и инъективного морфизмов и рассмотрим нижнюю строку

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \tau & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 & \xrightarrow{\widehat{i}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow & & \uparrow & & & & \\ & & & & & & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 & & & & \\ & & & & & & \text{tors}_{\widehat{A}} \tau & & & & \end{array}$$

Отметим, что $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2$ конечно порождены, как \widehat{A} -модули, поэтому $\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2$ конечно

порожден как подмодуль нетерова модуля, $\frac{\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\text{tors}_{\widehat{A}} \tau}$ конечно порожден как образ конечно порожденного модуля. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 4 §4 гл. 1 книги [источник], которое утверждает, что расширение последовательности

$$0 \rightarrow \frac{\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\text{tors}_{\widehat{A}} \tau} \rightarrow \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \xrightarrow{\varepsilon'} \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \rightarrow 0$$

порождено образами порождающих ядра и прообразами порождающих коядра последовательности. Пусть $\widehat{I}_2 = \langle \overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_m} \rangle_{\widehat{A}}$, $z_i \in \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ — произвольно выбранный прообраз $\overline{z_i}$ ($i = \overline{1, m}$) и $\frac{\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\text{tors}_{\widehat{A}} \tau} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_{\widehat{A}}$, $\overline{x_j}$ — образ x_j в $\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ ($j = \overline{1, n}$), тогда

$$\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} = \langle \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \rangle_{\widehat{A}} + \langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle_{\widehat{A}}.$$

Теперь выясним как охарактеризовать кручения произвольного \widehat{A} -модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, при условии что M — нетеров A -модуль. Для этого нам потребуются известные утверждения:

Теорема 1.8 $M^\vee := \text{Hom}_A(M, A)$ — модуль без кручения.

Теорема 1.9 Если M — модуль без кручения, то гомоморфизм $M \rightarrow M^{\vee\vee}$ инъективен.

Пусть $t \in M^\vee \setminus 0$. Рассмотрим гомоморфизм $A \rightarrow M^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha t$. Заметим, что этот гомоморфизм инъективен, так как в противном случае t являлся бы элементом кручения, что невозможно по теореме 1.8. Имеем точную тройку A -модулей:

$$0 \rightarrow A \rightarrow M^\vee \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Перейдя от нее к двойственной получим последовательность, неточную справа

$$0 \rightarrow N^\vee \rightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow A.$$

Разложим гомоморфизм $M^{\vee\vee} \rightarrow A$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & A \longrightarrow \dots \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & M^{\vee\vee}/N^\vee & & \end{array}$$

Так как $M^{\vee\vee}/N^\vee$ обладает вложением в A как A -модуль, то имеет место изоморфизм $M^{\vee\vee}/N^\vee \simeq J \subset A$ — некоторый идеал в кольце A . Таким образом имеем новую точную тройку

$$0 \rightarrow N^\vee \rightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow J \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись теоремой 1.9 имеем вложение

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & J \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

Обозначим $M_1 := \ker(M \rightarrow J_1)$, $J_1 := \text{im}(M \hookrightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow J)$ — идеал в A , при этом

выполнены вложения $J_1 \subset J \subset A$. Имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & J \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & J_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Таким образом, $M_1 \subset M$, M — нетеров, следовательно, M_1 тоже нетеров. Повторим эти же действия для M_1 , потом для M_2 и так далее. Имеем убывающую фильтрацию

$$\cdots \subset M_2 \subset M_1 \subset M. \quad (4)$$

Так как нетеров модуль необязательно артинов, то эта последовательность может быть бесконечной, покажем что это не так и цепочка будет обрываться. Перейдем к локализации в нулевом идеале кольца A . $A \hookrightarrow A_0 := Q(A)$ — поле частных кольца A . По свойству точности локализации имеем точную тройку A_0 -векторных пространств

$$0 \rightarrow (M_{i+1})_0 \rightarrow (M_i)_0 \rightarrow (J_{i+1})_0 \rightarrow 0.$$

Так как $(J_{i+1})_0 \simeq A_0$, то из свойства аддитивности A_0 -размерности имеют место равенства

$$\dim_{A_0}(M_i)_0 - \dim_{A_0} A_0 = \dim_{A_0}(M_i)_0 - 1 = \dim_{A_0}(M_{i+1})_0.$$

Таким образом, последовательность (4) действительно обрывается и базой будет являться случай, в котором имеем точную тройку вида

$$0 \rightarrow I_1 \rightarrow M_n \rightarrow I_2 \rightarrow 0,$$

который был разобран выше.