МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

Сдано на кафедру
«16» июня 2020 г.
Заведующий кфедрой
д.ф.-м.н., профессор
______________ Казарин Л.С.

Выпускная квалификационная работа

Модули, замена коэффициентов и кручение

направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
профессор,
д-р ф.-м.н., доцент
______________ Тимофеева Н.В.
«16» июня 2020 г.

Студент группы ПМИ-41БО
______________ Медведев Е.А.
«16» июня 2020 г.

Ярославль 2020 г.

Реферат

Данная работа содержит 45 страниц, в работе использовано 6 источников.

В главе 1 рассматриваются основные понятия коммутативной алгебры, связанные с коммутативными кольцами и идеалами. Формулируются основные теоремы, связанные с ними, а также приводятся решения некоторых задач из главы 1 книги [2].

В главе 2 рассматривается понятие A-модуля над коммутативным ассоциативным кольцом A с единицей, формулируются элементарные теоремы, связанные с понятием A-модуля, далее рассматривается понятие точной последовательности модулей, тензорного и периодического произведений двух модулей и их свойств. Производится вычисление тензорного произведения и периодического произведения двух модулей с помощью свободной резольвенты A-модуля.

Глава 3 посвящена вычислению подмодуля кручения в тензорных произведениях вида $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right)\otimes_A J$, где $I, J \subset A$ — идеалы и $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right)\otimes_A M$, как $\widehat{A}$-модуля где M — A-модуль. а также вычисление делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$ с покомпонетным умножением.

Ключевые слова: идеал, коммутативное кольцо, кручение, модуль, периодическое произведение, тензорное произведение.

Содержание

Введение

В данной работе будут рассмотрены понятия кольца, идеала, модуля и операций над ними. Основной целью работы является изучение указанных выше понятий. В ходе работы были решены некоторые задачи и упражнения из книги [2], а так же приведены явные формулы для вычисления тензорных и периодических произведений конечно порожденных абелевых групп.

В первой главе работы будут рассмотрены кольца, идеалы и операции над ними. В этой же части приведены решения некоторых упражнений из главы 1 книги [2]. В процессе решения упражнений были изучены такие понятия как радикал идеала, частное идеалов, расширение и сужение идеалов, понятие простого спектра кольца.

Во второй главе работы рассматриваются модули над заданным кольцом и опреации над ними. Вводится классическое понятия тензорного произведения, рассматриваются его свойства и даются явные формулы для вычисления тензорных произведений в некоторых простейших случаях. Далее приводится известная конструкция периодических произведений с помощью свободных резольвент и основанное на ней явное вычисление $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$, где A и B — конечно порожденные абелевы группы.

Третья глава работы посвящена вычислению кручения в тензорных произведениях вида $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A M$, где $I \subset A$ — идеал в кольце A, M — A-модуль, $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1}) \otimes_A J$, где $J \subset A$ — идеал, вычислению делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$ с покомпонентным умножением и вычислению кручения в $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A M$, как $\widehat{A}$-модуля.

1 Кольца и идеалы

1.1 Определение кольца. Основные свойства

Дадим определение кольца:

Определение 1.1 *Коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей* A называется абелева группа A с операцией $\cdot : A \times A \to A$, которая удовлетворяет следующим свойствам для всех $x, y, z \in A$:

1. Дистрибутивность — $x \cdot (y + x) = x \cdot y + x \cdot z$;

2. Коммутативность — $x \cdot y = y \cdot x$;

3. Ассоциативность — $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

4. Существует нейтральный по умножению элемент 1.

Далее в тексте $x \cdot y$ будем записывать как xy. Под кольцом далее будем понимать коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 1.2 *Идеалом* $\mathfrak{a}$ в кольце A называется подгруппа в A, такая что $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

Определение 1.3 Пусть задано некотрое подмножество $E \subseteq A$. Будем говорить, что *идеал* $\mathfrak{a}$ *порожден множеством* E, если $\mathfrak{a}$ представляет собой множество конечных A-линейных комбинаций элементов E.

Определение 1.4 *Полем* называется кольцо, в котором $1 \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный.

Сформулируем теорему, с помощью которой можно установить, является кольцо полем или нет.

Теорема 1.1 *[2] Пусть A — ненулевое кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *A — поле;*

2. *В A нет идеалов, кроме* 0 *и* (1)*;*

3. *Любой гомоморфизм $A \to B$, где B ненулевое кольцо, инъективен.*

1.2 Простые идеалы и максимальные идеалы

Среди множества всех идеалов кольца A выделяют особые типы идеалов: простые и максимальные.

Определение 1.5 Идеал $\mathfrak{p}$ в кольце A называется *простым*, если $\mathfrak{p} \neq (1)$ и из включения $xy \in \mathfrak{p}$ следует, что либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

Определение 1.6 Идеал $\mathfrak{m}$ в кольце A называется *максимальным*, если $\mathfrak{m} \neq (1)$ и не существует идеала $\mathfrak{a}$, удовлетворяющего условиям $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq (1)$.

Данные выше определения можно сформулировать иначе:

$$\mathfrak{p} \text{ — простой} \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ — область целостности.}$$

Действительно, из определения простого идеала следует, что $\overline{xy} = \overline{0}$ только в том случае, когда $x \in \mathfrak{p}$ или $y \in \mathfrak{p}$, где x, y — представители классов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно.

С другой стороны, так как $A/\mathfrak{p}$ область целостности, значит из равенства $\overline{xy} = \overline{0}$ следует что либо $\overline{x} = \overline{0}$, либо $\overline{y} = \overline{0}$, то есть либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{m} \text{ — максимальный} \Leftrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ — поле.}$$

Так как все идеалы, содержащие $\mathfrak{m}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с идеалами в $A/\mathfrak{m}$ [2], то сразу получаем что $A/\mathfrak{m}$ — поле, так как $\mathfrak{m}$ максимальный.

Так как $A/\mathfrak{m}$ — поле, следовательно оно не содержит идеалов кроме $\overline{0}$ и $(\overline{1})$, следовательно, идеал $\mathfrak{m}$ не содержат никакие другие идеалы, кроме (1), по определению $\mathfrak{m}$ максимален.

Так как любое поле является областью целостности, следовательно любой максимальный идеал прост.

Сформулируем важную теорему:

Теорема 1.2 *[2] В каждом кольце $A \neq 0$ существует максимальный идеал.*

Из доказательства теоремы, приведенного в [2] следует справедливость следующих утверждений:

Следствие 1.3 *[2] Всякий идеал $\mathfrak{a} \neq (1)$ содержится в некотором максимальном идеале.*

Следствие 1.4 *[2] Любой элемент из A, не являющийся обратимым элементом содержится в некотором максимальном идеале.*

Выделяют особый вид колец в которых существует только один максимальный идеал. Такие кольца называют *локальными*.

Теорема 1.5 *[2]*

1. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m} \neq (1)$ — такой идеал в A, что любой элемент $x \in A \backslash \mathfrak{m}$ обратим. Тогда A — локальное кольцо, а $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.*

2. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и пусть любой элемент из $1 + \mathfrak{m}$ обратим в A. Тогда A — локальное кольцо.*

1.3 Нильрадикал и радикал Джекобсона

Определение 1.7 Множество всех нильпотентов кольца A называется *нильрадикалом кольца A* и обозначается $\mathfrak{N}(A)$.

Теорема 1.6 *[2]*

1. *Множество $\mathfrak{N}(A)$ является идеалом. В кольце $A/\mathfrak{N}(A)$ нет ненулевых нильпотентов.*

2. *$\mathfrak{N}(A)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов в A.*

Определение 1.8 *Радикалом Джекобсона* кольца A называется пересечение всех его максимальных идеалов и обозначается $\mathfrak{R}(A)$.

Теорема 1.7 *[2] $x \in \mathfrak{R}(A) \Leftrightarrow 1 - xy$ — обратим в A для всех $y \in A$.*

1.4 Операции над идеалами

Пересечение идеалов определяется естественным образом как пересечение множеств. Пересечение любого семейства идеалов снова будет идеалом [2].

Определим операции суммы и произведения идеалов.

Определение 1.9 Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Их *суммой* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ называют множество всех сумм $x+y$, где $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно определить сумму любого семейства идеалов $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$ как множество сумм вида $\sum_{i \in I} x_i$, где $x_i \in \mathfrak{a}_i$, в которых конечное число членов отлично от нуля.

Определение 1.10 *Произведением* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *идеалов* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ называется идеал, порожденный произведениями xy, $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно аналогичным образом определить произведение любого конечного числа идеалов. В частности, можно определить степень $\mathfrak{a}^n$ идеала $\mathfrak{a}$, как идеал, порожденный всевозможными произведениями вида $x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in \mathfrak{a}$.

Справедлив ряд свойств для операций пересечения, суммы и произведения идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in A$ [2].

1. Коммутативность и ассоциативность суммы, произвдения и пересечения идеалов.
2. Дистрибутивный закон: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.
3. Модулярный закон: $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, при $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$.
4. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$.

Объединение идеалов в общем случае идеалом не является [2].

Определение 1.11 Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в A. Их *частным* называется множество

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\},$$

которое само является идеалом [2].

Определение 1.12 *Аннулятором* $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ идеала $\mathfrak{a}$ называется множество $(0 : \mathfrak{a})$, то есть множество таких элементов $x \in A$, что $x\mathfrak{a} = 0$.

Множество D всех делителей нуля можно описать как

$$D = \bigcup_{x \in A \setminus 0} \mathrm{Ann}(x),$$

где под $\mathrm{Ann}(x)$ мы понимаем аннулятор идеала (x).

Упражнение 1.1 *Доказать следующие утверждения* $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *идеалов в кольце* A.[1]

1. $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$

2. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

3. $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$

4. $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i : b) = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$

5. $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

[1] [2] Страница 18, упражнение 1.12.

Доказательство.

1. Так как $\mathfrak{a}$ – идеал и $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

2. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ справедливо, что $x\mathfrak{b} \in a \Rightarrow (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

3. Выберем произвольный $x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c})$, тогда

   $x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) \Leftrightarrow x\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

   Имеем $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$. А так как $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}\mathfrak{b})$, то получаем $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) =$
   $= ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$.

4. $\forall x \in (\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \bigcap_i \mathfrak{a}_i \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \mathfrak{a}_i \ \forall i \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \ \forall i \Leftrightarrow x \in \ \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.

5. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) \Leftrightarrow x \sum_i \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow \sum_i x\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{a} \ \forall i \Leftrightarrow x \in \ \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

■

Определение 1.13 Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. Его *радикалом* называется множество

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in A \mid \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Упражнение 1.2 *Доказать следующие утверждения для любых* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *идеалов в кольце* A.[2]

1. $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$

2. $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$

3. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$

4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

5. $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

6. $\mathfrak{p}$ *– простой* $\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}^n} = \sqrt{\mathfrak{p}}$

Доказательство.

1. $\forall x \in \mathfrak{a}$, $x^1 \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

2. Докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \subseteq \sqrt{a}$.

   $\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow \exists m > 0 : x^{nm} \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

   Из пункта 1 данного упражнения вытекает $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$.

   Таким образом $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

3. Сперва докажем что $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Учтем, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Тогда из того, что $x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, следует, что $x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Значит, $x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

   Теперь докажем, что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Leftrightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x^n \in \mathfrak{a} \wedge x^n \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \wedge x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

   Докажем что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \wedge x^n \in \mathfrak{b} \Rightarrow x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

[2] [2] Страница 19, упражнение 1.13.

4. $\mathfrak{a} = (1) \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow 1 \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = (1)$.

5. Докажем $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Из $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ следует $x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$.

   Теперь докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}$. Значит найдутся такие $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ и $z \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ такие что $x^n = y + z$.

   Заметим, что $\exists m > 0 : y^m \in \mathfrak{a}$ и $\exists l > 0 : z^l \in \mathfrak{b}$.

   Тогда $x^{n(m+l-1)} = \sum_{s=0}^{n(m+l-1)} C^s_{n(m+l-1)} y^s z^r$, где $s + r = n(m + l - 1)$. Отсюда $x^{n(m+l-1)} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$.

6. Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}^n$. Заметим $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}$. Отсюда $x^m \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}}$.

   Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

   Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{p}} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}$. Отсюда $x \in \mathfrak{p} \Rightarrow x^n \in \mathfrak{p}^n \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

■

Теорема 1.8 *[2] Радикал идеала $\mathfrak{a}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.*

Доказательство. Рассмотрим факторкольцо $A/\mathfrak{a}$. Все x, такие что $x^n \in \mathfrak{a}$ будут содржаться в нильрадикале $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})$ кольца $A/\mathfrak{a}$. Так как нильрадикал совпадает с пересечением всех простых идеалов $\overline{\mathfrak{p}}$ в кольце $A/\mathfrak{a}$ и имеется взаимнооднозначное соответствие между идеалами в $A/\mathfrak{a}$ и идеалами, содержащими $\mathfrak{a}$, то получаем что $\sqrt{\mathfrak{a}}$ совпадает с пересеением всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$. ■

1.5 Расширение и сужение идеалов

Пусть $f : A \to B$ — некоторый гомоморфизм колец. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в A, то его образ $f(\mathfrak{a})$ не обязательно будет идеалом.

Определение 1.14 *Расширением* идеала $\mathfrak{a}$ кольца A называется идеал, порожденный множеством $f(\mathfrak{a})$, то есть идеал $Bf(\mathfrak{a})$. Обозначается как $\mathfrak{a}^e$.

Расширение идеала $\mathfrak{a}$ совпадает с множеством всевозможных конечных сумм вида $\sum_i y_i f(x_i)$, где $x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in B$.

Определение 1.15 *Сужением* идеала $\mathfrak{b}$ кольца B называется его прообраз $f^{-1}(\mathfrak{b})$ и обозначается $\mathfrak{b}^c$.

Теорема 1.9 *[2] Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ идеал в кольцах A и B соответственно, $f : A \to B$ — гомоморфизм колец. Тогда*

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$.

2. $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$.

3. *Пусть C — множество идеалов в A, являющихся сужениями, а E — множество идеалов в B, являющихся расширениями. Тогда*

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ce} = \mathfrak{a}\}, \qquad E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$$

и $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ — биективное отображение C на E, обратное к которому имеет вид $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$.

Упражнение 1.3 *Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$ – идеалы в кольце A, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ идеалы в кольце B и $f : A \to B$ гомоморфизм колец. Доказать следующие утверждения.*[3]

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$
2. $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$
3. $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$
4. $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$
5. $(\sqrt{\mathfrak{a}})^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}$
6. $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$
7. $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$
8. $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$
9. $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$
10. $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}$

Доказательство.

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1) + Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$.
2. $x \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \Rightarrow Bf(x) \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e \Rightarrow (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e$.
3. $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1)Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$.
4. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e = \{Bf(x) \mid \mathfrak{a}_2 x \subseteq \mathfrak{a}_2\}$.
   Следовательно, $\exists x_0 \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)$ такой что $y \in Bf(x_0)$. Заметим, $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq Bf(\mathfrak{a}_2)Bf(x_0) = Bf(\mathfrak{a}_2 x_0)$.
   Так как $\mathfrak{a}_2 x_0 \subseteq \mathfrak{a}_2$, значит $Bf(\mathfrak{a}_2 x_0) \subseteq Bf(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1^e$. Из $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq \mathfrak{a}_1^e$ следует $y \in (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$.
5. Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{a}})^e \Rightarrow y \in Bf(x_0)$ для некоторого $x_0^n \in \mathfrak{a}$. Заметим $y^n \in B^n(f(x_0)^n) = Bf(x_0^n) \subseteq Bf(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e$. Отсюда $y \in \sqrt{\mathfrak{a}^e}$.
6. $\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c \subseteq ((\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c)^e)^c = (\mathfrak{b}_1^{ce} + \mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c$.
7. Выберем произвольный $x \in (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, что равносильно

   $$f(x) \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow f(x) \in \mathfrak{b}_1 \land f(x) \in \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \land x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_2).$$

   Отсюда $x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.

[3] [2] Страница 21, упражнение 1.18.

8. $\mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c)^{ec} = (\mathfrak{b}_1^{ce}\mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c$.

9. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c$. Это значит что $y \in f^{-1}(x_0)$, где $x_0\mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}_1$. Заметим, что
$$f^{-1}(\mathfrak{b}_2)y \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2)f^{-1}(x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_1).$$
Отсюда $y \in (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$.

10. Докажем, что $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.
Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{b}})^c = f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})$. Это равносильно тому, что
$$\exists n > 0 : y \in f^{-1}(x_0), \text{где } x_0^n \in \mathfrak{b}.$$
Отсюда
$$y^n \in f^{-1}(x_0^n) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}) \Rightarrow y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}.$$
Докажем $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.
Выберем произвольный $y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}$. Из этого следует $\exists n > 0$ такое, что $y^n \in \mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b})$. Тогда имеем
$$f(y^n) = (f(y))^n \in \mathfrak{b} \Rightarrow f(y) \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow y \in f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}}) = (\sqrt{\mathfrak{b}})^c.$$

■

1.6 Решения упражнений в конце главы

Теперь рассмотрим некоторые упражнения после главы.

Упражнение 1.4 *Доказать, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Leftrightarrow 1 + x \in U(A)$, где $x \in A$, A — кольцо; $\mathfrak{N}(A), U(A)$ — множество нильпотентов и обратимых элементов кольца A соответственно.* [4]

Доказательство.
Докажем, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Rightarrow 1 + x \in U(A)$. Пусть n — такое число, что $x^n = 0$. Тогда
$$1 - (-x)^n = 1 = (1 - (-x))(1 + (-x) + \cdots + (-x)^{n-1}).$$
Обозначим $S = 1 + (-x) + \cdots + (-x)^{n-1}$. Имеем
$$1 = (1 + x)S \Rightarrow 1 + x \in U(A).$$

Теперь докажем более общее утверждение:
$$x \in \mathfrak{N}(A), u_0 \in U(A) \Rightarrow u_0 + x \in U(A).$$
Умножим $u_0 + x$ на u_0^{-1}:
$$u_0^{-1}(u_0 + x) = 1 + u_0^{-1}x = 1 + y, \text{где } y := u_0^{-1}x.$$

[4][2] Страница 21, упражнение 1

Заметим
$$1 = (1+y)(1+(-y)+(-y)^2+\cdots+(-y)^{n-1}),$$
обозначим $S = 1+(-y)+(-y)^2+\cdots+(-y)^{n-1}$ и умножим на u_0. Имеем
$$u_0 = (u_0+x)S \Rightarrow u_0+x \in U(A).$$
Теперь, полагая $u_0 = 1$, получаем требуемое доказательство. ■

Упражнение 1.5 *Пусть A — некоторое кольцо, а $A[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из A. Пусть*
$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x].$$
Доказать следующие утверждения: [5]

1. *f — обратимый элемент в $A[x] \Leftrightarrow a_0$ — обратимый элемент в A, а $a_1,\ldots,a_n$ — нильпотенты.*
2. *f — нильпотент $\Leftrightarrow a_0,\ldots,a_n$ — нильпотенты.*
3. *f — делитель нуля $\Leftrightarrow$ существует ненулевой элемент $a \in A$ такой, что $af = 0$.*
4. *Многочлен f называется примитивным, если $(a_0,\ldots,a_n) = 1$. Пусть $f, g \in A[x]$. Показать, что примититвность fg равносильна примитивности f и g.*

Докажем 1.
Доказательство.
$\Leftarrow$: Заметим, если $a \in A$ — нильпотент, то и $ax^k \in A[x]$ тоже нильпотент. Так же отметим, если $a \in A$ — обратим, то и $a \in A[x]$ обратим как многочлен нулевой степени. Воспользуемся результатом упражнения 1.4. Так как a_0 — обратим, а $\sum_{k=1}^{n} a_kx^k$ — нильпотент (множество всех нильпотентов кольца является идеалом [2]), то получаем, что f — обратим как сумма обратимого элемента и нильпотента.
$\Rightarrow$: Докажем следующее

Утверждение 1.1 *Пусть $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ — обратный к f многочлен, тогда $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты произведения fg. Коэффициент при x^k обозначим как $[x^k]$:
$$\begin{aligned}
[x^{n+m}] &= a_nb_m = 0\\
[x^{n+m-1}] &= a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0\\
[x^{n+m-2}] &= a_{n-2}b_m + a_{n-1}b_{m-1} + a_nb_{m-2} = 0\\
&\vdots\\
[x^2] &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0\\
[x^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0\\
[x^0] &= a_0b_0 = 1.
\end{aligned}$$

[5] [2] Страница 21, упражнение 2.

i-ую сверху строчку умножим на a_n^i. Получим:

$$\begin{aligned}
[x^{n+m}] &= a_n b_m = 0\\
[x^{n+m-1}]a_n &= a_{n-1}b_m a_n + a_n^2 b_{m-1} = 0\\
[x^{n+m-2}]a_n^2 &= a_{n-2}b_m a_n^2 + a_{n-1}b_{m-1}a_n^2 + a_n^3 b_{m-2} = 0\\
&\vdots\\
[x^2]a_n^{n+m-2} &= a_0 b_2 a_n^{n+m-2} + a_1 b_1 a_n^{n+m-2} + a_2 b_0 a_n^{n+m-2} = 0\\
[x^1]a_n^{n+m-1} &= a_0 b_1 a_n^{n+m-1} + a_1 b_0 a_n^{n+m-1} = 0\\
[x^0]a_n^{n+m} &= a_0 b_0 a_n^{n+m} = 1.
\end{aligned}$$

Из первой строчки $a_n b_m = 0$. Подставляя это во вторую, получаем, что $a_n^2 b_{m-1} = 0$. Подставляя эти оба равенства в третью, получаем, что $a_n^3 b_{m-2} = 0$ и так далее, по индукции, получаем что $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. ■

Воспользуемся доказанным утверждением при $r = m$: $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Так как b_0 обратим, получаем что $a_n^{m+1} = 0$, следовательно a_n — нильпотент.

Обозначим $\tilde{f} = f - a_n x^n$. Так как f — обратимый элемент, а $a_n x^n$ — нильпотент, то $\tilde{f}$ тоже будет обратим. Теперь, повторяя аналогичное доказательство для $\tilde{f}$, получим, что a_{n-1} — нильпотент, и так до тех пор, пока $\deg f > 0$. При $\deg f = 0$ имеем $f = a_0$, откуда сразу получаем что a_0 — обратимый элемент. ■

Докажем 2.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Так как $a_k \in A$ — нильпотенты для всех $k = \overline{0,n}$, то и $a_k x^k \in A[x]$ тоже будут нильпотентами, следовательно, и их сумма $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ будет нильпотентом.

$\Rightarrow$: Так как f — нильпотент, следовательно, существует такое $n_0 > 0$, что $f^{n_0} = 0$:

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots)\dots(a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0.$$

Отсюда получаем, что $a_0^{n_0} = 0$, значит a_0 — нильпотент. Обозначим $\tilde{f} = f - a_0$. Так как $f, a_0 \in A[x]$ нильпотенты, следовательно, и $\tilde{f}$ тоже будет нильпотентом. Проведем для $\tilde{f}$ аналогичные действия, по индукции получим, что a_k — нильпотенты для всех $k = \overline{0,n}$. ■

Докажем 3.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Будем смотреть на a как на элемент кольца $A[x]$. Отсюда сразу получаем, что f — нильпотент.

$\Rightarrow$: Среди всех многочленов g таких, что $fg = 0$, выберем многочлен минимальной степени. Пусть это $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$.

Докажем следующее

Утверждение 1.2 $a_{n-r}g = 0$ *при всех* $r = \overline{0,n}$.

Доказательство. Проведем индукцию по r.

$r = 0$: $a_n g = 0$, в противном случае степень m не была бы наименьшей и $a_n g f = 0$.

Пусть при $r = k$ утверждение было доказано. Докажем его при $r = k+1$. Обозначим

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=0}^{k} a_{n-i} x^{n-i}.$$

Умножим $\tilde{f}$ на g:

$$\tilde{f}g = fg - \sum_{i=0}^{k} a_{n-i} g x^{n-i} = 0,$$

так как $fg = 0$ и при всех $i = \overline{0,k}$ $a_{n-i}g = 0$. Рассмотрим коэффициенты в произведении $\tilde{f}g$:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= a_0 b_0 = 0 \\
[x^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\
&\vdots \\
[x^{n-k-1}] &= a_{n-k-1} b_0 = 0.
\end{aligned}$$

Откуда получаем, что $a_{n-k-1}g = 0$, иначе степень m не была бы наименьшей и $a_{n-k-1}gf = 0$. ■

Для всех $i = \overline{0,n}$ имеем $a_i g = 0$, откуда следует $a_i b_m = 0$, следовательно, $b_m f = 0$. Искомый a положим равным b_m. ■

Докажем 4.

Доказательство. Пусть

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

$\Rightarrow$: Предположим, что fg примитивен, но f не является примитивным, то есть $\exists d \neq 1, 0$ такой, что $d \mid a_i$ при всех $i = \overline{0,n}$. Рассмотрим коэффициенты произведения fg:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= c_0 = a_0 b_0 \\
[x^1] &= c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
&\vdots \\
[x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} \\
[x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_n b_m.
\end{aligned}$$

Так как d делит все a_i, следовательно, d будет делить все c_j, следовательно, многочлен fg уже не будет примитивным. Значит предположение было неверно и f является примитивным. Аналогично доказывается примитивность g.

$\Leftarrow$: Предположим, что f, g примитивны, а fg не является примитивным. Пусть fg имеет следующий вид

$$fg = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j.$$

Многочлен fg не примитивен, значит $\exists \mathfrak{p}$ — простой идеал, такой что $c_j \in \mathfrak{p}$ для всех $j = \overline{0, n+m}$.

$$\begin{aligned}
[x^0] &= c_0 = a_0 b_0 \in \mathfrak{p} \\
[x^1] &= c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \in \mathfrak{p} \\
&\vdots \\
[x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} \in \mathfrak{p} \\
[x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_n b_m \in \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

Так как f, g — примитивны, значит не все a_i и не все b_j не принадлежат $\mathfrak{p}$. Предположим, что найдутся такие a_i и b_j, что $a_i b_j \notin \mathfrak{p}$, причем все a_s при $s < i$ и все b_t при $t < j$ принадлежат $\mathfrak{p}$, но

$$c_{i+j} = \cdots + a_i b_j + \cdots \in \mathfrak{p},$$

следовательно, либо $a_i \in \mathfrak{p}$, либо $b_j \in \mathfrak{p}$. Таким образом, получили противоречие, значит либо f, либо g — не является примитивным. ■

Упражнение 1.6 *Доказать, что в кольце $A[x]$ радикал Джекобсона совпадает с нильрадикалом.*[6]

Доказательство.

Докажем $\mathfrak{N}(A[x]) \subseteq \mathfrak{R}(A[x])$.

Выберем произвольные $f, g \in \mathfrak{N}(A[x])$. Так как нильрадикал является идеалом, следовательно $fg \in \mathfrak{N}(A[x])$. Из упражнения 1.4 следует, что $1 - fg \in U(A[x])$, значит, из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{R}(A[x])$.

Докажем $\mathfrak{R}(A[x]) \subseteq \mathfrak{N}(A[x])$

Выберем произвольный $f \in \mathfrak{R}(A[x])$. Из предлжения 1.9[2] следует, что для всех $g \in A[x]$ выполнено $1 - fg \in U(A[x])$. Положим $g = x$. То есть $1 - xf \in U(A[x])$. Пусть многочлен f имеет следующий вид:

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

тогда $1 - xf$ будет иметь вид:

$$1 - xf = 1 - (a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}).$$

Воспользовавшись упражнением 1.4 получаем, что $a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$ — нильпотент. Из упражнения 1.5 пункта 2 вытекает, что $a_i \in \mathfrak{N}(A[x])$ для $i = \overline{1, n}$. Снова воспользовавшись результатом упражнения 1.5 пункт 2 получаем, что f — нильпотент, то есть $f \in \mathfrak{N}(A[x])$. Таким образом $\mathfrak{N}(A[x]) = \mathfrak{R}(A[x])$. ■

Упражнение 1.7 *Пусть A — некоторое кольцо, $A[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

с коэффициентами в A. Доказать следующие утверждения: [7]

1. *f — обратимый элемент в $A[[x]] \Leftrightarrow a_0$ — обратимый элемент в A.*
2. *Если $f \in \mathfrak{N}(A[[x]]) \Rightarrow a_n \in \mathfrak{N}(A)$ при всех $n \geqslant 0$.*
3. *$f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \Leftrightarrow a_0 \in \mathfrak{R}(A)$*

Докажем 1.

Доказательство.

[6][2] Страница 21, упражнение 4.

[7][2] Страница 21, упражнение 5.

$\Rightarrow$: Так как $f \in U(A[[x]])$, значит, существует элемент $g \in A[[x]]$ такой, что $fg = 1$. Выпишем несколько первых коэффициентов произведения:

$$\begin{aligned}
&[x^0] = a_0 b_0 = 1\\
&[x^1] = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0\\
&[x^2] = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0\\
&\quad\vdots\\
&[x^m] = \sum_{i+j=m} a_i b_j\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Из $a_0 b_0 = 1$ сразу следует, что $a_0 \in U(A)$.

$\Leftarrow$: Пусть $a_0 \in U(A)$. Построим формальный степенной ряд g такой, что $fg = 1$. Пусть g имеет вид

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Рассмотрим коэффициенты произведения fg:

$$\begin{aligned}
&[x^0] = a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1}\\
&[x^1] = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0)\\
&[x^2] = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0)\\
&\quad\vdots\\
&[x^m] = \sum_{i+j=m} a_i b_j = 0 \Rightarrow b_m = a_0^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{m} a_i b_{m-i}\right)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого m за конечное число шагов мы сможем получить коэффициент b_m формального степенного ряда g. $\blacksquare$

Докажем 2.

Доказательство.

Проведем доказательство, аналогичное доказательству упражнения 1.5 пункт 2. Так как f — нильпотент, следовательно найдется такое натуральное число n_0, что $f^{n_0} = 0$. Имеем

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots)\dots(a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0,$$

откуда следует $a_0^{n_0} = 0$. Выполним замену $\tilde{f} = f - a_0$. Тогда $\tilde{f}$ снова будет нильпотентом, значит, найдется целое $n_1 > 0 : \tilde{f}^{n_1} = 0$. Имеем

$$\tilde{f}^{n_1} = \underbrace{(a_1 x + \dots)(a_1 x + \dots)\dots(a_1 x + \dots)}_{n_1 \text{ скобок}} = (a_1 x)^{n_1} + \dots = 0,$$

откуда получаем $a_1^{n_1} = 0$, и сделаем замени $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f} - a_1 x$. Для $\tilde{\tilde{f}}$ снова проведем аналогичные рассуждения. Таким образом, за конечное число шагов, получим последовательно a_0 — нильпотент, a_1 — нильпотент, и так далее. $\blacksquare$

Докажем 3.

Доказательство.

Из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \Leftrightarrow 1 - fg \in U(A[[x]])$ при всех $g \in A[[x]]$. Пусть f и g имеют следующий вид:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Тогда условие $1 - fg \in U(A[[x]])$ запишется следующим образом:

$$1 - fg = (1 - a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \in U(A[[x]]). \quad (1)$$

Воспользовавшись пунктом 1 данного упражнения получим $1 - a_0 b_0 \in U(A)$. Так как g выбирался произвольно, следовательно b_0 — произвольный элемент кольца A. Откуда вытекает, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$.

С другой стороны, из того, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$, следует, что при всех b_0 будет выполнено $1 - a_0 b_0 \in U(A)$, значит ряд (1) будет обратимым при всех b_n, $n \geqslant 0$, то есть при любых $g \in A[[x]]$. Отсюда, по теореме 1.7, получаем, что $f \in \mathfrak{R}(A[[x]])$. ■

Упражнение 1.8 *Пусть A — некоторое кольцо, X — множество всех его простых идеалов. Для вского подмножества $E \subset A$ обозначим $V(E)$ множество всех простых идеалов, содержащих E. Доказать следующие утверждения:* [8]

1. *Если $\mathfrak{a}$ — идеал, порожденный E, то $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.*
2. *$V(0) = X$, $V(1) = \varnothing$.*
3. *Пусть $(E_i)_{i \in I}$ — любое семейство подмножеств A. Тогда*

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$

4. *$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ для любых идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ в A.*

Докажем 1.

Доказательство.

1. Доказательство $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

   То, что $\mathfrak{a}$ порожден множеством E, означает, что $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum_i a_i x_i \;\middle|\; a_i \in A, x_i \in E \right\},$$

   причем все суммы конечные.

   Покажем $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$,

   Выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(E)$. Для всех $x \in E$ будет выполнено $x \in \mathfrak{p}$, следовательно, любая A-линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ принадлежит $\mathfrak{p}$, где $a_i \in A$, $x_i \in E$, откуда получаем $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

[8] [2] Страница 22, упражнение 15.

Покажем $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$.

Выберем произвольный $x \in E$. Очевидно $x \in \mathfrak{a}$. Так как для всех $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $E \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \in V(E)$.

2. Доказательство $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ — произвольный элемент $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Это означает, что существует $n > 0$ такое, что $x^n \in \mathfrak{a}$. Теперь выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. По определению, выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Значит $x^n \in \mathfrak{p}$, а следовательно и $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Таким образом, доказано, что $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

Так как $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, то для всех $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ будет выполнено

$$\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p},$$

значит, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\mathfrak{a})$.

■

Докажем 2.

Доказательство.

Так как $\forall \mathfrak{p} \in X$ справедливо $0 \in \mathfrak{p}$, следовательно $V(0) = X$.

Так как $A = (1)$ и не существует такого простого идеала $\mathfrak{p}$, что выполнено $(1) \subset \mathfrak{p}$, то $V(1) = \varnothing$. ■

Докажем 3.

Доказательство.

Покажем что $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$. По определению $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$, что равносильно $E_i \subseteq \mathfrak{p}$ для всех $i \in I$, откуда следует $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Для доказательства $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$ достаточно провести предыдущее рассуждение в обратном порядке. ■

Докажем 4.

Доказательство.

Воспользовавшись свойствами радикалов сразу получаем

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V\left(\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}\right) = V\left(\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Осталось доказать равенство $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. По определению $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Это означает, что $\forall x \in \mathfrak{a}$, $\forall y \in \mathfrak{b}$ справедливо $xy \in \mathfrak{p}$. Пусть существует некоторый $x_0 \in \mathfrak{a}$ и $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Однако при всех $y \in \mathfrak{b}$ $x_0 y \in \mathfrak{p}$. Из определения простого идеала получаем $y \in \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, или, иными словами, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Пусть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ и, для определенности, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, тогда $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно и $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. ■

Таким образом, множества $V(E)$ удовлетворяют аксиомам замкнутых множеств в топологическом пространстве. Такая топология на X называется топологией Зарисского, а само пространство X называается *простым спектром кольца* и обозначается как $\mathrm{Spec}(A)$.

Упражнение 1.9 *Для вского элемнта $f \in A$ обозначим через X_f дополнение к $V(f)$ в $X = \mathrm{Spec}(A)$. Множества X_f открыты. Доказать что они образуют базу в топологии Зарисского и обладают следующими свойствами:* [9]

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
2. $X_f = \varnothing \Leftrightarrow f$ — *нильпотент.*
3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ — *обратимый элемент.*
4. $X_f = X_g \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
5. X — *квазикомпактно (т.е. у всякого открытого покрытия X есть конечное подпокрытие).*
6. *Более общо, X_f — квазикомпактны.*
7. *Открытое подмножество в X квазикомпактно тогда и только тогда, когда оно является конечным объединением множеств вида X_f.*

Здесь под $\overline{Q}$, где $Q \subset X$ будем понимать дополнение к множеству Q.

Определение 1.16 Семейство множеств B называется *Базой* топологии, если любое открытое множество из топологического пространства X представимо в виде объединения элементов из B.

Докажем что X_f образуют базу в топологии Зарисского.

Доказательство. Выберем произвольное множество $E \subset A$. Ему будет соответствовать некоторое открытое множество $\overline{V(E)} = Y$. Тогда

$$Y = \overline{V\left(\bigcup_{f \in E} \{f\}\right)} = \overline{\bigcap_{f \in E} V(f)} = \bigcup_{f \in E} \overline{V(f)} = \bigcup_{f \in E} X_f.$$

■

Докажем 1.

Доказательство. Воспользуемся свойствами замкнутых множеств в топологии Зарисского из упражнения 1.8.

$$X_f \cap X_g = \overline{V(f)} \cap \overline{V(g)} = \overline{V(f) \cup V(g)} = \overline{V(fg)} = X_{fg}.$$

■

Докажем 2.

Доказательство. $X_f = \varnothing \Leftrightarrow V(f) = X$, то есть для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ выполнено $f \in \mathfrak{p}$ или, другими словами,

$$f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ — прост}} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}(A),$$

то есть f — нильпотент. ■

Докажем 3.

Доказательство.

$X_f = X \Leftrightarrow V(f) = \varnothing$, то есть f не принадлежит ни одному простому идеалу, в том числе ни одному максимальному, значит f обратим.

[9] [2] Страница 23, упражнение 17

С другой стороны, если бы f не был обратим, то он содержался бы в некотором максимальном идеале $\mathfrak{m}$, а значит $V(f) \neq \varnothing$. ∎

Докажем 4.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Если $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$, то и $V(f) = V(g)$ (из свойств замкнутых множеств, упражнение 1.8). Откуда сразу получаем $X_f = X_g$.

$\Rightarrow$: По определению $V(g) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} - \text{прост в } A \wedge (g) \subseteq \mathfrak{p}\}$. Так как $X_f = X_g$, то и $V(\sqrt{(f)}) = V(\sqrt{(g)})$. Тогда по свойствам замкнутых множеств (упражнение 1.8) имеем:

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_{\mathfrak{p}:(f)\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V\left(\sqrt{(f)}\right)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V\left(\sqrt{(g)}\right)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}:(g)\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}.$$

∎

Докажем 5.

Доказательство. Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно рассматривать покрытия главными открытыми множествами X_{f_i}, где $i \in I$. Так как $X = \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$, то

$$\varnothing = \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V\left(\bigcup_{i\in I}\{f_i\}\right) = V(\langle f_i\rangle_{i\in I}),$$

где выражение $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ означает A-линейную оболочку множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Откуда получаем, что A-линейная оболочка $\langle f_i\rangle_{i\in I} = (1)$, то есть существует такое конечное множество J, что

$$\sum_{j\in J} g_j f_j = 1, \text{ где } g_j \in A.$$

Следовательно, A-линейная оболочка элементов f_j, $j \in J$ совпадает с кольцом A. Тогда

$$\varnothing = V(\langle f_j\rangle) = \bigcap_{j\in J} V(f_j),$$

из чего следует

$$X = \bigcup_{j\in J} X_{f_j}.$$

∎

Докажем 6.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое покрытие главными открытыми множествами: $X_f \subset \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$. Перейдем к дополнениям:

$$V(f) \supset \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V(\langle f_i\rangle_{i\in I}).$$

Аналогично пункту 4 можно показать, что

$$V(f) \supset V(\langle f_i\rangle_{i\in I}) \Rightarrow \sqrt{(f)} \subset \sqrt{\langle f_i\rangle_{i\in I}}.$$

Откуда

$$\exists k > 0 : f^k = \sum_{j=1}^{n} f_j g_j, \text{ где } g_j \in A.$$

Иначе говоря, $f^k \in \langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}$. Так как, $V(f^k) = V(f)$ имеем:

$$V(f) \supset V(\langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}) = \bigcap_{j=1}^{n} V(f_j),$$

переходя к дополнениям, получаем

$$X_f \subset \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_j}.$$

■

Докажем 7.

Доказательство. Пусть Y — открытое множество.

$\Leftarrow$: Пусть $Y = \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Следовательно, при всех j имеют место включения $X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Так как X_{f_j} квазикомпактно, то найдутся такие i_k и n_j, что

$$X_{f_j} \subset \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}. \tag{2}$$

Теперь, объединяя выражения вида (2) по $j = \overline{1,n}$, получаем:

$$Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}.$$

Таким образом, множество Y — квазикомпактно.

$\Rightarrow$: Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно предстваить Y в виде $Y = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$. Так как Y — квазикомпактно, значит среди X_{f_i} можно выделить конечный набор подмножеств $X_{f_{i_j}}$ такой, что $Y = \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_{i_j}}$. ■

2 Модули

2.1 Определение модуля

Пусть A — некоторое кольцо, а M — некотороая абелева группа.

Определение 2.1 *Модулем над кольцом* A называется пара (M, μ), состоящая из абелевой группы M и отображения $\mu : A \times M \to M$ (действия кольца A на группе M), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mu(a, x + y) = \mu(a, x) + \mu(a, y)$,
2. $\mu(a + b, x) = \mu(a, x) + \mu(b, x)$,
3. $\mu(ab, x) = \mu(a, \mu(b, x))$,
4. $\mu(1, x) = x$.

Где $a, b \in A$, $x, y \in M$.

Далее $\mu(a, x)$ будем записывать как ax.

В случае, когда кольцо A является полем, A-модулями будут векторные пространства над полем A.

Отметим также, что любой идеал кольца A, в частности само кольцо A, является A-модулем. Поэтому к идеалам применимы все теоремы, которые формулируются для модулей.

Как в случае векторных пространств над полем k выделают подпространства и факторпространства, в случае A-модулей можно выделять подмодули и фактормодули.

Определение 2.2 *Подмодулем* $M' \subset M$ называется всякая подгруппа M' группы M, замкнутая относительно действия кольца. Иными словами, M' — подмодуль M, если он включается следующую в коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} A \times M' \arrow[r, hook, "1\times i"] \arrow[d, "\mu|_{M'}"] & A \times M \arrow[d, "\mu"] \\ M' \arrow[r, hook, "i"] & M \end{tikzcd}$$

При этом действие $\mu|_{M'}$ получается как ограничение отображения μ на подмножество $A \times M'$.

Определение 2.3 *Фактормодулем* M/M' A-модуля M по подмодулю M' называет факторгруппа M/M' на которой действие μ' кольца A определено следующим образом:

$$\mu' : (a, x + M') \mapsto ax + M'.$$

2.2 Гоморфизмы модулей

Определение 2.4 *Гомоморфизмом* $f : M \to N$ A-модулей N и M будем называть гомоморфизм абелевых групп M и N, который коммутирует с действием μ кольца на группе.

Таким образом, гоморфизм f абелевых групп является гомоморфизмом модулей, если он делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "1\times f"] \arrow[d, "\mu_M"] & A \times N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Где μ_M, μ_N — действия кольца A на M и N, наделяющие эти группы структурами A-модулей.

Если M, N — векторные пространства над полем k, то гомоморфизмы k-модулей называются линейными отображениями.

Определение 2.5 *Изоморфизмом* A-модулей называется такой гомоморфизм, который является биективным отображением модулей как множеств.

Аналогично ядру, образу и коядру линейных отображений векторных пространств выделяют аналогичные подгруппы, связанные с гомоморфизмами A-модулей.

Определение 2.6 Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм A-модулей M и N.

1. Ядром гомоморфизма f называется подгруппа $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\} < M$,
2. Образом гомоморфизма f называется подгруппа $\mathrm{im}\, f = f(M) < N$,
3. Коядром гомоморфизма f называется $\mathrm{coker}\, f = N/\mathrm{im}\, f$.

При этом ядро, образ и коядро наделены структурой A-модуля.

Для модулей, как и для векторных пространств, справедливы три теоремы об изоморфизме.

Теорема 2.1 (Первая теорема об изоморфизме) *[2] Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм A-модулей. Тогда*

$$\mathrm{im}\, f \simeq M/\ker f.$$

Теорема 2.2 (Вторая теорема об изоморфизме) *[2] Пусть M_1, M_2 — подмодули в M. Тогда*

$$(M_1 + M_2)/M_2 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Теорема 2.3 (Третья теорема об изоморфизме) *[2] Пусть $L \supseteq M \supseteq N$ — некоторые A-модули. Тогда*

$$(L/N)/(M/N) \simeq L/M.$$

2.3 Операции над модулями

Аналогично операциям произведения и частного идеалов можно ввести операцию умножения идеала на модуль и частного двух модулей. В общем случае произведение двух модулей ввести невозможно [2].

Определение 2.7 Пусть M — A-модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Тогда *произведением* $\mathfrak{a}M$ назовем множество конечных сумм вида

$$\sum_i a_i x_i, \text{где } a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M.$$

Произведение идеала на модуль M является подмодулем в M [2].

Определение 2.8 *Частным* $(N : P)$ двух A-модулей N и P называется множество

$$(N : P) = \{a \in A \mid aP \subseteq N\}.$$

Частное двух модулей является идеалом в A.

Определение 2.9 *Аннулятором* $\mathrm{Ann}(M)$ A-модуля M называется частное $(0 : M)$.

Упражнение 2.1 *Пусть N, M — A-модули. Доказать следующие утверждения:*[10]

1. $\mathrm{Ann}(M + N) = \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(M)$.
2. $(N : M) = \mathrm{Ann}((N + M)/N)$.

Докажем 1.

Доказательство.

Выберем произвольный $x \in \mathrm{Ann}(M + N)$. По определению, $x(M + N) = 0$, следовательно $xN + xM = 0$. Так как $xN \cup xM \subseteq xN + xM = 0$, значит $xN = xM = 0$, то есть $x \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

Пусть теперь $x \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$ это значит что $xM = xN = 0$, откуда $x(M + N) = 0$, следовательно $x \in \mathrm{Ann}(M + N)$. ∎

Докажем 2.

Доказательство.

Пусть $x \in \mathrm{Ann}((N + M)/N)$. По определению

$$x((N + M)/N) = \overline{0},$$

что равносильно $x(y + N) \subseteq N$ при всех $y = m + n$, где $m \in M, n \in N$. Подставим выражение для y.

$$x(m + n + N) \subseteq N \Leftrightarrow xm + N \subseteq N, \text{при всех } m \in M.$$

Откуда получаем, что $xM \subseteq N$, по определению $x \in (N : M)$. ∎

Определение 2.10 Пусть M, N — A-модули. Их *прямой суммой* $M \oplus N$ называется множество всех пар (x, y), где $x \in M, y \in N$, на которых введены операции следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Данное определение прямой суммы двух A-модулей легко обобщить на прямую сумму произвольного семейства A-модулей:

Определение 2.11 *Прямой суммой семейства A-модулей* $\{M_i\}_{i\in I}$ назовем множество

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid (x_i)_{i\in I} \text{— финитная последовательность и } x_i \in M_i\},$$

с покомпонентным сложением и действием кольца A, определеяемым следующей формулой

$$\mu : (a, \ldots, m_i, \ldots) \mapsto (\ldots, \mu_i(a, m_i), \ldots),$$

где μ_i — действие кольца A на M_i.

[10][2], Страница 30, упражнение 2.2

Если отбросить условие финитности последовательностей, то получим множество, называемое *прямым произведением*

$$\prod_{i \in I} M_i,$$

которое в случае конечного множества I совпадает с прямой суммой.

2.4 Конечно порожденные модули

Определение 2.12 A-модуль M называется свободным, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{i \in I} M_i$, где каждый M_i изоморфен A как A-модуль.

Свободный A-модуль обозначается как $A^{(I)}$.

Определение 2.13 A-модуль M порожден множеством $G \subset M$, если любой элемент $m \in M$ можно представить в виде финитной A-линейной комбинации элементо множества G. То есть для любого $m \in M$ найдутся такие $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$, что $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$.

Подмножество G называется *системой образующих* или *системой порождающих элементов* A-модуля M.

Пусть $\oplus^{|G|} A$ — свободный A-модуль. Тогда имеет место сюръективный гомоморфизм $\varphi : \oplus^{|G|} A \twoheadrightarrow M$, определенный следующей формулой.

$$(\ldots, \lambda_i, \ldots) \mapsto \sum \lambda_i g_i,$$

где последовательность (λ_i) и A-линейная комбинация $\sum \lambda_i g_i$ финитны.

Определение 2.14 A-модуль *конечно порожден*, если в нем можно выбрать конечную систему образующих G

Вновь обратимся к векторным конечномерным пространствам над полем k. Так как любое векторное пространство V размерности $n = \dim V$ изоморфно k^n, значит, по определнию, любой модуль над полем k будет являться свободным.

Сформулируем критерий для конечно порожденных модулей.

Теорема 2.4 *[2] A-модуль M конечно порожден тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому фактормодулю модуля A^n при некотором $n > 0$.*

Теорема 2.5 *[2] Пусть M — некоторый конечно порожденный A-модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, φ — такой эндоморфизм M, что $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Тогда φ удовлетворяет уравнению вида*

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

где все $a_i \in \mathfrak{a}$.

Теорема 2.6 (Лемма Накаямы) *[2] Пусть M — конечно порожденный A-модуль, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}(A)$ — идеал в A. Если $\mathfrak{a}M = M$, то $M = 0$.*

Следствие 2.7 *[2] Пусть M — конечно порожденный A-модуль, $N \subset M$ — его подмодуль, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}(A)$ — идеал. Если $M = \mathfrak{a}M + N$, то $M = N$.*

2.5 Модули и точные последовательности

Пусть имеется некоторый набор модулей $\{M_i\}$ и гомоморфизмы $f_i : M_{i-1} \to M_i$.

Определение 2.15 Последовательность вида

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \dots$$

называется точной в члене M_i, если $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$.
Определение 2.16 Последовательность A-модулей называется *точной*, если она точна в каждом члене.

В некоторых простых случаях можно сформулировать условия точности [2]:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ точна } \Leftrightarrow f \text{ инъективен;} \tag{3}$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ точна } \Leftrightarrow g \text{ сюръективен;} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ точна } \Leftrightarrow\ & f \text{ инъективен, } g \text{ сюръективен,} \\ & g \text{ индуцирует изоморфизм } \operatorname{coker} f \text{ на } M''. \end{aligned} \tag{5}$$

Определение 2.17 Последовательность вида (5) называется *короткой точной последовательностью* или *точной тройкой.*

Далее в тексте работы будут использоваться дополнительно следующие обозначения:
(a, b) — наибольший общий делитель двух чисел a и b.
$[a, b]$ — наименьшее общее кратное двух чисел a и b.

2.6 Понятие тензорного произведения модулей

Рассмотрим два модуля M и N над кольцом A. За $C = A^{(M\times N)}$ обозначим свободный A-модуль, порожденный парами $(m, n) \in M \times N$. Рассмотрим в C подмодуль D, порожденный элементами следующего вида:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y) \end{aligned} \tag{6}$$

Положим $T := C/D$ и для каждого $(x, y) \in C$ обозначим за $x \otimes y$ его образ в T при каноническом гомоморфизме A-модулей $C \to C/D$.
Определение 2.18 *Тензорным произведением* модулей M и N назовем построенный выше модуль T и обозначим

$$M \otimes_A N := T.$$

Из (6) сразу следуют некоторые свойства элементов T:

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ (ax) \otimes y = a(x \otimes y) \\ x \otimes (ay) = a(x \otimes y) \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема, носящая название универсального свойства тензорного произведения:

Теорема 2.8 *[2] Пусть M и N — A-модули, тогда существует пара (T, g), состоящая из A-модуля T и A-билинейного отображения $g : M \times N \to T$, со следующими свойствами:*

1. *Для любого A-модуля P и A-билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственное отображение $f' : T \to P$, такое, что $f = f' \circ g$.*

2. *Если (T, g) и (T', g') две пары с таким свойством, то существует изоморфизм $j : T \to T'$ для которого $g' = j \circ g$.*

2.7 Свойства тензорного произведения модулей

Для любых A-модулей M, N, P справедлив ряд свойств [2]:

$$M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M. \tag{7}$$

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A N \otimes_A P. \tag{8}$$

$$(M \oplus N) \otimes_A P \simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P). \tag{9}$$

$$M \otimes_A A \simeq M. \tag{10}$$

Больший интерес представляют свойства точности тензорного произведения.

Теорема 2.9 *[2] Пусть дана точная последовательность*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0, \tag{11}$$

а N — произвольный A-модуль, тогда последовательность

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \to 0 \tag{12}$$

(где 1 — тождественное отображение) точна.

Тензорное произведение не сохраняет точность слева. Например, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}.$$

Умножим ее тензорно на $\mathbb{Z}_2$ над $\mathbb{Z}$. Получим

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\cdot 2) \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2. \tag{13}$$

Но $\ker((\cdot 2) \otimes 1) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, так как $2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$; отсюда видим, что последовательность (13) не является точной.

2.8 Периодические произведения

2.8.1 Понятие свободной резольвенты A-модуля

Введем понятие свободной резольвенты A-модуля M.

Пусть M порожден системой образующих $\{x_j \mid j \in I\}$, то есть $M = \langle x_j \rangle_A$. Рассмотрим свободный A-модуль $F_0 \simeq \bigoplus_{i \in I} A =: A^{(I)}$ и сюръективный гомоморфизм A-модулей $\varphi_0 : F_0 \twoheadrightarrow M$. Гомоморфизм φ_0 определяется как композиция прямой суммы A-гомоморфизмов $g_i : A \to M$, где $\alpha \in A \mapsto \alpha x_i$ с гомоморфизмом суммирования $\Sigma : \oplus_{i \in I} M \to M$, где $(\dots, m_j, \dots) \mapsto \sum_{j \in I} m_j$. Важно, что при формировании прямой суммы участвуют финитные последовательности. Итак, гомоморфизм φ_0 определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j\in I} A \arrow[r, "\sum g_i"] \arrow[dr, "\varphi_0"] & \bigoplus_{j\in I} M \arrow[d, "\Sigma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Теперь охарактеризуем $\ker\varphi_0$ аналогичным образом: выберем систему образующих A-модуля $\ker\varphi_0$, свободный A-модуль F_1 и отобразим его сюръективно на $\ker\varphi_0$ с помощью A-гомоморфизма $\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow \ker\varphi_0$. Снова может случиться так, что $\ker\varphi_1$ нетривиально. Значит, рассмотрим еще один свободный A-модуль F_2 и повторим уже описанные выше действия.

Таким образом получим, возможно бесконечную, точную последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \ldots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0.$$

Уберем из этой последовательности член M:

$$M_* : \ldots \xrightarrow{\varphi'_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \ldots \xrightarrow{\varphi'_2} F_1 \xrightarrow{\varphi'_1} F_0 \xrightarrow{\varphi'_0} 0. \tag{14}$$

Где $\varphi'_i = \varphi_i$ при $i \geqslant 1$, а φ_0 — постоянное отображение. Последовательность (14) точна во всех членах кроме члена с индексом 0. Однако, она обладает следующим свойством

$$\varphi'_i \circ \varphi'_{i+1} = 0 \text{ для всех } i \geqslant 0. \tag{15}$$

Последовательность A-модулей (14) в которой выполнено условие (15) называется *комплексом* A-модулей. Далее такую последовательность будем называть *свободной резольвентой* A-модуля M.

Свойство (15) в точности означает, что

$$\mathrm{im}\ \varphi'_i \subseteq \ker\varphi'_i$$

и позволяет определить фактормодуль

$$H_i(M_*) = \frac{\ker\varphi'_i}{\mathrm{im}\ \varphi'_{i+1}} \tag{16}$$

Он носит название модуля *гомологий* комплекса M_* в члене с номером i.

Если M_* — свободная резольвента A-модуля M, то $H_0(M_*) \simeq M$, а $H_i(M_*) = 0$, при $i \geqslant 0$.

2.8.2 Понятие периодического произведения

Зафиксируем некоторый A-модуль M и рассмотрим операцию тензорно умножения $(-\otimes_A M)$ на этот модуль над кольцом A. Мы получим функтор, действующий из категории A-модулей в нее же. Рассмотрим A-модуль N и фиксируем его свободную резольвенту

$$N_* : \cdots \to N_i \to N_{i-1} \to \cdots \to N_1 \to 0.$$

Умножим ее тензорно на M.

$$\cdots \to N_i \otimes_A M \to N_{i-1} \otimes_A M \to \cdots \to N_1 \otimes_A M \to 0.$$

Так как тензорное умножение не является точным слева, точность в некоторых членах последовательности пропадет. Гомологии комплекса $H_i(N_* \otimes_A M)$ назваются *пе-*

риодическими произведениями и обозначаются $\mathrm{Tor}_i^A(N,M)$, а сам $\mathrm{Tor}_i^A(-,M)$ является i-м левым производным функтором функтора $(-\otimes_A M)$. В некоторых случаях удается непосредственно вычислить $\mathrm{Tor}_i^A(N,M)$.

2.9 Непосредственное вычисление некоторых тензорных и периодических произведений

Предложение 2.1 *Пусть n, m — натуральные числа. Тогда*

$$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$$

и тензорно умножим ее на $\mathbb{Z}_n$ над $\mathbb{Z}$. Из свойств точности тензорного произведения следующая последовательность

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{(\cdot m)\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to 0$$

будет точна. Воспользуемся свойством (10) и упростим члены в последовательности:

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to 0.$$

Из первой теоремы об изоморфизме $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n/\ker(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n)$, а так как последовательность точна $\ker(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n) = \mathrm{im}\,(\cdot m)$. Образом $\mathrm{im}\,(\cdot m)$ является ничто иное как $m\mathbb{Z}_n$. Значит

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n.$$

Выясним вид подмодуля $m\mathbb{Z}_n$. Заметим, что $\mathbb{Z}_n = \langle \overline{1} \rangle$, а $m\mathbb{Z}_n = \langle \overline{m} \rangle = \langle m \cdot \overline{1} \rangle$. Вычислим теперь порядок элемента $\overline{m}$. Воспользуемся следующим утверждением:

Утверждение 2.1 *[3] Пусть $g \in G$ — элемент группы G порядка $\mathrm{ord}_G\, g = n$. Тогда $\mathrm{ord}_G(g^k) = n/(k,n)$.*

Из него непосредственно вытекает, что $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_n}\overline{m} = n/(n,m)$. Значит

$$|m\mathbb{Z}_n| = m/(n,m). \tag{17}$$

Теперь вычислим $\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n$. Так как факторгруппа циклической группы по подгруппе снова циклическая и все группы, участвующие в рассмотрении, конечны, осталось вычислить порядок данной факторгруппы. Из теоремы Лагранжа вытекает, что $|\mathbb{Z}_n| = k|m\mathbb{Z}_n|$, где k — число смежных классов по подгруппе $m\mathbb{Z}_n$, то есть порядок фактор-группы. Из (17) и теоремы Лагранжа вытекает, что

$$|\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n| = (n,m),$$

а это значит что $\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. В итоге получаем, что

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

■

Из предложения 2.1 сразу видно, что при взаимно простых n и m имеем

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m = 0.$$

Это значит что тензорное произведение двух нетривиальных A-модулей может давать тривиальный модуль.

Предложение 2.2 *Пусть A, B — конечные абелевы группы, и*

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}},$$

Тогда

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами (9) и (10) тензорного произведения:

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} (\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

■

Предложение 2.3

$$\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n,m)},\ i = 0, 1; \\ 0,\ i \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим свободную резольвенту $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}_n$

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to 0$$

и тензорно умножим ее на $\mathbb{Z}_m$ над $\mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \to 0.$$

Можно сразу заметить, что все

$$\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = 0 \text{ при } i > 1.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_m / n\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Теперь, вычисляя первый модуль гомологий

$$H_1(C_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m) = \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m) = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\overline{x} = 0\}.$$

Получаем что

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\overline{x} = 0\}.$$

Но так как [5]

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n),$$

то хотелось бы найти такой изоморфный ему модуль, чтобы была видна симметрия.

Утверждение 2.2 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

Докажем, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \overline{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$, где $q = m/(n,m)$. Выберем произвольный представитель класса $\overline{q}k$ и умножим его на n:

$$\frac{knm}{(n,m)} = k[n,m],$$

где $[n,m]$ — наименьшее общее кратное чисел n и m. Имеем, $k[n,m]$ делится на m, а следовательно $\overline{q}k \in \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

С другой стороны $\forall x \in \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ выполнено $xn \equiv 0 \pmod m$. Значит

$$xn = l[n,m] = l\frac{nm}{(n,m)} \Rightarrow x = l\frac{m}{(n,m)} \Rightarrow \overline{x} \in \langle \overline{q} \rangle .$$

Отсюда получаем, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \overline{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$. Заметим, что

$$\mathrm{ord}\, \overline{q} = \mathrm{ord}(1 \cdot \overline{q}) = n \Bigg/ \left(\frac{n}{(n,m)} \cdot 1, \frac{n}{(n,m)}(n,m) \right) = (n,m).$$

Значит, $\langle \overline{q} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$, а следовательно и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. ∎

Обобщим предложение 2.3:

Предложение 2.4 *Пусть A, B — конечно порожденные абелевы группы, и*

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

Тогда

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой о конечно порожденных абелевых группах: представим каждую из них в виде прямой суммы примарных и бесконечных циклических групп [3]:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$
$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим свободную резольвенту для $\mathbb{Z}_{p^k}$

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p^k} \mathbb{Z} \to 0,$$

и тензорно умножим ее на некоторую абелеву группу N

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{(\cdot p^k)\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \to 0.$$

Аналогично доказательству предложения 2.3 получаем, что

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^k}, N) = \{n \in N \mid p^k n = 0\}.$$

Теперь вернемся к исходным группам A и B.

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{s}\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}},\mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{s}\mathbb{Z}_{(p_i^{k_i},q_j^{l_j})}.$$

Заметим, что изоморфизм $A\otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ будет существовать, только когда A и B — конечные абелевы группы. ∎

3 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В [6] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s\geqslant 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A.

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 3.1 Пусть $I \subset A$ — идеал. *Алгебра раздутия* идеала I задается выражением

$$\widehat{A} := \bigoplus_{s\geqslant 0} I^s.$$

При этом сложение и умножение элементов кольца $\widehat{A}$ и действие элементов кольца A на элементы кольца $\widehat{A}$ наследуются с операций кольца A.

Кольцо $\widehat{A}$ градуировано, то есть, если $x \in I^s, y \in I^t$, то $xy \in I^{s+t}$. Если $x \in I^s$, то будем говорить, что x имеет степень s. Также отметим, следующее: если кольцо A — целостное, то и кольцо $\widehat{A}$ тоже будет целостным.

Определение 3.2 Пусть M – произвольный A-модуль, A — целостное кольцо. *Кручением* $\operatorname{tors}(M)$ называется множество

$$\operatorname{tors}_A M = \{x \in M | \exists a \in A \setminus 0 : ax = 0\}.$$

Определение 3.3 Будем говорить, что A-модуль M является *модулем без кручения*, если $\operatorname{tors}_A M = 0$.

Заметим, если A не является целостным кольцом, то $\operatorname{tors}_A M$ не обязательно является подмодулем в M.

Далее в тексте под $\operatorname{tors}(M)$ без нижнего индекса будем подразумевать $\operatorname{tors}_A M$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним, как устроены его степени.

Теорема 3.1 *Пусть $s \geqslant 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Действуем методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда

$I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно для значений $s \leqslant r$. При $s = r+1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \middle| a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \{b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \dots \\ + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1}\}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, x y^r, y^{r+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geqslant 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geqslant 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 3.1 *Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A-модулей, и кольцо A – целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число компонент t_j отлично от нуля. Так как умножение на элементы прямой суммы производится покомпонентно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0)$, $t_1 \in \operatorname{tors}(M_1)$, $\dots$, $t_j \in \operatorname{tors}(M_j)$, $\dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь докажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все компоненты t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in A$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 3.1, можно записать седующее:

$$\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{s\geqslant 0}(I^s\otimes_A I)\right)=\bigoplus_{s\geqslant 0}\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$ A-модуля $I^s\otimes_A I$.

Теорема 3.2 *Пусть образующие иделала $I=(x,y)$? имеющие равные степени, алгебраически независимы. Тогда* $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)=\left\langle x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y \middle| n=\overline{1,s-1}\right\rangle_A.$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечно порожденными A-модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения для двух конечно порожденных модулей, имеем

$$I^s\otimes_A I=\left\langle x^n y^{s-n}\otimes x, x^n y^{s-n}\otimes y \middle| n=\overline{0,s}\right\rangle_A.$$

Пусть $\mu : I^s\otimes_A I\to I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n}\otimes x\mapsto x^{n+1}y^{s-n}$, $x^n y^{s-n}\otimes y\mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker\mu=\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1}\simeq (I^s\otimes_A I)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)\subset\ker\mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker\mu$. Пусть $z\in I^s\otimes_A I$, тогда z имеет вид

$$\begin{aligned} z=a_0(x^s\otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y\otimes x)+\dots+a_s(y^s\otimes x)+\\ &+ b_1(x^s\otimes y)+\dots+b_s(xy^{s-1}\otimes y)+b_{s+1}(y^s\otimes y),\end{aligned}$$

где $a_i,b_i\in A$. Тогда $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z)=a_0x^{s+1}+(a_1+b_1)x^s y+\dots+(a_s+b_s)xy^s+b_{s+1}y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z)=0$ и воспользовавшись тем фактом, что x,y алгебраически независимы, мы получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 &=0,\\ a_1+b_1 &=0,\\ \dots & \\ a_s+b_s &=0,\\ b_{s+1} &=0.\end{cases}$$

Отсюда, $a_0=b_{s+1}=0$, $a_i=-b_i$, $i=\overline{1,s}$ и

$$\ker\mu=\left\langle x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y \middle| n=\overline{1,s-1}\right\rangle_A.$$

Покажем, что любая образующая $\ker\mu$, то есть $x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y$, является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y)$

и преобразуем его:

$$
\begin{aligned}
xy(x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y) = \\
x(x^n y^{s-n})\otimes xy - y(x^{n+1}y^{s-n-1})\otimes xy = \\
x^{n+1}y^{s-n}\otimes xy - x^{n+1}y^{s-n}\otimes xy = 0.
\end{aligned}
$$

Действительно, каждая образующая $\ker\mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включнение $\ker\mu \subset \operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I) = \ker\mu$, и имеет место равенство

$$
\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n}\otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y | n=\overline{1,s-1}\right\rangle_A .
$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.3 *Пусть образующие идеала $I=(x,y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:*

$$
\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant s\\ 0\leqslant m\leqslant r}} a_{nm}x^n y^{s-n}\otimes x^m y^{r-m} \right\},
$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$
\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.
$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.2. Модуль $I^s\otimes_A I^r$ имеет вид

$$
I^s\otimes_A I^r = \left\langle x^n y^{s-n}\otimes x^m y^{r-m} | n=\overline{0,s}, m=\overline{0,m}\right\rangle_A .
$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s\otimes_A I^r \to I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n}\otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m}y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker\mu = \operatorname{tors}(I^s\otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме, мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s\otimes_A I^r)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручения, из чего следует, что $\operatorname{tors}(I^s\otimes I^r) \subset \ker\mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker\mu$. Любой элемент $z\in I^s\otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих

$$
z = \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant s\\ 0\leqslant m\leqslant r}} a_{nm}x^n y^{s-n}\otimes x^m y^{r-m},
$$

где $a_{nm}\in A$. Вычислив $\mu(z)$, получим следующее

$$
\mu(z) = \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant s\\ 0\leqslant m\leqslant r}} a_{nm}x^{n+m}y^{s+r-n-m}.
$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}, \tag{18}$$

докажем, что $z \in \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем k, $n \leqslant \min(s,k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим ее на $x^r y^r$, где r — показатель степени идеала I^r. Имеем

$$x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) = \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} = \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r.$$

Умножив выражение (18) на $x^r y^r$, мы получим сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \sum_{k=0}^{s+r} \left[\left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r \right] = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij}. Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ∎

Следствие 3.4 *Пусть числа a, b – натуральные, $I = (x,y)^a$, $J = (x,y)^b$, тогда*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A J) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant as \\ 0 \leqslant m \leqslant b}} a_{nm} x^n y^{as-n} \otimes x^m y^{b-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Заметим, что если на прямой сумме $\bigoplus_{s \geqslant 0} I^s$ рассмотреть покомпонентное умножение (вместо структуры градуированного кольца), то полученные нами результаты не изменятся.

Исходную задачу можно видоизменить, заменив алгебру раздутия на алгебру

$$\widetilde{A} := \bigoplus_{s \geqslant 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}),$$

где t – элемент, трансцендентный над A, а умножение определяется покомпонентно. Отметим, что алгебра $\widetilde{A}$ является A-алгеброй без кручения, однако, если рассматривать $\widetilde{A}$ как алгебру над $\widetilde{A}$, то возникают элементы кручения, например, $(0, t, 0, \dots)$. Далее будем работать с $\widetilde{A}$ как с A-алгеброй.

Обозначим s-ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s := (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 3.1 *A-модуль I_t^s допускает следующее разложение в сумму своих A-подмодулей*

$$I_t^s = \langle 1\rangle_{I^s} + \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A . \tag{19}$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s, так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени обратятся в 0. По определению, $(I[t] + (t))^s$ состоит из произведений s произвольных элементов $I[t]+(t)$. Поэтому, чтобы выяснить структуру $(I[t]+(t))^s$, необходимо рассмотреть произведение

$$\prod_{n=1}^{s} \left(a_{n0} + (a_{n1} + b_n)t + a_{n2}t^2 + \dots + a_{ns}t^s\right),$$

где $a_{nj} \in I, b_n \in A$, $n = \overline{1, s}, j = \overline{0, s}$. Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при t^k, $0 \leqslant k \leqslant s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k, которые имеют вид

$$b_{j_1}b_{j_2} \dots b_{j_k}a_{j_{k+1}0} \dots a_{j_s0},$$

где множества $\{j_1, \dots, j_k\}, \{j_{k+1}, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, s\}$ не пересекаются, а $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k}, при этом взять в произведении большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I, нельзя, так как мы ограничены степенью k. Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k. Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r, где $r \geqslant s - k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k, что оно принадлежит I^r, например, пусть $r = l + (s - k)$

$$a_{11}a_{21} \dots a_{l1}b_{l+1} \dots b_k a_{k+1,0} \dots a_{s0} \in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s как A-модуля в сумму своих A-подмодулей

$$I_t^s = \langle 1, t, \dots, t^s\rangle_{I^s} + \left\langle t, t^2, \dots, t^s\right\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}, t^s\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A .$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s \subset I^{s-1} \subset \dots \subset I \subset A$, то справедливы включения $\left\langle t^k\right\rangle_{I^s} \subset \left\langle t^k\right\rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s = \langle 1\rangle_{I^s} + \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A .$$

■

Заметим, что сумма (19) является прямой внутренней суммой своих подмодулей. Теперь, зная строение A-модуля I_t^s, можно сформулировать теорему

Теорема 3.5 *Пусть $J \subset A$ – идеал в A, тогда*

$$\operatorname{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \operatorname{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}(I \otimes_A J).$$

В частности,

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A I\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A I\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A I\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A I\right).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и, в силу теоремы 3.1, можно записать

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = \operatorname{tors}\left(\left\langle t^0\right\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^1\right\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^{s-1}\right\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^s\right\rangle_A \otimes_A J\right).$$

Так как t – элемент, трансцендентный над A, то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A. Значит, он не даст вклада в кручение и его можно вынести за знак $\operatorname{tors}(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + t^s \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_A \otimes_A J\right).$$

Но $\langle 1\rangle_{I^k}$, очевидно, является самим идеалом I^k. Таким образом, имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A J\right).$$

■

Задача свелась к вычислению $\operatorname{tors}\left(I^s \otimes J\right)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 3.6 *Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручение A-модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:*

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A I\right) = \left\langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \dots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y\right\rangle_A + \\ t\left\langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \dots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y\right\rangle_A + \\ \dots + \\ t^{s-1}\left\langle x \otimes y - y \otimes x\right\rangle_A.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3.5 и для каждого $\operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A I\right)$ применим теорему 3.2. ■

Как было отмечено ранее, $\widetilde{A}$ является алгеброй с кручением как алгебра над $\widetilde{A}$ с покомпонентным умножением. Выясним, какой вид имеет $\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A}$. Заметим следующее

$$\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A} = \operatorname{tors}_{\bigoplus I_t^s} \bigoplus I_t^s = \bigoplus \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

так как умножение в прямой сумме осуществляется покомпонентно. Таким образом, мы свели исходную задачу к следующей: описать $\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$. Справедлива

Теорема 3.7

$$\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s = \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \left\langle t^s\right\rangle_A.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент I_t^s следующего вида

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \tag{20}$$

где $a_i \in I^{s-i}$, и умножим его на $1 \cdot t^s \neq 0$.

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s) t^s = a_1 t^{s+1} + a_2 t^{s+2} + \dots + a_s t^{2s} = 0,$$

то есть, мы показали, что элементы вида (20) действительно являются элементами кручения. Покажем, что никакие другие элементы вклада в кручение не дадут. Предположим, что

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s \in \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

где $a_0 \neq 0$. По определению, существует такой элемент $g \in I_t^s \setminus 0$, что $fg = 0$. Пусть

$$g = b_0 + b_1 t + \dots + b_s t^s \neq 0.$$

Рассмотрим коэффициенты при t^k, $k = \overline{0, s}$ в произведении fg. Коэффициент при t^k обозначим как $[t^k]$.

$$\begin{aligned}
[t^0] &= a_0 b_0 = 0 \\
[t^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\
&\vdots \\
[t^s] &= a_0 b^s + \dots + a_{s-1} b_1 + a_s b_0 = 0.
\end{aligned}$$

Так как кольцо целостное, $a_0 \neq 0$, то, из уравнения на $[t^0]$, получаем $b_0 = 0$. Подставив $b_0 = 0$ в уравнение на $[t^1]$ и воспользовавшись целостностью кольца, получим $b_1 = 0$. Повторяя эти рассуждения далее, получим, что $b_0 = b_1 = \dots = b_s = 0$. Таким образом, f аннулирует только 0, значит $f \notin \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$.

Таким образом, действительно, только элементы вида (20) являются элементами кручения. Все такие элементы описываются суммой

$$\langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1} \right\rangle_I + \langle t^s \rangle_A .$$

■

Рассмотрим следующую задачу. Описать кручение $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, если он включается в короткую точную последовательность вида

$$0 \to I_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varepsilon} I_2 \to 0,$$

где $I_1, I_2 \subset A$ — идеалы в кольце A, A — целостное, нетерово кольцо.

Обозначим $\widehat{M} := M \otimes_A \widehat{A}$. Так как тензорное произведение не точно слева, то имеем последовательность вида

$$\widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0,$$

в которой $\widehat{i} := i \otimes 1$, $\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \otimes 1$. Пусть $\tau := \ker \widehat{i}$. Тогда получим точную последовательность

$$0 \to \tau \to \widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0.$$

Справедливы вложения

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau \arrow[r] & \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}"] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}"] & \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

где гомоморфизмы в нижней строке получены путем ограничения гомоморфизмов верхней строки на соответствующие множества. Разложим гомоморфизм $\widehat{i'}$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов и рассмотрим нижнюю строку

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i'}"] \arrow[dr] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}'"] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0 \\ & & & \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Отметим, что $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2$ конечно порождены, согласно предложению 2.17 книги [2], как $\widehat{A}$-модули, поэтому $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2$ конечно порожден как подмодуль нетерова модуля, $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau}$ конечно порожден как образ конечно порожденного модуля. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 4 §4 гл. 1 книги [4], которое утверждает, что расширение последовательности

$$0 \to \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \to \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}'} \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \to 0$$

порождено образами порождающих ядра и прообразами порождающих коядря последовательности. Пусть $\widehat{I}_2 = \langle \overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_m} \rangle_{\widehat{A}}$, $z_i \in \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ — произвольно выбранный проообраз $\overline{z_i}$ $(i = \overline{1,m})$ и $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_{\widehat{A}}$, $\overline{x_j}$ — образ x_j в $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ $(j = \overline{1,n})$, тогда

$$\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n \rangle_{\widehat{A}} + \langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle_{\widehat{A}}. \tag{21}$$

Теперь выясним как охарактеризовать кручения произвольного $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, при условии что M — нетеров A-модуль. Для этого нам потребуется утверждение:

Теорема 3.8 $M^\vee := \operatorname{Hom}_A(M, A)$ — *модуль без кручения.*

Доказательство. Известно, что любой конечно порожденный модуль является образом свободного модуля подходящего ранга [4], то есть точна тройка

$$0 \to K \to A^n \to M \to 0,$$

где $K = \ker(A^n \to M)$. Перейдем от нее к двойственной. Получим последовательность

$$0 \to M^\vee \to A^n \to \dots$$

Так как A — целостное, то A^n — модуль без кручения, $M^\vee$ обладает вложением в A^n, следовательно, $M^\vee$ тоже модуль без кручения. ■

Пусть $m \in M^\vee \setminus 0$. Рассмотрим гомоморфизм $A \to M^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha m$. Заметим, что этот гомоморфизм инъективен, так как в противном случае m являлся бы элементом кручения, что невозможно по теореме 3.8. Имеем точную тройку A-модулей:

$$0 \to A \to M^\vee \to N \to 0.$$

Перейдя от нее к двойственной получим последовательность, неточную справа

$$0 \to N^\vee \to M^{\vee\vee} \to A \to \dots$$

Разложим гомоморфизм $M^{\vee\vee} \to A$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & A \arrow[r] & \dots \\ & & M^{\vee\vee}/N^\vee \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Так как $M^{\vee\vee}/N^\vee$ обладает вложением в A как A-модуль, то имеет место изоморфизм $M^{\vee\vee}/N^\vee \simeq J \subset A$ — некоторый идеал в кольце A. Таким образом имеем новую точную тройку

$$0 \to N^\vee \to M^{\vee\vee} \to J \to 0.$$

Поскольку M — A-модуль без кручения, то имеет место вложение $M \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M^{\vee\vee} : s \mapsto \varepsilon_s$, где $\varepsilon_s : t \mapsto t(s)$, включаемое в диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\ & & M \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Обозначим $M_1 := \ker(M \to J_1)$, $J_1 := \mathrm{im}\,(M \hookrightarrow M^{\vee\vee} \to J)$ — идеал в A, при этом выполнены вложения $J_1 \subset J \subset A$. Имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & M \arrow[r] \arrow[u, hook] & J_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd}$$

Так как $M_1 \subset M$, M — нетеров, следовательно, M_1 тоже нетеров. Повторим эти же действия для M_1, потом для M_2 и так далее. Имеем убывающую фильтрацию

$$\dots \subset M_2 \subset M_1 \subset M. \tag{22}$$

Так как нетеров модуль необязательно артинов, то эта последовательность может быть бесконечной. Покажем что в нашем случае это не так и цепочка будет обрываться. Перейдем к локализации в нулевом идеале кольца A. $A \hookrightarrow A_0 =: Q(A)$ — поле частных кольца A. По свойству точности локализации имеем точную тройку A_0-векторных пространств

$$0 \to (M_{i+1})_0 \to (M_i)_0 \to (J_{i+1})_0 \to 0.$$

Так как $(J_{i+1})_0 \simeq A_0$, то из свойсва аддитивности A_0-размерности (Предложение 2.11 книги [2]) имеют место равенства

$$\dim_{A_0}(M_i)_0 - \dim_{A_0} A_0 = \dim_{A_0}(M_i)_0 - 1 = \dim_{A_0}(M_{i+1})_0.$$

Таким образом, последовательность (22) действительно обрывается. В базовом случае будем иметь точную тройку вида

$$0 \to I_1 \to M_n \to I_2 \to 0,$$

в которой для A-модуля M_n уже можем вычислить кручения $\widehat{A}$-модуля $\widehat{M_n}$.

Далее можно действовать индуктивно, где для шага индукции имеем точную тройку

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to I_{n-i+1} \to 0,$$

которая позволяет вычислить $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M_i}$, используя $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M_{i-1}}$ и $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_{n-i+1}$ по формулам, аналогичным (21).

Заключение

В ходе работы были достигнуты поставленные цели: изучены понятия коммутативного кольца, идеала и модуля. Были выполнены упражнения из книги [2], в ходе решения которых были доказаны различные условия при которых элементы конкретных колец обладают определенными свойствами (например, нильпотнетность или обратимость). Были получены явные формулы для вычисления тензорных и периодических произведений в простейших случаях. В ходе работы были получены явные выражения для подмодуля кручения в некоторых тензорных произведениях, вычислены делители нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$.

Список литературы

[1] Айзенбад, Д. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию / Д. Айзенбад; пер. с англ. О.Н. Попова и др. под ред. Е.С. Голода. — М.: МЦНМО, 2017. — 752 с.

[2] Атья, М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд; пер. с англ. Ю.И. Манин. — М.: Издательство «Мир», 1972. — 158 с.

[3] Винберг, Э. Б. Курс алгебры. — 3-е изд., дополненное. / Э.Б. Винберг. — М.: МЦНМО, 2017. — 592 с.

[4] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия: В 3-х т. — Т.2.: Модули и алгебры / Р. Зуланке, А.Л. Онищик — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с.: ил.

[5] Маклейн, С. Гомология. / С. Маклейн; пер. с англ. М.С. Цаленко под ред. А.Г. Куроша. — М.: Издательство «Мир», 1966. — 534 с.

[6] Тимофеева, Н.В. “Модули допустимых пар и модули Гизекера–Маруямы”, Матем. сб., 210:5 (2019), 109–134.