1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В [?] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s \geqslant 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A.

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 1.1 Пусть $I \subset A$ — идеал. *Алгебра раздутия* идеала I задается выражением

$$\widehat{A} := \bigoplus_{s \geqslant 0} I^s.$$

При этом сложение и умножение элементов кольца $\widehat{A}$ и действие элементов кольца A на элементы кольца $\widehat{A}$ наследуются с операций кольца A.

Кольцо $\widehat{A}$ градуировано, то есть, если $x \in I^s, y \in I^t$, то $xy \in I^{s+t}$.

Определение 1.2 Пусть M – произвольный A-модуль, A — целостное кольцо. *Подмодулем кручения* $\operatorname{tors}(M)$ называется множество

$$\operatorname{tors}_A M = \{x \in M | \exists a \in A \setminus 0 : ax = 0\}.$$

Определение 1.3 Будем говорить, что A-модуль M является *модулем без кручения*, если $\operatorname{tors}_A M = 0$.

Заметим, если A не является целостным кольцом, то $\operatorname{tors}_A M$ не обязательно является подмодулем в M.

Далее в тексте под $\operatorname{tors}(M)$ без нижнего индекса будем подразумевать $\operatorname{tors}_A M$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 *Пусть $s \geqslant 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Действуем методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно для значений $s \leqslant r$. При $s = r+1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \middle| a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \{b_0a_0y^{r+1} + (b_1a_0 + b_0a_1)xy^r + \dots \\ + (b_1a_{r-1} + b_0a_r)x^ry + b_1a_rx^{r+1} | a_n, b_m \in A, n = \overline{0,r}, m = \overline{0,1}\}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^ry, \dots, xy^r, y^{r+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A I = \bigoplus_{s\geqslant 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 *Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A-модулей, и кольцо A – целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right) = \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A\setminus 0$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число компонент t_j отлично от нуля. Так как умножение на элементы прямой суммы производится покомпонентно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0)$, $t_1 \in \operatorname{tors}(M_1)$, $\dots$, $t_j \in \operatorname{tors}(M_j)$, $\dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь докажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j\in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все компоненты t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in A$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1}t_{i_1} = a_{i_2}t_{i_2} = \dots = a_{i_k}t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1}\dots a_{i_{l-1}}a_{i_{l+1}}\dots a_{i_k})a_{i_l}t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1,k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j\in J} M_j\right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 1.1, можно записать седующее:

$$\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} (I^s \otimes_A I)\right) = \bigoplus_{s\geqslant 0} \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ A-модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 1.2 *Пусть образующие иделала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда* $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечно порожденными A-модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения для двух конечно порожденных модулей, имеем

$$I^s \otimes_A I = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0, s} \right\rangle_A .$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \to I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}$, $x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker \mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I)/ \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) \subset \ker \mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker \mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) \quad &+ \quad a_1(x^{s-1} y \otimes x) + \cdots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ \quad b_1(x^s \otimes y) + \cdots + b_s(x y^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$. Тогда $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0 x^{s+1} + (a_1 + b_1) x^s y + \cdots + (a_s + b_s) x y^s + b_{s+1} y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 + b_1 & = 0 \\ \dots \\ a_s + b_s & = 0 \\ b_{s+1} & = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1, s}$ и

$$\ker \mu = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

Покажем, что любая образующая $\ker \mu$, то есть $x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y$, является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} & xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y) = \\ & \qquad x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1} y^{s-n-1}) \otimes xy = \\ & \qquad\qquad x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy = 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включнение $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker\mu$, и имеет место равенство

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

$\blacksquare$

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3 *Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0, s}, m = \overline{0, m} \right\rangle_A .$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \to I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker\mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме, мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручения, из чего следует, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes I^r) \subset \ker\mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker\mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих

$$z = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$ получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z=\sum_{k=0}^{s+r}\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n}x^n y^{s-n}\otimes x^{k-n}y^{r-k+n}, \tag{1}$$

докажем, что $z\in \operatorname{tors}(I^s\otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем k, $n\leqslant \min(s,k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n}\otimes x^{k-n}y^{r-k+n}$ и умножим ее на $x^r y^r$, где r — показатель степени идеала I^r. Имеем

$$x^r y^r(x^n y^{s-n}\otimes x^{k-n}y^{r-k+n}) = \\ x^{k-n}y^{r-(k-n)}x^n y^{s-n}\otimes x^{r-(k-n)}y^{k-n}x^{k-n}y^{r-k+n} = \\ x^k y^{r+s-k}\otimes x^r y^r.$$

Умножив выражение (1) на $x^r y^r$, мы получим сумму следующего вида

$$x^r y^r\sum_{k=0}^{s+r}\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n}x^n y^{s-n}\otimes x^{k-n}y^{r-k+n}=\sum_{k=0}^{s+r}\left[\left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n}\right)x^k y^{r+s-k}\otimes x^r y^r\right]=0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij}. Данное равенство выполнено при всех $k=\overline{0,s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker\mu\subset\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I^r)$. ■

Следствие 1.4 *Пусть числа a,b – натуральные, $I=(x,y)^a$, $J=(x,y)^b$, тогда*

$$\operatorname{tors}(I^s\otimes_A J)=\left\{\sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant as\\ 0\leqslant m\leqslant b}} a_{nm}x^n y^{as-n}\otimes x^m y^{b-m}\right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij}=0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Исходную задачу можно обобщить, заменив алгебру раздутия на алгебру

$$\widetilde{A}:=\bigoplus_{s\geqslant 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1}),$$

где t – элемент, трансцендентный над A. Отметим, что алгебра $\widetilde{A}$ является A-алгеброй без кручения, однако, если рассматривать $\widetilde{A}$ как алгебру над $\widetilde{A}$, то возникают элементы кручения, например, $(0,t,0,\dots)$. Далее будем работать с $\widetilde{A}$ как с A-алгеброй.

Обозначим s-ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s:=(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 1.1 *A-модуль I_t^s допускает следующее разложение в сумму своих A-подмодулей*

$$I_t^s=\langle 1\rangle_{I^s}+\langle t\rangle_{I^{s-1}}+\dots+\left\langle t^{s-1}\right\rangle_I+\langle t^s\rangle_A. \tag{2}$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s, так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени обратятся в 0. По определению, $(I[t]+(t))^s$ состоит из произведений s произвольных элементов $I[t]+(t)$. Поэтому, чтобы выяснить структуру $(I[t]+(t))^s$, необходимо рассмотреть произведение

$$\prod_{n=1}^{s}\left(a_{n0}+(a_{n1}+b_n)t+a_{n2}t^2+\dots+a_{ns}t^s\right),$$

где $a_{nj}\in I, b_n\in A$, $n=\overline{1,s}, j=\overline{0,s}$. Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при t^k, $0\leqslant k\leqslant s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k, которые имеют вид

$$b_{j_1}b_{j_2}\dots b_{j_k}a_{j_{k+1}0}\dots a_{j_s0},$$

где множества $\{j_1,\dots,j_k\},\{j_{k+1},\dots,j_s\}\subset\{1,\dots,s\}$ не пересекаются, а $\{j_1,\dots,j_s\}=\{1,\dots,s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k}, при этом взять в произведении большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I, нельзя, так как мы ограничены степенью k. Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k. Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r, где $r\geqslant s-k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k, что оно принадлежит I^r, например, пусть $r=l+(s-k)$

$$a_{11}a_{21}\dots a_{l1}b_{l+1}\dots b_ka_{k+1,0}\dots a_{s0}\in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s, как A-модуля, в сумму своих A-подмодулей

$$I_t^s=\langle 1,t,\dots,t^s\rangle_{I^s}+\left\langle t,t^2,\dots,t^s\right\rangle_{I^{s-1}}+\dots+\left\langle t^{s-1},t^s\right\rangle_I+\langle t^s\rangle_A.$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s\subset I^{s-1}\subset\dots\subset I\subset A$, то справедливы включения $\left\langle t^k\right\rangle_{I^s}\subset\left\langle t^k\right\rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s=\langle 1\rangle_{I^s}+\langle t\rangle_{I^{s-1}}+\dots+\left\langle t^{s-1}\right\rangle_I+\langle t^s\rangle_A.$$

■

Заметим, что сумма (2) является прямой внутренней суммой своих подмодулей. Теперь, зная строение A-модуля I_t^s, можно сформулировать теорему

Теорема 1.5 *Пусть $J\subset A$ – идеал в A, тогда*

$$\operatorname{tors}(I_t^s\otimes_A J)=t^0\operatorname{tors}(I^s\otimes_A J)+t^1\operatorname{tors}\left(I^{s-1}\otimes_A J\right)+\dots+t^{s-1}\operatorname{tors}(I\otimes_A J).$$

В частности,

$$\operatorname{tors}(I_t^s\otimes_A I)=t^0\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)+t^1\operatorname{tors}\left(I^{s-1}\otimes_A I\right)+\dots+t^{s-1}\operatorname{tors}(I\otimes_A I).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и, в силу теоремы 1.1, можно записать

$$\operatorname{tors}(I_t^s\otimes_A J)=\operatorname{tors}\left(\left\langle t^0\right\rangle_{I^s}\otimes_A J\right)+\operatorname{tors}\left(\left\langle t^1\right\rangle_{I^{s-1}}\otimes_A J\right)+\dots$$
$$+\operatorname{tors}\left(\left\langle t^{s-1}\right\rangle_{I^1}\otimes_A J\right)+\operatorname{tors}\left(\langle t^s\rangle_A\otimes_A J\right).$$

Так как t – элемент, трансцендентный над A, то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A. Значит, он не даст вклада в кручение и его можно вынести за знак tors $(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + t^s \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_A \otimes_A J\right).\end{aligned}$$

Но $\langle 1\rangle_{I^k}$, очевидно, является самим идеалом I^k. Таким образом, имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A J\right).$$

■

Задача свелась к вычислению tors $(I^s \otimes J)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 1.6 *Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручения A-модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:*

$$\begin{aligned}t^0 \left\langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \dots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y\right\rangle_A + \\ t^1 \left\langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \dots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y\right\rangle_A + \\ \dots + \\ t^{s-1} \left\langle x \otimes y - y \otimes x\right\rangle_A.\end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5 и для каждого tors $(I^s \otimes_A I)$ применим теорему 1.2. ■

Как было отмечено ранее, $\widetilde{A}$ является алгеброй с кручением как алгебра над $\widetilde{A}$ с покомпонентным умножением. Выясним, какой вид имеет $\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A}$. Заметим следующее

$$\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A} = \operatorname{tors}_{\bigoplus I_t^s} \bigoplus I_t^s = \bigoplus \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

так как умножение в прямой сумме осуществляется покомпонентно. Таким образом, мы свели исходную задачу к следующей: описать $\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$. Справедлива

Теорема 1.7

$$\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s = \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент I_t^s следующего вида

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \tag{3}$$

где $a_i \in I^{s-i}$, и умножим его на $1 \cdot t^s \neq 0$.

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s) t^s = a_1 t^{s+1} + a_2 t^{s+2} + \dots + a_s t^{2s} = 0,$$

то есть, мы показали, что элементы вида (3) действительно являются элементами кручения. Покажем, что никакие другие элементы вклада в кручение не дадут. Предположим, что

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s \in \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

где $a_0 \neq 0$. По определению, существует такой элемент $g \in I_t^s \setminus 0$, что $fg = 0$. Пусть

$$g = b_0 + b_1 t + \dots + b_s t^s \neq 0.$$

Рассмотрим коэффициенты при t^k, $k = \overline{0, s}$ в произведении fg. Коэффициент при t^k

обозначим как $[t^k]$.

$$\begin{aligned}
[t^0] &= a_0b_0 = 0\\
[t^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0\\
&\vdots\\
[t^s] &= a_0b^s + \dots + a_{s-1}b_1 + a_sb_0 = 0.
\end{aligned}$$

Так как кольцо целостное, $a_0 \neq 0$, то, из уравнения на $[t^0]$, получаем $b_0 = 0$. Подставив $b_0 = 0$ в уравнение на $[t^1]$ и воспользовавшись целостностью кольца, получим $b_1 = 0$. Повторяя эти рассуждения далее, получим, что $b_0 = b_1 = \dots = b_s = 0$. Таким образом, f аннулирует только 0, значит $f \notin \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$.

Таким образом, действительно, только элементы вида (3) являются элементами кручения. Все такие элементы описываются суммой

$$\langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A .$$

■

Рассмотрим следующую задачу. Описать кручения $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, если он включается в короткую точную последовательность вида

$$0 \to I_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varepsilon} I_2 \to 0,$$

где $I_1, I_2 \subset A$ — идеалы в кольце A, A — целостное, нетерово кольцо.

Обозначим $\widehat{M} := M \otimes_A \widehat{A}$. Так как тензорное произведение не точно слева, то имеем последовательность вида

$$\widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0,$$

в которой $\widehat{i} := i \otimes 1$, $\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \otimes 1$. Пусть $\tau := \ker \widehat{i}$. Тогда получим точную последовательность

$$0 \to \tau \to \widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0.$$

Справедливы вложения

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau \arrow[r] & \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}"] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}"] & \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

где гомоморфизмы в нижней строке получены путем ограничения гомоморфизмов верхней строки на соответствующие множества. Разложим гомоморфизм $\widehat{i}'$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов и рассмотрим нижнюю строку

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}'"] \arrow[dr] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}'"] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0\\
& & & \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Отметим, что $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2$ конечно порождены, согласно предложению 2.17 книги **[ссылка**

Атья], как $\widehat{A}$-модули, поэтому $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2$ конечно порожден как подмодуль нетерового модуля, $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau}$ конечно порожден как образ конечно порожденного модуля. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 4 §4 гл. 1 книги **[ссылка Зуланке]**, которое утверждает, что расширение последовательности

$$0 \to \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \to \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}'} \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \to 0$$

порождено образами порождающих ядра и прообразами порождающих коядря последовательности. Пусть $\widehat{I}_2 = \langle \overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_m} \rangle_{\widehat{A}}$, $z_i \in \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ — произвольно выбранный проообраз $\overline{z_i}$ $(i = \overline{1,m})$ и $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_{\widehat{A}}$, $\overline{x_j}$ — образ x_j в $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ $(j = \overline{1,n})$, тогда

$$\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \rangle_{\widehat{A}} + \langle z_1, z_2, \ldots, z_m \rangle_{\widehat{A}}.$$

Теперь выясним как охарактеризовать кручения произвольного $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, при условии что M — нетеров A-модуль. Для этого нам потребуются известные утверждения:

Теорема 1.8 $M^\vee := \operatorname{Hom}_A(M, A)$ — *модуль без кручения.*

Теорема 1.9 *Если M — модуль без кручения, то гомоморфизм $M \to M^{\vee\vee}$ инъективен.*

Пусть $m \in M^\vee \setminus 0$. Рассмотрим гомоморфизм $A \to M^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha m$. Заметим, что этот гомоморфизм инъективен, так как в противном случае m являлся бы элементом кручения, что невозможно по теореме 1.8. Имеем точную тройку A-модулей:

$$0 \to A \to M^\vee \to N \to 0.$$

Перейдя от нее к двойственной получим последовательность, неточную справа

$$0 \to N^\vee \to M^{\vee\vee} \to A \to \ldots$$

Разложим гомоморфизм $M^{\vee\vee} \to A$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & \ldots \\ & & M^{\vee\vee}/N^\vee \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Так как $M^{\vee\vee}/N^\vee$ обладает вложением в A как A-модуль, то имеет место изоморфизм $M^{\vee\vee}/N^\vee \simeq J \subset A$ — некоторый идеал в кольце A. Таким образом имеем новую точную тройку

$$0 \to N^\vee \to M^{\vee\vee} \to J \to 0.$$

Воспользовавшись теоремой 1.9 имеет место вложение

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\ & & M \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Обозначим $M_1 := \ker(M \to J_1)$, $J_1 := \operatorname{im}(M \hookrightarrow M^{\vee\vee} \to J)$ — идеал в A, при этом выполнены вложения $J_1 \subset J \subset A$. Имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N^\vee \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & M \arrow[r] \arrow[u, hook] & J_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как $M_1 \subset M$, M — нетеров, следовательно, M_1 тоже нетеров. Повторим эти же действия для M_1, потом для M_2 и так далее. Имеем убывающую фильтрацию

$$\cdots \subset M_2 \subset M_1 \subset M. \tag{4}$$

Так как нетеров модуль необязательно артинов, то эта последовательность может быть бесконечной. Покажем что это не так и цепочка будет обрываться. Перейдем к локализации в нулевом идеале кольца A. $A \hookrightarrow A_0 =: Q(A)$ — поле частных кольца A. По свойству точности локализации имеем точную тройку A_0-векторных пространств

$$0 \to (M_{i+1})_0 \to (M_i)_0 \to (J_{i+1})_0 \to 0.$$

Так как $(J_{i+1})_0 \simeq A_0$, то из свойсва аддитивности A_0-размерности (Предложение 2.11 книги **[ссылка Атья]**) имеют место равенства

$$\dim_{A_0}(M_i)_0 - \dim_{A_0} A_0 = \dim_{A_0}(M_i)_0 - 1 = \dim_{A_0}(M_{i+1})_0.$$

Таким образом, последовательность (4) действительно обрывается. В базовом случае будем иметь точную тройку вида

$$0 \to I_1 \to M_n \to I_2 \to 0,$$

в которой для A-модуля M_n уже можем вычислить кручения $\widehat{A}$-модуля $\widehat{M_n}$.