

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

Сдано на кафедру
«16» июня 2020 г.
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
_____ Казарин Л.С.

Выпускная квалификационная работа

Модули, замена коэффициентов и кручение

направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
профессор,
д-р ф.-м.н., доцент
_____ Тимофеева Н.В.
«16» июня 2020 г.

Студент группы ПМИ-41БО
_____ Медведев Е.А.
«16» июня 2020 г.

Ярославль 2020 г.

Реферат

Данная работа содержит 45 страниц, в работе использовано 6 источников.

В главе 1 рассматриваются основные понятия коммутативной алгебры, связанные с коммутативными кольцами и идеалами. Формулируются основные теоремы, связанные с ними, а также приводятся решения некоторых задач из главы 1 книги [2].

В главе 2 рассматривается понятие A -модуля над коммутативным ассоциативным кольцом A с единицей, формулируются элементарные теоремы, связанные с понятием A -модуля, далее рассматривается понятие точной последовательности модулей, тензорного и периодического произведений двух модулей и их свойств. Производится вычисление тензорного произведения и периодического произведения двух модулей с помощью свободной резольвенты A -модуля.

Глава 3 посвящена вычислению подмодуля кручения в тензорных произведениях вида $(\bigoplus_{s \geq 0} I^s) \otimes_A J$, где $I, J \subset A$ — идеалы и $(\bigoplus_{s \geq 0} I^s) \otimes_A M$, как \hat{A} -модуля где M — A -модуль. а также вычисление делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ с покомпонентным умножением.

Ключевые слова: идеал, коммутативное кольцо, кручение, модуль, периодическое произведение, тензорное произведение.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Кольца и идеалы | 5 |
| 1.1 Определение кольца. Основные свойства | 5 |
| 1.2 Простые идеалы и максимальные идеалы | 5 |
| 1.3 Нильрадикал и радикал Джекобсона | 6 |
| 1.4 Операции над идеалами | 7 |
| 1.5 Расширение и сужение идеалов | 9 |
| 1.6 Решения упражнений в конце главы 1 книги [2] | 11 |
| 2 Модули | 22 |
| 2.1 Определение модуля | 22 |
| 2.2 Гоморфизмы модулей | 22 |
| 2.3 Операции над модулями | 23 |
| 2.4 Конечно порожденные модули | 25 |
| 2.5 Модули и точные последовательности | 25 |
| 2.6 Понятие тензорного произведения модулей | 26 |
| 2.7 Свойства тензорного произведения модулей | 27 |
| 2.8 Периодические произведения | 27 |
| 2.8.1 Понятие свободной резольвенты A -модуля | 27 |
| 2.8.2 Понятие периодического произведения | 28 |
| 2.9 Непосредственное вычисление некоторых тензорных и периодических произведений | 29 |
| 3 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей | 33 |
| Заключение | 44 |
| Список литературы | 45 |

Введение

В данной работе решен ряд задач, связанных с теорией модулей над коммутативным кольцом. Были поставлены как исключительно учебные, так и задачи, происходящие из научных разработок руководителя.

1. Изучить основные понятия и теоремы, связанные с коммутативными кольцами и идеалами.
2. Выполнить ряд упражнений из книги [2].
3. Изучить основные понятия и теоремы, связанные с модулями над коммутативным кольцом.
4. Представить явные формулы для вычисления тензорных и периодических произведений в некоторых простейших случаях.
5. Вычислить кручение в тензорных произведениях вида $(\bigoplus_{s \geq 0} I^s) \otimes_A M$.
6. Вычислить делители нуля алгебры $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$.

Работа состоит из трех глав.

В первой главе работы будут рассмотрены коммутативные кольца, идеалы и операции над ними. В этой же части приведены решения некоторых упражнений из главы 1 книги [2]. В процессе решения упражнений были изучены такие понятия как радикал идеала, частное идеалов, расширение и сужение идеалов, понятие простого спектра кольца.

Во второй главе работы рассматриваются модули над заданным коммутативным кольцом и операции над ними. Вводится классическое понятие тензорного произведения, рассматриваются его свойства и даются явные формулы для вычисления тензорных произведений в некоторых простейших случаях. Далее приводится известная конструкция периодических произведений с помощью свободных резольвент и основанное на ней явное вычисление $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$, где A и B — конечно порожденные абелевы группы.

Третья глава работы посвящена вычислению кручения в тензорных произведениях вида $(\bigoplus_{s \geq 0} I^s) \otimes_A M$, где $I \subset A$ — идеал в целостном кольце A , M — A -модуль, $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}) \otimes_A J$, где $J \subset A$ — идеал, вычислению делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ с покомпонентным умножением и вычислению кручения в $(\bigoplus_{s \geq 0} I^s) \otimes_A M$, как \hat{A} -модуля.

1 Кольца и идеалы

1.1 Определение кольца. Основные свойства

Дадим определение кольца:

Определение 1.1 Коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей A называется абелева группа A с операцией $\cdot : A \times A \rightarrow A$, которая удовлетворяет следующим свойствам для всех $x, y, z \in A$:

1. Дистрибутивность — $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
2. Коммутативность — $x \cdot y = y \cdot x$;
3. Ассоциативность — $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
4. Существует нейтральный по умножению элемент 1.

Далее в тексте $x \cdot y$ будем записывать как xy . Под кольцом далее будем понимать коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 1.2 Идеалом \mathfrak{a} в кольце A называется подгруппа в A , такая что $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

Определение 1.3 Пусть задано некоторое подмножество $E \subseteq A$. Будем говорить, что идеал \mathfrak{a} порожден множеством E , если \mathfrak{a} представляет собой множество конечных A -линейных комбинаций элементов E .

Определение 1.4 Полем называется кольцо, в котором $1 \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный.

Сформулируем теорему, с помощью которой можно установить, является ли кольцо полем или нет.

Теорема 1.1 [2] Пусть A — ненулевое кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:

1. A — поле;
2. В A нет идеалов, кроме 0 и (1);
3. Любой гомоморфизм $A \rightarrow B$, где B ненулевое кольцо, инъективен.

1.2 Простые идеалы и максимальные идеалы

Среди множества всех идеалов кольца A выделяют особые типы идеалов: простые и максимальные.

Определение 1.5 Идеал \mathfrak{p} в кольце A называется простым, если $\mathfrak{p} \neq (1)$ и из включения $xy \in \mathfrak{p}$ следует, что либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

Определение 1.6 Идеал \mathfrak{m} в кольце A называется максимальным, если $\mathfrak{m} \neq (1)$ и не существует идеала \mathfrak{a} , удовлетворяющего условиям $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq (1)$.

Данные выше определения можно сформулировать иначе:

$$\mathfrak{p} \text{ — простой} \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ — область целостности.}$$

Действительно, из определения простого идеала следует, что $\overline{xy} = \overline{0}$ только в том случае, когда $x \in \mathfrak{p}$ или $y \in \mathfrak{p}$, где x, y — представители классов \overline{x} и \overline{y} соответственно.

С другой стороны, так как A/\mathfrak{p} область целостности, значит из равенства $\overline{xy} = \overline{0}$ следует что либо $\overline{x} = \overline{0}$, либо $\overline{y} = \overline{0}$, то есть либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

\mathfrak{m} — максимальный $\Leftrightarrow A/\mathfrak{m}$ — поле.

Так как все идеалы, содержащие \mathfrak{m} находятся во взаимнооднозначном соответствии с идеалами в A/\mathfrak{m} [2], то сразу получаем что A/\mathfrak{m} — поле, так как \mathfrak{m} максимальный.

Так как A/\mathfrak{m} — поле, следовательно оно не содержит идеалов кроме $\bar{0}$ и $(\bar{1})$, следовательно, идеал \mathfrak{m} не содержит никакие другие идеалы, кроме (1) , по определению \mathfrak{m} максимален.

Так как любое поле является областью целостности, следовательно любой максимальный идеал прост.

Сформулируем важную теорему:

Теорема 1.2 [2] В каждом кольце $A \neq 0$ существует максимальный идеал.

Из доказательства теоремы, приведенного в [2] следует справедливость следующих утверждений:

Следствие 1.3 [2] Всякий идеал $\mathfrak{a} \neq (1)$ содержится в некотором максимальном идеале.

Следствие 1.4 [2] Любой элемент из A , не являющийся обратимым элементом содержится в некотором максимальном идеале.

Выделяют особый вид колец в которых существует только один максимальный идеал. Такие кольца называют *локальными*.

Теорема 1.5 [2]

1. Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m} \neq (1)$ — такой идеал в A , что любой элемент $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ обратим. Тогда A — локальное кольцо, а \mathfrak{m} — его максимальный идеал.
2. Пусть A — некоторое кольцо, \mathfrak{m} — его максимальный идеал и пусть любой элемент из $1 + \mathfrak{m}$ обратим в A . Тогда A — локальное кольцо.

1.3 Нильрадикал и радикал Джекобсона

Определение 1.7 Множество всех нильпотентов кольца A называется *нильрадикалом* кольца A и обозначается $\mathfrak{N}(A)$.

Теорема 1.6 [2]

1. Множество $\mathfrak{N}(A)$ является идеалом. В кольце $A/\mathfrak{N}(A)$ нет ненулевых нильпотентов.
2. $\mathfrak{N}(A)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов в A .

Определение 1.8 Радикалом Джекобсона кольца A называется пересечение всех его максимальных идеалов и обозначается $\mathfrak{R}(A)$.

Теорема 1.7 [2] $x \in \mathfrak{R}(A) \Leftrightarrow 1 - xy$ — обратим в A для всех $y \in A$.

1.4 Операции над идеалами

Пересечение идеалов определяется естественным образом как пересечение множеств. Пересечение любого семейства идеалов снова будет идеалом [2].

Определим операции суммы и произведения идеалов.

Определение 1.9 Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A . Их *суммой* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ называют множество всех сумм $x + y$, где $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно определить сумму любого семейства идеалов $\mathfrak{a}_i, i \in I$ как множество сумм вида $\sum_{i \in I} x_i$, где $x_i \in \mathfrak{a}_i$, в которых конечное число членов отлично от нуля.

Определение 1.10 Произведением $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ идеалов \mathfrak{a} и \mathfrak{b} называется идеал, порожденный произведениями $xy, x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно аналогичным образом определить произведение любого конечного числа идеалов. В частности, можно определить степень \mathfrak{a}^n идеала \mathfrak{a} , как идеал, порожденный всевозможными произведениями вида $x_1 x_2 \dots x_n, x_i \in \mathfrak{a}$.

Справедлив ряд свойств для операций пересечения, суммы и произведения идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in A$ [2].

1. Коммутативность и ассоциативность суммы, произведения и пересечения идеалов.
2. Дистрибутивный закон: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.
3. Модулярный закон: $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, при $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$.
4. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Объединение идеалов в общем случае идеалом не является [2].

Определение 1.11 Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в A . Их *частным* называется множество

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\},$$

которое само является идеалом [2].

Определение 1.12 Аннулятором $\text{Ann}(\mathfrak{a})$ идеала \mathfrak{a} называется множество $(0 : \mathfrak{a})$, то есть множество таких элементов $x \in A$, что $x\mathfrak{a} = 0$.

Множество D всех делителей нуля можно описать как

$$D = \bigcup_{x \in A \setminus 0} \text{Ann}(x),$$

где под $\text{Ann}(x)$ мы понимаем аннулятор идеала (x) .

Упражнение 1.1 Доказать следующие утверждения $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ идеалов в кольце A .¹

1. $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$
2. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$
3. $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$
4. $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$
5. $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

¹[2] Страница 18, упражнение 1.12.

Доказательство.

1. Так как \mathfrak{a} – идеал и $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.
2. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ справедливо, что $x\mathfrak{b} \in \mathfrak{a} \Rightarrow (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.
3. Выберем произвольный $x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c})$, тогда

$$x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) \Leftrightarrow x\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}).$$
Имеем $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$. А так как $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}\mathfrak{b})$, то получаем

$$((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}\mathfrak{b}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}).$$
4. $\forall x \in (\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \bigcap_i \mathfrak{a}_i \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \mathfrak{a}_i \forall i \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \forall i \Leftrightarrow x \in \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
5. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) \Leftrightarrow x \sum_i \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow \sum_i x\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{a} \forall i \Leftrightarrow x \in \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

■

Определение 1.13 Пусть \mathfrak{a} — идеал в кольце A . Его *радикалом* называется множество

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in A \mid \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Упражнение 1.2 Доказать следующие утверждения для любых $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ идеалов в кольце A .²

1. $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$
2. $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$
3. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$
4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$
5. $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$
6. \mathfrak{p} – простой $\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}^n} = \sqrt{\mathfrak{p}}$

Доказательство.

1. $\forall x \in \mathfrak{a}, x^1 \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
2. Докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.
 $\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow \exists m > 0 : x^{nm} \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
Из пункта 1 данного упражнения вытекает $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$.
Таким образом $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.
3. Сперва докажем что $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.
 $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Учтем, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Тогда из того, что $x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, следует, что $x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Значит, $x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.
Теперь докажем, что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.
 $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Leftrightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^n \in \mathfrak{a} \wedge x^n \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \wedge x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.
Докажем что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.
 $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Rightarrow x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

²[2] Страница 19, упражнение 1.13.

4. $\mathfrak{a} = (1) \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow 1 \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = (1)$.

5. Докажем $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$.

$\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Из $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ следует
 $x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$.

Теперь докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$.

$\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}$. Значит найдутся такие $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ и $z \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ такие что $x^n = y + z$.

Заметим, что $\exists m > 0 : y^m \in \mathfrak{a}$ и $\exists l > 0 : z^l \in \mathfrak{b}$.

Тогда $x^{n(m+l-1)} = \sum_{s=0}^{n(m+l-1)} C_{n(m+l-1)}^s y^s z^{n(m+l-1)-s}$, где $s + r = n(m+l-1)$. Отсюда $x^{n(m+l-1)} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$.

6. Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}}$.

$\forall x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}^n$. Заметим $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}$. Отсюда $x^m \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}}$.

Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{p}} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}$. Отсюда $x \in \mathfrak{p} \Rightarrow x^n \in \mathfrak{p}^n \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

■

Теорема 1.8 [2] *Радикал идеала \mathfrak{a} совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих \mathfrak{a} .*

Доказательство. Рассмотрим факторкольцо A/\mathfrak{a} . Все x , такие что $x^n \in \mathfrak{a}$ будут содержаться в нильрадикале $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})$ кольца A/\mathfrak{a} . Так как нильрадикал совпадает с пересечением всех простых идеалов $\bar{\mathfrak{p}}$ в кольце A/\mathfrak{a} и имеется взаимнооднозначное соответствие между идеалами в A/\mathfrak{a} и идеалами, содержащими \mathfrak{a} , то получаем что $\sqrt{\mathfrak{a}}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих \mathfrak{a} . ■

1.5 Расширение и сужение идеалов

Пусть $f : A \rightarrow B$ — некоторый гомоморфизм колец. Если \mathfrak{a} — идеал в A , то его образ $f(\mathfrak{a})$ не обязательно будет идеалом.

Определение 1.14 *Расширением идеала \mathfrak{a} кольца A называется идеал, порожденный множеством $f(\mathfrak{a})$, то есть идеал $Bf(\mathfrak{a})$. Обозначается как \mathfrak{a}^e .*

Расширение идеала \mathfrak{a} совпадает с множеством всевозможных конечных сумм вида $\sum_i y_i f(x_i)$, где $x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in B$.

Определение 1.15 *Сужением идеала \mathfrak{b} кольца B называется его прообраз $f^{-1}(\mathfrak{b})$ и обозначается \mathfrak{b}^c .*

Теорема 1.9 [2] *Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ идеал в кольцах A и B соответственно, $f : A \rightarrow B$ — гомоморфизм колец. Тогда*

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}, \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$.

2. $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}, \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$.

3. Пусть C — множество идеалов в A , являющихся сужениями, а E — множество идеалов в B , являющихся расширениями. Тогда

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ce} = \mathfrak{a}\}, \quad E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$$

и $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ — биективное отображение C на E , обратное к которому имеет вид $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$.

Упражнение 1.3 Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$ — идеалы в кольце A , $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ идеалы в кольце B и $f : A \rightarrow B$ гомоморфизм колец. Доказать следующие утверждения.³

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$
2. $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$
3. $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e$
4. $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$
5. $(\sqrt{\mathfrak{a}})^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}$
6. $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$
7. $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$
8. $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c$
9. $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$
10. $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}$

Доказательство.

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1) + Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$.
2. $x \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \Rightarrow Bf(x) \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e \Rightarrow (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e)^e$.
3. $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1) Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e$.
4. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e = \{Bf(x) \mid \mathfrak{a}_2 x \subseteq \mathfrak{a}_2\}$. Следовательно, $\exists x_0 \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)$ такой что $y \in Bf(x_0)$. Заметим, $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq Bf(\mathfrak{a}_2) Bf(x_0) = Bf(\mathfrak{a}_2 x_0)$. Так как $\mathfrak{a}_2 x_0 \subseteq \mathfrak{a}_2$, значит $Bf(\mathfrak{a}_2 x_0) \subseteq Bf(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1^e$. Из $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq \mathfrak{a}_1^e$ следует $y \in (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$.
5. Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{a}})^e \Rightarrow y \in Bf(x_0)$ для некоторого $x_0^n \in \mathfrak{a}$. Заметим $y^n \in B^n(f(x_0)^n) = Bf(x_0^n) \subseteq Bf(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e$. Отсюда $y \in \sqrt{\mathfrak{a}^e}$.
6. $\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c \subseteq ((\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c)^e)^c = (\mathfrak{b}_1^{ce} + \mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c$.
7. Выберем произвольный $x \in (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, что равносильно

$$f(x) \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow f(x) \in \mathfrak{b}_1 \wedge f(x) \in \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \wedge x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_2).$$

Отсюда $x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.

³[2] Страница 21, упражнение 1.18.

8. $\mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c)^{ec} = (\mathfrak{b}_1^{ce} \mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c$.

9. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c$. Это значит что $y \in f^{-1}(x_0)$, где $x_0 \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}_1$.

Заметим, что

$$f^{-1}(\mathfrak{b}_2)y \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2)f^{-1}(x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2 x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_1).$$

Отсюда $y \in (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$.

10. Докажем, что $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.

Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{b}})^c = f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})$. Это равносильно тому, что

$$\exists n > 0 : y \in f^{-1}(x_0), \text{ где } x_0^n \in \mathfrak{b}.$$

Отсюда

$$y^n \in f^{-1}(x_0^n) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}) \Rightarrow y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}.$$

Докажем $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.

Выберем произвольный $y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}$. Из этого следует $\exists n > 0$ такое, что $y^n \in \mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b})$. Тогда имеем

$$f(y^n) = (f(y))^n \in \mathfrak{b} \Rightarrow f(y) \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow y \in f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}}) = (\sqrt{\mathfrak{b}})^c.$$

■

1.6 Решения упражнений в конце главы 1 книги [2]

Упражнение 1.4 Доказать, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Leftrightarrow 1 + x \in U(A)$, где $x \in A$, A — кольцо; $\mathfrak{N}(A), U(A)$ — множество нильпотентов и обратимых элементов кольца A соответственно.⁴

Доказательство.

Докажем, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Rightarrow 1 + x \in U(A)$. Пусть n — такое число, что $x^n = 0$. Тогда

$$1 - (-x)^n = 1 = (1 - (-x))(1 + (-x) + \cdots + (-x)^{n-1}).$$

Обозначим $S = 1 + (-x) + \cdots + (-x)^{n-1}$. Имеем

$$1 = (1 + x)S \Rightarrow 1 + x \in U(A).$$

Теперь докажем более общее утверждение:

$$x \in \mathfrak{N}(A), u_0 \in U(A) \Rightarrow u_0 + x \in U(A).$$

Умножим $u_0 + x$ на u_0^{-1} :

$$u_0^{-1}(u_0 + x) = 1 + u_0^{-1}x = 1 + y, \text{ где } y := u_0^{-1}x.$$

⁴[2] Страница 21, упражнение 1

Заметим

$$1 = (1 + y)(1 + (-y) + (-y)^2 + \cdots + (-y)^{n-1}),$$

обозначим $S = 1 + (-y) + (-y)^2 + \cdots + (-y)^{n-1}$ и умножим на u_0 . Имеем

$$u_0 = (u_0 + x)S \Rightarrow u_0 + x \in U(A).$$

Теперь, полагая $u_0 = 1$, получаем требуемое доказательство. ■

Упражнение 1.5 Пусть A — некоторое кольцо, а $A[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из A . Пусть

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x].$$

Доказать следующие утверждения:⁵

1. f — обратимый элемент в $A[x]$ $\Leftrightarrow a_0$ — обратимый элемент в A , а a_1, \dots, a_n — нильпотенты.
2. f — нильпотент $\Leftrightarrow a_0, \dots, a_n$ — нильпотенты.
3. f — делитель нуля \Leftrightarrow существует ненулевой элемент $a \in A$ такой, что $af = 0$.
4. Многочлен f называется примитивным, если $(a_0, \dots, a_n) = 1$. Пусть $f, g \in A[x]$. Показать, что примитивность fg равносильна примитивности f и g .

Докажем 1.

Доказательство.

\Leftarrow : Заметим, если $a \in A$ — нильпотент, то и $ax^k \in A[x]$ тоже нильпотент. Так же отметим, если $a \in A$ — обратим, то и $a \in A[x]$ обратим как многочлен нулевой степени. Воспользуемся результатом упражнения 1.4. Так как a_0 — обратим, а $\sum_{k=1}^n a_kx^k$ — нильпотент (множество всех нильпотентов кольца является идеалом [2]), то получаем, что f — обратим как сумма обратимого элемента и нильпотента.

\Rightarrow : Докажем следующее

Утверждение 1.1 Пусть $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ — обратный к f многочлен, тогда $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты произведения fg . Коэффициент при x^k обозначим как $[x^k]$:

$$\begin{aligned} [x^{n+m}] &= a_nb_m = 0 \\ [x^{n+m-1}] &= a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0 \\ [x^{n+m-2}] &= a_{n-2}b_m + a_{n-1}b_{m-1} + a_nb_{m-2} = 0 \\ &\vdots \\ [x^2] &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ [x^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ [x^0] &= a_0b_0 = 1. \end{aligned}$$

⁵[2] Страница 21, упражнение 2.

i -ую сверху строчку умножим на a_n^i . Получим:

$$\begin{aligned}
[x^{n+m}] &= a_n b_m = 0 \\
[x^{n+m-1}] a_n &= a_{n-1} b_m a_n + a_n^2 b_{m-1} = 0 \\
[x^{n+m-2}] a_n^2 &= a_{n-2} b_m a_n^2 + a_{n-1} b_{m-1} a_n^2 + a_n^3 b_{m-2} = 0 \\
&\vdots \\
[x^2] a_n^{n+m-2} &= a_0 b_2 a_n^{n+m-2} + a_1 b_1 a_n^{n+m-2} + a_2 b_0 a_n^{n+m-2} = 0 \\
[x^1] a_n^{n+m-1} &= a_0 b_1 a_n^{n+m-1} + a_1 b_0 a_n^{n+m-1} = 0 \\
[x^0] a_n^{n+m} &= a_0 b_0 a_n^{n+m} = 1.
\end{aligned}$$

Из первой строчки $a_n b_m = 0$. Подставляя это во вторую, получаем, что $a_n^2 b_{m-1} = 0$. Подставляя эти оба равенства в третью, получаем, что $a_n^3 b_{m-2} = 0$ и так далее, по индукции, получаем что $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. ■

Воспользуемся доказанным утверждением при $r = m$: $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Так как b_0 обратим, получаем что $a_n^{m+1} = 0$, следовательно a_n — нильпотент.

Обозначим $\tilde{f} = f - a_n x^n$. Так как f — обратимый элемент, а $a_n x^n$ — нильпотент, то \tilde{f} тоже будет обратим. Теперь, повторяя аналогичное доказательство для \tilde{f} , получим, что a_{n-1} — нильпотент, и так до тех пор, пока $\deg f > 0$. При $\deg f = 0$ имеем $f = a_0$, откуда сразу получаем что a_0 — обратимый элемент. ■

Докажем 2.

Доказательство.

⇐: Так как $a_k \in A$ — нильпотенты для всех $k = \overline{0, n}$, то и $a_k x^k \in A[x]$ тоже будут нильпотентами, следовательно, и их сумма $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ будет нильпотентом.

⇒: Так как f — нильпотент, следовательно, существует такое $n_0 > 0$, что $f^{n_0} = 0$:

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots) \dots (a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0.$$

Отсюда получаем, что $a_0^{n_0} = 0$, значит a_0 — нильпотент. Обозначим $\tilde{f} = f - a_0$. Так как $f, a_0 \in A[x]$ нильпотенты, следовательно, и \tilde{f} тоже будет нильпотентом. Проведем для \tilde{f} аналогичные действия, по индукции получим, что a_k — нильпотенты для всех $k = \overline{0, n}$. ■

Докажем 3.

Доказательство.

⇐: Будем смотреть на a как на элемент кольца $A[x]$. Отсюда сразу получаем, что f — нильпотент.

⇒: Среди всех многочленов g таких, что $fg = 0$, выберем многочлен минимальной степени. Пусть это $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$.

Докажем следующее

Утверждение 1.2 $a_{n-r} g = 0$ при всех $r = \overline{0, n}$.

Доказательство. Проведем индукцию по r .

$r = 0$: $a_n g = 0$, в противном случае степень m не была бы наименьшей и $a_n g f = 0$.

Пусть при $r = k$ утверждение было доказано. Докажем его при $r = k + 1$. Обозначим

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=0}^k a_{n-i} x^{n-i}.$$

Умножим \tilde{f} на g :

$$\tilde{f}g = fg - \sum_{i=0}^k a_{n-i}gx^{n-i} = 0,$$

так как $fg = 0$ и при всех $i = \overline{0, k}$ $a_{n-i}g = 0$. Рассмотрим коэффициенты в произведении $\tilde{f}g$:

$$\begin{aligned} [x^0] &= a_0b_0 = 0 \\ [x^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ &\vdots \\ [x^{n-k-1}] &= a_{n-k-1}b_0 = 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что $a_{n-k-1}g = 0$, иначе степень m не была бы наименьшей и $a_{n-k-1}gf = 0$. ■

Для всех $i = \overline{0, n}$ имеем $a_i g = 0$, откуда следует $a_i b_m = 0$, следовательно, $b_m f = 0$. Искомый a положим равным b_m . ■

Докажем 4.

Доказательство. Пусть

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m.$$

\Rightarrow : Предположим, что fg примитивен, но f не является примитивным, то есть $\exists d \neq 1, 0$ такой, что $d \mid a_i$ при всех $i = \overline{0, n}$. Рассмотрим коэффициенты произведения fg :

$$\begin{aligned} [x^0] &= c_0 = a_0b_0 \\ [x^1] &= c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\ &\vdots \\ [x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} \\ [x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_nb_m. \end{aligned}$$

Так как d делит все a_i , следовательно, d будет делить все c_j , следовательно, многочлен fg уже не будет примитивным. Значит предположение было неверно и f является примитивным. Аналогично доказывается примитивность g .

\Leftarrow : Предположим, что f, g примитивны, а fg не является примитивным. Пусть fg имеет следующий вид

$$fg = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j.$$

Многочлен fg не примитивен, значит $\exists \mathfrak{p}$ — простой идеал, такой что $c_j \in \mathfrak{p}$ для всех $j = \overline{0, n+m}$.

$$\begin{aligned} [x^0] &= c_0 = a_0b_0 \in \mathfrak{p} \\ [x^1] &= c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \in \mathfrak{p} \\ &\vdots \\ [x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} \in \mathfrak{p} \\ [x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_nb_m \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Так как f, g — примитивны, значит не все a_i и не все b_j принадлежат \mathfrak{p} . Предположим, что найдутся такие a_i и b_j , что $a_i b_j \notin \mathfrak{p}$, причем все a_s при $s < i$ и все b_t при $t < j$ принадлежат \mathfrak{p} , но

$$c_{i+j} = \cdots + a_i b_j + \cdots \in \mathfrak{p},$$

следовательно, либо $a_i \in \mathfrak{p}$, либо $b_j \in \mathfrak{p}$. Таким образом, получили противоречие, значит либо f , либо g — не является примитивным. ■

Упражнение 1.6 Доказать, что в кольце $A[x]$ радикал Джексона совпадает с нильрадикалом.⁶

Доказательство.

Докажем $\mathfrak{N}(A[x]) \subseteq \mathfrak{N}(A[x])$.

Выберем произвольные $f, g \in \mathfrak{N}(A[x])$. Так как нильрадикал является идеалом, следовательно $fg \in \mathfrak{N}(A[x])$. Из упражнения 1.4 следует, что $1 - fg \in U(A[x])$, значит, из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{N}(A[x])$.

Докажем $\mathfrak{N}(A[x]) \subseteq \mathfrak{N}(A[x])$.

Выберем произвольный $f \in \mathfrak{N}(A[x])$. Из предложения 1.9[2] следует, что для всех $g \in A[x]$ выполнено $1 - fg \in U(A[x])$. Положим $g = x$. То есть $1 - xf \in U(A[x])$. Пусть многочлен f имеет следующий вид:

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

тогда $1 - xf$ будет иметь вид:

$$1 - xf = 1 - (a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}).$$

Воспользовавшись упражнением 1.4 получаем, что $a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$ — нильпотент. Из упражнения 1.5 пункта 2 вытекает, что $a_i \in \mathfrak{N}(A[x])$ для $i = \overline{1, n}$. Снова воспользовавшись результатом упражнения 1.5 пункт 2 получаем, что f — нильпотент, то есть $f \in \mathfrak{N}(A[x])$. Таким образом $\mathfrak{N}(A[x]) = \mathfrak{N}(A[x])$. ■

Упражнение 1.7 Пусть A — некоторое кольцо, $A[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

с коэффициентами в A . Доказать следующие утверждения:⁷

1. f — обратимый элемент в $A[[x]] \Leftrightarrow a_0$ — обратимый элемент в A .
2. Если $f \in \mathfrak{N}(A[[x]]) \Rightarrow a_n \in \mathfrak{N}(A)$ при всех $n \geq 0$.
3. $f \in \mathfrak{N}(A[[x]]) \Leftrightarrow a_0 \in \mathfrak{N}(A)$

Докажем 1.

Доказательство.

⁶[2] Страница 21, упражнение 4.

⁷[2] Страница 21, упражнение 5.

\Rightarrow : Так как $f \in U(A[[x]])$, значит, существует элемент $g \in A[[x]]$ такой, что $fg = 1$. Выпишем несколько первых коэффициентов произведения:

$$\begin{aligned} [x^0] &= a_0 b_0 = 1 \\ [x^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ [x^2] &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ &\vdots \\ [x^m] &= \sum_{i+j=m} a_i b_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Из $a_0 b_0 = 1$ сразу следует, что $a_0 \in U(A)$.

\Leftarrow : Пусть $a_0 \in U(A)$. Построим формальный степенной ряд g такой, что $fg = 1$. Пусть g имеет вид

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Рассмотрим коэффициенты произведения fg :

$$\begin{aligned} [x^0] &= a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1} \\ [x^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0) \\ [x^2] &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0) \\ &\vdots \\ [x^m] &= \sum_{i+j=m} a_i b_j = 0 \Rightarrow b_m = a_0^{-1} \left(- \sum_{i=1}^m a_i b_{m-i} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Таким образом, для любого m за конечное число шагов мы сможем получить коэффициент b_m формального степенного ряда g . ■

Докажем 2.

Доказательство.

Проведем доказательство, аналогичное доказательству упражнения 1.5 пункт 2. Так как f — нильпотент, следовательно найдется такое натуральное число n_0 , что $f^{n_0} = 0$. Имеем

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots) \dots (a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0,$$

откуда следует $a_0^{n_0} = 0$. Выполним замену $\tilde{f} = f - a_0$. Тогда \tilde{f} снова будет нильпотентом, значит, найдется целое $n_1 > 0$: $\tilde{f}^{n_1} = 0$. Имеем

$$\tilde{f}^{n_1} = \underbrace{(a_1 x + \dots)(a_1 x + \dots) \dots (a_1 x + \dots)}_{n_1 \text{ скобок}} = (a_1 x)^{n_1} + \dots = 0,$$

откуда получаем $a_1^{n_1} = 0$, и сделаем замены $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f} - a_1 x$. Для $\tilde{\tilde{f}}$ снова проведем аналогичные рассуждения. Таким образом, за конечное число шагов, получим по-следовательно a_0 — нильпотент, a_1 — нильпотент, и так далее. ■

Докажем 3.

Доказательство.

Из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \Leftrightarrow 1 - fg \in U(A[[x]])$ при всех $g \in A[[x]]$. Пусть f и g имеют следующий вид:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Тогда условие $1 - fg \in U(A[[x]])$ запишется следующим образом:

$$1 - fg = (1 - a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots \in U(A[[x]]). \quad (1)$$

Воспользовавшись пунктом 1 данного упражнения получим $1 - a_0 b_0 \in U(A)$. Так как g выбирался произвольно, следовательно b_0 — произвольный элемент кольца A . Откуда вытекает, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$.

С другой стороны, из того, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$, следует, что при всех b_0 будет выполнено $1 - a_0 b_0 \in U(A)$, значит ряд (1) будет обратимым при всех b_n , $n \geq 0$, то есть при любых $g \in A[[x]]$. Отсюда, по теореме 1.7, получаем, что $f \in \mathfrak{R}(A[[x]])$. ■

Упражнение 1.8 Пусть A — некоторое кольцо, X — множество всех его простых идеалов. Для всякого подмножества $E \subset A$ обозначим $V(E)$ множество всех простых идеалов, содержащих E . Доказать следующие утверждения:⁸

1. Если \mathfrak{a} — идеал, порожденный E , то $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.
2. $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.
3. Пусть $(E_i)_{i \in I}$ — любое семейство подмножеств A . Тогда

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$

4. $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ для любых идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ в A .

Докажем 1.

Доказательство.

1. Доказательство $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

То, что \mathfrak{a} порожден множеством E , означает, что \mathfrak{a} имеет вид

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in A, x_i \in E \right\},$$

причем все суммы конечные.

Покажем $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$,

Выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(E)$. Для всех $x \in E$ будет выполнено $x \in \mathfrak{p}$, следовательно, любая A -линейная комбинация $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ принадлежит \mathfrak{p} , где $a_i \in A$, $x_i \in E$, откуда получаем $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

⁸[2] Страница 22, упражнение 15.

Покажем $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$.

Выберем произвольный $x \in E$. Очевидно $x \in \mathfrak{a}$. Так как для всех $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $E \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \in V(E)$.

2. Доказательство $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ — произвольный элемент $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Это означает, что существует $n > 0$ такое, что $x^n \in \mathfrak{a}$. Теперь выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. По определению, выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Значит $x^n \in \mathfrak{p}$, а следовательно и $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Таким образом, доказано, что $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

Так как $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, то для всех $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ будет выполнено

$$\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p},$$

значит, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\mathfrak{a})$. ■

Докажем 2.

Доказательство.

Так как $\forall \mathfrak{p} \in X$ справедливо $0 \in \mathfrak{p}$, следовательно $V(0) = X$.

Так как $A = (1)$ и не существует такого простого идеала \mathfrak{p} , что выполнено $(1) \subset \mathfrak{p}$, то $V(1) = \emptyset$. ■

Докажем 3.

Доказательство.

Покажем что $V(\bigcup_{i \in I} E_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V(\bigcup_{i \in I} E_i)$. По определению $\bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$, что равносильно $E_i \subseteq \mathfrak{p}$ для всех $i \in I$, откуда следует $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

Для доказательства $V(\bigcup_{i \in I} E_i) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(E_i)$ достаточно провести предыдущее рассуждение в обратном порядке. ■

Докажем 4.

Доказательство.

Воспользовавшись свойствами радикалов сразу получаем

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Осталось доказать равенство $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. По определению $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Это означает, что $\forall x \in \mathfrak{a}, \forall y \in \mathfrak{b}$ справедливо $xy \in \mathfrak{p}$. Пусть существует некоторый $x_0 \in \mathfrak{a}$ и $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Однако при всех $y \in \mathfrak{b}$ $x_0 y \in \mathfrak{p}$. Из определения простого идеала получаем $y \in \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, или, иными словами, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Пусть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ и, для определенности, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, тогда $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно и $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. ■

Таким образом, множества $V(E)$ удовлетворяют аксиомам замкнутых множеств в топологическом пространстве. Такая топология на X называется топологией Зарисского, а само пространство X называется *простым спектром кольца* и обозначается как $\text{Spec}(A)$.

Упражнение 1.9 Для всякого элемента $f \in A$ обозначим через X_f дополнение к $V(f)$ в $X = \text{Spec}(A)$. Множества X_f открыты. Доказать что они образуют базу в топологии Зарисского и обладают следующими свойствами:⁹

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
2. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ — нильпотент.
3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ — обратимый элемент.
4. $X_f = X_g \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
5. X — квазикомпактно (т.е. у всякого открытого покрытия X есть конечное подпокрытие).
6. Более общо, X_f — квазикомпактны.
7. Открытое подмножество в X квазикомпактно тогда и только тогда, когда оно является конечным объединением множеств вида X_f .

Здесь под \overline{Q} , где $Q \subset X$ будем понимать дополнение к множеству Q .

Определение 1.16 Семейство множеств B называется *Базой* топологии, если любое открытое множество из топологического пространства X представимо в виде объединения элементов из B .

Докажем что X_f образуют базу в топологии Зарисского.

Доказательство. Выберем произвольное множество $E \subset A$. Ему будет соответствовать некоторое открытое множество $\overline{V(E)} = Y$. Тогда

$$Y = \overline{V\left(\bigcup_{f \in E} \{f\}\right)} = \overline{\bigcap_{f \in E} V(f)} = \bigcup_{f \in E} \overline{V(f)} = \bigcup_{f \in E} X_f.$$

■

Докажем 1.

Доказательство. Воспользуемся свойствами замкнутых множеств в топологии Зарисского из упражнения 1.8.

$$X_f \cap X_g = \overline{V(f)} \cap \overline{V(g)} = \overline{V(f) \cup V(g)} = \overline{V(fg)} = X_{fg}.$$

■

Докажем 2.

Доказательство. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow V(f) = X$, то есть для любого простого идеала \mathfrak{p} выполнено $f \in \mathfrak{p}$ или, другими словами,

$$f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ — прост}} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}(A),$$

то есть f — нильпотент.

■

Докажем 3.

Доказательство.

$X_f = X \Leftrightarrow V(f) = \emptyset$, то есть f не принадлежит ни одному простому идеалу, в том числе ни одному максимальному, значит f обратим.

⁹[2] Страница 23, упражнение 17

С другой стороны, если бы f не был обратим, то он содержался бы в некотором максимальном идеале \mathfrak{m} , а значит $V(f) \neq \emptyset$. ■

Докажем 4.

Доказательство.

\Leftarrow : Если $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$, то и $V(f) = V(g)$ (из свойств замкнутых множеств, упражнение 1.8). Откуда сразу получаем $X_f = X_g$.

\Rightarrow : По определению $V(g) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ — прост в } A \wedge (g) \subseteq \mathfrak{p}\}$. Так как $X_f = X_g$, то и $V(\sqrt{(f)}) = V(\sqrt{(g)})$. Тогда по свойствам замкнутых множеств (упражнение 1.8) имеем:

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_{\mathfrak{p}: (f) \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\sqrt{(f)})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\sqrt{(g)})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}: (g) \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}.$$

■

Докажем 5.

Доказательство. Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно рассматривать покрытия главными открытыми множествами X_{f_i} , где $i \in I$. Так как $X = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$, то

$$\emptyset = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} \{f_i\}\right) = V(\langle f_i \rangle_{i \in I}),$$

где выражение $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ означает A -линейную оболочку множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Откуда получаем, что A -линейная оболочка $\langle f_i \rangle_{i \in I} = (1)$, то есть существует такое конечное множество J , что

$$\sum_{j \in J} g_j f_j = 1, \text{ где } g_j \in A.$$

Следовательно, A -линейная оболочка элементов f_j , $j \in J$ совпадает с кольцом A . Тогда

$$\emptyset = V(\langle f_j \rangle) = \bigcap_{j \in J} V(f_j),$$

из чего следует

$$X = \bigcup_{j \in J} X_{f_j}.$$

■

Докажем 6.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое покрытие главными открытыми множествами: $X_f \subset \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$. Перейдем к дополнениям:

$$V(f) \supset \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(\langle f_i \rangle_{i \in I}).$$

Аналогично пункту 4 можно показать, что

$$V(f) \supset V(\langle f_i \rangle_{i \in I}) \Rightarrow \sqrt{(f)} \subset \sqrt{\langle f_i \rangle_{i \in I}}.$$

Откуда

$$\exists k > 0 : f^k = \sum_{j=1}^n f_j g_j, \text{ где } g_j \in A.$$

Иначе говоря, $f^k \in \langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}$. Так как, $V(f^k) = V(f)$ имеем:

$$V(f) \supset V(\langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}) = \bigcap_{j=1}^n V(f_j),$$

переходя к дополнениям, получаем

$$X_f \subset \bigcup_{j=1}^n X_{f_j}.$$

■

Докажем 7.

Доказательство. Пусть Y — открытое множество.

\Leftarrow : Пусть $Y = \bigcup_{j=1}^n X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Следовательно, при всех j имеют место включения $X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Так как X_{f_j} квазикompактно, то найдутся такие i_k и n_j , что

$$X_{f_j} \subset \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}. \quad (2)$$

Теперь, объединяя выражения вида (2) по $j = \overline{1, n}$, получаем:

$$Y \subset \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}.$$

Таким образом, множество Y — квазикompактно.

\Rightarrow : Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно представить Y в виде $Y = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$. Так как Y — квазикompактно, значит среди X_{f_i} можно выделить конечный набор подмножеств $X_{f_{i_j}}$ такой, что $Y = \bigcup_{j=1}^n X_{f_{i_j}}$. ■

2 Модули

2.1 Определение модуля

Пусть A — некоторое кольцо, а M — некоторая абелева группа.

Определение 2.1 *Модулем над кольцом A* называется пара (M, μ) , состоящая из абелевой группы M и отображения $\mu : A \times M \rightarrow M$ (действия кольца A на группе M), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mu(a, x + y) = \mu(a, x) + \mu(a, y)$,
2. $\mu(a + b, x) = \mu(a, x) + \mu(b, x)$,
3. $\mu(ab, x) = \mu(a, \mu(b, x))$,
4. $\mu(1, x) = x$.

Где $a, b \in A$, $x, y \in M$.

Далее $\mu(a, x)$ будем записывать как ax .

В случае, когда кольцо A является полем, A -модулями будут векторные пространства над полем A .

Отметим также, что любой идеал кольца A , в частности само кольцо A , является A -модулем. Поэтому к идеалам применимы все теоремы, которые формулируются для модулей.

Как в случае векторных пространств над полем k выделяют подпространства и факторпространства, в случае A -модулей можно выделять подмодули и фактормодули.

Определение 2.2 *Подмодулем $M' \subset M$* называется всякая подгруппа M' группы M , замкнутая относительно действия кольца. Иными словами, M' — подмодуль M , если он включается в следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccc} A \times M' & \xrightarrow{1 \times i} & A \times M \\ \downarrow \mu|_{M'} & & \downarrow \mu \\ M' & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

При этом действие $\mu|_{M'}$ получается как ограничение отображения μ на подмножество $A \times M'$.

Определение 2.3 *Факормодулем M/M' A -модуля M по подмодулю M'* называется факторгруппа M/M' на которой действие μ' кольца A определено следующим образом:

$$\mu' : (a, x + M') \mapsto ax + M'.$$

2.2 Гоморфизмы модулей

Определение 2.4 *Гомоморфизмом $f : M \rightarrow N$ A -модулей N и M* будем называть гомоморфизм абелевых групп M и N , который коммутирует с действием μ кольца на группе.

Таким образом, гомоморфизм f абелевых групп является гомоморфизмом модулей, если он делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \xrightarrow{1 \times f} & A \times N \\ \downarrow \mu_M & & \downarrow \mu_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Где μ_M, μ_N — действия кольца A на M и N , наделяющие эти группы структурами A -модулей.

Если M, N — векторные пространства над полем k , то гомоморфизмы k -модулей называются линейными отображениями.

Определение 2.5 *Изоморфизмом A -модулей* называется такой гомоморфизм, который является биективным отображением модулей как множеств.

Аналогично ядру, образу и коядру линейных отображений векторных пространств выделяют аналогичные подгруппы, связанные с гомоморфизмами A -модулей.

Определение 2.6 Пусть $f : M \rightarrow N$ — гомоморфизм A -модулей M и N .

1. Ядром гомоморфизма f называется подгруппа $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\} < M$,
2. Образом гомоморфизма f называется подгруппа $\operatorname{im} f = f(M) < N$,
3. Коядром гомоморфизма f называется $\operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f$.

При этом ядро, образ и коядро наделены структурами A -модулей.

Для модулей, как и для векторных пространств, справедливы три теоремы об изоморфизме.

Теорема 2.1 (Первая теорема об изоморфизме) [2] Пусть $f : M \rightarrow N$ — гомоморфизм A -модулей. Тогда

$$\operatorname{im} f \simeq M/\ker f.$$

Теорема 2.2 (Вторая теорема об изоморфизме) [2] Пусть M_1, M_2 — подмодули в M . Тогда

$$(M_1 + M_2)/M_2 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Теорема 2.3 (Третья теорема об изоморфизме) [2] Пусть $L \supseteq M \supseteq N$ — некоторые A -модули. Тогда

$$(L/N)/(M/N) \simeq L/M.$$

2.3 Операции над модулями

Аналогично операциям произведения и частного идеалов можно ввести операцию умножения идеала на модуль и частного двух подмодулей. В общем случае произведение двух модулей ввести невозможно [2].

Определение 2.7 Пусть M — A -модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Тогда *произведением $\mathfrak{a}M$* назовем множество конечных сумм вида

$$\sum_i a_i x_i, \text{ где } a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M.$$

Произведение идеала на модуль M является подмодулем в M [2].

Определение 2.8 Частным $(N : P)$ двух подмодулей N и P A -модуля M называется множество

$$(N : P) = \{a \in A \mid aP \subseteq N\}.$$

Частное двух модулей является идеалом в A .

Определение 2.9 Аннулятором $\text{Ann}(M)$ A -модуля M называется частное $(0 : M)$.

Упражнение 2.1 Пусть N, M — A -модули. Доказать следующие утверждения:¹⁰

1. $\text{Ann}(M + N) = \text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N)$.
2. $(N : M) = \text{Ann}((N + M)/N)$.

Докажем 1.

Доказательство.

Выберем произвольный $x \in \text{Ann}(M + N)$. По определению, $x(M + N) = 0$, следовательно $xN + xM = 0$. Так как $xN \cup xM \subseteq xN + xM = 0$, значит $xN = xM = 0$, то есть $x \in \text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N)$.

Пусть теперь $x \in \text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N)$ это значит что $xM = xN = 0$, откуда $x(M + N) = 0$, следовательно $x \in \text{Ann}(M + N)$. ■

Докажем 2.

Доказательство.

Пусть $x \in \text{Ann}((N + M)/N)$. По определению

$$x((N + M)/N) = \bar{0},$$

что равносильно $x(y + N) \subseteq N$ при всех $y = m + n$, где $m \in M, n \in N$. Подставим выражение для y .

$$x(m + n + N) \subseteq N \Leftrightarrow xm + N \subseteq N, \text{ при всех } m \in M.$$

Откуда получаем, что $xM \subseteq N$, по определению $x \in (N : M)$. ■

Определение 2.10 Пусть M, N — A -модули. Их *прямой суммой* $M \oplus N$ называется множество всех пар (x, y) , где $x \in M, y \in N$, на которых введены операции следующим образом:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ a(x, y) &= (ax, ay). \end{aligned}$$

Данное определение прямой суммы двух A -модулей легко обобщить на прямую сумму произвольного семейства A -модулей:

Определение 2.11 Прямой суммой семейства A -модулей $\{M_i\}_{i \in I}$ назовем множество

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid (x_i)_{i \in I} \text{ — финитная последовательность и } x_i \in M_i\},$$

с покомпонентным сложением и действием кольца A , определяемым следующей формулой

$$\mu : (a, \dots, m_i, \dots) \mapsto (\dots, \mu_i(a, m_i), \dots),$$

где μ_i — действие кольца A на M_i .

¹⁰[2], Страница 30, упражнение 2.2

Если отбросить условие финитности последовательностей, то получим множество, называемое *прямым произведением*

$$\prod_{i \in I} M_i,$$

которое в случае конечного множества I совпадает с прямой суммой.

2.4 Конечно порожденные модули

Определение 2.12 A -модуль M называется свободным, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{i \in I} M_i$, где каждый M_i изоморфен A как A -модуль.

Свободный A -модуль обозначается как $A^{(I)}$.

Определение 2.13 A -модуль M порожден множеством $G \subset M$, если любой элемент $m \in M$ можно представить в виде финитной A -линейной комбинации элементов множества G . То есть для любого $m \in M$ найдутся такие $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_n \in G$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$, что $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$.

Подмножество G называется *системой образующих* или *системой порождающих элементов* A -модуля M .

Пусть $\bigoplus^{|G|} A$ — свободный A -модуль. Тогда имеет место сюръективный гомоморфизм $\varphi : \bigoplus^{|G|} A \rightarrow M$, определенный следующей формулой.

$$(\dots, \lambda_i, \dots) \mapsto \sum \lambda_i g_i,$$

где последовательность (λ_i) и A -линейная комбинация $\sum \lambda_i g_i$ финитны.

Определение 2.14 A -модуль *конечно порожден*, если в нем можно выбрать конечную систему образующих G

Вновь обратимся к векторным конечномерным пространствам над полем k . Так как любое векторное пространство V размерности $n = \dim V$ изоморфно k^n , значит, по определению, любой модуль над полем k будет являться свободным.

Сформулируем критерий для конечно порожденных модулей.

Теорема 2.4 [2] A -модуль M конечно порожден тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому фактормодулю модуля A^n при некотором $n > 0$.

Теорема 2.5 [2] Пусть M — некоторый конечно порожденный A -модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, φ — такой эндоморфизм M , что $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Тогда φ удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

где все $a_i \in \mathfrak{a}$.

Теорема 2.6 (Лемма Накаямы) [2] Пусть M — конечно порожденный A -модуль, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}(A)$ — идеал в A . Если $\mathfrak{a}M = M$, то $M = 0$.

Следствие 2.7 [2] Пусть M — конечно порожденный A -модуль, $N \subset M$ — его подмодуль, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}(A)$ — идеал. Если $M = \mathfrak{a}M + N$, то $M = N$.

2.5 Модули и точные последовательности

Пусть имеется некоторый набор модулей $\{M_i\}$ и гомоморфизмы $f_i : M_{i-1} \rightarrow M_i$.

Определение 2.15 Последовательность вида

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

называется точной в члене M_i , если $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$.

Определение 2.16 Последовательность A -модулей называется *точной*, если она точна в каждом члене.

В некоторых простых случаях можно сформулировать условия точности [2]:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \text{ точна} \Leftrightarrow f \text{ инъективен}; \quad (3)$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \text{ точна} \Leftrightarrow g \text{ сюръективен}; \quad (4)$$

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \text{ точна} \Leftrightarrow f \text{ инъективен, } g \text{ сюръективен,} \quad (5)$$

$$g \text{ индуцирует изоморфизм } \operatorname{coker} f \text{ на } M''.$$

Определение 2.17 Последовательность вида (5) называется *короткой точной последовательностью* или *точной тройкой*.

Далее в тексте работы будут использоваться дополнительно следующие обозначения:

(a, b) — наибольший общий делитель двух чисел a и b .

$[a, b]$ — наименьшее общее кратное двух чисел a и b .

2.6 Понятие тензорного произведения модулей

Рассмотрим два модуля M и N над кольцом A . За $C = A^{(M \times N)}$ обозначим свободный A -модуль, порожденный парами $(m, n) \in M \times N$. Рассмотрим в C подмодуль D , порожденный элементами следующего вида:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

Положим $T := C/D$ и для каждого $(x, y) \in C$ обозначим за $x \otimes y$ его образ в T при каноническом гомоморфизме A -модулей $C \rightarrow C/D$.

Определение 2.18 Тензорным произведением A -модулей M и N назовем построенный выше модуль T и обозначим

$$M \otimes_A N := T.$$

Из (6) сразу следуют некоторые свойства элементов T :

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' \\ (ax) \otimes y &= a(x \otimes y) \\ x \otimes (ay) &= a(x \otimes y) \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема, носящая название универсального свойства тензорного произведения:

Теорема 2.8 [2] Пусть M и N — A -модули, тогда существует пара (T, g) , состо-

ящая из A -модуля T и A -билинейного отображения $g : M \times N \rightarrow T$, со следующими свойствами:

1. Для любого A -модуля P и A -билинейного отображения $f : M \times N \rightarrow P$ существует единственное отображение $f' : T \rightarrow P$, такое, что $f = f' \circ g$.
2. Если (T, g) и (T', g') две пары с таким свойством, то существует изоморфизм $j : T \rightarrow T'$ для которого $g' = j \circ g$.

2.7 Свойства тензорного произведения модулей

Для любых A -модулей M, N, P справедлив ряд свойств [2]:

$$M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M. \quad (7)$$

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A N \otimes_A P. \quad (8)$$

$$(M \oplus N) \otimes_A P \simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P). \quad (9)$$

$$M \otimes_A A \simeq M. \quad (10)$$

Большой интерес представляют свойства точности тензорного произведения.

Теорема 2.9 [2] Пусть дана точная последовательность

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0, \quad (11)$$

а N — произвольный A -модуль, тогда последовательность

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \rightarrow 0 \quad (12)$$

(где 1 — тождественное отображение) точна.

Тензорное произведение не сохраняет точность слева. Например, рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}.$$

Умножим ее тензорно на \mathbb{Z}_2 над \mathbb{Z} . Получим

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\cdot 2) \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2. \quad (13)$$

Но $\ker((\cdot 2) \otimes 1) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, так как $2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$; отсюда видим, что последовательность (13) не является точной.

2.8 Периодические произведения

2.8.1 Понятие свободной резольвенты A -модуля

Введем понятие свободной резольвенты A -модуля M .

Пусть M порожден системой образующих $\{x_j \mid j \in I\}$, то есть $M = \langle x_j \rangle_A$. Рассмотрим свободный A -модуль $F_0 \simeq \bigoplus_{i \in I} A =: A^{(I)}$ и сюръективный гомоморфизм A -модулей $\varphi_0 : F_0 \twoheadrightarrow M$. Гомоморфизм φ_0 определяется как композиция прямой суммы A -гомоморфизмов $g_i : A \rightarrow M$, где $\alpha \in A \mapsto \alpha x_i$ с гомоморфизмом суммирования $\Sigma : \bigoplus_{i \in I} M \rightarrow M$, где $(\dots, m_j, \dots) \mapsto \sum_{j \in I} m_j$. Важно, что при формировании прямой суммы участвуют финитные последовательности. Итак, гомоморфизм φ_0 определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j \in I} A & \xrightarrow{(\dots, g_i, \dots)} & \bigoplus_{j \in I} M \\ & \searrow \varphi_0 & \downarrow \Sigma \\ & & M \end{array}$$

Теперь охарактеризуем $\ker \varphi_0$ аналогичным образом: выберем систему образующих A -модуля $\ker \varphi_0$, свободный A -модуль F_1 и отображим его сюръективно на $\ker \varphi_0$ с помощью A -гомоморфизма $\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow \ker \varphi_0$. Снова может случиться так, что $\ker \varphi_1$ нетривиально. Значит, рассмотрим еще один свободный A -модуль F_2 и повторим уже описанные выше действия.

Таким образом получим, возможно бесконечную, точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \dots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0.$$

Уберем из этой последовательности член M :

$$M_* : \dots \xrightarrow{\varphi'_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \dots \xrightarrow{\varphi'_2} F_1 \xrightarrow{\varphi'_1} F_0 \xrightarrow{\varphi'_0} 0. \quad (14)$$

Где $\varphi'_i = \varphi_i$ при $i \geq 1$, а φ_0 — постоянное отображение. Последовательность (14) точна во всех членах кроме члена с индексом 0. Однако, она обладает следующим свойством

$$\varphi'_i \circ \varphi'_{i+1} = 0 \text{ для всех } i \geq 0. \quad (15)$$

Последовательность A -модулей (14) в которой выполнено условие (15) называется *комплексом A -модулей*. Далее последовательность вида (14) будем называть *свободной резольвентой A -модуля M* .

Свойство (15) в точности означает, что

$$\operatorname{im} \varphi'_i \subseteq \ker \varphi'_i$$

и позволяет определить фактормодуль

$$H_i(M_*) = \frac{\ker \varphi'_i}{\operatorname{im} \varphi'_{i+1}} \quad (16)$$

Он носит название модуля *гомологий* комплекса M_* в члене с номером i .

Если M_* — свободная резольвента A -модуля M , то $H_0(M_*) \simeq M$, а $H_i(M_*) = 0$, при $i \geq 1$.

2.8.2 Понятие периодического произведения

Зафиксируем некоторый A -модуль M и рассмотрим операцию тензорно умножения $(- \otimes_A M)$ на этот модуль над кольцом A . Мы получим функтор, действующий из категории A -модулей в нее же. Рассмотрим A -модуль N и фиксируем его свободную резольвенту

$$N_* : \dots \rightarrow N_i \rightarrow N_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow N_1 \rightarrow 0.$$

Умножим ее тензорно на M .

$$\dots \rightarrow N_i \otimes_A M \rightarrow N_{i-1} \otimes_A M \rightarrow \dots \rightarrow N_1 \otimes_A M \rightarrow 0.$$

Так как тензорное умножение не является точным слева, точность в некоторых членах последовательности пропадет. Гомологии комплекса $H_i(N_* \otimes_A M)$ называются *пе-*

периодическими произведениями и обозначаются $\text{Tor}_i^A(N, M)$, а сам $\text{Tor}_i^A(-, M)$ является i -м левым производным функтором функтора $(- \otimes_A M)$. В некоторых случаях удается непосредственно вычислить $\text{Tor}_i^A(N, M)$.

2.9 Непосредственное вычисление некоторых тензорных и периодических произведений

Предложение 2.1 Пусть n, m — натуральные числа. Тогда

$$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow 0$$

и тензорно умножим ее на \mathbb{Z}_n над \mathbb{Z} . Из свойств точности тензорного произведения следующая последовательность

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{(\cdot m) \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

будет точна. Воспользуемся свойством (10) и упростим члены в последовательности:

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0.$$

Из первой теоремы об изоморфизме $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n / \ker(\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n)$, а так как последовательность точна $\ker(\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n) = \text{im}(\cdot m)$. Образом $\text{im}(\cdot m)$ является ничто иное как $m\mathbb{Z}_n$. Значит

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n.$$

Выясним вид подмодуля $m\mathbb{Z}_n$. Заметим, что $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$, а $m\mathbb{Z}_n = \langle \bar{m} \rangle = \langle m \cdot \bar{1} \rangle$. Вычислим теперь порядок элемента \bar{m} . Воспользуемся следующим утверждением:

Утверждение 2.1 [3] Пусть $g \in G$ — элемент группы G порядка $\text{ord}_G g = n$. Тогда $\text{ord}_G(g^k) = n / (k, n)$.

Из него непосредственно вытекает, что $\text{ord}_{\mathbb{Z}_n} \bar{m} = n / (n, m)$. Значит

$$|m\mathbb{Z}_n| = n / (n, m). \quad (17)$$

Теперь вычислим $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n$. Так как факторгруппа циклической группы по подгруппе снова циклическая и все группы, участвующие в рассмотрении, конечны, осталось вычислить порядок данной факторгруппы. Из теоремы Лагранжа вытекает, что $|\mathbb{Z}_n| = k|m\mathbb{Z}_n|$, где k — число смежных классов по подгруппе $m\mathbb{Z}_n$, то есть порядок фактор-группы. Из (17) и теоремы Лагранжа вытекает, что

$$|\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n| = (n, m),$$

а это значит что $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. В итоге получаем, что

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

■

Из предложения 2.1 сразу видно, что при взаимно простых n и m имеем

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0.$$

Это значит что тензорное произведение двух нетривиальных A -модулей может давать тривиальный модуль.

Предложение 2.2 Пусть A, B — конечные абелевы группы, и

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}},$$

Тогда

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами (9) и (10) тензорного произведения:

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s (\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

■

Предложение 2.3

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n,m)}, & i = 0, 1; \\ 0, & i \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим свободную резольвенту \mathbb{Z} -модуля \mathbb{Z}_n

$$C_* : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

и тензорно умножим ее на \mathbb{Z}_m над \mathbb{Z}

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \rightarrow 0.$$

Можно сразу заметить, что все

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = 0 \text{ при } i > 1.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_m / n\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Теперь, вычисляя первый модуль гомологий

$$H_1(C_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m) = \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m) = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\bar{x} = 0\}.$$

Получаем что

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\bar{x} = 0\}.$$

Но так как [5]

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n),$$

то хотелось бы найти такой изоморфный ему модуль, чтобы была видна симметрия.

Утверждение 2.2 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$

Докажем, что $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \bar{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$, где $q = m/(n, m)$. Выберем произвольный представитель класса $\bar{q}k$ и умножим его на n :

$$\frac{knm}{(n, m)} = k[n, m],$$

где $[n, m]$ — наименьшее общее кратное чисел n и m . Имеем, $k[n, m]$ делится на m , а следовательно $\bar{q}k \in \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

С другой стороны $\forall x \in \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ выполнено $xn \equiv 0 \pmod{m}$. Значит

$$xn = l[n, m] = l \frac{nm}{(n, m)} \Rightarrow x = l \frac{m}{(n, m)} \Rightarrow \bar{x} \in \langle \bar{q} \rangle.$$

Отсюда получаем, что $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \bar{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$. Заметим, что

$$\text{ord } \bar{q} = \text{ord}(\bar{1} \cdot q) = m \left/ \left(\frac{m}{(n, m)} \cdot 1, \frac{m}{(n, m)}(n, m) \right) \right. = (n, m).$$

Значит, $\langle \bar{q} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$, а следовательно и $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. ■

Обобщим предложение 2.3:

Предложение 2.4 Пусть A, B — конечно порожденные абелевы группы, и

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

Тогда

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой о конечно порожденных абелевых группах: представим каждую из них в виде прямой суммы примарных и бесконечных циклических групп [3]:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим свободную резольвенту для \mathbb{Z}_{p^k}

$$C_* : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

и тензорно умножим ее на некоторую абелеву группу N

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{(p^k) \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow 0.$$

Аналогично доказательству предложения 2.3 получаем, что

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^k}, N) = \{n \in N \mid p^k n = 0\}.$$

Теперь вернемся к исходным группам A и B .

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}, \mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Заметим, что изоморфизм $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ будет существовать, только когда A и B — конечные абелевы группы. ■

3 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A -алгебру \tilde{A} .

В [6] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \tilde{A} \otimes_A M$. Алгебра \tilde{A} получается при этом следующим образом: $\tilde{A} = \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A .

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 3.1 Пусть $I \subset A$ – идеал. Алгебра раздутия идеала I задается выражением

$$\hat{A} := \bigoplus_{s \geq 0} I^s.$$

При этом сложение и умножение элементов кольца \hat{A} и действие элементов кольца A на элементы кольца \hat{A} наследуются с операций кольца A .

Кольцо \hat{A} градуировано, то есть, если $x \in I^s, y \in I^t$, то $xy \in I^{s+t}$. Если $x \in I^s$, то будем говорить, что x имеет степень s . Также отметим, следующее: если кольцо A – целостное, то и кольцо \hat{A} тоже будет целостным.

Определение 3.2 Пусть M – произвольный A -модуль, A – целостное кольцо. Кручением $\text{tors}(M)$ называется множество

$$\text{tors}_A M = \{x \in M \mid \exists a \in A \setminus 0 : ax = 0\}.$$

Определение 3.3 Будем говорить, что A -модуль M является *модулем без кручения*, если $\text{tors}_A M = 0$.

Заметим, если A не является целостным кольцом, то $\text{tors}_A M$ не обязательно является подмодулем в M .

Далее в тексте под $\text{tors}(M)$ без нижнего индекса будем подразумевать $\text{tors}_A M$.

Пусть M – A -модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия \hat{A} в модуле $\hat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\text{tors}(\hat{A} \otimes_A I)$ A -модуля $\hat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним, как устроены его степени.

Теорема 3.1 Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \dots, xy^{s-1}, y^s)$.

Доказательство. Действуем методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда

$I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно для значений $s \leq r$. При $s = r+1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^r a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \middle| a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \{b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \dots + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} \mid a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1}\}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j ,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, x y^r, y^{r+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 3.1 Пусть $\{M_j \mid j \in J\}$ – семейство A -модулей, и кольцо A – целостное. Тогда

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) \subset \bigoplus_{j \in J} \text{tors} (M_j)$. Пусть $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число компонент t_j отлично от нуля. Так как умножение на элементы прямой суммы производится покомпонентно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \text{tors}(M_0)$, $t_1 \in \text{tors}(M_1)$, \dots , $t_j \in \text{tors}(M_j)$, \dots . Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors}(M_j)$. Теперь докажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \text{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все компоненты t , отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in A$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Значит $t \in \text{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right)$. ■

Теперь, воспользовавшись предложением 3.1, можно записать следующее:

$$\text{tors} \left(\bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I) \right) = \bigoplus_{s \geq 0} \text{tors} (I^s \otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\text{tors} (I^s \otimes_A I)$ A -модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 3.2 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ имеющие равные степени, алгебраически независимы. Тогда $\text{tors} (I^s \otimes_A I)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors} (I^s \otimes_A I) = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечно порожденными A -модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения для двух конечно порожденных модулей, имеем

$$I^s \otimes_A I = \langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0, s} \rangle_A.$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \rightarrow I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}$, $x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker \mu = \text{tors} (I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\text{tors} (I^s \otimes_A I) \subset \ker \mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker \mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, тогда z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y \otimes x) + \dots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ b_1(x^s \otimes y) + \dots + b_s(xy^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$. Тогда $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0 x^{s+1} + (a_1 + b_1) x^s y + \dots + (a_s + b_s) x y^s + b_{s+1} y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 &= 0, \\ a_1 + b_1 &= 0, \\ \dots & \\ a_s + b_s &= 0, \\ b_{s+1} &= 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1, s}$ и

$$\ker \mu = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

Покажем, что любая образующая $\ker \mu$, то есть $x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y$, является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y)$

и преобразуем его:

$$\begin{aligned} xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y) = \\ x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1} y^{s-n-1}) \otimes xy = \\ x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy = 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включение $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker \mu$, и имеет место равенство

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I) = \langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \rangle_A.$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.3 Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:

$$\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n, m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0, s}, m = \overline{0, r} \rangle_A.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \rightarrow I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker \mu = \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме, мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r) / \ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручения, из чего следует, что $\text{tors}(I^s \otimes_A I^r) \subset \ker \mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker \mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих

$$z = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$, получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0 \leq n \leq s \\ 0 \leq m \leq r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение

запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}, \quad (18)$$

докажем, что $z \in \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем $k, n \leq \min(s, k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим ее на $x^r y^r$, где r — показатель степени идеала I^r . Имеем

$$\begin{aligned} x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) &= \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} &= \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r. \end{aligned}$$

Умножив выражение (18) на $x^r y^r$, мы получим сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \sum_{k=0}^{s+r} \left[\left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r \right] = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij} . Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \text{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ■

Следствие 3.4 Пусть числа a, b — натуральные, $I = (x, y)^a$, $J = (x, y)^b$, тогда

$$\text{tors}(I^s \otimes_A J) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq as \\ 0 \leq m \leq b}} a_{nm} x^n y^{as-n} \otimes x^m y^{b-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n, m.$$

Заметим, что если на прямой сумме $\bigoplus_{s \geq 0} I^s$ рассмотреть покомпонентное умножение (вместо структуры градуированного кольца), то полученные нами результаты не изменятся.

Исходную задачу можно видоизменить, заменив алгебру раздутья на алгебру

$$\tilde{A} := \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}),$$

где t – элемент, трансцендентный над A , а умножение определяется покомпонентно. Отметим, что алгебра \tilde{A} является A -алгеброй без кручения, однако, если рассматривать \tilde{A} как алгебру над \tilde{A} , то возникают элементы кручения, например, $(0, t, 0, \dots)$. Далее будем работать с \tilde{A} как с A -алгеброй.

Обозначим s -ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s := (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 3.1 *A -модуль I_t^s допускает следующее разложение в сумму своих A -подмодулей*

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A. \quad (19)$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s , так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени обратятся в 0. По определению, $(I[t] + (t))^s$ состоит из произведений s произвольных элементов $I[t] + (t)$. Поэтому, чтобы выяснить структуру $(I[t] + (t))^s$, необходимо рассмотреть произведение

$$\prod_{n=1}^s (a_{n0} + (a_{n1} + b_n)t + a_{n2}t^2 + \dots + a_{ns}t^s),$$

где $a_{nj} \in I, b_n \in A, n = \overline{1, s}, j = \overline{0, s}$. Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при $t^k, 0 \leq k \leq s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k , которые имеют вид

$$b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_k} a_{j_{k+1}0} \dots a_{j_s0},$$

где множества $\{j_1, \dots, j_k\}, \{j_{k+1}, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, s\}$ не пересекаются, а $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k} , при этом взять в произведении большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I , нельзя, так как мы ограничены степенью k . Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k . Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r , где $r \geq s - k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k , что оно принадлежит I^r , например, пусть $r = l + (s - k)$

$$a_{11} a_{21} \dots a_{l1} b_{l+1} \dots b_k a_{k+1,0} \dots a_{s0} \in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s как A -модуля в сумму своих A -подмодулей

$$I_t^s = \langle 1, t, \dots, t^s \rangle_{I^s} + \langle t, t^2, \dots, t^s \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1}, t^s \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s \subset I^{s-1} \subset \dots \subset I \subset A$, то справедливы включения $\langle t^k \rangle_{I^s} \subset \langle t^k \rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s = \langle 1 \rangle_{I^s} + \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

■

Заметим, что сумма (19) является прямой внутренней суммой своих подмодулей. Теперь, зная строение A -модуля I_t^s , можно сформулировать теорему

Теорема 3.5 *Пусть $J \subset A$ – идеал в A , тогда*

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A J) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A J).$$

В частности,

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A I) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A I) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A I) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A I).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и, в силу теоремы 3.1, можно записать

$$\begin{aligned} \text{tors}(I_t^s \otimes_A J) &= \text{tors}(\langle t^0 \rangle_{I^s} \otimes_A J) + \text{tors}(\langle t^1 \rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J) + \dots \\ &\quad + \text{tors}(\langle t^{s-1} \rangle_{I^1} \otimes_A J) + \text{tors}(\langle t^s \rangle_A \otimes_A J). \end{aligned}$$

Так как t – элемент, трансцендентный над A , то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A . Значит, он не даст вклада в кручение и его можно вынести за знак $\text{tors}(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \text{tors}(I_t^s \otimes_A J) &= t^0 \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^s} \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J) + \dots \\ &\quad + t^{s-1} \text{tors}(\langle 1 \rangle_{I^1} \otimes_A J) + t^s \text{tors}(\langle 1 \rangle_A \otimes_A J). \end{aligned}$$

Но $\langle 1 \rangle_{I^k}$, очевидно, является самым идеалом I^k . Таким образом, имеем

$$\text{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \text{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \text{tors}(I^{s-1} \otimes_A J) + \dots + t^{s-1} \text{tors}(I \otimes_A J).$$

■

Задача свелась к вычислению $\text{tors}(I^s \otimes J)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 3.6 Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручение A -модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:

$$\begin{aligned} \text{tors}(I_t^s \otimes_A I) &= \langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \dots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y \rangle_A + \\ &\quad t \langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \dots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y \rangle_A + \\ &\quad \dots + \\ &\quad t^{s-1} \langle x \otimes y - y \otimes x \rangle_A. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3.5 и для каждого $\text{tors}(I^s \otimes_A I)$ применим теорему 3.2. ■

Как было отмечено ранее, \tilde{A} является алгеброй с кручением как алгебра над \tilde{A} с покомпонентным умножением. Выясним, какой вид имеет $\text{tors}_{\tilde{A}} \tilde{A}$. Заметим следующее

$$\text{tors}_{\tilde{A}} \tilde{A} = \text{tors}_{\bigoplus I_t^s} \bigoplus I_t^s = \bigoplus \text{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

так как умножение в прямой сумме осуществляется покомпонентно. Таким образом, мы свели исходную задачу к следующей: описать $\text{tors}_{I_t^s} I_t^s$. Справедлива

Теорема 3.7

$$\text{tors}_{I_t^s} I_t^s = \langle t \rangle_{I^{s-1}} + \dots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент I_t^s следующего вида

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \tag{20}$$

где $a_i \in I^{s-i}$, и умножим его на $1 \cdot t^s \neq 0$.

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s) t^s = a_1 t^{s+1} + a_2 t^{s+2} + \dots + a_s t^{2s} = 0,$$

то есть, мы показали, что элементы вида (20) действительно являются элементами кручения. Покажем, что никакие другие элементы вклада в кручение не дадут. Предположим, что

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_s t^s \in \text{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

где $a_0 \neq 0$. По определению, существует такой элемент $g \in I_t^s \setminus 0$, что $fg = 0$. Пусть

$$g = b_0 + b_1 t + \cdots + b_s t^s \neq 0.$$

Рассмотрим коэффициенты при t^k , $k = \overline{0, s}$ в произведении fg . Коэффициент при t^k обозначим как $[t^k]$.

$$\begin{aligned} [t^0] &= a_0 b_0 = 0 \\ [t^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ &\vdots \\ [t^s] &= a_0 b^s + \cdots + a_{s-1} b_1 + a_s b_0 = 0. \end{aligned}$$

Так как кольцо целостное, $a_0 \neq 0$, то, из уравнения на $[t^0]$, получаем $b_0 = 0$. Подставив $b_0 = 0$ в уравнение на $[t^1]$ и воспользовавшись целостностью кольца, получим $b_1 = 0$. Повторяя эти рассуждения далее, получим, что $b_0 = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Таким образом, f аннулирует только 0, значит $f \notin \text{tors}_{I_t^s} I_t^s$.

Таким образом, действительно, только элементы вида (20) являются элементами кручения. Все такие элементы описываются суммой

$$\langle t \rangle_{I^{s-1}} + \cdots + \langle t^{s-1} \rangle_I + \langle t^s \rangle_A.$$

■

Рассмотрим следующую задачу. Описать кручение \widehat{A} -модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, если он включается в короткую точную последовательность вида

$$0 \rightarrow I_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varepsilon} I_2 \rightarrow 0,$$

где $I_1, I_2 \subset A$ — идеалы в кольце A , A — целостное, нетерово кольцо.

Обозначим $\widehat{M} := M \otimes_A \widehat{A}$. Так как тензорное произведение не точно слева, то имеем последовательность вида

$$\widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \rightarrow 0,$$

в которой $\widehat{i} := i \otimes 1$, $\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \otimes 1$. Пусть $\tau := \ker \widehat{i}$. Тогда получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \tau \rightarrow \widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \rightarrow 0.$$

Справедливы вложения

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & \widehat{I}_1 & \xrightarrow{\widehat{i}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \widehat{I}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \tau & \longrightarrow & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 & \xrightarrow{\widehat{i}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}'} & \text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где гомоморфизмы в нижней строке получены путем ограничения гомоморфизмов верхней строки на соответствующие множества. Разложим гомоморфизм \hat{i}' в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов и рассмотрим нижнюю строку

$$0 \longrightarrow \text{tors}_{\hat{A}} \tau \longrightarrow \text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_1 \xrightarrow{\hat{i}'} \text{tors}_{\hat{A}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\varepsilon}'} \text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_2 \longrightarrow 0$$

$\searrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_1$
 $\text{tors}_{\hat{A}} \tau$

Отметим, что \hat{I}_1, \hat{I}_2 конечно порождены, согласно предложению 2.17 книги [2], как \hat{A} -модули, поэтому $\text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_2$ конечно порожден как подмодуль нетерова модуля, $\frac{\text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_1}{\text{tors}_{\hat{A}} \tau}$ конечно порожден как образ конечно порожденного модуля. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 4 §4 гл. 1 книги [4], которое утверждает, что расширение последовательности

$$0 \rightarrow \frac{\text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_1}{\text{tors}_{\hat{A}} \tau} \rightarrow \text{tors}_{\hat{A}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\varepsilon}'} \text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_2 \rightarrow 0$$

порождено образами порождающих ядра и прообразами порождающих коядра последовательности. Пусть $\hat{I}_2 = \langle \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m \rangle_{\hat{A}}$, $z_i \in \text{tors}_{\hat{A}} \hat{M}$ — произвольно выбранный прообраз \bar{z}_i ($i = \overline{1, m}$) и $\frac{\text{tors}_{\hat{A}} \hat{I}_1}{\text{tors}_{\hat{A}} \tau} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_{\hat{A}}$, \bar{x}_j — образ x_j в $\text{tors}_{\hat{A}} \hat{M}$ ($j = \overline{1, n}$), тогда

$$\text{tors}_{\hat{A}} \hat{M} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \rangle_{\hat{A}} + \langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle_{\hat{A}}. \quad (21)$$

Теперь выясним как охарактеризовать кручения произвольного \hat{A} -модуля $M \otimes_A \hat{A}$, при условии что M — нетеров A -модуль. Для этого нам потребуется утверждение:

Теорема 3.8 $M^\vee := \text{Hom}_A(M, A)$ — модуль без кручения.

Доказательство. Известно, что любой конечно порожденный модуль является образом свободного модуля подходящего ранга [4], то есть точна тройка

$$0 \rightarrow K \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где $K = \ker(A^n \rightarrow M)$. Перейдем от нее к двойственной. Получим последовательность

$$0 \rightarrow M^\vee \rightarrow A^n \rightarrow \dots$$

Так как A — целостное, то A^n — модуль без кручения, M^\vee обладает вложением в A^n , следовательно, M^\vee тоже модуль без кручения. ■

Пусть $t \in M^\vee \setminus 0$. Рассмотрим гомоморфизм $A \rightarrow M^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha t$. Заметим, что этот гомоморфизм инъективен, так как в противном случае t являлся бы элементом кручения, что невозможно по теореме 3.8. Имеем точную тройку A -модулей:

$$0 \rightarrow A \rightarrow M^\vee \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Перейдя от нее к двойственной получим последовательность, неточную справа

$$0 \rightarrow N^\vee \rightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow A \rightarrow \dots$$

Разложим гомоморфизм $M^{\vee\vee} \rightarrow A$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & A \longrightarrow \dots \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & M^{\vee\vee}/N^\vee & & \end{array}$$

Так как $M^{\vee\vee}/N^\vee$ обладает вложением в A как A -модуль, то имеет место изоморфизм $M^{\vee\vee}/N^\vee \simeq J \subset A$ — некоторый идеал в кольце A . Таким образом имеем новую точную тройку

$$0 \rightarrow N^\vee \rightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow J \rightarrow 0.$$

Поскольку M — A -модуль без кручения, то имеет место вложение $M \xhookrightarrow{\varepsilon} M^{\vee\vee} : s \mapsto \varepsilon_s$, где $\varepsilon_s : t \mapsto t(s)$, включаемое в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & J \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

Обозначим $M_1 := \ker(M \rightarrow J_1)$, $J_1 := \text{im}(M \hookrightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow J)$ — идеал в A , при этом выполнены вложения $J_1 \subset J \subset A$. Имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N^\vee & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & J \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & J_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Так как $M_1 \subset M$, M — нетеров, следовательно, M_1 тоже нетеров. Повторим эти же действия для M_1 , потом для M_2 и так далее. Имеем убывающую фильтрацию

$$\dots \subset M_2 \subset M_1 \subset M. \quad (22)$$

Так как нетеров модуль необязательно артинов, то эта последовательность может быть бесконечной. Покажем что в нашем случае это не так и цепочка будет обрываться. Перейдем к локализации в нулевом идеале кольца A . $A \hookrightarrow A_0 =: Q(A)$ — поле частных кольца A . По свойству точности локализации имеем точную тройку A_0 -векторных пространств

$$0 \rightarrow (M_{i+1})_0 \rightarrow (M_i)_0 \rightarrow (J_{i+1})_0 \rightarrow 0.$$

Так как $(J_{i+1})_0 \simeq A_0$, то из свойства аддитивности A_0 -размерности (Предложение 2.11 книги [2]) имеют место равенства

$$\dim_{A_0}(M_i)_0 - \dim_{A_0} A_0 = \dim_{A_0}(M_i)_0 - 1 = \dim_{A_0}(M_{i+1})_0.$$

Таким образом, последовательность (22) действительно обрывается. В базовом случае будем иметь точную тройку вида

$$0 \rightarrow I_1 \rightarrow M_n \rightarrow I_2 \rightarrow 0,$$

в которой для A -модуля M_n уже можем вычислить кручения \widehat{A} -модуля \widehat{M}_n .

Далее можно действовать индуктивно, где для шага индукции имеем точную тройку

$$0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow I_{n-i+1} \rightarrow 0,$$

которая позволяет вычислить $\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}_i$, используя $\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}_{i-1}$ и $\text{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_{n-i+1}$ по формулам, аналогичным (21).

Заключение

В ходе работы были выполнены поставленные задачи: изучены понятия коммутативного кольца, идеала и модуля. Выполнены упражнения из книги [2], в ходе решения которых были доказаны различные условия при которых элементы конкретных колец обладают определенными свойствами (например, нильпотентность или обратимость). Были получены явные формулы для вычисления тензорных и периодических произведений в простейших случаях. В ходе работы были получены явные выражения для подмодуля кручения в некоторых тензорных произведениях, вычислены делители нуля алгебры $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$.

Список литературы

- [1] Айзенбад, Д. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию / Д. Айзенбад; пер. с англ. О.Н. Попова и др. под ред. Е.С. Голода. — М.: МЦНМО, 2017. — 752 с.
- [2] Атья, М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд; пер. с англ. Ю.И. Манин. — М.: Издательство «Мир», 1972. — 158 с.
- [3] Винберг, Э. Б. Курс алгебры. — 3-е изд., дополненное. / Э.Б. Винберг. — М.: МЦНМО, 2017. — 592 с.
- [4] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия: В 3-х т. — Т.2.: Модули и алгебры / Р. Зуланке, А.Л. Онищик — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с.: ил.
- [5] Маклейн, С. Гомология. / С. Маклейн; пер. с англ. М.С. Цаленко под ред. А.Г. Куроша. — М.: Издательство «Мир», 1966. — 534 с.
- [6] Тимофеева, Н.В. “Модули допустимых пар и модули Гизекера–Маруямы”, Матем. сб., 210:5 (2019), 109–134.