1 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В **[Ссылка на статью]** автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s\geq 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A;

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 1.1 Пусть $I \subset A$ идеал. Алгеброй раздутия идеала I назовем выражение $\widehat{A} := \bigoplus_{s\geq 0} I^s$.

Определение 1.2 Пусть M – произвольный A-модуль. Подмодулем кручения $\operatorname{tors}(M)$ называется множество

$$\operatorname{tors}(M) = \{x \in M | \exists a \in A \setminus \{0\}, ax = 0\}.$$

Определение 1.3 Будем говорить, что A-модуль M является модулем без кручения, если $\operatorname{tors}(M) = 0$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним как устроены его степени.

Теорема 1.1 *Пусть $s \geq 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда $I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно значений $s \leq r$. При $s = r + 1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) | a_n, b_m \in A \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$I^{r+1} = \left\{ b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \cdots + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A \right\}$$

Таким образом,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \ldots, x y^r, y^{r+1}),$$

Что завершает доказательство теоремы. ■

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы **[сослаться на соответствующую главу]**, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geq 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 1.1 *Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A-модулей. Кольцо A – целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus \{0\}$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число t_j отлично от нуля. Так как в прямой сумме умножение производится покоординатно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0), t_1 \in \operatorname{tors}(M_1), \dots, t_j \in \operatorname{tors}(M_j), \dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь покажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все элементы t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо целостное, то ни при каких a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1,k}$. Тем самым мы показали, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. ∎

Теперь, воспользовавшись предложением 1.1, можно записать седующее:

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{s \geq 0} (I^s \otimes_A I) \right) = \bigoplus_{s \geq 0} \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ A-модуля $I^s \otimes_A I$.

Теорема 1.2 *Пусть образующие иделала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда* $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечнопорожденными A-модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения **[Ссылка на это свойство]**, имеем

$$I^s \otimes_A I = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x, x^n y^{s-n} \otimes y | n = \overline{0, s} \right\rangle_A.$$

Пусть $\mu : I^s \otimes_A I \to I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^n y^{s-n} \otimes x \mapsto x^{n+1} y^{s-n}$, $x^n y^{s-n} \otimes y \mapsto x^n y^{s-n+1}$. Докажем, что

$\ker\mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1} \simeq (I^s \otimes_A I)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) \subset \ker\mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker\mu$. Пусть $z \in I^s \otimes_A I$, z имеет вид

$$\begin{aligned} z = a_0(x^s \otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y \otimes x) + \cdots + a_s(y^s \otimes x) + \\ &+ b_1(x^s \otimes y) + \cdots + b_s(xy^{s-1} \otimes y) + b_{s+1}(y^s \otimes y), \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A$.

$\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z) = a_0x^{s+1} + (a_1 + b_1)x^s y + \cdots + (a_s + b_s)xy^s + b_{s+1}y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z) = 0$ и воспользовавшись тем фактом, что x, y алгебраически независимы, мы получим условие на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 + b_1 & = 0 \\ \dots & \\ a_s + b_s & = 0 \\ b_{s+1} & = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = b_{s+1} = 0$, $a_i = -b_i$, $i = \overline{1, s}$ и

$$\ker\mu = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

Покажем, что любая образующая $\ker\mu$ — $x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y$ является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y)$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} &xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y) = \\ &\qquad x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1}y^{s-n-1}) \otimes xy = \\ &\qquad\qquad x^{n+1}y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1}y^{s-n} \otimes xy = 0. \end{aligned}$$

Действительно, каждая образующая $\ker\mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включнение $\ker\mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker\mu$ и имеет место равенство

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1}y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

■