МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Кафедра алгебры и математической логики

Сдано на кафедру
«16» июня 2020 г.
Заведующий кфедрой
д.ф.-м.н., профессор
______________ Казарин Л.С.

Выпускная квалификационная работа

Модули, замена коэффициентов и кручение

направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
профессор,
д-р ф.-м.н., доцент
______________ Тимофеева Н.В.
«16» июня 2020 г.

Студент группы ПМИ-41БО
______________ Медведев Е.А.
«16» июня 2020 г.

Ярославль 2020 г.

Реферат

Данная работа содержит 45 страниц, в работе использовано 6 источников.

В главе 1 рассматриваются основные понятия коммутативной алгебры, связанные с коммутативными кольцами и идеалами. Формулируются основные теоремы, связанные с ними, а также приводятся решения некоторых задач из главы 1 книги [2].

В главе 2 рассматривается понятие A-модуля над коммутативным ассоциативным кольцом A с единицей, формулируются элементарные теоремы, связанные с понятием A-модуля, далее рассматривается понятие точной последовательности модулей, тензорного и периодического произведений двух модулей и их свойств. Производится вычисление тензорного произведения и периодического произведения двух модулей с помощью свободной резольвенты A-модуля.

Глава 3 посвящена вычислению подмодуля кручения в тензорных произведениях вида $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A J$, где $I, J \subset A$ — идеалы и $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A M$, рассматриваемом как $\widehat{A} = \bigoplus_{s\geqslant 0} I^s$-модуль, где M — A-модуль. а также вычисление делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$ с покомпонетным умножением.

Ключевые слова: идеал, коммутативное кольцо, кручение, модуль, периодическое произведение, тензорное произведение.

Содержание

Введение

В данной работе решен ряд задач, связанных с теорией модулей над коммутативным кольцом. Были поставлены как исключительно учебные, так и задачи, происходящие из научных разработок руководителя.

1. Изучить основные понятия и теоремы, связанные с коммутативными кольцами и идеалами.
2. Выполнить ряд упраженений из книги [2].
3. Изучить основные понятия и теоремы, связанные с модулями над коммутативным кольцом.
4. Представить явные формулы для вычисления тензорных и периодических произведений в некоторых простейших случаях.
5. Вычислить кручение в тензорных произведениях вида $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right) \otimes_A M$.
6. Вычислить делители нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$.

Работа состоит из трех глав.

В первой главе работы рассмотрены коммутативные кольца, идеалы и операции над ними. В этой же части приведены решения некоторых упражнений из главы 1 книги [2]. В процессе решения упражнений были изучены такие понятия как радикал идеала, частное идеалов, расширение и сужение идеалов, понятие простого спектра кольца.

Во второй главе работы рассматриваются модули над заданным коммутативным кольцом и операции над ними. Вводится классическое понятие тензорного произведения, рассматриваются его свойства и даются явные формулы для вычисления тензорных произведений в некоторых простейших случаях. Далее приводится известная конструкция периодических произведений с помощью свободных резольвент и основанное на ней явное вычисление $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$, где A и B — конечно порожденные абелевы группы.

Третья глава работы посвящена вычислению кручения в тензорных произведениях вида $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right)\otimes_A M$, где $I\subset A$ — идеал в целостном кольце A, M — A-модуль, $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t]+(t))^s/(t^{s+1})\otimes_A J$, где $J\subset A$ — идеал, вычислению делителей нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0} (I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$ с покомпонентным умножением и вычислению кручения в тензорном произведении $\left(\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s\right)\otimes_A M$, рассматриваемом как $\widehat{A}=\bigoplus_{s\geqslant 0} I^s$-модуль.

1 Кольца и идеалы

1.1 Определение кольца. Основные свойства

Дадим определение кольца:

Определение 1.1 *Коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей* A называется абелева группа A с операцией $\cdot : A \times A \to A$, которая удовлетворяет следующим свойствам для всех $x, y, z \in A$:

1. Дистрибутивность — $x \cdot (y + x) = x \cdot y + x \cdot z$;
2. Коммутативность — $x \cdot y = y \cdot x$;
3. Ассоциативность — $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
4. Существует нейтральный по умножению элемент 1.

Далее в тексте $x \cdot y$ будем записывать как xy. Под кольцом далее будем понимать коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 1.2 *Идеалом* $\mathfrak{a}$ в кольце A называется подгруппа в A, такая что $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

Определение 1.3 Пусть задано некоторое подмножество $E \subseteq A$. Будем говорить, что *идеал* $\mathfrak{a}$ *порожден множеством* E, если $\mathfrak{a}$ представляет собой множество конечных A-линейных комбинаций элементов E.

Определение 1.4 *Полем* называется кольцо, в котором $1 \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный.

Сформулируем теорему, с помощью которой можно установить, является кольцо полем или нет.

Теорема 1.1 *[2] Пусть A — ненулевое кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *A — поле;*
2. *В A нет идеалов, кроме* 0 *и* (1)*;*
3. *Любой гомоморфизм $A \to B$, где B ненулевое кольцо, инъективен.*

1.2 Простые идеалы и максимальные идеалы

Среди множества всех идеалов кольца A выделяют особые типы идеалов: простые и максимальные.

Определение 1.5 Идеал $\mathfrak{p}$ в кольце A называется *простым*, если $\mathfrak{p} \neq (1)$ и из включения $xy \in \mathfrak{p}$ следует, что либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

Определение 1.6 Идеал $\mathfrak{m}$ в кольце A называется *максимальным*, если $\mathfrak{m} \neq (1)$ и не существует идеала $\mathfrak{a}$, удовлетворяющего условиям $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq (1)$.

Данные выше определения можно сформулировать иначе:

$$\mathfrak{p} \text{ — простой} \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ — область целостности.}$$

Действительно, из определения простого идеала следует, что $\overline{xy} = \overline{0}$ только в том случае, когда $x \in \mathfrak{p}$ или $y \in \mathfrak{p}$, где x, y — представители классов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно.

С другой стороны, так как $A/\mathfrak{p}$ область целостности, значит из равенства $\overline{xy} = \overline{0}$ следует что либо $\overline{x} = \overline{0}$, либо $\overline{y} = \overline{0}$, то есть либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{m} \text{ — максимальный} \Leftrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ — поле.}$$

Так как все идеалы, содержащие $\mathfrak{m}$, находятся в биективном соответствии с идеалами в $A/\mathfrak{m}$ [2], то сразу получаем, что $A/\mathfrak{m}$ — поле, так как $\mathfrak{m}$ максимальный.

Так как $A/\mathfrak{m}$ — поле, то оно не содержит идеалов кроме $\overline{0}$ и $(\overline{1})$, следовательно, идеал $\mathfrak{m}$ не содержат никакие другие идеалы, кроме (1), по определению $\mathfrak{m}$ максимален.

Так как любое поле является областью целостности, следовательно любой максимальный идеал прост.

Сформулируем важную теорему:

Теорема 1.2 *[2] В каждом кольце $A \neq 0$ существует максимальный идеал.*

Из доказательства теоремы, приведенного в [2] следует справедливость следующих утверждений:

Следствие 1.3 *[2] Всякий идеал $\mathfrak{a} \neq (1)$ содержится в некотором максимальном идеале.*

Следствие 1.4 *[2] Любой элемент из A, не являющийся обратимым элементом содержится в некотором максимальном идеале.*

Выделяют особый вид колец, в которых существует только один максимальный идеал. Такие кольца называют *локальными*.

Теорема 1.5 *[2]*

1. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m} \neq (1)$ — такой идеал в A, что любой элемент $x \in A \backslash \mathfrak{m}$ обратим. Тогда A — локальное кольцо, а $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.*

2. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и пусть любой элемент из $1 + \mathfrak{m}$ обратим в A. Тогда A — локальное кольцо.*

1.3 Нильрадикал и радикал Джекобсона

Определение 1.7 Множество всех нильпотентов кольца A называется *нильрадикалом кольца A* и обозначается $\mathfrak{N}(A)$.

Теорема 1.6 *[2]*

1. *Множество $\mathfrak{N}(A)$ является идеалом. В кольце $A/\mathfrak{N}(A)$ нет ненулевых нильпотентов.*

2. *$\mathfrak{N}(A)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов в A.*

Определение 1.8 *Радикалом Джекобсона* кольца A называется пересечение всех его максимальных идеалов и обозначается $\mathfrak{R}(A)$.

Теорема 1.7 *[2] $x \in \mathfrak{R}(A) \Leftrightarrow 1 - xy$ — обратим в A для всех $y \in A$.*

1.4 Операции над идеалами

Пересечение идеалов определяется естественным образом как пересечение множеств. Пересечение любого семейства идеалов снова будет идеалом [2].

Определим операции суммы и произведения идеалов.

Определение 1.9 Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Их *суммой* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ называют множество всех сумм $x+y$, где $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно определить сумму любого семейства идеалов $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$ как множество сумм вида $\sum_{i\in I} x_i$, где $x_i \in \mathfrak{a}_i$, в которых конечное число членов отлично от нуля.

Определение 1.10 *Произведением* $\mathfrak{ab}$ *идеалов* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ называется идеал, порожденный произведениями xy, $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Замечание. Можно аналогичным образом определить произведение любого конечного числа идеалов. В частности, можно определить степень $\mathfrak{a}^n$ идеала $\mathfrak{a}$, как идеал, порожденный всевозможными произведениями вида $x_1x_2\ldots x_n$, $x_i \in \mathfrak{a}$.

Справедлив ряд свойств для операций пересечения, суммы и произведения идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in A$ [2].

1. Коммутативность и ассоциативность суммы, произвдения и пересечения идеалов.

2. Дистрибутивный закон: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{ab}+\mathfrak{bc}$.

3. Модулярный закон: $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, при $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{c}$.

4. $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$, если $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$.

Объединение идеалов в общем случае идеалом не является [2].

Определение 1.11 Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в A. Их *частным* называется множество

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\},$$

которое само является идеалом [2].

Определение 1.12 *Аннулятором* $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ идеала $\mathfrak{a}$ называется множество $(0 : \mathfrak{a})$, то есть множество таких элементов $x \in A$, что $x\mathfrak{a} = 0$.

Множество D всех делителей нуля можно описать как

$$D = \bigcup_{x\in A\setminus 0} \mathrm{Ann}(x),$$

где под $\mathrm{Ann}(x)$ мы понимаем аннулятор идеала (x).

Упражнение 1.1 *Доказать следующие утверждения* $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *идеалов в кольце* A.[1]

1. $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$

2. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

3. $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$

4. $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i : b) = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$

5. $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

[1][2] Страница 18, упражнение 1.12.

Доказательство.

1. Так как $\mathfrak{a}$ – идеал и $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

2. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ справедливо, что $x\mathfrak{b} \in a \Rightarrow (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

3. Выберем произвольный $x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c})$, тогда

   $x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) \Leftrightarrow x\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

   Имеем $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$. А так как $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}\mathfrak{b})$, то получаем $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) =$
   $= ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$.

4. $\forall x \in (\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \bigcap_i \mathfrak{a}_i \Leftrightarrow x\mathfrak{b} \in \mathfrak{a}_i \; \forall i \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \; \forall i \Leftrightarrow x \in \; \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.

5. $\forall x \in (\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) \Leftrightarrow x \sum_i \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow \sum_i x\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow x\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{a} \; \forall i \Leftrightarrow x \in \; \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

■

Определение 1.13 Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. Его *радикалом* называется множество

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in A \mid \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Упражнение 1.2 *Доказать следующие утверждения для любых $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ идеалов в кольце A.*[2]

1. $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$

2. $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$

3. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$

4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

5. $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

6. $\mathfrak{p}$ *– простой* $\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}^n} = \sqrt{\mathfrak{p}}$

Доказательство.

1. $\forall x \in \mathfrak{a}$, $x^1 \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

2. Докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \subseteq \sqrt{a}$.

   $\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow \exists m > 0 : x^{nm} \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

   Из пункта 1 данного упражнения вытекает $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$.

   Таким образом $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

3. Сперва докажем что $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Учтем, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Тогда из того, что $x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, следует, что $x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Значит, $x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

   Теперь докажем, что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Leftrightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x^n \in \mathfrak{a} \wedge x^n \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \wedge x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

   Докажем что $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a} \wedge x^n \in \mathfrak{b} \Rightarrow x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

[2] [2] Страница 19, упражнение 1.13.

4. $\mathfrak{a} = (1) \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow 1 \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = (1)$.

5. Докажем $\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Из $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ следует $x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}}$.

   Теперь докажем $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}} \Rightarrow \exists n > 0 : x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}$. Значит, найдутся такие $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ и $z \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ такие что $x^n = y + z$.

   Заметим, что $\exists m > 0 : y^m \in \mathfrak{a}$ и $\exists l > 0 : z^l \in \mathfrak{b}$.

   Тогда $x^{n(m+l-1)} = \sum_{s=0}^{n(m+l-1)} C^s_{n(m+l-1)} y^s z^r$, где $s + r = n(m+l-1)$. Отсюда $x^{n(m+l-1)} \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

6. Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}}$.

   $\forall x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}^n$. Заметим, что $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}$. Отсюда $x^m \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}}$.

   Докажем $\sqrt{\mathfrak{p}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

   Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{p}} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{p}$. Отсюда $x \in \mathfrak{p} \Rightarrow x^n \in \mathfrak{p}^n \Rightarrow x \in \sqrt{\mathfrak{p}^n}$.

■

Теорема 1.8 *[2] Радикал идеала $\mathfrak{a}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.*

Доказательство. Рассмотрим факторкольцо $A/\mathfrak{a}$. Все x, такие, что $x^n \in \mathfrak{a}$, будут содержаться в нильрадикале $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})$ кольца $A/\mathfrak{a}$. Так как нильрадикал совпадает с пересечением всех простых идеалов $\overline{\mathfrak{p}}$ в кольце $A/\mathfrak{a}$ и имеется биективное соответствие между идеалами в $A/\mathfrak{a}$ и идеалами, содержащими $\mathfrak{a}$, то получаем, что $\sqrt{\mathfrak{a}}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$. ■

1.5 Расширение и сужение идеалов

Пусть $f : A \to B$ — некоторый гомоморфизм колец. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в A, то его образ $f(\mathfrak{a})$ не обязательно будет идеалом.

Определение 1.14 *Расширением* идеала $\mathfrak{a}$ кольца A называется идеал, порожденный множеством $f(\mathfrak{a})$, то есть идеал $Bf(\mathfrak{a})$. Обозначается как $\mathfrak{a}^e$.

Расширение идеала $\mathfrak{a}$ совпадает с множеством всевозможных конечных сумм вида $\sum_i y_i f(x_i)$, где $x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in B$.

Определение 1.15 *Сужением* идеала $\mathfrak{b}$ кольца B называется его прообраз $f^{-1}(\mathfrak{b})$ и обозначается $\mathfrak{b}^c$.

Теорема 1.9 *[2] Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ идеал в кольцах A и B соответственно, $f : A \to B$ — гомоморфизм колец. Тогда*

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$.

2. $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$.

3. *Пусть C — множество идеалов в A, являющихся сужениями, а E — множество идеалов в B, являющихся расширениями. Тогда*

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ce} = \mathfrak{a}\}, \qquad E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$$

и $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ — биективное отображение C на E, обратное к которому имеет вид $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$.

Упражнение 1.3 *Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$ – идеалы в кольце A, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ идеалы в кольце B и $f : A \to B$ гомоморфизм колец. Доказать следующие утверждения.*[3]

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$
2. $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$
3. $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$
4. $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$
5. $(\sqrt{\mathfrak{a}})^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}$
6. $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$
7. $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$
8. $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$
9. $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$
10. $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}$

Доказательство.

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1) + Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$.
2. $x \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \Rightarrow Bf(x) \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e \Rightarrow (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e$.
3. $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1)Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$.
4. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e = \{Bf(x) \mid \mathfrak{a}_2 x \subseteq \mathfrak{a}_2\}$.
   Следовательно, $\exists x_0 \in (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)$ такой что $y \in Bf(x_0)$. Заметим, $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq Bf(\mathfrak{a}_2)Bf(x_0) = Bf(\mathfrak{a}_2 x_0)$.
   Так как $\mathfrak{a}_2 x_0 \subseteq \mathfrak{a}_2$, значит $Bf(\mathfrak{a}_2 x_0) \subseteq Bf(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1^e$. Из $\mathfrak{a}_2^e y \subseteq \mathfrak{a}_1^e$ следует $y \in (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$.
5. Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{a}})^e \Rightarrow y \in Bf(x_0)$ для некоторого $x_0^n \in \mathfrak{a}$. Заметим $y^n \in B^n(f(x_0)^n) = Bf(x_0^n) \subseteq Bf(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e$. Отсюда $y \in \sqrt{\mathfrak{a}^e}$.
6. $\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c \subseteq ((\mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c)^e)^c = (\mathfrak{b}_1^{ce} + \mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c$.
7. Выберем произвольный $x \in (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, что равносильно

   $$f(x) \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow f(x) \in \mathfrak{b}_1 \wedge f(x) \in \mathfrak{b}_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \wedge x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_2).$$

   Отсюда $x \in f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.

[3][2] Страница 21, упражнение 1.18.

8. $\mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c)^{ec} = (\mathfrak{b}_1^{ce}\mathfrak{b}_2^{ce})^c \subseteq (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c$.

9. Выберем произвольный $y \in (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c$. Это значит что $y \in f^{-1}(x_0)$, где $x_0\mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}_1$. Заметим, что

$$f^{-1}(\mathfrak{b}_2)y \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2)f^{-1}(x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2 x_0) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_1).$$

Отсюда $y \in (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$.

10. Докажем, что $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.

Выберем произвольный $y \in (\sqrt{\mathfrak{b}})^c = f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})$. Это равносильно тому, что

$$\exists n > 0 : y \in f^{-1}(x_0), \text{где } x_0^n \in \mathfrak{b}.$$

Отсюда

$$y^n \in f^{-1}(x_0^n) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}) \Rightarrow y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}.$$

Докажем $(\sqrt{\mathfrak{b}})^c \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.

Выберем произвольный $y \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}$. Из этого следует $\exists n > 0$ такое, что $y^n \in \mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b})$. Тогда имеем

$$f(y^n) = (f(y))^n \in \mathfrak{b} \Rightarrow f(y) \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Rightarrow y \in f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}}) = (\sqrt{\mathfrak{b}})^c.$$

■

1.6 Решения упражнений в конце главы 1 книги [2]

Упражнение 1.4 *Доказать, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Leftrightarrow 1 + x \in U(A)$, где $x \in A$, A — кольцо; $\mathfrak{N}(A), U(A)$ — множество нильпотентов и обратимых элементов кольца A соответственно.* [4]

Доказательство.

Докажем, что $x \in \mathfrak{N}(A) \Rightarrow 1 + x \in U(A)$. Пусть n — такое число, что $x^n = 0$. Тогда

$$1 - (-x)^n = 1 = (1 - (-x))(1 + (-x) + \dots + (-x)^{n-1}).$$

Обозначим $S = 1 + (-x) + \dots + (-x)^{n-1}$. Имеем

$$1 = (1 + x)S \Rightarrow 1 + x \in U(A).$$

Теперь докажем более общее утверждение:

$$x \in \mathfrak{N}(A), u_0 \in U(A) \Rightarrow u_0 + x \in U(A).$$

Умножим $u_0 + x$ на u_0^{-1}:

$$u_0^{-1}(u_0 + x) = 1 + u_0^{-1}x = 1 + y, \text{где } y := u_0^{-1}x.$$

[4][2] Страница 21, упражнение 1

Заметим
$$1 = (1+y)(1+(-y)+(-y)^2+\cdots+(-y)^{n-1}),$$
обозначим $S = 1+(-y)+(-y)^2+\cdots+(-y)^{n-1}$ и умножим на u_0. Имеем
$$u_0 = (u_0+x)S \Rightarrow u_0+x \in U(A).$$
Теперь, полагая $u_0 = 1$, получаем требуемое доказательство. ■

Упражнение 1.5 *Пусть A — некоторое кольцо, а $A[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из A. Пусть*
$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x].$$
Доказать следующие утверждения: [5]

1. *f — обратимый элемент в $A[x]$ $\Leftrightarrow$ a_0 — обратимый элемент в A, а $a_1, \ldots, a_n$ — нильпотенты.*
2. *f — нильпотент $\Leftrightarrow$ $a_0, \ldots, a_n$ — нильпотенты.*
3. *f — делитель нуля $\Leftrightarrow$ существует ненулевой элемент $a \in A$ такой, что $af = 0$.*
4. *Многочлен f называется примитивным, если $(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Пусть $f, g \in A[x]$. Показать, что примититвность fg равносильна примитивности f и g.*

Докажем 1.
Доказательство.
$\Leftarrow$: Заметим, если $a \in A$ — нильпотент, то и $ax^k \in A[x]$ тоже нильпотент. Так же отметим, если $a \in A$ — обратим, то и $a \in A[x]$ обратим как многочлен нулевой степени. Воспользуемся результатом упражнения 1.4. Так как a_0 — обратим, а $\sum_{k=1}^{n} a_kx^k$ — нильпотент (множество всех нильпотентов кольца является идеалом [2]), то получаем, что f — обратим как сумма обратимого элемента и нильпотента.
$\Rightarrow$: Докажем следующее

Утверждение 1.1 *Пусть $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ — обратный к f многочлен, тогда $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты произведения fg. Коэффициент при x^k обозначим как $[x^k]$:
$$\begin{aligned}
[x^{n+m}] &= a_nb_m = 0\\
[x^{n+m-1}] &= a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0\\
[x^{n+m-2}] &= a_{n-2}b_m + a_{n-1}b_{m-1} + a_nb_{m-2} = 0\\
&\vdots\\
[x^2] &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0\\
[x^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0\\
[x^0] &= a_0b_0 = 1.
\end{aligned}$$

[5] [2] Страница 21, упражнение 2.

i-ую сверху строчку умножим на a_n^i. Получим:

$$\begin{aligned}
[x^{n+m}] &= a_n b_m = 0\\
[x^{n+m-1}]a_n &= a_{n-1}b_m a_n + a_n^2 b_{m-1} = 0\\
[x^{n+m-2}]a_n^2 &= a_{n-2}b_m a_n^2 + a_{n-1}b_{m-1}a_n^2 + a_n^3 b_{m-2} = 0\\
&\vdots\\
[x^2]a_n^{n+m-2} &= a_0 b_2 a_n^{n+m-2} + a_1 b_1 a_n^{n+m-2} + a_2 b_0 a_n^{n+m-2} = 0\\
[x^1]a_n^{n+m-1} &= a_0 b_1 a_n^{n+m-1} + a_1 b_0 a_n^{n+m-1} = 0\\
[x^0]a_n^{n+m} &= a_0 b_0 a_n^{n+m} = 1.
\end{aligned}$$

Из первой строчки $a_n b_m = 0$. Подставляя это во вторую, получаем, что $a_n^2 b_{m-1} = 0$. Подставляя эти оба равенства в третью, получаем, что $a_n^3 b_{m-2} = 0$ и так далее, по индукции, получаем что $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. ∎

Воспользуемся доказанным утверждением при $r = m$: $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Так как b_0 обратим, получаем что $a_n^{m+1} = 0$, следовательно a_n — нильпотент.

Обозначим $\tilde{f} = f - a_n x^n$. Так как f — обратимый элемент, а $a_n x^n$ — нильпотент, то $\tilde{f}$ тоже будет обратим. Теперь, повторяя аналогичное доказательство для $\tilde{f}$, получим, что a_{n-1} — нильпотент, и так до тех пор, пока $\deg f > 0$. При $\deg f = 0$ имеем $f = a_0$, откуда сразу получаем что a_0 — обратимый элемент. ∎

Докажем 2.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Так как $a_k \in A$ — нильпотенты для всех $k = \overline{0,n}$, то и $a_k x^k \in A[x]$ тоже будут нильпотентами, следовательно, и их сумма $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ будет нильпотентом.

$\Rightarrow$: Так как f — нильпотент, следовательно, существует такое $n_0 > 0$, что $f^{n_0} = 0$:

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots)\dots(a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0.$$

Отсюда получаем, что $a_0^{n_0} = 0$, значит a_0 — нильпотент. Обозначим $\tilde{f} = f - a_0$. Так как $f, a_0 \in A[x]$ нильпотенты, следовательно, и $\tilde{f}$ тоже будет нильпотентом. Проведем для $\tilde{f}$ аналогичные действия, по индукции получим, что a_k — нильпотенты для всех $k = \overline{0,n}$. ∎

Докажем 3.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Будем смотреть на a как на элемент кольца $A[x]$. Отсюда сразу получаем, что f — нильпотент.

$\Rightarrow$: Среди всех многочленов g таких, что $fg = 0$, выберем многочлен минимальной степени. Пусть это $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$.

Докажем следующее

Утверждение 1.2 *$a_{n-r} g = 0$ при всех $r = \overline{0,n}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по r.

$r = 0$: $a_n g = 0$, в противном случае степень m не была бы наименьшей и $a_n g f = 0$.

Пусть при $r = k$ утверждение было доказано. Докажем его при $r = k + 1$. Обозначим

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=0}^{k} a_{n-i} x^{n-i}.$$

Умножим $\tilde{f}$ на g:

$$\tilde{f}g = fg - \sum_{i=0}^{k} a_{n-i}gx^{n-i} = 0,$$

так как $fg = 0$ и при всех $i = \overline{0,k}$ $a_{n-i}g = 0$. Рассмотрим коэффициенты в произведении $\tilde{f}g$:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= a_0b_0 = 0 \\
[x^1] &= a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\
&\vdots \\
[x^{n-k-1}] &= a_{n-k-1}b_0 = 0.
\end{aligned}$$

Откуда получаем, что $a_{n-k-1}g = 0$, иначе степень m не была бы наименьшей и $a_{n-k-1}gf = 0$. ■

Для всех $i = \overline{0,n}$ имеем $a_ig = 0$, откуда следует $a_ib_m = 0$, следовательно, $b_mf = 0$. Искомый a положим равным b_m. ■

Докажем 4.

Доказательство. Пусть

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \qquad g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

$\Rightarrow$: Предположим, что fg примитивен, но f не является примитивным, то есть $\exists d \neq 1, 0$ такой, что $d \mid a_i$ при всех $i = \overline{0,n}$. Рассмотрим коэффициенты произведения fg:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= c_0 = a_0b_0 \\
[x^1] &= c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\
&\vdots \\
[x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} \\
[x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_nb_m.
\end{aligned}$$

Так как d делит все a_i, следовательно, d будет делить все c_j, следовательно, многочлен fg уже не будет примитивным. Значит предположение было неверно и f является примитивным. Аналогично доказывается примитивность g.

$\Leftarrow$: Предположим, что f, g примитивны, а fg не является примитивным. Пусть fg имеет следующий вид

$$fg = \sum_{j=0}^{n+m} c_jx^j.$$

Многочлен fg не примитивен, значит $\exists\mathfrak{p}$ — простой идеал, такой что $c_j \in \mathfrak{p}$ для всех $j = \overline{0, n+m}$.

$$\begin{aligned}
[x^0] &= c_0 = a_0b_0 \in \mathfrak{p} \\
[x^1] &= c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \in \mathfrak{p} \\
&\vdots \\
[x^{n+m-1}] &= c_{n+m-1} = a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} \in \mathfrak{p} \\
[x^{n+m}] &= c_{n+m} = a_nb_m \in \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

Так как f, g — примитивны, значит не все a_i и не все b_j не принадлежат $\mathfrak{p}$. Предположим, что найдутся такие a_i и b_j, что $a_i b_j \notin \mathfrak{p}$, причем все a_s при $s < i$ и все b_t при $t < j$ принадлежат $\mathfrak{p}$, но

$$c_{i+j} = \cdots + a_i b_j + \cdots \in \mathfrak{p},$$

следовательно, либо $a_i \in \mathfrak{p}$, либо $b_j \in \mathfrak{p}$. Таким образом, получили противоречие, значит либо f, либо g — не является примитивным. ■

Упражнение 1.6 *Доказать, что в кольце $A[x]$ радикал Джекобсона совпадает с нильрадикалом.*[6]

Доказательство.

Докажем $\mathfrak{N}(A[x]) \subseteq \mathfrak{R}(A[x])$.

Выберем произвольные $f, g \in \mathfrak{N}(A[x])$. Так как нильрадикал является идеалом, следовательно $fg \in \mathfrak{N}(A[x])$. Из упражнения 1.4 следует, что $1 - fg \in U(A[x])$, значит, из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{R}(A[x])$.

Докажем $\mathfrak{R}(A[x]) \subseteq \mathfrak{N}(A[x])$

Выберем произвольный $f \in \mathfrak{R}(A[x])$. Из предлжения 1.9[2] следует, что для всех $g \in A[x]$ выполнено $1 - fg \in U(A[x])$. Положим $g = x$. То есть $1 - xf \in U(A[x])$. Пусть многочлен f имеет следующий вид:

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

тогда $1 - xf$ будет иметь вид:

$$1 - xf = 1 - (a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}).$$

Воспользовавшись упражнением 1.4 получаем, что $a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$ — нильпотент. Из упражнения 1.5 пункта 2 вытекает, что $a_i \in \mathfrak{N}(A[x])$ для $i = \overline{1, n}$. Снова воспользовавшись результатом упражнения 1.5 пункт 2 получаем, что f — нильпотент, то есть $f \in \mathfrak{N}(A[x])$. Таким образом $\mathfrak{N}(A[x]) = \mathfrak{R}(A[x])$. ■

Упражнение 1.7 *Пусть A — некоторое кольцо, $A[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

с коэффициентами в A. Доказать следующие утверждения: [7]

1. *f — обратимый элемент в $A[[x]] \Leftrightarrow a_0$ — обратимый элемент в A.*
2. *Если $f \in \mathfrak{N}(A[[x]]) \Rightarrow a_n \in \mathfrak{N}(A)$ при всех $n \geqslant 0$.*
3. *$f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \Leftrightarrow a_0 \in \mathfrak{R}(A)$*

Докажем 1.

Доказательство.

[6] [2] Страница 21, упражнение 4.

[7] [2] Страница 21, упражнение 5.

$\Rightarrow$: Так как $f \in U(A[[x]])$, значит, существует элемент $g \in A[[x]]$ такой, что $fg = 1$. Выпишем несколько первых коэффициентов произведения:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= a_0 b_0 = 1 \\
[x^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\
[x^2] &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\
&\vdots \\
[x^m] &= \sum_{i+j=m} a_i b_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Из $a_0 b_0 = 1$ сразу следует, что $a_0 \in U(A)$.

$\Leftarrow$: Пусть $a_0 \in U(A)$. Построим формальный степенной ряд g такой, что $fg = 1$. Пусть g имеет вид

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Рассмотрим коэффициенты произведения fg:

$$\begin{aligned}
[x^0] &= a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1} \\
[x^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0) \\
[x^2] &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0) \\
&\vdots \\
[x^m] &= \sum_{i+j=m} a_i b_j = 0 \Rightarrow b_m = a_0^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{m} a_i b_{m-i}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого m за конечное число шагов мы сможем получить коэффициент b_m формального степенного ряда g. ∎

Докажем 2.

Доказательство.

Проведем доказательство, аналогичное доказательству упражнения 1.5 пункт 2. Так как f — нильпотент, следовательно, найдется такое натуральное число n_0, что $f^{n_0} = 0$. Имеем

$$f^{n_0} = \underbrace{(a_0 + \dots)(a_0 + \dots)\dots(a_0 + \dots)}_{n_0 \text{ скобок}} = a_0^{n_0} + \dots = 0,$$

откуда следует $a_0^{n_0} = 0$. Выполним замену $\tilde{f} = f - a_0$. Тогда $\tilde{f}$ снова будет нильпотентом, значит, найдется целое $n_1 > 0 : \tilde{f}^{n_1} = 0$. Имеем

$$\tilde{f}^{n_1} = \underbrace{(a_1 x + \dots)(a_1 x + \dots)\dots(a_1 x + \dots)}_{n_1 \text{ скобок}} = (a_1 x)^{n_1} + \dots = 0,$$

откуда получаем $a_1^{n_1} = 0$, и сделаем замену $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f} - a_1 x$. Для $\tilde{\tilde{f}}$ снова проведем аналогичные рассуждения. Таким образом, за конечное число шагов получим последовательно a_0 — нильпотент, a_1 — нильпотент, и так далее. ∎

Докажем 3.
Доказательство.

Из теоремы 1.7 $f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \Leftrightarrow 1 - fg \in U(A[[x]])$ при всех $g \in A[[x]]$. Пусть f и g имеют следующий вид:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Тогда условие $1 - fg \in U(A[[x]])$ запишется следующим образом:

$$1 - fg = (1 - a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \in U(A[[x]]). \quad (1)$$

Воспользовавшись пунктом 1 данного упражнения получим $1 - a_0b_0 \in U(A)$. Так как g выбирался произвольно, следовательно b_0 — произвольный элемент кольца A. Откуда вытекает, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$.

С другой стороны, из того, что $a_0 \in \mathfrak{R}(A)$, следует, что при всех b_0 будет выполнено $1 - a_0b_0 \in U(A)$, значит ряд (1) будет обратимым при всех b_n, $n \geqslant 0$, то есть при любых $g \in A[[x]]$. Отсюда, по теореме 1.7, получаем, что $f \in \mathfrak{R}(A[[x]])$. ■

Упражнение 1.8 *Пусть A — некоторое кольцо, X — множество всех его простых идеалов. Для вского подмножества $E \subset A$ обозначим $V(E)$ множество всех простых идеалов, содержащих E. Доказать следующие утверждения:* [8]

1. *Если $\mathfrak{a}$ — идеал, порожденный E, то $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.*
2. *$V(0) = X$, $V(1) = \varnothing$.*
3. *Пусть $(E_i)_{i \in I}$ — любое семейство подмножеств A. Тогда*
$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$
4. *$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ для любых идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ в A.*

Докажем 1.
Доказательство.

1. Доказательство $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

   То, что $\mathfrak{a}$ порожден множеством E, означает, что $\mathfrak{a}$ имеет вид
$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum_i a_i x_i \;\middle|\; a_i \in A, x_i \in E \right\},$$
   причем все суммы конечные.

   Покажем $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$,

   Выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(E)$. Для всех $x \in E$ будет выполнено $x \in \mathfrak{p}$, следовательно, любая A-линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ принадлежит $\mathfrak{p}$, где $a_i \in A$, $x_i \in E$, откуда получаем $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

[8] [2] Страница 22, упражнение 15.

Покажем $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$.

Выберем произвольный $x \in E$. Очевидно $x \in \mathfrak{a}$. Так как для всех $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, следовательно, $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $E \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \in V(E)$.

2. Доказательство $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

   Пусть $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ — произвольный элемент $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Это означает, что существует $n > 0$ такое, что $x^n \in \mathfrak{a}$. Теперь выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. По определению, выполнено $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Значит $x^n \in \mathfrak{p}$, а следовательно и $x \in \mathfrak{p}$. В силу произвольности выбора x получаем, что $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Таким образом, доказано, что $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

   Так как $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, то для всех $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ будет выполнено

$$\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p},$$

   значит, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, откуда $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\mathfrak{a})$.

■

Докажем 2.

Доказательство.

Так как $\forall \mathfrak{p} \in X$ справедливо $0 \in \mathfrak{p}$, следовательно $V(0) = X$.

Так как $A = (1)$ и не существует такого простого идеала $\mathfrak{p}$, что выполнено $(1) \subset \mathfrak{p}$, то $V(1) = \varnothing$. ■

Докажем 3.

Доказательство.

Покажем что $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$. По определению $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$, что равносильно $E_i \subseteq \mathfrak{p}$ для всех $i \in I$, откуда следует $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

Для доказательства $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$ достаточно провести предыдущее рассуждение в обратном порядке. ■

Докажем 4.

Доказательство.

Воспользовавшись свойствами радикалов сразу получаем

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V\left(\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}\right) = V\left(\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Осталось доказать равенство $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Выберем произвольный $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. По определению $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Это означает, что $\forall x \in \mathfrak{a}$, $\forall y \in \mathfrak{b}$ справедливо $xy \in \mathfrak{p}$. Пусть существует некоторый $x_0 \in \mathfrak{a}$ и $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Однако при всех $y \in \mathfrak{b}$ $x_0 y \in \mathfrak{p}$. Из определения простого идеала получаем $y \in \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, или, иными словами, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Покажем, что $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Пусть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ и, для определенности, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, тогда $\forall x \in \mathfrak{a}$ справедливо $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно и $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. ■

Таким образом, множества $V(E)$ удовлетворяют аксиомам замкнутых множеств в топологическом пространстве. Такая топология на X называется топологией Зарисского, а само пространство X называаеться *простым спектром кольца* и обозначается как $\mathrm{Spec}(A)$.

Упражнение 1.9 *Для всякого элемнта $f \in A$ обозначим через X_f дополнение к $V(f)$ в $X = \mathrm{Spec}(A)$. Множества X_f открыты. Доказать что они образуют базу топологии Зарисского и обладают следующими свойствами:* [9]

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
2. $X_f = \varnothing \Leftrightarrow f$ — *нильпотент.*
3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ — *обратимый элемент.*
4. $X_f = X_g \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
5. X — *квазикомпактно (т.е. у всякого открытого покрытия X есть конечное подпокрытие).*
6. *Более общо, X_f — квазикомпактны.*
7. *Открытое подмножество в X квазикомпактно тогда и только тогда, когда оно является конечным объединением множеств вида X_f.*

Здесь под $\overline{Q}$, где $Q \subset X$ будем понимать дополнение к множеству Q.

Определение 1.16 Семейство множеств B называется *базой* топологии, если любое открытое множество из топологического пространства X представимо в виде объединения элементов из B.

Докажем что X_f образуют базу топологии Зарисского.

Доказательство. Выберем произвольное множество $E \subset A$. Ему будет соответствовать некоторое открытое множество $\overline{V(E)} = Y$. Тогда

$$Y = \overline{V\left(\bigcup_{f\in E}\{f\}\right)} = \overline{\bigcap_{f\in E} V(f)} = \bigcup_{f\in E} \overline{V(f)} = \bigcup_{f\in E} X_f.$$

■

<u>Докажем 1.</u>

Доказательство. Воспользуемся свойствами замкнутых множеств в топологии Зарисского из упражнения 1.8.

$$X_f \cap X_g = \overline{V(f)} \cap \overline{V(g)} = \overline{V(f) \cup V(g)} = \overline{V(fg)} = X_{fg}.$$

■

<u>Докажем 2.</u>

Доказательство. $X_f = \varnothing \Leftrightarrow V(f) = X$, то есть для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ выполнено $f \in \mathfrak{p}$ или, другими словами,

$$f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ — прост}} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}(A),$$

то есть f — нильпотент. ■

<u>Докажем 3.</u>

Доказательство.

$X_f = X \Leftrightarrow V(f) = \varnothing$, то есть f не принадлежит ни одному простому идеалу, в том числе ни одному максимальному, значит f обратим.

[9][2] Страница 23, упражнение 17

С другой стороны, если бы f не был обратим, то он содержался бы в некотором максимальном идеале $\mathfrak{m}$, а значит $V(f) \neq \varnothing$. ∎

Докажем 4.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Если $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$, то и $V(f) = V(g)$ (из свойств замкнутых множеств, упражнение 1.8). Откуда сразу получаем $X_f = X_g$.

$\Rightarrow$: По определению $V(g) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ — прост в $A \wedge (g) \subseteq \mathfrak{p}\}$. Так как $X_f = X_g$, то и $V(\sqrt{(f)}) = V(\sqrt{(g)})$. Тогда по свойствам замкнутых множеств (упражнение 1.8) имеем:

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_{\mathfrak{p}:(f)\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V\left(\sqrt{(f)}\right)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V\left(\sqrt{(g)}\right)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}:(g)\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}.$$

∎

Докажем 5.

Доказательство. Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно рассматривать покрытия главными открытыми множествами X_{f_i}, где $i \in I$. Так как $X = \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$, то

$$\varnothing = \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V\left(\bigcup_{i\in I}\{f_i\}\right) = V(\langle f_i\rangle_{i\in I}),$$

где выражение $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ означает A-линейную оболочку множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Откуда получаем, что A-линейная оболочка $\langle f_i\rangle_{i\in I} = (1)$, то есть существует такое конечное множество J, что

$$\sum_{j\in J} g_j f_j = 1, \text{ где } g_j \in A.$$

Следовательно, A-линейная оболочка элементов f_j, $j \in J$ совпадает с кольцом A. Тогда

$$\varnothing = V(\langle f_j\rangle) = \bigcap_{j\in J} V(f_j),$$

из чего следует

$$X = \bigcup_{j\in J} X_{f_j}.$$

∎

Докажем 6.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое покрытие главными открытыми множествами: $X_f \subset \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$. Перейдем к дополнениям:

$$V(f) \supset \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V(\langle f_i\rangle_{i\in I}).$$

Аналогично пункту 4 можно показать, что

$$V(f) \supset V(\langle f_i\rangle_{i\in I}) \Rightarrow \sqrt{(f)} \subset \sqrt{\langle f_i\rangle_{i\in I}}.$$

Откуда

$$\exists k > 0 : f^k = \sum_{j=1}^{n} f_j g_j, \text{ где } g_j \in A.$$

Иначе говоря, $f^k \in \langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}$. Так как, $V(f^k) = V(f)$ имеем:

$$V(f) \supset V(\langle f_j \rangle_{j=\overline{1,n}}) = \bigcap_{j=1}^{n} V(f_j),$$

переходя к дополнениям, получаем

$$X_f \subset \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_j}.$$

■

Докажем 7.

Доказательство. Пусть Y — открытое множество.

$\Leftarrow$: Пусть $Y = \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Следовательно, при всех j имеют место включения $X_{f_j} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Так как X_{f_j} квазикомпактно, то найдутся такие i_k и n_j, что

$$X_{f_j} \subset \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}. \tag{2}$$

Теперь, объединяя выражения вида (2) по $j = \overline{1,n}$, получаем:

$$Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n_j} X_{i_k}.$$

Таким образом, множество Y квазикомпактно.

$\Rightarrow$: Так как $\{X_f\}$ — база топологии, то можно представить Y в виде $Y = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$. Так как Y квазикомпактно, значит среди X_{f_i} можно выделить конечный набор подмножеств $X_{f_{i_j}}$ такой, что $Y = \bigcup_{j=1}^{n} X_{f_{i_j}}$. ■

2 Модули

2.1 Определение модуля

Пусть A — некоторое кольцо, а M — некоторая абелева группа.

Определение 2.1 *Модулем над кольцом* A называется пара (M, μ), состоящая из абелевой группы M и отображения $\mu : A \times M \to M$ (действия кольца A на группе M), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mu(a, x + y) = \mu(a, x) + \mu(a, y)$,
2. $\mu(a + b, x) = \mu(a, x) + \mu(b, x)$,
3. $\mu(ab, x) = \mu(a, \mu(b, x))$,
4. $\mu(1, x) = x$.

Где $a, b \in A$, $x, y \in M$.

Далее $\mu(a, x)$ будем записывать как ax.

В случае, когда кольцо A является полем, A-модулями будут векторные пространства над полем A.

Отметим также, что любой идеал кольца A, в частности само кольцо A, является A-модулем. Поэтому к идеалам применимы все теоремы, которые формулируются для модулей.

Как в случае векторных пространств над полем k выделают подпространства и факторпространства, в случае A-модулей можно выделять подмодули и фактормодули.

Определение 2.2 *Подмодулем* $M' \subset M$ называется всякая подгруппа M' группы M, замкнутая относительно действия кольца. Иными словами, M' — подмодуль M, если он включается следующую в коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} A \times M' \arrow[r, hook, "1 \times i"] \arrow[d, "\mu|_{M'}"] & A \times M \arrow[d, "\mu"] \\ M' \arrow[r, hook, "i"] & M \end{tikzcd}$$

При этом действие $\mu|_{M'}$ получается как ограничение отображения μ на подмножество $A \times M'$.

Определение 2.3 *Фактормодулем* M/M' A-модуля M по подмодулю M' называет факторгруппа M/M' на которой действие μ' кольца A определено следующим образом:

$$\mu' : (a, x + M') \mapsto ax + M'.$$

2.2 Гоморфизмы модулей

Определение 2.4 *Гомоморфизмом* $f : M \to N$ A-модулей N и M будем называть гомоморфизм абелевых групп M и N, который коммутирует с действием μ кольца на группе.

Таким образом, гомоморфизм f абелевых групп является гомоморфизмом модулей, если он делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "1\times f"] \arrow[d, "\mu_M"] & A \times N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Где μ_M, μ_N — действия кольца A на M и N, наделяющие эти группы структурами A-модулей.

Если M, N — векторные пространства над полем k, то гомоморфизмы k-модулей называются линейными отображениями.

Определение 2.5 *Изоморфизмом* A-модулей называется такой гомоморфизм, который является биективным отображением модулей как множеств.

Аналогично ядру, образу и коядру линейных отображений векторных пространств выделяют аналогичные подгруппы, связанные с гомоморфизмами A-модулей.

Определение 2.6 Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм A-модулей M и N.

1. Ядром гомоморфизма f называется подгруппа $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\} < M$,
2. Образом гомоморфизма f называется подгруппа $\operatorname{im} f = f(M) < N$,
3. Коядром гомоморфизма f называется $\operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f$.

При этом ядро, образ и коядро наделены структурами A-модулей.

Для модулей, как и для векторных пространств, справедливы три теоремы об изоморфизме.

Теорема 2.1 (Первая теорема об изоморфизме) *[2] Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм A-модулей. Тогда*

$$\operatorname{im} f \simeq M/\ker f.$$

Теорема 2.2 (Вторая теорема об изоморфизме) *[2] Пусть M_1, M_2 — подмодули в M. Тогда*

$$(M_1 + M_2)/M_2 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Теорема 2.3 (Третья теорема об изоморфизме) *[2] Пусть $L \supseteq M \supseteq N$ — некоторые A-модули. Тогда*

$$(L/N)/(M/N) \simeq L/M.$$

2.3 Операции над модулями

Аналогично операциям произведения и частного идеалов можно ввести операцию умножения идеала на модуль и частного двух подмодулей. В общем случае произведение двух модулей ввести невозможно [2].

Определение 2.7 Пусть M — A-модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Тогда *произведением* $\mathfrak{a}M$ назовем множество конечных сумм вида

$$\sum_i a_i x_i, \text{где } a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M.$$

Произведение идеала на модуль M является подмодулем в M [2].

Определение 2.8 *Частным* $(N : P)$ двух подмодулей N и P A-модуля M называется множество
$$(N : P) = \{a \in A \mid aP \subseteq N\}.$$
Частное двух модулей является идеалом в A.
Определение 2.9 *Аннулятором* $\mathrm{Ann}(M)$ A-модуля M называется частное $(0 : M)$.

Упражнение 2.1 *Пусть N, M — A-модули. Доказать следующие утверждения:*[10]

1. $\mathrm{Ann}(M + N) = \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(M)$.
2. $(N : M) = \mathrm{Ann}((N + M)/N)$.

Докажем 1.
Доказательство.
Выберем произвольный $x \in \mathrm{Ann}(M + N)$. По определению, $x(M + N) = 0$, следовательно $xN+xM = 0$. Так как $xN \cup xM \subseteq xN+xM = 0$, значит $xN = xM = 0$, то есть $x \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

Пусть теперь $x \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$ это значит что $xM = xN = 0$, откуда $x(M + N) = 0$, следовательно $x \in \mathrm{Ann}(M + N)$. ■

Докажем 2.
Доказательство.
Пусть $x \in \mathrm{Ann}((N + M)/N)$. По определению
$$x((N + M)/N) = \overline{0},$$
что равносильно $x(y + N) \subseteq N$ при всех $y = m + n$, где $m \in M, n \in N$. Подставим выражение для y.
$$x(m + n + N) \subseteq N \Leftrightarrow xm + N \subseteq N, \text{при всех } m \in M.$$
Откуда получаем, что $xM \subseteq N$, по определению $x \in (N : M)$. ■

Определение 2.10 Пусть M, N — A-модули. Их *прямой суммой* $M \oplus N$ называется множество всех пар (x, y), где $x \in M, y \in N$, на которых введены операции следующим образом:
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Данное определение прямой суммы двух A-модулей легко обобщить на прямую сумму произвольного семейства A-модулей:
Определение 2.11 *Прямой суммой семейства A-модулей* $\{M_i\}_{i\in I}$ назовем множество
$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid (x_i)_{i\in I}\text{— финитная последовательность и } x_i \in M_i\},$$
с покомпонентным сложением и действием кольца A, определяемым следующей формулой
$$\mu : (a, \dots, m_i, \dots) \mapsto (\dots, \mu_i(a, m_i), \dots),$$
где μ_i — действие кольца A на M_i.

[10][2], Страница 30, упражнение 2.2

Если отбросить условие финитности последовательностей, то получим множество, называемое *прямым произведением*

$$\prod_{i \in I} M_i,$$

которое в случае конечного множества I совпадает с прямой суммой.

2.4 Конечно порожденные модули

Определение 2.12 A-модуль M называется свободным, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{i \in I} M_i$, где каждый M_i изоморфен A как A-модуль.

Свободный A-модуль обозначается как $A^{(I)}$.

Определение 2.13 A-модуль M порожден множеством $G \subset M$, если любой элемент $m \in M$ можно представить в виде финитной A-линейной комбинации элементо множества G. То есть для любого $m \in M$ найдутся такие $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$, что $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$.

Подмножество G называется *системой образующих* или *системой порождающих элементов* A-модуля M.

Пусть $\oplus^{|G|} A$ — свободный A-модуль. Тогда имеет место сюръективный гомоморфизм $\varphi : \oplus^{|G|} A \twoheadrightarrow M$, определенный следующей формулой.

$$(\ldots, \lambda_i, \ldots) \mapsto \sum \lambda_i g_i,$$

где последовательность (λ_i) и A-линейная комбинация $\sum \lambda_i g_i$ финитны.

Определение 2.14 A-модуль *конечно порожден*, если в нем можно выбрать конечную систему образующих G

Вновь обратимся к векторным конечномерным пространствам над полем k. Так как любое векторное пространство V размерности $n = \dim V$ изоморфно k^n, значит, по определнию, любой модуль над полем k будет являться свободным.

Сформулируем критерий для конечно порожденных модулей.

Теорема 2.4 *[2] A-модуль M конечно порожден тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому фактормодулю модуля A^n при некотором $n > 0$.*

Теорема 2.5 *[2] Пусть M — некоторый конечно порожденный A-модуль, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, φ — такой эндоморфизм M, что $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Тогда φ удовлетворяет уравнению вида*

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

где все $a_i \in \mathfrak{a}$.

Теорема 2.6 (Лемма Накаямы) *[2] Пусть M — конечно порожденный A-модуль, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}(A)$ — идеал в A. Если $\mathfrak{a}M = M$, то $M = 0$.*

Следствие 2.7 *[2] Пусть M — конечно порожденный A-модуль, $N \subset M$ — его подмодуль, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}(A)$ — идеал. Если $M = \mathfrak{a}M + N$, то $M = N$.*

2.5 Модули и точные последовательности

Пусть имеется некоторый набор модулей $\{M_i\}$ и гомоморфизмы $f_i : M_{i-1} \to M_i$.

Определение 2.15 Последовательность вида

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \dots$$

называется точной в члене M_i, если $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$.

Определение 2.16 Последовательность A-модулей называется *точной*, если она точна в каждом члене.

В некоторых простых случаях можно сформулировать условия точности [2]:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ точна } \Leftrightarrow f \text{ инъективен;} \tag{3}$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ точна } \Leftrightarrow g \text{ сюръективен;} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ точна } \Leftrightarrow\ & f \text{ инъективен, } g \text{ сюръективен,} \\ & g \text{ индуцирует изоморфизм } \operatorname{coker} f \text{ на } M''. \end{aligned} \tag{5}$$

Определение 2.17 Последовательность вида (5) называется *короткой точной последовательностью* или *точной тройкой.*

Далее в тексте работы будут использоваться дополнительно следующие обозначения:
(a, b) — наибольший общий делитель двух чисел a и b.
$[a, b]$ — наименьшее общее кратное двух чисел a и b.

2.6 Понятие тензорного произведения модулей

Рассмотрим два модуля M и N над кольцом A. За $C = A^{(M\times N)}$ обозначим свободный A-модуль, порожденный парами $(m, n) \in M \times N$. Рассмотрим в C подмодуль D, порожденный элементами следующего вида:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y) \end{aligned} \tag{6}$$

Положим $T := C/D$ и для каждого $(x, y) \in C$ обозначим за $x \otimes y$ его образ в T при каноническом гомоморфизме A-модулей $C \to C/D$.

Определение 2.18 *Тензорным произведением* A-модулей M и N назовем построенный выше модуль T и обозначим

$$M \otimes_A N := T.$$

Из (6) сразу следуют некоторые свойства элементов T:

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' \\ (ax) \otimes y &= a(x \otimes y) \\ x \otimes (ay) &= a(x \otimes y) \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема, носящая название универсального свойства тензорного произведения:

Теорема 2.8 *[2] Пусть M и N — A-модули, тогда существует пара (T, g), состо-*

ящая из A-модуля T и A-билинейного отображения $g : M \times N \to T$, со следующими свойствами:

1. *Для любого A-модуля P и A-билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственное отображение $f' : T \to P$, такое, что $f = f' \circ g$.*

2. *Если (T, g) и (T', g') две пары с таким свойством, то существует изоморфизм $j : T \to T'$ для которого $g' = j \circ g$.*

2.7 Свойства тензорного произведения модулей

Для любых A-модулей M, N, P справедлив ряд свойств [2]:

$$M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M. \tag{7}$$

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A N \otimes_A P. \tag{8}$$

$$(M \oplus N) \otimes_A P \simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P). \tag{9}$$

$$M \otimes_A A \simeq M. \tag{10}$$

Больший интерес представляют свойства точности тензорного произведения.

Теорема 2.9 *[2] Пусть дана точная последовательность*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0, \tag{11}$$

а N — произвольный A-модуль, тогда последовательность

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \to 0 \tag{12}$$

(где 1 — тождественное отображение) точна.

Тензорное произведение не сохраняет точность слева. Например, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}.$$

Умножим ее тензорно на $\mathbb{Z}_2$ над $\mathbb{Z}$. Получим

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\cdot 2) \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2. \tag{13}$$

Но $\ker((\cdot 2) \otimes 1) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, так как $2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$; отсюда видим, что последовательность (13) не является точной.

2.8 Периодические произведения

2.8.1 Понятие свободной резольвенты A-модуля

Введем понятие свободной резольвенты A-модуля M.

Пусть M порожден системой образующих $\{x_j \mid j \in I\}$, то есть $M = \langle x_j \rangle_A$. Рассмотрим свободный A-модуль $F_0 \simeq \bigoplus_{i \in I} A =: A^{(I)}$ и сюръективный гомоморфизм A-модулей $\varphi_0 : F_0 \twoheadrightarrow M$. Гомоморфизм φ_0 определяется как композиция прямой суммы A-гомоморфизмов $g_i : A \to M$, где $\alpha \in A \mapsto \alpha x_i$ с гомоморфизмом суммирования $\Sigma : \oplus_{i \in I} M \to M$, где $(\dots, m_j, \dots) \mapsto \sum_{j \in I} m_j$. Важно, что в формировании прямой суммы участвуют финитные последовательности. Итак, гомоморфизм φ_0 определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in I} A \arrow[r, "{(\dots,g_i,\dots)}"] \arrow[dr, "\varphi_0"] & \bigoplus_{j\in I} M \arrow[d, "\Sigma"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Теперь охарактеризуем $\ker\varphi_0$ аналогичным образом: выберем систему образующих A-модуля $\ker\varphi_0$, свободный A-модуль F_1 и отобразим его сюръективно на $\ker\varphi_0$ с помощью A-гомоморфизма $\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow \ker\varphi_0$. Снова может случиться так, что $\ker\varphi_1$ нетривиально. Значит, рассмотрим еще один свободный A-модуль F_2 и повторим уже описанные выше действия.

Таким образом получим, возможно бесконечную, точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \dots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0.$$

Уберем из этой последовательности член M:

$$M_* : \dots \xrightarrow{\varphi'_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \dots \xrightarrow{\varphi'_2} F_1 \xrightarrow{\varphi'_1} F_0 \xrightarrow{\varphi'_0} 0. \tag{14}$$

Где $\varphi'_i = \varphi_i$ при $i \geqslant 1$, а φ_0 — постоянное отображение. Последовательность (14) точна во всех членах кроме члена с индексом 0. Однако, она обладает следующим свойством

$$\varphi'_i \circ \varphi'_{i+1} = 0 \text{ для всех } i \geqslant 0. \tag{15}$$

Последовательность A-модулей (14) в которой выполнено условие (15) называется *комплексом* A-модулей. Далее последовательность вида (14) будем называть *свободной резольвентой* A-модуля M.

Свойство (15) в точности означает, что

$$\mathrm{im}\ \varphi'_i \subseteq \ker\varphi'_i$$

и позволяет определить фактормодуль

$$H_i(M_*) = \frac{\ker\varphi'_i}{\mathrm{im}\ \varphi'_{i+1}} \tag{16}$$

Он носит название модуля *гомологий* комплекса M_* в члене с номером i.

Если M_* — свободная резольвента A-модуля M, то $H_0(M_*) \simeq M$, а $H_i(M_*) = 0$, при $i \geqslant 0$.

2.8.2 Понятие периодического произведения

Зафиксируем некоторый A-модуль M и рассмотрим операцию тензорно умножения $(- \otimes_A M)$ на этот модуль над кольцом A. Мы получим функтор, действующий из категории A-модулей в нее же. Рассмотрим A-модуль N и фиксируем его свободную резольвенту

$$N_* : \dots \to N_i \to N_{i-1} \to \dots \to N_1 \to 0.$$

Умножим ее тензорно на M.

$$\dots \to N_i \otimes_A M \to N_{i-1} \otimes_A M \to \dots \to N_1 \otimes_A M \to 0.$$

Так как тензорное умножение не является точным слева, точность в некоторых членах последовательности пропадет. Гомологии $H_i(N_* \otimes_A M)$ комплекса $N_* \otimes_A M$ называются *периодическими произведениями* и обозначаются $\mathrm{Tor}_i^A(N, M)$, а сам $\mathrm{Tor}_i^A(-, M)$ является i-м левым производным функтором функтора $(- \otimes_A M)$. В некоторых случаях удается непосредственно вычислить $\mathrm{Tor}_i^A(N, M)$.

2.9 Непосредственное вычисление некоторых тензорных и периодических произведений

Предложение 2.1 *Пусть n, m — натуральные числа. Тогда*

$$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$$

и тензорно умножим ее на $\mathbb{Z}_n$ над $\mathbb{Z}$. Из свойств точности тензорного произведения следующая последовательность

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{(\cdot m)\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to 0$$

будет точна. Воспользуемся свойством (10) и упростим члены в последовательности:

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to 0.$$

Из первой теоремы об изоморфизме $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n / \ker(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n)$, а так как последовательность точна $\ker(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n) = \mathrm{im}\,(\cdot m)$. Образом $\mathrm{im}\,(\cdot m)$ является ничто иное как $m\mathbb{Z}_n$. Значит

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n.$$

Выясним вид подмодуля $m\mathbb{Z}_n$. Заметим, что $\mathbb{Z}_n = \langle \overline{1} \rangle$, а $m\mathbb{Z}_n = \langle \overline{m} \rangle = \langle m \cdot \overline{1} \rangle$. Вычислим теперь порядок элемента $\overline{m}$. Воспользуемся следующим утверждением:

Утверждение 2.1 *[3] Пусть $g \in G$ — элемент группы G порядка $\mathrm{ord}_G\, g = n$. Тогда $\mathrm{ord}_G(g^k) = n/(k, n)$.*

Из него непосредственно вытекает, что $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_n} \overline{m} = n/(n, m)$. Значит

$$|m\mathbb{Z}_n| = n/(n, m). \tag{17}$$

Теперь вычислим $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n$. Так как факторгруппа циклической группы по подгруппе снова циклическая и все группы, участвующие в рассмотрении, конечны, осталось вычислить порядок данной факторгруппы. Из теоремы Лагранжа вытекает, что $|\mathbb{Z}_n| = k|m\mathbb{Z}_n|$, где k — число смежных классов по подгруппе $m\mathbb{Z}_n$, то есть порядок фактор-группы. Из (17) и теоремы Лагранжа вытекает, что

$$|\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n| = (n, m),$$

а это значит что $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. В итоге получаем, что

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

■

Из предложения 2.1 сразу видно, что при взаимно простых n и m имеем

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0.$$

Это значит что тензорное произведение двух нетривиальных A-модулей может давать тривиальный модуль.

Предложение 2.2 *Пусть A, B — конечные абелевы группы, и*

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}},$$

Тогда

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами (9) и (10) тензорного произведения:

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} (\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

■

Предложение 2.3

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n,m)}, \ i = 0, 1; \\ 0, \ i \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим свободную резольвенту $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}_n$

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to 0$$

и тензорно умножим ее на $\mathbb{Z}_m$ над $\mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \to 0.$$

Можно сразу заметить, что все

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = 0 \text{ при } i > 1.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_m / n\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}.$$

Теперь, вычисляя первый модуль гомологий

$$H_1(C_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m) = \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m) = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\overline{x} = 0\}.$$

Получаем что

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_m \mid n\overline{x} = 0\}.$$

Но так как [5]

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n),$$

то хотелось бы найти такой изоморфный ему модуль, чтобы была видна симметрия.

Утверждение 2.2 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

Докажем, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \overline{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$, где $q = m/(n,m)$. Выберем произвольный представитель класса $\overline{q}k$ и умножим его на n:

$$\frac{knm}{(n,m)} = k[n,m],$$

где $[n,m]$ — наименьшее общее кратное чисел n и m. Имеем, $k[n,m]$ делится на m, а следовательно $\overline{q}k \in \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$.

С другой стороны $\forall x \in \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ выполнено $xn \equiv 0 \pmod m$. Значит

$$xn = l[n,m] = l\frac{nm}{(n,m)} \Rightarrow x = l\frac{m}{(n,m)} \Rightarrow \overline{x} \in \langle \overline{q} \rangle.$$

Отсюда получаем, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \langle \overline{q} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_m$. Заметим, что

$$\mathrm{ord}\, \overline{q} = \mathrm{ord}(\overline{1} \cdot q) = m \Bigg/ \left(\frac{m}{(n,m)} \cdot 1, \frac{m}{(n,m)}(n,m) \right) = (n,m).$$

Значит, $\langle \overline{q} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$, а следовательно и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$. ■

Обобщим предложение 2.3:

Предложение 2.4 *Пусть A, B — конечно порожденные абелевы группы, и*

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

Тогда

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой о конечно порожденных абелевых группах: представим каждую из них в виде прямой суммы примарных и бесконечных циклических групп [3]:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$
$$B \simeq \mathbb{Z}_{q_1^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{l_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим свободную резольвенту для $\mathbb{Z}_{p^k}$

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p^k} \mathbb{Z} \to 0,$$

и тензорно умножим ее на некоторую абелеву группу N

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{(\cdot p^k)\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \to 0.$$

Аналогично доказательству предложения 2.3 получаем, что

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^k}, N) = \{n \in N \mid p^k n = 0\}.$$

Теперь вернемся к исходным группам A и B.

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}, \mathbb{Z}_{q_j^{l_j}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{(p_i^{k_i}, q_j^{l_j})}.$$

Заметим, что изоморфизм $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ будет существовать, только когда A и B — конечные абелевы группы. ■

Так как любая конечно порожденная абелева группа как $\mathbb{Z}$-модуль имеет свободную резольвенту длины, не превосходящей 1 (так как $\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов и, следовательно, в нем любой конечно порожденный модуль без кручения свободен), то для любых абелевых групп A, B $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ при $i \geqslant 2$. По аналогичной причине для любых конечно порожденных модулей M, N над кольцом главных идеалов A $\mathrm{Tor}_i^{A}(M,N) = 0$ при $i \geqslant 2$.

3 Кручения в некоторых тензорных произведениях модулей

В задачах алгебраической геометрии, связанных с разрешением особенностей когерентных алгебраических пучков, бывает необходимо исследовать поведение когерентного алгебраического пучка при преобразованиях базисного многообразия или схемы. Преобразование базисного многообразия подбирается так, чтобы трансформировать не локально свободный когерентный пучок в локально свободный пучок на новом многообразии или схеме.

Локальным аналогом этой задачи является исследование свойств тензорного произведения модуля M над коммутативным кольцом A на A-алгебру $\widetilde{A}$.

В [6] автором изложена одна из возможных конструкций разрешения особенностей когерентного пучка, локально сводящаяся к преобразованию $M \mapsto \widetilde{A} \otimes_A M$. Алгебра $\widetilde{A}$ получается при этом следующим образом: $\widetilde{A} = \bigoplus_{s \geqslant 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$, где $I \subset A$ – ненулевой собственный идеал, t – элемент, трансцендентный над кольцом A.

Рассмотрим коммутативное ассоциативное нетерово целостное кольцо A с единицей.

Определение 3.1 Пусть $I \subset A$ — идеал. *Алгебра раздутия* идеала I задается выражением

$$\widehat{A} := \bigoplus_{s \geqslant 0} I^s.$$

При этом сложение и умножение элементов кольца $\widehat{A}$ и действие элементов кольца A на элементы кольца $\widehat{A}$ наследуются с операций кольца A.

Кольцо $\widehat{A}$ градуировано, то есть, если $x \in I^s, y \in I^t$, то $xy \in I^{s+t}$. Если $x \in I^s$, то будем говорить, что x имеет степень s. Также отметим, следующее: если кольцо A — целостное, то и кольцо $\widehat{A}$ тоже будет целостным.

Определение 3.2 Пусть M – произвольный A-модуль, A — целостное кольцо. *Кручением* $\operatorname{tors}_A M$ называется множество

$$\operatorname{tors}_A M = \{x \in M | \exists a \in A \setminus 0 : ax = 0\}.$$

Определение 3.3 Будем говорить, что A-модуль M является *модулем без кручения*, если $\operatorname{tors}_A M = 0$.

Заметим, если A не является целостным кольцом, то $\operatorname{tors}_A M$ не обязательно является подмодулем в M.

Далее в тексте под $\operatorname{tors}(M)$ без нижнего индекса будем подразумевать $\operatorname{tors}_A M$.

Пусть M – A-модуль без кручения. Поскольку тензорное произведение не является точным слева, при тензорном умножении M на алгебру раздутия $\widehat{A}$ в модуле $\widehat{A} \otimes_A M$ может возникнуть кручение.

Решается следующая частная задача: описать подмодуль кручения $\operatorname{tors}\left(\widehat{A} \otimes_A I\right)$ A-модуля $\widehat{A} \otimes_A I$.

Пусть, для простоты, идеал $I = (x, y)$ порожден элементами $x, y \in A$. Выясним, как устроены его степени.

Теорема 3.1 *Пусть $s \geqslant 1$, тогда $I^s = (x^s, x^{s-1}y, \ldots, xy^{s-1}, y^s)$.*

Доказательство. Действуем методом математической индукции. Пусть $s = 1$. Тогда

$I^1 = (x, y)$ – верно. Пусть утверждение верно для значений $s \leqslant r$. При $s = r+1$ имеем:

$$I^{r+1} = I^r I = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{r} a_n x^n y^{n-r} \right) (b_1 x + b_0 y) \middle| a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \right\}.$$

Теперь, раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} I^{r+1} = \{ & b_0 a_0 y^{r+1} + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x y^r + \dots \\ & + (b_1 a_{r-1} + b_0 a_r) x^r y + b_1 a_r x^{r+1} | a_n, b_m \in A, n = \overline{0, r}, m = \overline{0, 1} \} \end{aligned}$$

Таким образом, в силу произвольности коэффициентов a_i, b_j,

$$I^{r+1} = (x^{r+1}, x^r y, \dots, x y^r, y^{r+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. ∎

Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы, то справедлива цепочка равенств:

$$\widehat{A} \otimes_A I = \left(\bigoplus_{s \geqslant 0} I^s \right) \otimes_A I = \bigoplus_{s \geqslant 0} (I^s \otimes_A I).$$

Предложение 3.1 *Пусть $\{M_j | j \in J\}$ – семейство A-модулей, и кольцо A – целостное. Тогда*

$$\operatorname{tors} \left(\bigoplus_{j \in J} M_j \right) = \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors} (M_j).$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right) \subset \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. По определению, существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Заметим, что $t = (t_0, t_1, \dots, t_j, \dots)$, где только конечное число компонент t_j отлично от нуля. Так как умножение на элементы прямой суммы производится покомпонентно, то

$$at = (at_0, at_1, \dots, at_j, \dots) = 0,$$

из чего следует, что

$$at_1 = at_0 = \dots = at_j = \dots = 0$$

и $t_0 \in \operatorname{tors}(M_0)$, $t_1 \in \operatorname{tors}(M_1)$, $\dots$, $t_j \in \operatorname{tors}(M_j)$, $\dots$. Таким образом, $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Теперь докажем обратное включение. Пусть $t \in \bigoplus_{j \in J} \operatorname{tors}(M_j)$. Пусть $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ – все компоненты t, отличные от нуля. Как отмечалось ранее, их будет конечное число. По определению, найдутся $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in A$ все отличные от нуля и такие, что $a_{i_1} t_{i_1} = a_{i_2} t_{i_2} = \dots = a_{i_k} t_{i_k} = 0$. Обозначим $a := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$. Так как кольцо A целостное, то ни при каких отличных от нуля a_{i_l} их произведение не будет равно нулю. Тогда

$$at_{i_l} = (a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}} a_{i_{l+1}} \dots a_{i_k}) a_{i_l} t_{i_l} = 0,$$

что справедливо для всех $l = \overline{1, k}$. Тем самым мы показали, что существует такое $a \in A \setminus 0$, что $at = 0$. Значит $t \in \operatorname{tors}\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$. ∎

Теперь, воспользовавшись предложением 3.1, можно записать следующее:

$$\operatorname{tors}\left(\bigoplus_{s\geqslant 0}\left(I^s\otimes_A I\right)\right)=\bigoplus_{s\geqslant 0}\operatorname{tors}\left(I^s\otimes_A I\right).$$

Таким образом, исходная задача свелась к вычислению подмодуля кручения $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$ A-модуля $I^s\otimes_A I$.

Теорема 3.2 *Пусть образующие иделала $I=(x,y)$, имеющие равные степени, алгебраически независимы. Тогда* $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$ *описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}\left(I^s\otimes_A I\right)=\left\langle x^ny^{s-n}\otimes x-x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y|n=\overline{1,s-1}\right\rangle_A.$$

Доказательство. Так как идеалы I^s и I являются конечно порожденными A-модулями, то, воспользовавшись свойством тензорного произведения для двух конечно порожденных модулей, имеем

$$I^s\otimes_A I=\left\langle x^ny^{s-n}\otimes x,x^ny^{s-n}\otimes y|n=\overline{0,s}\right\rangle_A.$$

Пусть $\mu: I^s\otimes_A I\to I^{s+1}$ – гомоморфизм, который действует на образующих следующим образом: $x^ny^{s-n}\otimes x\mapsto x^{n+1}y^{s-n}$, $x^ny^{s-n}\otimes y\mapsto x^ny^{s-n+1}$. Докажем, что $\ker\mu=\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Тогда, согласно теореме о гомоморфизме, $I^{s+1}\simeq(I^s\otimes_A I)/\ker\mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+1} не имеет подмодуля кручения, следовательно, $\operatorname{tors}(I^s\otimes_A I)\subset\ker\mu$.

Чтобы показать обратное включение, вычислим $\ker\mu$. Пусть $z\in I^s\otimes_A I$, тогда z имеет вид

$$\begin{aligned} z=a_0(x^s\otimes x) &+ a_1(x^{s-1}y\otimes x)+\dots+a_s(y^s\otimes x)+\\ &+ b_1(x^s\otimes y)+\dots+b_s(xy^{s-1}\otimes y)+b_{s+1}(y^s\otimes y),\end{aligned}$$

где $a_i,b_i\in A$. Тогда $\mu(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\mu(z)=a_0x^{s+1}+(a_1+b_1)x^sy+\dots+(a_s+b_s)xy^s+b_{s+1}y^{s+1}.$$

Приравняв $\mu(z)=0$ и воспользовавшись тем фактом, что x,y алгебраически независимы, мы получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0 &=0,\\ a_1+b_1 &=0,\\ \dots & \\ a_s+b_s &=0,\\ b_{s+1} &=0.\end{cases}$$

Отсюда, $a_0=b_{s+1}=0$, $a_i=-b_i$, $i=\overline{1,s}$ и

$$\ker\mu=\left\langle x^ny^{s-n}\otimes x-x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y|n=\overline{1,s-1}\right\rangle_A.$$

Покажем, что любая образующая $\ker\mu$, то есть $x^ny^{s-n}\otimes x-x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y$, является элементом кручения. Рассмотрим выражение $xy(x^ny^{s-n}\otimes x-x^{n+1}y^{s-n-1}\otimes y)$

и преобразуем его:

$$xy(x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y) =$$
$$x(x^n y^{s-n}) \otimes xy - y(x^{n+1} y^{s-n-1}) \otimes xy =$$
$$x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy - x^{n+1} y^{s-n} \otimes xy = 0.$$

Действительно, каждая образующая $\ker \mu$ является элементом кручения. Тем самым мы показали включнение $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I)$.

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \ker \mu$, и имеет место равенство

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I) = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x - x^{n+1} y^{s-n-1} \otimes y | n = \overline{1, s-1} \right\rangle_A .$$

■

Результат данной теоремы можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.3 *Пусть образующие идеала $I = (x, y)$ алгебраически независимы. Тогда подмодуль кручения $\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$ описывается следующим образом:*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3.2. Модуль $I^s \otimes_A I^r$ имеет вид

$$I^s \otimes_A I^r = \left\langle x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} | n = \overline{0, s}, m = \overline{0, m} \right\rangle_A .$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mu : I^s \otimes_A I^r \to I^{s+r}$, который действует на образующих как $x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m} \mapsto x^{n+m} y^{s+r-n-m}$. Докажем, что $\ker \mu = \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Очевидно, что μ сюръективен и, воспользовавшись теоремой о гомоморфизме, мы можем записать $I^{s+r} \simeq (I^s \otimes_A I^r)/\ker \mu$. Так как кольцо A целостное, то I^{s+r} является модулем без кручения, из чего следует, что $\operatorname{tors}(I^s \otimes I^r) \subset \ker \mu$.

Покажем обратное включение. Для этого вычислим $\ker \mu$. Любой элемент $z \in I^s \otimes_A I^r$ записывается в виде линейной комбинации образующих

$$z = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^n y^{s-n} \otimes x^m y^{r-m},$$

где $a_{nm} \in A$. Вычислив $\mu(z)$, получим следующее

$$\mu(z) = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant s \\ 0 \leqslant m \leqslant r}} a_{nm} x^{n+m} y^{s+r-n-m}.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями x и тогда полученное выражение запишется в виде

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{s+r} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) x^k y^{s+r-k}.$$

Так как образующие алгебраически независимы, то из равенства $\mu(z) = 0$ следует, что

$$\sum_{i+j=k} a_{ij} = 0.$$

С учетом полученного соотношения, элементы ядра имеют вид

$$z = \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}, \tag{18}$$

докажем, что $z \in \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. Действительно, зафиксируем k, $n \leqslant \min(s,k)$. Рассмотрим образующую $x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}$ и умножим ее на $x^r y^r$, где r — показатель степени идеала I^r. Имеем

$$x^r y^r (x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n}) = \\ x^{k-n} y^{r-(k-n)} x^n y^{s-n} \otimes x^{r-(k-n)} y^{k-n} x^{k-n} y^{r-k+n} = \\ x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r.$$

Умножив выражение (18) на $x^r y^r$, мы получим сумму следующего вида

$$x^r y^r \sum_{k=0}^{s+r} \sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} x^n y^{s-n} \otimes x^{k-n} y^{r-k+n} = \sum_{k=0}^{s+r} \left[\left(\sum_{n=0}^{\min(s,k)} a_{n,k-n} \right) x^k y^{r+s-k} \otimes x^r y^r \right] = 0,$$

где последнее равенство следует из условия, наложенного на коэффициенты a_{ij}. Данное равенство выполнено при всех $k = \overline{0, s+r}$. Таким образом, мы доказали, что $\ker \mu \subset \operatorname{tors}(I^s \otimes_A I^r)$. ■

Следствие 3.4 *Пусть числа a, b – натуральные, $I = (x,y)^a$, $J = (x,y)^b$, тогда*

$$\operatorname{tors}(I^s \otimes_A J) = \left\{ \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant as \\ 0 \leqslant m \leqslant b}} a_{nm} x^n y^{as-n} \otimes x^m y^{b-m} \right\},$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=n+m} a_{ij} = 0 \text{ для всех } n,\ m.$$

Заметим, что если на прямой сумме $\bigoplus_{s \geqslant 0} I^s$ рассмотреть покомпонентное умножение (вместо структуры градуированного кольца), то полученные нами результаты не изменятся.

Исходную задачу можно видоизменить, заменив алгебру раздутия на алгебру

$$\widetilde{A} := \bigoplus_{s \geqslant 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1}),$$

где t – элемент, трансцендентный над A, а умножение определяется покомпонентно. Отметим, что алгебра $\widetilde{A}$ является A-алгеброй без кручения, однако, если рассматривать $\widetilde{A}$ как алгебру над $\widetilde{A}$, то возникают элементы кручения, например, $(0, t, 0, \dots)$. Далее будем работать с $\widetilde{A}$ как с A-алгеброй.

Обозначим s-ое слагаемое в прямой сумме как $I_t^s := (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$. Сформулируем вспомогательную теорему

Лемма 3.1 *A-модуль I_t^s допускает следующее разложение в сумму своих A-подмодулей*
$$I_t^s = \langle 1\rangle_{I^s} + \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A . \tag{19}$$

Доказательство. Сразу отметим, что при вычислении I_t^s будем рассматривать многочлены степени не больше s, так как при факторизации по (t^{s+1}) большие степени обратятся в 0. По определению, $(I[t] + (t))^s$ состоит из произведений s произвольных элементов $I[t]+(t)$. Поэтому, чтобы выяснить структуру $(I[t]+(t))^s$, необходимо рассмотреть произведение

$$\prod_{n=1}^{s} \left(a_{n0} + (a_{n1} + b_n)t + a_{n2}t^2 + \dots + a_{ns}t^s\right),$$

где $a_{nj} \in I, b_n \in A$, $n = \overline{1, s}, j = \overline{0, s}$. Выясним, к каким степеням идеала I принадлежат коэффициенты при t^k, $0 \leqslant k \leqslant s$. Рассмотрим слагаемые в коэффициенте при t^k, которые имеют вид
$$b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_k} a_{j_{k+1}0} \dots a_{j_s0},$$
где множества $\{j_1, \dots, j_k\}, \{j_{k+1}, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, s\}$ не пересекаются, а $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\}$. Очевидно, что это слагаемое принадлежит I^{s-k}, при этом взять в произведении большее число множителей, необязательно принадлежащих идеалу I, нельзя, так как мы ограничены степенью k. Поэтому I^{s-k} является наименьшей степенью идеала, к которой могут принадлежать слагаемые в коэффициенте при t^k. Однако, отметим, что для любой степени идеала I^r, где $r \geqslant s - k$ найдется такое слагаемое в коэффициенте при t^k, что оно принадлежит I^r, например, пусть $r = l + (s - k)$

$$a_{11} a_{21} \dots a_{l1} b_{l+1} \dots b_k a_{k+1,0} \dots a_{s0} \in I^r.$$

Так как все коэффициенты были произвольные, то имеет место разложение I_t^s как A-модуля в сумму своих A-подмодулей

$$I_t^s = \langle 1, t, \dots, t^s\rangle_{I^s} + \left\langle t, t^2, \dots, t^s\right\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}, t^s\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A .$$

Заметим, так как справедливы включения $I^s \subset I^{s-1} \subset \dots \subset I \subset A$, то справедливы включения $\left\langle t^k\right\rangle_{I^s} \subset \left\langle t^k\right\rangle_{I^{s-k}}$. Поэтому исходное разложение можно переписать в виде

$$I_t^s = \langle 1\rangle_{I^s} + \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \langle t^s\rangle_A .$$

■

Заметим, что сумма (19) является прямой внутренней суммой своих подмодулей. Теперь, зная строение A-модуля I_t^s, можно сформулировать теорему

Теорема 3.5 *Пусть $J \subset A$ – идеал в A, тогда*

$$\operatorname{tors}(I_t^s \otimes_A J) = t^0 \operatorname{tors}(I^s \otimes_A J) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}(I \otimes_A J).$$

В частности,

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A I\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A I\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A I\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A I\right).$$

Доказательство. Так как тензорное произведение дистрибутивно относительно прямой суммы и, в силу теоремы 3.1, можно записать

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = \operatorname{tors}\left(\left\langle t^0\right\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^1\right\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^{s-1}\right\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + \operatorname{tors}\left(\left\langle t^s\right\rangle_A \otimes_A J\right).$$

Так как t – элемент, трансцендентный над A, то его не аннулирует никакой многочлен с коэффициентами из A. Значит, он не даст вклада в кручение и его можно вынести за знак $\operatorname{tors}(\cdot)$. Таким образом имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^s} \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^{s-1}} \otimes_A J\right) + \dots \\ + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_{I^1} \otimes_A J\right) + t^s \operatorname{tors}\left(\langle 1\rangle_A \otimes_A J\right).$$

Но $\langle 1\rangle_{I^k}$, очевидно, является самим идеалом I^k. Таким образом, имеем

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A J\right) = t^0 \operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A J\right) + t^1 \operatorname{tors}\left(I^{s-1} \otimes_A J\right) + \dots + t^{s-1} \operatorname{tors}\left(I \otimes_A J\right).$$

■

Задача свелась к вычислению $\operatorname{tors}\left(I^s \otimes J\right)$. Пусть $J = I$, тогда справедлива следующая

Теорема 3.6 *Пусть образующие идеала I алгебраически независимы, тогда кручение A-модуля $I_t^s \otimes_A I$ дается суммой своих подмодулей:*

$$\operatorname{tors}\left(I_t^s \otimes_A I\right) = \left\langle x^{s-1}y \otimes x - x^s \otimes y, x^{s-2}y^2 \otimes x - x^{s-1}y \otimes y, \dots, y^s \otimes x - xy^{s-1} \otimes y\right\rangle_A + \\ t\left\langle x^{s-2}y \otimes x - x^{s-1} \otimes y, x^{s-3}y^2 \otimes x - x^{s-2}y \otimes y, \dots, y^{s-1} \otimes x - xy^{s-2} \otimes y\right\rangle_A + \\ \dots + \\ t^{s-1}\left\langle x \otimes y - y \otimes x\right\rangle_A.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3.5 и для каждого $\operatorname{tors}\left(I^s \otimes_A I\right)$ применим теорему 3.2. ■

Как было отмечено ранее, $\widetilde{A}$ является алгеброй с кручением как алгебра над $\widetilde{A}$ с покомпонентным умножением. Выясним, какой вид имеет $\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A}$. Заметим следующее

$$\operatorname{tors}_{\widetilde{A}} \widetilde{A} = \operatorname{tors}_{\bigoplus I_t^s} \bigoplus I_t^s = \bigoplus \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

так как умножение в прямой сумме осуществляется покомпонентно. Таким образом, мы свели исходную задачу к следующей: описать $\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$. Справедлива

Теорема 3.7

$$\operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s = \langle t\rangle_{I^{s-1}} + \dots + \left\langle t^{s-1}\right\rangle_I + \left\langle t^s\right\rangle_A.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент I_t^s следующего вида

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \tag{20}$$

где $a_i \in I^{s-i}$, и умножим его на $1 \cdot t^s \neq 0$.

$$(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s) t^s = a_1 t^{s+1} + a_2 t^{s+2} + \dots + a_s t^{2s} = 0,$$

то есть, мы показали, что элементы вида (20) действительно являются элементами кручения. Покажем, что никакие другие элементы вклада в кручение не дадут. Предположим, что

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_s t^s \in \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s,$$

где $a_0 \neq 0$. По определению, существует такой элемент $g \in I_t^s \setminus 0$, что $fg = 0$. Пусть

$$g = b_0 + b_1 t + \cdots + b_s t^s \neq 0.$$

Рассмотрим коэффициенты при t^k, $k = \overline{0, s}$ в произведении fg. Коэффициент при t^k обозначим как $[t^k]$.

$$\begin{aligned}
[t^0] &= a_0 b_0 = 0 \\
[t^1] &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\
&\vdots \\
[t^s] &= a_0 b^s + \cdots + a_{s-1} b_1 + a_s b_0 = 0.
\end{aligned}$$

Так как кольцо целостное, $a_0 \neq 0$, то, из уравнения на $[t^0]$, получаем $b_0 = 0$. Подставив $b_0 = 0$ в уравнение на $[t^1]$ и воспользовавшись целостностью кольца, получим $b_1 = 0$. Повторяя эти рассуждения далее, получим, что $b_0 = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Таким образом, f аннулирует только 0, значит $f \notin \operatorname{tors}_{I_t^s} I_t^s$.

Таким образом, действительно, только элементы вида (20) являются элементами кручения. Все такие элементы описываются суммой

$$\langle t \rangle_{I^{s-1}} + \cdots + \left\langle t^{s-1} \right\rangle_I + \langle t^s \rangle_A .$$

■

Рассмотрим следующую задачу. Описать кручение $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, если A-модуль M включается в короткую точную последовательность вида

$$0 \to I_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varepsilon} I_2 \to 0,$$

где $I_1, I_2 \subset A$ — идеалы в кольце A, A — целостное, нетерово кольцо.

Обозначим $\widehat{M} := M \otimes_A \widehat{A}$. Так как тензорное произведение не точно слева, то имеем последовательность вида

$$\widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0,$$

в которой $\widehat{i} := i \otimes 1$, $\widehat{\varepsilon} := \varepsilon \otimes 1$. Пусть $\tau := \ker \widehat{i}$. Тогда получим точную последовательность

$$0 \to \tau \to \widehat{I}_1 \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \widehat{I}_2 \to 0.$$

Справедливы вложения

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau \arrow[r] & \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}"] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}"] & \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon}'"] \arrow[u, hook] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

где гомоморфизмы в нижней строке получены путем ограничения гомоморфизмов верхней строки на соответствующие множества. Разложим гомоморфизм $\widehat{i'}$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов и рассмотрим нижнюю строку

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau \arrow[r] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1 \arrow[r, "\widehat{i'}"] \arrow[dr] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\varepsilon'}"] & \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \arrow[r] & 0 \\ & & & \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Отметим, что $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2$ конечно порождены, согласно предложению 2.17 книги [2], как $\widehat{A}$-модули, поэтому $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2$ конечно порожден как подмодуль нетерова модуля, $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau}$ конечно порожден как образ конечно порожденного модуля. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 4 §4 гл. 1 книги [4], которое утверждает, что расширение последовательности

$$0 \to \frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} \to \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon'}} \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_2 \to 0$$

порождено образами порождающих ядра и прообразами порождающих коядра последовательности. Пусть $\widehat{I}_2 = \langle \overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_m} \rangle_{\widehat{A}}$, $z_i \in \operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ — произвольно выбранный прообраз $\overline{z_i}$ $(i = \overline{1,m})$ и $\frac{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_1}{\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \tau} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_{\widehat{A}}$, $\overline{x_j}$ — образ x_j в $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ $(j = \overline{1,n})$, тогда

$$\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \rangle_{\widehat{A}} + \langle z_1, z_2, \ldots, z_m \rangle_{\widehat{A}}. \tag{21}$$

Теперь выясним как охарактеризовать кручение произвольного $\widehat{A}$-модуля $M \otimes_A \widehat{A}$, при условии что M — нетеров A-модуль. Для этого нам потребуется утверждение:

Теорема 3.8 $M^\vee := \operatorname{Hom}_A(M, A)$ — *модуль без кручения.*

Доказательство. Известно, что любой конечно порожденный модуль является образом свободного модуля подходящего ранга [4], то есть точна тройка

$$0 \to K \to A^n \to M \to 0,$$

где $K = \ker(A^n \to M)$. Перейдем от нее к двойственной. Получим последовательность

$$0 \to M^\vee \to A^n \to \ldots$$

Так как A — целостное, то A^n — модуль без кручения, $M^\vee$ обладает вложением в A^n, следовательно, $M^\vee$ тоже модуль без кручения. ■

Пусть $m \in M^\vee \setminus 0$. Рассмотрим гомоморфизм $A \to M^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha m$. Заметим, что этот гомоморфизм инъективен, так как в противном случае m являлся бы элементом кручения, что невозможно по теореме 3.8. Имеем точную тройку A-модулей:

$$0 \to A \to M^\vee \to N \to 0.$$

Перейдя от нее к двойственной, получим последовательность, не являющуюся точной справа

$$0 \to N^\vee \to M^{\vee\vee} \to A \to \ldots$$

Разложим гомоморфизм $M^{\vee\vee} \to A$ в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^{\vee} \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & \dots \\ & & M^{\vee\vee}/N^{\vee} \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Так как $M^{\vee\vee}/N^{\vee}$ обладает вложением в A как A-модуль, то имеет место изоморфизм $M^{\vee\vee}/N^{\vee} \simeq J \subset A$ — некоторый идеал в кольце A. Таким образом имеем новую точную тройку

$$0 \to N^{\vee} \to M^{\vee\vee} \to J \to 0.$$

Поскольку M — A-модуль без кручения, то имеет место вложение $M \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} M^{\vee\vee} : s \mapsto \varepsilon_s$, где $\varepsilon_s : t \mapsto t(s)$, включаемое в диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^{\vee} \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\ & & M \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Обозначим $M_1 := \ker(M \to J_1)$, $J_1 := \mathrm{im}\,(M \hookrightarrow M^{\vee\vee} \to J)$ — идеал в A, при этом выполнены вложения $J_1 \subset J \subset A$. Имеем диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^{\vee} \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & J \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & M \arrow[r] \arrow[u, hook] & J_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd}$$

Так как $M_1 \subset M$, M — нетеров, следовательно, M_1 тоже нетеров. Повторим эти же действия для M_1, потом для M_2 и так далее. Имеем убывающую фильтрацию

$$\dots \subset M_2 \subset M_1 \subset M. \tag{22}$$

Так как нетеров модуль необязательно артинов, то эта последовательность может быть бесконечной. Покажем что в нашем случае это не так и цепочка будет обрываться. Перейдем к локализации в нулевом идеале кольца A. $A \hookrightarrow A_0 =: Q(A)$ — поле частных кольца A. По свойству точности локализации имеем точную тройку A_0-векторных пространств

$$0 \to (M_{i+1})_0 \to (M_i)_0 \to (J_{i+1})_0 \to 0.$$

Так как $(J_{i+1})_0 \simeq A_0$, то из свойсва аддитивности A_0-размерности (Предложение 2.11 книги [2]) имеют место равенства

$$\dim_{A_0}(M_i)_0 - \dim_{A_0} A_0 = \dim_{A_0}(M_i)_0 - 1 = \dim_{A_0}(M_{i+1})_0.$$

Таким образом, последовательность (22) действительно обрывается. В базовом случае будем иметь точную тройку вида

$$0 \to I_1 \to M_n \to I_2 \to 0,$$

в которой для A-модуля M_n уже можем вычислить кручения $\widehat{A}$-модуля $\widehat{M_n}$.

Далее можно действовать индуктивно, где для шага индукции имеем точную тройку

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to I_{n-i+1} \to 0,$$

которая позволяет вычислить $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}_i$, используя $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{M}_{i-1}$ и $\operatorname{tors}_{\widehat{A}} \widehat{I}_{n-i+1}$ по формулам, аналогичным (21).

Заключение

В ходе работы были выполнены поставленные задачи: изучены понятия коммутативного кольца, идеала и модуля. Выполнены упражнения из книги [2], в ходе решения которых были доказаны различные условия при которых элементы конкретных колец обладают определенными свойствами (например, нильпотентность или обратимость). Доказан ряд свойств топологии Зарисского на спектре коммутативного кольца. Получены явные формулы тензорных и периодических произведений в простейших случаях. Также в ходе работы получены явные выражения для подмодуля кручения в некоторых тензорных произведениях, вычислены делители нуля алгебры $\bigoplus_{s\geqslant 0}(I[t]+(t))^s/(t^{s+1})$.

Список литературы

[1] Айзенбад, Д. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию / Д. Айзенбад; пер. с англ. О.Н. Попова и др. под ред. Е.С. Голода. — М.: МЦНМО, 2017. — 752 с.

[2] Атья, М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд; пер. с англ. Ю.И. Манин. — М.: Издательство «Мир», 1972. — 158 с.

[3] Винберг, Э. Б. Курс алгебры. — 3-е изд., дополненное. / Э.Б. Винберг. — М.: МЦНМО, 2017. — 592 с.

[4] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия: В 3-х т. — Т.2.: Модули и алгебры / Р. Зуланке, А.Л. Онищик — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с.: ил.

[5] Маклейн, С. Гомология. / С. Маклейн; пер. с англ. М.С. Цаленко под ред. А.Г. Куроша. — М.: Издательство «Мир», 1966. — 534 с.

[6] Тимофеева, Н.В. “Модули допустимых пар и модули Гизекера–Маруямы”, Матем. сб., 210:5 (2019), 109–134.