Modèle à changement de régime Markoviens (MS-VAR)

Présenté par

(Crépin MEDEHOUIN & Ekou Alain Serge TEOUA)

École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée (ENSEA)

Sous la supervision de

Professeur YAYA KEHO

Janvier 2025

Plan

Introduction

Introduction

Colletaz & Hurlin : " *Cette évolution est sans nul doute comparable à celle qu'a pu connaître la micro-économie lorsque l'on a progressivement abandonné l'univers de référence walrasien, que nous pouvons assimiler à* **la modélisation linéaire** *en économétrie, pour s'orienter vers les multiples formes de la concurrence imparfaite, auxquelles nous pouvons assimiler les innombrables* **modélisations non linéaires**."

Introduction

Depuis quelques années, la non-linéarité tout comme la non-stationnarité est considérée comme une des propriétés dominantes en économie.

Nous observons le caractère non linéaire de nombreuses séries macroéconomiques (telles le PIB, le chômage, les taux d'intérêt, ...), soulignant la nécessité de remplacer les représentations linéaires traditionnelles par des représentations non linéaires pour modéliser les relations économiques.

En effet, les systèmes économiques présentent souvent des changements structurels induits par des événements tels que les changements de régimes gouvernementaux, les booms et les baisses sur les marchés financiers et les chocs des prix du pétrole...

Introduction

Pour expliquer les différentes facettes d'un système économique sur une longue période, une approche de modélisation populaire consiste à incorporer plusieurs séries chronologiques de variables macroéconomiques dans un système dynamique qui présente des comportements asymétriques et une non-stationnarité.

La raison d'être de cette approche est que le co-mouvement entre plusieurs séries chronologiques est supposé être régi par certaines variables d'état inobservables.

Origine

James Hamilton

- Depuis les travaux pionniers de Hamilton (1989) sur la modélisation des cycles de croissance du produit national brut (PNB) réel des États-Unis, les modèles autorégressifs à changement de régime de Markov univariés (MS-AR) ont été largement appliqués à diverses séries temporelles, y compris les taux de change (Engel et Hamilton, 1990), les cycles économiques (Hansen, 1992 ; Goodwin, 1993 ; Filardo, 1994),les prix des actions (Hamilton et Susmel, 1994 ; Timmermann, 2012), les taux d'intérêt (Gray, 1996),...

Krolzig

- Hamilton (1990) a popularisé la mise en œuvre de l'espérance-maximisation (EM) pour estimer les modèles MS-AR. Par la suite, Krolzig (1997) a fourni une solution analytique à l'étape de maximisation pour l'ensemble de la classe des modèles MS-VAR.

The AutoRégressive Vectoriels Modele

Rappel : Modèle VAR

Soit $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, ..., Y_{Kt}), t = 1, 2, ...T$, un processus Vectoriel Auto-Regressif d'ordre p :

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + ... + A_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (1)$$

Sous forme matricielle,

$$Y_t = \nu + \sum_{i=1}^{p} A_i Y_{t-i} + \epsilon_t$$

où

- ν vecteur constante de dimension (K, 1)
- A_i matrice de dimension (K, K), $\forall i = 1, ..., p$
- $\epsilon_t \sim IID(0, \Sigma)$

Rappel : Modèle VAR

Sous la forme condensée

$$A(B)Y_t = \nu + \epsilon_t$$

où

$$A(B) = I_K - \sum_{i=1}^{p} A_i B^i$$

- A est polynôme de décalage dimensionnel (K $\times$ K). Nous supposons qu'il n'y a pas de racines sur ou à l'intérieur du cercle unitaire $|A(z)| \neq 0$
- B est l'opérateur de décalage, de sorte que $Y_{t-i} = B^i Y_t$

Rappel : Modèle VAR

Si l'on suppose une distribution normale de l'erreur $\epsilon_t \sim \mathcal{N}ID(0, \Sigma)$, l'équation (1) est connue sous le nom de forme ordonnée à l'origine d'un modèle VAR(p) gaussien stable.

Cela peut être reconfiguré comme la forme ajustée moyenne d'un modèle VAR :

$$Y_t - \mu = A_1(Y_{t-1} - \mu) + A_2(Y_{t-2} - \mu) + ... + A_p(Y_{t-p} - \mu) + \epsilon_t \qquad (2)$$

Où

$$\mu = (I_K - \sum_{i=1}^{p} A_i)^{-1} \nu$$

- μ est la moyenne dimensionnelle (K $\times$ 1) de Y_t.

Limite des modèles VAR

Limite des processus VAR

- Si les séries chronologiques sont sujettes à des changements de régime, le modèle VAR stable avec ses paramètres invariants dans le temps pourrait être inapproprié.

- Ensuite, le modèle MS-VAR pourrait être considéré comme un cadre général de changement de régime.

- L'idée générale derrière cette classe de modèles est que les paramètres du processus de génération de données sous-jacent du vecteur de série temporelle observé Y_t dépendent de la variable de régime non observable s_t, qui représente la probabilité d'être dans un état différent du monde

The Markov-Switching Vector AutoRegressive Modele

Modèle MS-VAR

Les modèles MS-VAR appartiennent à une classe de modèles plus générale qui s'intéresse aux processus non linéaires considérés comme linéaires par morceau sur chacun des états de la nature (régimes) qui gouvernent le phénomène.
Ces différents régimes, de nature discrète, sont stochastiques et inobservables.

Modèle MS-VAR

L'idée de base des modèles MS-VAR est que les paramètres dépendent des différents régimes s_t qui sont en nombre ($s_t \in \{1, \ldots, M\}$).

Le processus générateur des régimes est spécifié comme une chaîne de Markov avec pour probabilité de transition p_{ij}

$$p_{ij} = \Pr(s_{t+1} = j \mid s_t = i)$$

Avec, $\sum_j^M p_{ij} = 1$ pour $\forall i, j \in \{1, \ldots, M\}$

Plus précisément, on suppose que s_t suit un processus de Markov irréductible et ergodique à M états avec la matrice de transition P.

Modèle MS-VAR

Remarque

Dans la recherche empirique, seuls certains paramètres seront conditionnés par l'état de la chaîne de Markov tandis que les autres paramètres seront invariants de régime.

Il existe essentiellement deux catégories de MS-VAR : le modèle VAR à changement de régime sur l'interception (Markov-Switching Intercept VAR Model) et le modèle VAR à changement de régime sur la moyenne (Markov-Switching Mean VAR):

1. MSI : $Y_t = \nu(s_t) + \sum_{i=1}^{p} A_i(s_t)Y_{t-i} + \varepsilon_t$
2. MSM : $Y_t - \mu(s_t) = \sum_{i=1}^{p} A_i(s_t)(Y_{t-i} - \mu(s_{t-i})) + \varepsilon_t,$

Où

- $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}ID(0, \Sigma(s_t))$
- $\mu(s_t), A_1(s_t), \ldots, A_p(s_t), \Sigma(s_t)$ sont des fonctions de changement de paramètres décrivant la dépendance des paramètres $\mu, A_1, \ldots, A_p, \Sigma$ en fonction du régime réalisé s_t.

Modèle MS-VAR

Afin d'établir une notation unique pour chaque modèle, nous spécifions avec le terme général MS(M) les paramètres dépendants du régime :

		MSM	MSI Specification		
		μ varying	μ invariant	ν varying	ν invariant
A_j invariant	Σ invariant	MSM–VAR	*linear* MVAR	MSI–VAR	*linear* VAR
	Σ varying	MSMH–VAR	MSH–MVAR	MSIH–VAR	MSH–VAR
A_j varying	Σ invariant	MSMA–VAR	MSA–MVAR	MSIA–VAR	MSA–VAR
	Σ varying	MSMAH–VAR	MSAH–MVAR	MSIAH–VAR	MSAH–VAR

Procédés MS-VAR particuliers

Modèle MSI(M)–VAR(p)

Dans les modèles MSI(M)–VAR(p), tels que définis par Krolzig (1997), seules les interceptes varient entre les régimes.

M représente le nombre de régimes et p le nombre de retards des termes autorégressifs à prendre en compte.

Si y_t est une série temporelle de dimension K, le modèle MSI–VAR correspondant s'écrit comme suit :

$$y_t = \begin{cases} \nu_1 + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + \Sigma^{1/2}\varepsilon_t \\ \vdots \\ \nu_M + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + \Sigma^{1/2}\varepsilon_t \end{cases}$$

où $\sim NID(0, I_K)$.

Modèle MSI(M)–VAR(p)

Chaque régime est caractérisé par une intercepte A_{0i}. Les termes autorégressifs $A_1, \ldots, A_p$ et la matrice de variance-covariance Σ sont communs à tous les régimes et dépendent d'une chaîne de Markov cachée.

Ce modèle repose sur l'hypothèse que les interceptes varient en fonction de l'état de l'économie contrôlé par la variable non observée s_t.

Hamilton (1989)

Traditionnellement, et en mettant de côté la différence entre les changements de moyenne et ceux d'interception, les modèles MSI(M)–VAR(p) ont été utilisés dans des applications liées aux cycles économiques, la première étant celle de Hamilton (1989).

Modèle MSH(M)–VAR(p)

Dans les modèles MSH(M)–VAR(p), seule la matrice de variance-covariance varie entre les régimes. Ils s'écrivent comme suit :

$$y_t = \begin{cases} \nu + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + \Sigma_1^{1/2} \varepsilon_t \\ \vdots \\ \nu + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + \Sigma_M^{1/2} \varepsilon_t \end{cases}$$

où $\varepsilon_t \sim NID(0, I_K)$.

Chaque régime est caractérisé par sa propre matrice de variance-covariance Σ_i.
L'intercepte ν et les termes autorégressifs $A_1, \ldots, A_p$ restent constants dans tous les régimes.

Modèle MSH(M)–VAR(p)

Lanne et al. (2010)

Ces modèles ont été récemment utilisés dans Lanne et al. (2010), où
— dans le cadre de matrices de covariance des erreurs sous forme réduite variant selon les états
— la propriété de changement de régime de Markov est exploitée pour identifier des chocs structurels.

Modèle MSIAH(M)–VAR(p)

La spécification MS–VAR moins restrictive est celle où tous les paramètres du processus sont conditionnés par l'état s_t. Les modèles MSIAH–VAR sont écrits sous la forme :

$$y_t = \begin{cases} \nu_1 + \sum_{i=1}^{p} A_{i1} y_{t-i} + \Sigma_1^{1/2} \varepsilon_t \\ \vdots \\ \nu_M + \sum_{i=1}^{p} A_{iM} y_{t-i} + \Sigma_M^{1/2} \varepsilon_t \end{cases}$$

où $\varepsilon_t \sim NID(0, I_K)$.
Chaque régime est caractérisé par un intercept ν_i, des matrices de paramètres autorégressifs $A_{1i}, \ldots, A_{pi}$, et une matrice de variance-covariance Σ_i.

Modèle MSIAH(M)–VAR(p)

Ehrmann et al. (2003)

Ces modèles introduisant des changements dans les paramètres autorégressifs ont donc été utilisés pour l'analyse des réponses impulsionnelles. Par exemple, Ehrmann et al. (2003) proposent d'étudier les réponses impulsionnelles dépendantes du régime dans le cadre de tels modèles, sous condition de rester dans le même régime après le choc.

Méthodes d'estimation

Estimation

Objectif principal

Estimer les modèles à changement de régime selon un processus de Markov.

Méthodes disponibles :

1. Filtre de Hamilton (1989) pour l'inférence des régimes.
2. Maximisation de la vraisemblance avec des algorithmes numériques (Newton-Raphson).

Limites des optimisateurs numériques :

1. Inefficaces pour les systèmes de grande dimension.
2. Problèmes de convergence pour des modèles complexes.

Algorithme EM (Espérance-Maximisation)

Introduction par : Hamilton (1990).

Avantages :

1. Solution analytique pour les dérivées de la vraisemblance.
2. Convergence plus robuste, même pour les modèles complexes.
3. Gestion efficace des maxima locaux.

Étapes de l'algorithme EM

Initialisation :
Interceptions, coefficients autorégressifs, et probabilités de transition initialisés à partir des moindres carrés ordinaires (OLS).

Étape d'espérance :
Calcul des probabilités filtrées et lissées des régimes.

Étape de maximisation :
Mise à jour des paramètres via la vraisemblance maximale.

Critères de convergence :
- Variation du logarithme de la vraisemblance.
- Changement maximal des paramètres entre deux itérations.

Exemple pratique

Exemple : Données gdp & taux d'inflation des USA

Modèle estimé	Log likelihood	Akaike info criterion	Schwarz criterion	Number of coefficient
MSIA-VAR	-194.6697	7.202285	8.067398	25
MSA-VAR	-203.3304	7.420669	8.216572	25 23
MSIAH-VAR	**-187.4208**	**7.062978**	**8.031904**	**28**
MSIH-VAR	-191.5127	6.934842	7.626932	20
MSMAH-VAR	-191.3064	7.124799	8.024516	26
MSMA-VAR	-195.1196	7.151462	7.947365	23

Le modèle autorégressif vectoriel à intercept hétéroscédastique avec changement de régime de Markov (2) (MSIAH(2)-VAR(2)) a obtenu la log-vraisemblance la plus élevée (-187,4208) et les critères d'information les plus faibles (Critère d'Information d'Akaike = -8,28, Critère d'Information de Schwarz = -6,939) correspond au modèle MSIH-VAR.

Exemple : Données gdp & taux d'inflation des USA

Constant transition probabilities:
P(i, k) = P(s(t) = k | s(t-1) = i)
(row = i / column = k)

	1	2
1	0.802638	0.197362
2	0.201034	0.798966

Le résultat indique que, étant donné que l'état actuel est en expansion, la probabilité de passer à une expansion au cours de la période suivante est de 0.8026, tandis que la probabilité de passer à une contraction au cours de la période suivante est de 0.1974.

De plus, étant donné que l'état actuel est en contraction, la probabilité de passer à une expansion au cours de la période suivante est de 0.2010 et la probabilité de rester en contraction au cours de la période suivante est de 0,79897.

Exemple : Données gdp & taux d'inflation des USA

La durée attendue dérivée de $\frac{1}{1-p_{ij}}$ est de **5.076142132** dans le régime 1 et de **4.975124378** dans le régime 2, comme indiqué dans la durée attendue.

Le résultat implique qu'il y a **80.26** % de probabilité de rester dans le régime 1 pour une durée de 5 ans. De même, il y a **80** % de probabilité de rester dans le régime 2 pour une durée de 5ans.

Conclusion

En conclusion, les modèles MS-VAR offrent une approche robuste pour analyser les séries temporelles économiques en intégrant les non-linéarités et les changements de régime.
Leur capacité à modéliser des transitions stochastiques et à capturer des dynamiques complexes en fait des outils essentiels pour comprendre les comportements économiques asymétriques et les chocs structurels.
Ces modèles, plus flexibles que les VAR traditionnels, ouvrent des perspectives prometteuses pour des analyses économiques plus précises et adaptées aux réalités dynamiques.

Références

1. Full Article: Estimation and Asymptotics for Vector Autoregressive Models with Unit Roots and Markov Switching Trends, n.d.
2. Jointly Determining the State Dimension and Lag Order for Markov-switching Vector Autoregressive Models - Li - 2021 - Journal of Time Series Analysis - Wiley Online Library, n.d.
3. Markov-Switching Vector Autoregressive (MS-VAR) Modelling (Mean Adjusted): Application to Macroeconomic data — Archives of Business Research. Accessed January 14, 2025.