Классический метод

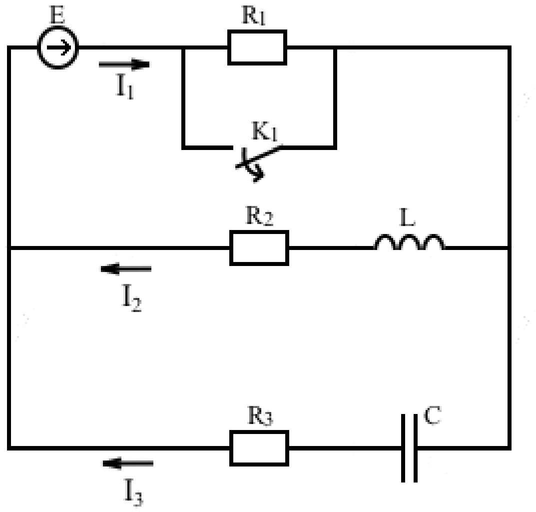


Рис.1

Исходные данные

E=108 В. w=10000 рад/с. R_1=85 Ом. R_2=36 Ом.

R_3=19 Ом. L=0.021 Гн. C=1.17E-6 Ф.

Реактивное сопротивление индуктивности:

X_L=wL=210 Ом.

Реактивное сопротивление ёмкости:

X_C=1/wC=85.47 Ом.

Схема непосредственно перед коммутацией

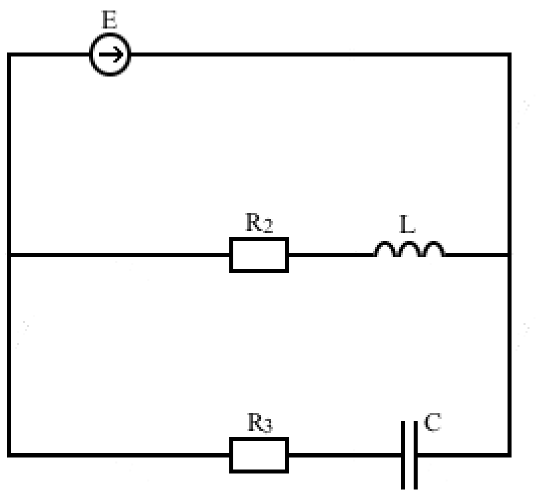


Рис. 2

Комплексное сопротивление цепи относительно источника

$Z=((R_2+jX_L)*(R_3-jX_C))/(R_2+jX_L+R_3-jX_C)=61.432-j122.492$ Ом.

Комплексная амплитуда тока в ветви источника определяется по закону Ома:

$\dot{I}_{1m}=\dot{E}_m/Z=0.353+j0.704=0.788^{j63.365°}$ А.

Комплексную амплитуду тока в ветви с индуктивностью определим по правилу плеч:

$\dot{I}_{2m}=\dot{I}_{1m}*(R_3-jX_C)/((R_2+jX_L)+(R_3-jX_C))=0.086-j0.5=0.507e^{-j80.272°}$ А.

Комплексную амплитуду тока в ветви с ёмкостью определим по правилу плеч:

$\dot{I}_{3m}=\dot{I}_{1m}*(R_2+jX_L)/((R_2+jX_L)+(R_3-jX_C))=0.268+j1.204=1.233^{j77.467°}$ А.

Комплексная амплитуда напряжения на ёмкости определяется по закону Ома:

$\acute{U}_C=\dot{I}_C*(-jX_C)=102.91-j22.878=105.426e^{-j12.533°}$ А.

Мгновенное значение тока в цепи с индуктивностью запишется в виде

$i_L(t)=0.507\sin(10^4t-80.272^{\circ})$ А.

Полагая в последнем выражении t=0-, получим величину тока в индуктивности непосредственно перед коммутацией:

$i_L(0-)=0.507\ \sin(-80.272^{\circ})=-0.5$ А.

По законам коммутации ток в индуктивности не может измениться скачком. Следовательно, $i_L(0-)=i_L(0+)=-0.5$ А.

Мгновенное значение напряжения в цепи с ёмкостью запишется в виде

$u_C(t)=105.426\sin(10^4t-12.533^{\circ})$ В.

Полагая в последнем выражении t=0-, получим величину напряжения на ёмкости непосредственно перед коммутацией:

$u_c(0-)=105.426\ \sin(-12.533^{\circ})=-22.878$ В.

По законам коммутации напряжение на ёмкости не может измениться скачком. Следовательно, $u_C(0-)=u_C(0+)=-22.878$ В.

Принуждённые составляющие определим по схеме на рис. 1

Комплексное сопротивление цепи относительно источника:

$Z=(R_2+jX_L)*(R_3-jX_C)/((R_2+jX_L)+(R_3-jX_C))+R_1=146.432-j122.492$ Ом.

Комплексная амплитуда тока в ветви источника определяется по закону Ома:

$\dot{I}_{1m}=\dot{E}_m/Z=0.434+j0.363=0.566^{j39.913°}$ А.

Комплексную амплитуду тока в ветви с индуктивностью определим по правилу плеч:

$\dot{I}_{2m}=\dot{I}_{1m}*(R_3-jX_C)/((R_2+jX_L)+(R_3-jX_C))=-0.086-j0.353=0.364e^{-j103.725°}$ А.

Мгновенное значение тока в индуктивности, т. е. искомая принуждённая составляющая запишется в виде

$i_{Lпр}(t)=0.364\sin(10^4t-103.725^{\circ})$ А.

Комплексную амплитуду тока в ветви с ёмкостью определим по правилу плеч:

$\dot{I}_{3m}=\dot{I}_{1m}*(R_2+jX_L)/((R_2+jX_L)+(R_3-jX_C))=0.52+j0.716=0.885^{j54.014°}$ А.

Комплексная амплитуда напряжения на ёмкости определяется по закону Ома:

$\acute{U}_C=\dot{I}_C*(-jX_C)=61.23-j44.465=75.674e^{-j35.986°}$ А.

Мгновенное значение напряжения на ёмкости, т. е. искомая принуждённая составляющая запишется в виде

$u_{Cпр}(t)=75.674 \sin(10^4t-35.986^{\circ})$ В.

Характеристическое уравнение. Замыкаем накоротко зажимы источника ЭДС и разрываем цепь в ветви с ёмкостью. Комплексное входное сопротивление относительно разрыва и при jw=p запишется в виде

$Z(p)=R_1*(R_2+pL)/(R_1+(R_2+pL))+(R_3+1/pC)=0$

После выполнения алгебраических преобразований и подставляя численные значения параметров цепи получим характеристическое уравнение второго порядка:

$p^2+10672p+47352932=0$

Корни уравнения

$p_1=-5336.02+j4345.097$

$p_2=-5336.02-j4345.097$

По виду корней характеристического уравнения записывается свободная составляющая переходного процесса

$i_{Lсв(t)}=(A_1\cos(4345t)+A_2\sin(4345t))e^{-5336t}$.

Полный ток в индуктивности равен сумме свободной и принуждённой составляющих:

$i_L(t)=0.364\sin(10^4t-103.725^{\circ})+(A_1\cos(4345t)+A_2\sin(4345t))e^{-5336t}$ А.

В последнем уравнении неизвестными являются A_1 и A_2, следовательно, для их однозначного определения необходимо второе уравнение. Получим его дифференцированием первого:

$di_L/dt=0.364*10^4\cos(10^4t-103.725^{\circ})+(-4345A_1*\sin(4345t)+4345A_2\cos(4345t))e^{-5336t}$
$-5336(A_1\cos(4345t)+A_2*\sin(4345t))e^{-5336t}$

Полагая в вышепривидённых уравнениях t=0+, получим

$i_{L(t)}=0.364\sin(-103.725^{\circ})+A_1$,

$di_{L(0+)}/dt=0.364*10^4\cos(-103.725^{\circ})-5336A_1 +4345A_2$.

Для определения зависимых начальных условий составим систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени t=0+ послекоммутационной схемы

$r_1i_1+r_2i_2+Ldi_L(0+)/dt=e(0+)$

$-r_2i_2-Ldi_L(0+)/dt+r_3i_3+u_c(0+)=0$

$i_1(0+)=i_2(0+)+i_3(0+)$

Подставляя численные значения найденных ранее независимых начальных условий $i_L(0+)$, $u_C(0+)$ и значение $e(0+)=0$, получим

$di_L(0+)/dt=335.781$ А/с.

Тогда уравнения для определения постоянных интегрирования примут вид

$-0.5=-0.354+A_1$,

$335.781=-863.634-5336A_1+4345A_2$.

Постоянные интегрирования:

$A_1=-0.1461$

$A_2=0.0966$

Отсюда:

$A=\sqrt{}(A_1{}^2+A_2{}^2)=0.175$ $f_{св}=\mathrm{atan}(A_1/A_2)=56.528$

Окончательное выражение для преходного тока в индуктивности запишется в виде

$i_{L(t)}=0.364\sin(10^4t-103.725^\circ)+0.175*e^{-5336t}*\sin(4345t+56.528)$ А.

Переходный процесс по напряжению на ёмкости расчитывается аналогично. Записываем выражение для $u_C(t)$ как сумму двух составляющих:

$u_C(t)=u_{Cпр}(t)+u_{Cсв}(t)$.

Свободную составляющую ищем в виде суммы двух экспонент. С учетом этого

$u_{Cпр}(t)=75.674\ \sin(10^4t-35.986^\circ)+(A_1*\cos(4345t)+A_2*\sin(4345t))e^{-5336t}$ В.

Второе уравнение необходимое для однозначного определения постоянных интегрирования, получим дифференцированием первого:

$du_C/dt=75.674*10^4\cos(10^4t-35.986^\circ)+(-4345*A_1*\sin(4345t)+4345*A_2*\cos(4345t))e^{-5336t}\ -5336*(A_1*\cos(4345t)+A_2*\sin(4345t))e^{-5336t}$

Полагая в обоих уравнениях t=0+, получим:

$u_C(0+)=75.674\sin(-35.986^\circ)+A_1$,

$du_C(0+)/dt=75.674*10^4\cos(-35.986^\circ)-5336A_1+4345A_2$.

Производная напряжения на ёмкости в момент коммутации относится к зависимым начальным условиям. Определим её значение по выражению

$du_C(0+)/dt=i_3(0+)/C$.

Значение $i_3(0+)$ определим из системы уравнений по законам Кирхгофа для момента времени t=0+, записанной выше. Тогда

$du_C(0+)/dt=537088.907$ В/с.

Уравнения для определения постоянных интегрирования примут вид

$-22.878=-44.465+A_1$,

$537088.907=612324.187-5336A_1+4345A_2$.

Постоянные интегрирования

$A_1=21.5874$

$A_2=9.1956$

Отсюда:

$A=\sqrt{(A_1^2+A_2^2)}=23.464$ $f_{св}=atan(A_1/A_2)=66.927$

Окончательное выражение для переходного процесса на ёмкости:

$u_C=75.674*\sin(10^4t-35.986^\circ)+23.464*e^{-5336t}\sin(4345t+66.927)$ В.

Постоянная времени t определяется как величина, обратная минимальному по модулю корню характеристического уравнения:

$t=1/p_{min}=0.0002301496$ с.

Следовательно, длительность переходного процесса для рассматриваемой задачи будет равна

$t_{пп}=0.0006904488$ с.

График переходного процесса на индуктивности

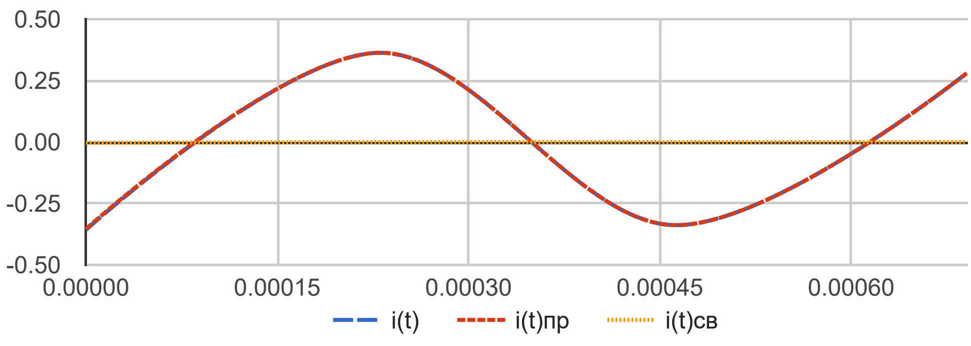
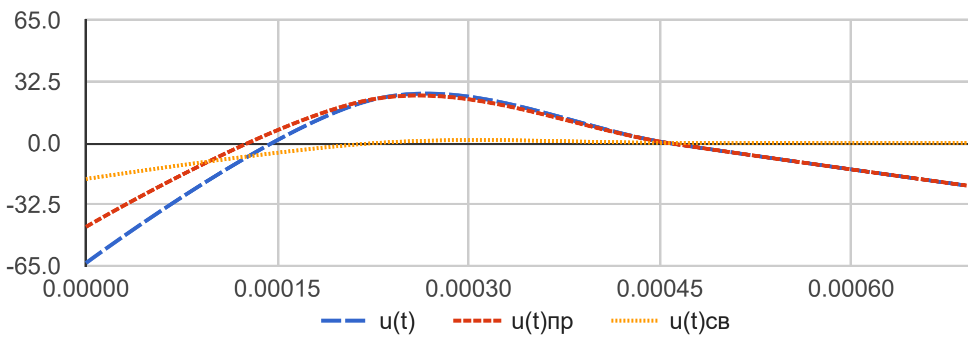


График переходного процесса на ёмкости



Операторный метод

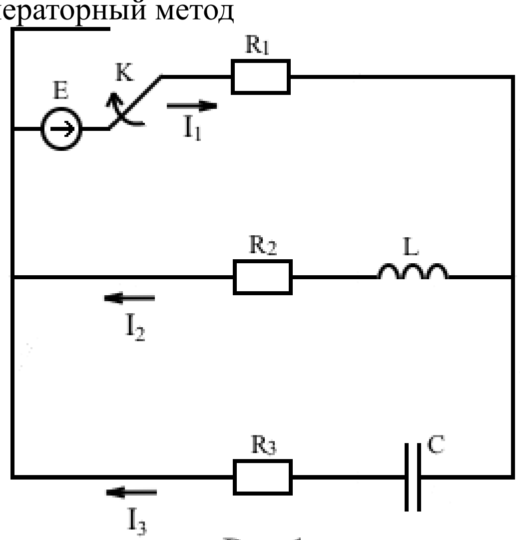


Рис.1

Исходные данные

E=108 В. w=10000 рад/с. r_1=85 Ом. r_2=36 Ом.

r_3=19 Ом. L=0.025 Гн. C=1.19E-6 Ф.

В эквивалентной схеме цепи для расчёта независимых начальных условий, изображённой на рис.2, реактивные элементы показаны как короткое замыкание и обрыв.

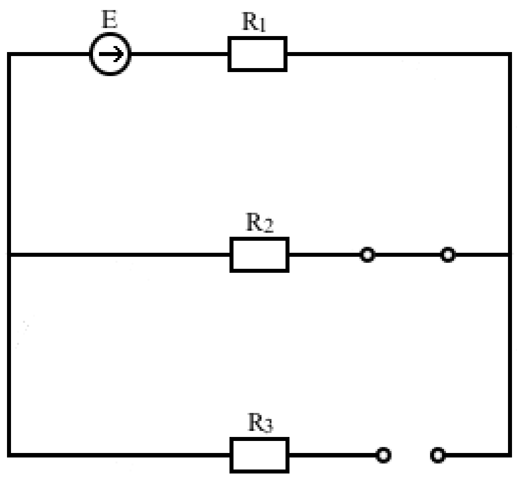


Рис. 2

Ток в ветви с индуктивностью будет равен

$i_L(0-)=E/(r_1+r_2)=0.893$ А.

Напряжение на ёмкости будет равно

$u_C(0-)=i_L(0-)*r_2=32.132$ В.

Ток в индуктивности и напряжение на ёмкости в момент коммутации не могут измениться скачком. Следовательно,

$i_L(0-)=i_L(0+)=0.893$ А.

$u_C(0-)=u_C(0+)=32.132$ В.

Операторная схема замещения

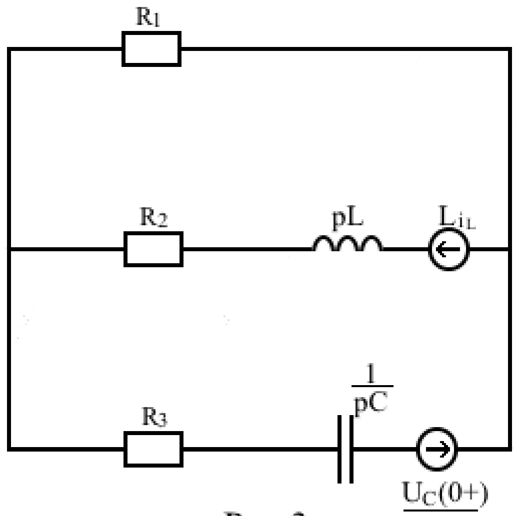


Рис.3

Расчитаем схему методом контурных токов

$(r_1+r_2+pL)I_{11}(p)+r_1I_{22}(p)=Li_L(0+)$

$r_1I_{11}(p)+(r_1+r_3+1/pC)I_{22}(p)=(-u_C(0+)/p)$

Выразим $I_{11}(p)$ и $I_{22}(p)$

$I_{11}(p)=((r_1+r_3+pL)*Li_L(0+)-r_1*(-u_C(0+)/p))/((r_1+r_3+pL)*(r_1+r_2+1/pC)-r_1*r_1)$

$I_{22}(p)=((-u_C(0+)/p)*(r_1+r_2+1/pC)-Li_L(0+)*r_1)/((r_1+r_3+pL)*(r_1+r_2+1/pC)-r_1*r_1)$

Подставив численные значения, получим

$I_{11}(p)=(0.893p+8262.516)/(p^2+10141.309p+39107950.873)$,

$I_{22}(p)=(-1.038p-1495.385)/(p^2+10141.309p+39107950.873)$.

Выражение для операторного напряжения на ёмкости запишется в виде

$U_C(p)=U_C(0+)/p+1/(pC)*I_{22}(p)$.

После подстановки получим

$U_C(p)=32.132/p+(-872656.755p-1256625727.214)/p(p^2+10141.309p+39107950.873)$

Для тока в индуктивности запишем:

$M(p)=0.893p+8262.516$;

$N(p)=p^2+10141.309p+39107950.873$;

$N'(p)=2p+10141.309$.

Решая характеристическое уравнение $p^2+10141.309p+39107950.873=0$, находим два корня

$p_1=-5070.65+j3660.111$

p_2=-5070.65-j3660.111

При этом ток в индуктивности в соответствии с теоремой разложения запишется в виде

$i_L(t)=M(p_1)/N'(p_1)e^{p_1t}+M(p_2)/N'(p_2)e^{p_2t}$.

Коэффициенты при экспонентах в случае комплексно-сопряжённых корней тоже будут комплексно-сопряжёнными, следовательно ток $i_L(t)$ можно определить как удвоенное значение вещественной части первого или второго слагаемых.

$i_L(t)=2Re(M(p_1)/N'(p_1)e^{p_1t})$.

После подстановки численных значений и выполнения всех преобразований получим

$i_L(t)=1.356e^{-5070.654t}\sin(3660.111t+41.163^\circ)$ А.

Переходное напряжение на ёмкости вычислим используя полученное раньше изображение $U_C(p)$. Сумме изображений

$U_C(p)=U_1(p)+U_2(p)$

будет соответствовать сумма оригиналов

$u_C(t)=u_1(t)+u_2(t)$.

Введём обозначения:

$U_1(p)=32.132/p$; $U_2(p)=(-872656.755p-1256625727.214)/p(p^2+10141.309p+39107950.873)=M(p)/N(p)$.

Изображению $U_1(p)$ в области оригиналов будет соответствовать константа $u_1(t)=32.132$.

Оригинал $u_2(t)$ определим используя теорему разложения. Характеристическое уравнение N(p)=0 имеет три корня:

$p_1=0$; p_2=-5070.65+j3660.111; p_3=-5070.65-j3660.111.

Следовательно,

$u_2(t)=M(p_1)/N'(p_1)e^{p_1t}+M(p_2)/N'(p_2)e^{p_2t}+ M(p_3)/N'(p_3)e^{p_3t}$.

После подстановки численных значений и выполнения всех преобразований получим

$u_2(t)=196.552e^{-5070.654t}\sin(3660.111t+170.591^\circ)-32.132$ В.

Складывая $u_1(t)$ и $u_2(t)$, находим полное переходное напряжение на ёмкости

$u_C(t)=196.552e^{-5070.654t}\sin(3660.111t+170.591^\circ)$ В.

Графики переходных процессов по току на индуктивности $i_L(t)$ и понапряжению на ёмкости $u_C(t)$:

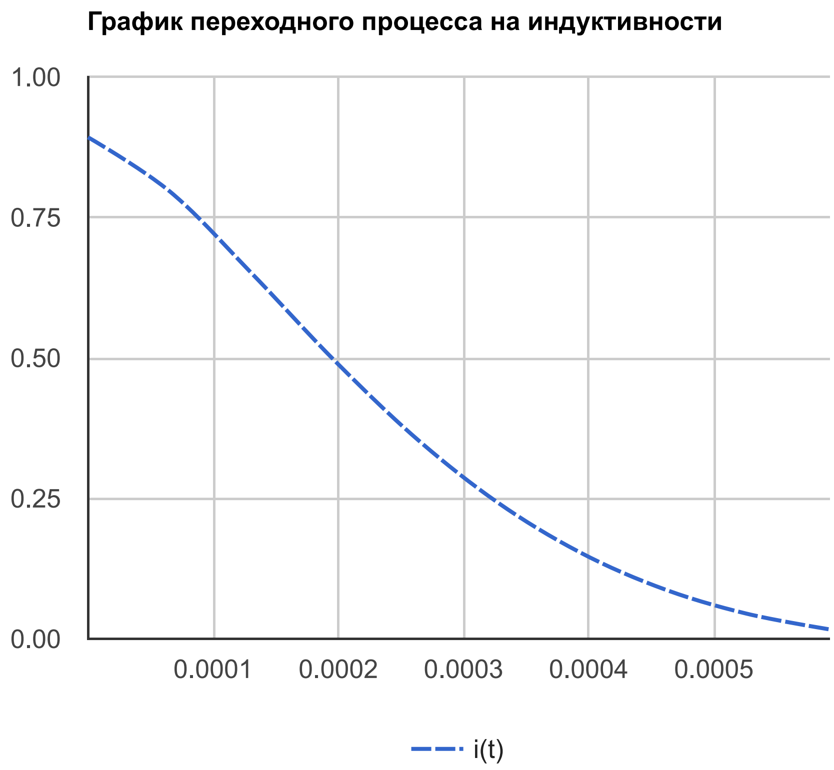


График переходного процесса на индуктивности
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0001
0.0002
0.0003
0.0004
0.0005
i(t)

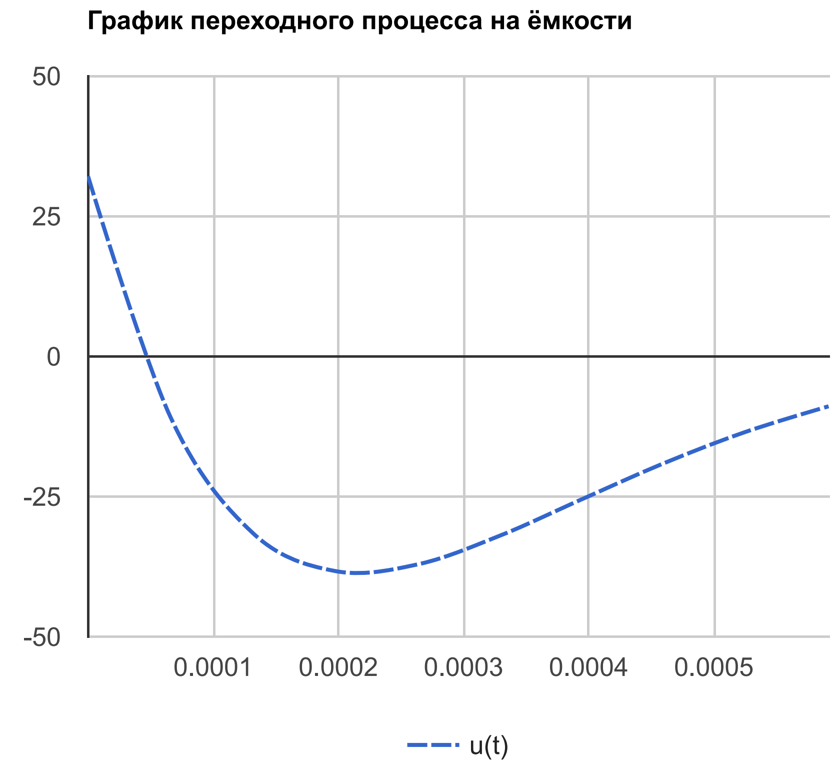


График переходного процесса на ёмкости
50
25
0
-25
-50
0.0001
0.0002
0.0003
0.0004
0.0005
u(t)