Числовые функции одной действительной переменной

Понятие числовой функции

Пусть X и Y– два произвольных (не обязательно числовых) множества. Если известен закон, по которому каждому элементу множества X поставлен в соответствие некоторый элемент множества Y, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y и обозначают это: $f : X \to Y$.

Отображение f называют числовой функцией одной действительной переменной, если $X, Y \subset \mathbb{R}$. Таким образом, если каждому действительному числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое вполне определённое действительное число $y = f(x)$, $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определена числовая функция f. Множество X называют множеством задания функции (область определения), а множество Y – множеством значений функции (область значений).

Способы задания функций

Аналитический способ. Если $y = f(x)$, где $f(x)-$ аналитическое выражение, то говорят, что функция f задана аналитически или формулой. Это явное задание функции.

Если функция задана формулой $F(x, f(x)) = 0$, например, $x^2 + y^2 = 4$, то говорят, что функция задана неявно.

Пусть на множестве $T \subset \mathbb{R}$ заданы две явные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, где $x \in X$, $y \in Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$ В этом случае отображение $f : X \to Y$ или функция $y = f(x)$ задается с помощью параметра t или параметрически.

Например, параметрические уравнения окружности радиуса a с центром в начале координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

Здесь t – величина дуги окружности от точки $A(a;0)$ до точки $M(x,y)$ в радианах (рис. 3.1).

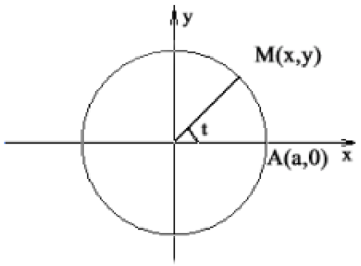

Рис. 3.1

Табличный способ. В этом случае функция задается с помощью таблицы, в которую помещаются значения аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Этот способ широко применяется на практике в случаях, когда значения функции определяются в результате эксперимента.

Графический способ. Это способ задания функции с помощью геометрического изображения графика функции в некоторой системе координат. Графиком функции называют множество точек $M(x,y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, координаты которых связаны зависимостью $y = f(x)$.

Обратная и сложная функции

Пусть функция $f: X \to Y$ такова, что для $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае всякому числу $y \in Y$ может быть поставлено в соответствие некоторое число $x \in X$ такое, что $f(x) = y$. Тем самым определена новая функция $f^{-1}: Y \to X$, которая называется обратной для f. Например, $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$.

Графики функций f и f^{-1}, построенные в декартовой системе координат, симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатного углов (рис. 3.2).

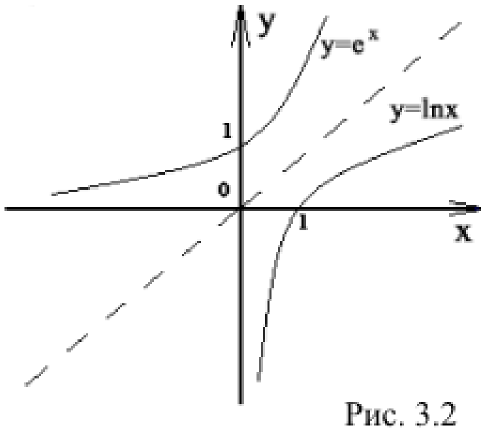

Рис. 3.2

Если $f: X \to Y$, а $\varphi: Y \to U$, то функция $F: X \to U$ такая, что $F(x) = \varphi\big(f(x)\big)$ называется композицией функций φ и f или сложной функцией.

Например, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $\varphi(y) = \sin y$, тогда сложная функция $F(x) = \varphi\big(f(x)\big)$ имеет вид $F(x) = \sin\sqrt{x^2 + 2}$.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называют следующие:

1) степенная функция: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$;

2) показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарной функцией называется функция, которая может быть представлена формулой $y = f(x)$, составленной из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, взятия функции от функции.

Например, $y = \sin^4 \log_7 \operatorname{arctg} \sqrt[10]{x - 14^{1+\cos^2 x}}$ – элементарная функция, а функция $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ не является элементарной.

Существует следующая классификация элементарных функций:

1) Целая рациональная функция, или многочлен степени n:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \in N \cup \{0\},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R.$$

Многочлен первой степени называют линейной функцией.

2) Дробно-рациональная функция

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Совокупность рациональных и дробно-рациональных функций составляет класс рациональных функций.

3) Иррациональные функции, т.е. функции, полученные с помощью арифметических действий и конечного числа суперпозиций над степенными функциями.

4) Трансцендентные функции, т.е. функции, не являющиеся алгебраическими.

Предел числовой последовательности

Определения предела числовой последовательности

Числовая последовательность (ЧП) $\{x_n\}$ представляет собой функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения из некоторого множества вещественных чисел, то есть (ЧП) – это функция натурального аргумента.

Последовательность часто задается формулой общего члена, например, $x_n = 2^n + 5,\ n = 1, 2, \ldots$ или с помощью рекуррентного отношения $x_n = \sqrt{2x_{n-1} + a}$, $n = 2, 3, \ldots$, где $x_1 = \sqrt{a}.$

Определение 1. Точка a (конечная или бесконечно удаленная) называется пределом ЧП, если, какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены ЧП, начиная с некоторого номера.

Так как окрестность точки определяется заданием некоторого числа $\varepsilon > 0$, то определение предела ЧП можно переформулировать следующим образом.

Определение 2. Точка a (конечная или бесконечно удаленная) называется пределом ЧП $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ члены $x_n \in U_\varepsilon(a)$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

С помощью логических символов определение предела ЧП можно записать следующим образом:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon : x_n \in U_\varepsilon .$$

Если ЧП имеет конечный предел, то она называется сходящейся. В противном случае она называется расходящейся.

Для случая конечного предела определения 2 можно записать в виде:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon :| x_n - a |< \varepsilon .$$

Приме 1. Последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} \to 0,$ так как для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, что для $\forall n > n_\varepsilon : \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 0{,}1$, тогда $n_\varepsilon = \left[\sqrt{10}\right].$

Последовательность, пределом которой является 0, называется бесконечно малой. Если пределом ЧП является бесконечность, то она бесконечно большой.

Понятие конечного предела ЧП связано в определённом смысле с встречающейся на практике задачей получения значения некоторой интересующей нас величины с наперед заданной фиксированной точностью $\varepsilon > 0$. Последовательные приближенные вычисления x_n рассматриваемой величины могут получаться в результате проведения каких-либо экспериментов или вычисления по каким-нибудь рекуррентным формулам. Эта задача будет, очевидно, решена, если найдётся номер n_ε, начиная с которого все значения x_n будут отклоняться от точного значения рассматриваемой величины в пределах заданной точности.

Свойства сходящихся числовых последовательностей

1^0 Числовая последовательность имеет только один предел.

2^0 Сходящаяся числовая последовательность ограничена, т.е. $\exists M > 0 : |x_n| \leq M \ \ \forall n \in N$.

3^0 Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \neq 0$ то, начиная с некоторого номера, члены ЧП сохраняют знак числа a.

4^0 Если $x_n \to a, y_n \to b, n \to \infty$ и $a < b$, то начиная с некоторого номера $x_n < y_n$.

5^0 Пусть $x_n \to a, y_n \to b$ при $n \to \infty$ и начиная с некоторого номера $x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ если $x_n \leq y_n, \ \forall n > n_\varepsilon$.

6^0 Лемма о сжатой переменной. Если, начиная с некоторого номера $x_n \leq y_n$ и $x_n \to a, y_n \to a$ при $n \to \infty$, то $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

7^0 Если $x_n \to a$, $y_n \to b$ при $n \to \infty$, то

1) $x_n \pm y_n \to a \pm b$ при $n \to \infty$;

2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ при $n \to \infty$;

3) $\alpha \cdot x_n \to \alpha \cdot a$ при $n \to \infty, \alpha \in R$;

4) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ при $n \to \infty, (y_n \neq 0 \forall n, b \neq 0)$.

Монотонные последовательности. Критерий сходимостимонотонной последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1} (x_n \geq x_{n+1})$. Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Имеет место следующая

Теорема 1 (Больцано-Вейерштрасса – критерий сходимости монотонной последовательности).

Для того чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена, причем, если $\{x_n\}$ – монотонно возрастает (убывает), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} \right)$.

Необходимость. В силу свойства 2^0 сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность. Пусть для определённости $\{x_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность и $a = \sup\{x_n\}$.По определению верхней грани имеем:

1) для любого номера $n \in N$ справедливо неравенство $x_n \leq a$;

2) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, что $x_{n0} > a - \varepsilon$.

Тогда, в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$, заключаем, что ля всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq \ldots \leq a < a + \varepsilon,$$

т.е. начиная с номера n_0 все члены последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. Значит, $a = \sup\{x_n\} = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$. Аналогично проводится доказательство и для монотонно убывающей числовой последовательности.

Пример 2. **<u>Число *e*.</u>**

Пусть $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

Аналогично

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \quad (2)$$

Сравним соотношения (1) и (2). В формуле (2) каждое слагаемое больше, чем соответствующее слагаемое в (1) и, кроме того, имеется на одно положительное слагаемое больше поэтому $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

Из равенства (1) видно, что $x_n > 2$. Оценим $\{x_n\}$сверху. Имеем из формулы (1):

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{1 - {}^1\!/\!{}_2} = 3.$$

В результате получаем $2 < x_n < 3$. Таким образом, $\{x_n\}$ – монотонно возрастает и ограниченна, значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса она имеет конечный предел.

Этот предел ЧП $\{x_n\}$ обозначается буквой e, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, причём

$$e \approx 2{,}71828182459045$$

– иррациональное число и, более того, трансцендентное, т.е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.