Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Дисциплина: Системный анализ и исследование операций

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовому проекту
на тему

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

БГУИР КП 1-53 01 02 06 039 ПЗ

Студент В. В. Шумигай
Руководитель Е. В. Протченко

Минск 2022

РЕФЕРАТ

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: курсовой проект / В. В. Шумигай – Минск: БГУИР, 2022, – п.з. – 30 с.

Курсовой проект на тему «Решение оптимизационных задач линейного программирования» реализован с целью определения оптимального плана железнодорожных перевозок при соблюдении всех ограничений и получения максимальной прибыли.

Пояснительная записка к курсовому проекту состоит из введения, 6 разделов, включающих постановку задачи оптимизации, построение базовой аналитической модели, обоснование вычислительной процедуры, решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода, анализ модели на чувствительность, построение модифицированной модели и анализ результатов модификации, а также заключения, списка использованных источников и приложений, содержащих рабочие листы *Excel* с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели и задачи на основе модифицированной аналитической модели.

Для решения оптимизационных задач используется симплекс-метод.

В результате выполнения курсового проекта разработан оптимальный план железнодорожных перевозок для получения максимальной прибыли при соблюдении всех ограничений. Произведен анализ оптимального решения на чувствительность, представлен возможный вариант модификации модели с целью улучшения полученных результатов и устранения недостатков, выявленных в результате решения поставленной задачи оптимизации.

Дополнительно, исходная и модифицированная задачи решаются с использованием надстройка «Поиск решения» табличного процессора *Excel*.

Данный курсовой проект может служить хорошим примером решения оптимизационных задач и использоваться для обучения решения аналогичных задач линейного программирования.

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
____
(подпись)
__________________2022г.

ЗАДАНИЕ
по курсовому проектированию

Студенту *Шумигаю Владиславу Викторовичу* ______________

1. Тема проекта Разработка оптимального плана железнодорожных перевозок

2. Срок сдачи студентом законченного проекта______*10 декабря 2022 г.*_____

3. Исходные данные к проекту: из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Количество вагонов каждого типа, входящих в состав поездов, приведено в таблице.

Вместимость плацкартного вагона – 58 пассажиров, купейного – 40, мягкого – 32. Багажные и почтовые вагоны не используются для перевозки пассажиров.

Всего имеется 12 багажных вагонов, 8 почтовых, 81 плацкартный, 70 купейных, 26 мягких.

Требуется по меньшей мере один скорый поезд.

Определить количество скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно, чтобы перевезти максимальное количество пассажиров.

4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень вопросов, которые подлежат разработке)

Введение

1 Постановка задачи оптимизации

2 Построение базовой аналитической модели

3 Обоснование вычислительной процедуры

4 Решение задачи оптимизации

5 Анализ базовой аналитической модели на чувствительность

6 Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации

7 Примеры постановок и решения оптимизационных задач

Заключение

Список использованных источников

5. Консультант по проекту (с обозначением разделов проекта) *Е. В. Протченко*

6. Дата выдачи задания *1 сентября 2022 г.*

7. Календарный график работы над проектом на весь период проектирования (с обозначением сроков выполнения и трудоемкости отдельных этапов):

1-3 разделы к 8.10 – 35 %;

4, 5 разделы к 5.11 – 35 %;

6, 7 разделы к 3.12 – 10 %;

оформление пояснительной записки к 10. 12 – 20 %;

защита курсового проекта с 13.12 по 21.12.2022г

Руководитель ____________ *Е. В. Протченко*

(подпись)

Задание принял к исполнению ____________ *В. В. Шумигай*

(дата и подпись студента)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций – прикладная математическая дисциплина, рассматривающая количественное обоснование решений по управлению целенаправленными процессами (операциями) в сложных системах. Ее составляющими являются: построение математических моделей принятия наилучших (оптимальных) решений, разработка математических методов получения таких решений для различных типов исходной числовой информации, использование полученных результатов в реальных ситуациях [1].

Наиболее известными и эффективными методами исследования операций являются методы линейного программирования, когда целевая функция и все ограничения являются линейными функциями. Линейное программирование успешно применяется в экономике, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, системе здравоохранения, военной области и даже в социальных науках [2].

Задачи линейного программирования со множеством переменных решаются с помощью симплекс-метода. Итоговая таблица алгоритма симплекс-метода содержит оптимальное значение целевой функции, соответствующие ему значения переменных решения и значения остаточных или избыточных переменных [3].

Оптимальное решение задачи линейного программирования дает возможность для принятия хорошего управленческого решения. Однако следует учитывать, что все числовые параметры в изучаемой математической модели известны и постоянны. Как правило, в практических задачах этого не бывает. Во-первых, эти параметры могут быть неточными, и, во-вторых, в зависимости от условий хозяйствования они могут изменяться с течением времени. Исследование изменений оптимального решения задачи в зависимости от изменения данных называется анализом чувствительности или постоптимальным анализом. Такой анализ часто решает проблему стабильности оптимального решения, в котором определяются пределы изменений параметров задачи, не приводящих к изменениям в оптимальном решении.

Итоговую таблицу симплекс-метода можно использовать также в анализе чувствительности, чтобы выявить общее воздействие изменений в запасах лимитирующих ресурсов на целевую функцию и каждое ограничение.

Табличный процессор *Excel* имеет развитые средства, позволяющие решать разнообразные задачи оптимизации, в том числе задачи линейного программирования. Надстройка «Поиск решения», входящая в *Excel*, предназначена для оптимизации моделей при наличии ограничений. Для задач линейного программирования «Поиск решения» использует эффективный оптимизационный алгоритм под названием симплекс-метод [4].

Целью курсового проекта является определение оптимального плана железнодорожных перевозок. Ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. При этом известно количество вагонов каждого типа входящих в состав поезда. Существуют ограничения на количество вагонов каждого типа. В данном проекте определяется, сколько скорых и пассажирских поездов следует формировать ежедневно, соблюдая все ограничения, для перевозки максимального количества пассажиров.

Поставленная оптимизационная задача решается симплекс-методом, интерпретируются полученные результаты, указываются статус и ценность рассматриваемых в задаче ресурсов, выполняется анализ на чувствительность к изменениям ограничений и коэффициентов целевой функции, указываются недостатки объекта моделирования, выявленные в результате решения задачи оптимизации, и приводятся предложения по их устранению, разрабатывается модифицированная модель, соответствующая улучшенному варианту объекта моделирования, и производится оценка достигнутых результатов.

Дополнительно, исходная задача и модифицированная задача решаются с использованием табличного процессора *Excel* и приводятся результаты решения с объяснением их смысла.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Количество вагонов каждого типа, входящих в состав поездов, приведено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Поезда	Вагоны				
	багажные	почтовые	плацкартные	купейные	мягкие
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1

Вместимость плацкартного вагона – 58 пассажиров, купейного – 40, мягкого – 32. Багажные и почтовые вагоны не используются для перевозки пассажиров.

Всего имеется 12 багажных вагонов, 8 почтовых, 81 плацкартный, 70 купейных, 26 мягких.

Требуется по меньшей мере один скоростной поезд.

Определить количество скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно, чтобы перевезти максимальное количество пассажиров.

2 ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для построения математической модели задачи введем переменные. Обозначим через X_1 – количество скорых поездов, через X_2 – количество пассажирских поездов.

Составим ограничения на количество поездов:

$$X_1 \geq 1, X_2 \geq 0;$$

на количество багажных вагонов:

$$X_1 + X_2 \leq 12;$$

на количество почтовых вагонов:

$$X_1 \leq 8;$$

на количество плацкартных вагонов:

$$5X_1 + 8X_2 \leq 81;$$

на количество купейных вагонов:

$$6X_1 + 4X_2 \leq 70;$$

на количество мягких вагонов:

$$3X_1 + X_2 \leq 26.$$

В данной задаче требуется определить количество поездов, чтобы привезти максимальное количество пассажиров.

Посчитаем вместительность скорого поезда:

$$58 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 32 \cdot 3 = 626,$$

а для пассажирского:

$$58 \cdot 8 + 40 \cdot 4 + 32 \cdot 1 = 656$$

Целевая функция для данной задачи будет иметь вид:

$$E = 626X_1 + 656X_2 \rightarrow max$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 12 \\ X_1 \leq 8 \\ 5X_1 + 8X_2 \leq 81 \\ 6X_1 + 4X_2 \leq 70 \\ 3X_1 + X_2 \leq 26 \\ X_1 \geq 1 \end{cases}$$

$X_i \geq 0,\ i = 1{,}2.$

$E = 626X_1 + 656X_2 \rightarrow max.$

3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Все ограничения и целевая функция в данной задаче линейны, поэтому для ее решения можно использовать симплекс-метод.

Симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования любой размерности, т.е. с любым количеством переменных. Решение задач линейного программирования на основе симплекс-метода состоит в целенаправленном переборе угловых точек ОДР в направлении улучшения значения целевой функции.

Можно доказать, что экстремум (минимум или максимум) целевой функции всегда достигается при значениях переменных X_1, X_2, ..., X_n, соответствующих одной из угловых точек ОДР. Другими словами, оптимальное решение всегда находится в угловой точке ОДР.

Реализация симплекс- метода существенно различается в зависимости от вида математической модели задачи.

На переменные X_1, X_2 наложены ограничения целочисленности, поэтому, если при решении задачи симплекс-методом одна из них примет дробное значение, то необходимо будет воспользоваться одним из методов целочисленного программирования.

В математической модели задачи имеется ограничение «больше или равно». После приведения такого ограничения к стандартной форме в нем не содержится базисной переменной. Поэтому для решения задачи потребуется использовать один из методов искусственного базиса. В данном случае будет применен двухэтапный метод.

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Приводим математическую модель задачи к стандартной форме. Для этого в ограничения «меньше или равно» добавляем остаточные переменные:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + X_4 = 8 \\ 5X_1 + 8X_2 + X_5 = 81 \\ 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 70 \\ 3X_1 + X_2 + X_7 = 26 \\ X_1 - X_8 = 1, \end{cases}$$

$$X_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,8.$$

$$E = 626X_1 + 656X_2 \rightarrow max.$$

В ограничении $X_1 - X_8 = 1$ отсутствует базисная переменная. Поэтому потребуется ввести искусственную переменную:

$$X_1 - X_8 + X_9 = 1.$$

Базисные переменные: X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9. Остальные переменные – небазисные. И в каждом уравнении содержится как минимум одна базисная переменная.

Составляется искусственная целевая функция – сумма всех искусственных переменных:

$$W = X_9 \rightarrow min.$$

Искусственная целевая функция выражается через небазисные переменные. Для этого сначала требуется выразить искусственную переменные через небазисные:

$$X_9 = 1 - X_1 + X_8.$$

Выраженная искусственная переменная подставляется в искусственную целевую функцию:

$$W = 1 - X_1 + X_8 \rightarrow min.$$

Для приведения всей задачи к стандартной форме выполняется переход к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации. Для этого она умножается на –1:

$$-W = -1 + X_1 - X_8 \rightarrow max.$$

Полная математическая модель задачи в стандартной форме и с искусственным базисом:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + X_4 = 8 \\ 5X_1 + 8X_2 + X_5 = 81 \\ 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 70 \\ 3X_1 + X_2 + X_7 = 26 \\ X_1 - X_8 + X_9 = 1, \\ X_i \geq 0,\ i = 1,\dots,9. \\ E = 626X_1 + 656X_2 \rightarrow max. \\ -W = -1 + X_1 - X_8 \rightarrow max. \end{cases}$$

Составим первую симплекс-таблицу (см. таблицу 4.1)

Таблица 4.1 – Первая симплекс таблица

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	Решение
E	-626	-656	0	0	0	0	0	0	0	0
-W	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
X_3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	12
X_4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	8
X_5	5	8	0	0	1	0	0	0	0	81
X_6	6	4	0	0	0	1	0	0	0	70
X_7	3	1	0	0	0	0	1	0	0	26
X_9	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	1

Приведенное в таблице начальное решение ($X_1 = X_2 = X_8 = 0$, $X_3 = 12$, $X_4 = 8$, $X_5 = 81$, $X_6 = 70$, $X_7 = 26$, $X_9 = 1$) является недопустимым: оно не соответствует начальной системе ограничений, так как не выполняется условие $X_1 \geq 1$.

Для поиска начального допустимого решения реализуется первый этап двухэтапного метода: минимизация искусственной целевой функции на основе процедур симплекс-метода.

Выбирается переменная для включения в базис: это переменная X_1, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции.

Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения: 12/1 = 12; 8/1 = 8; 81/5 = 16,2; 70/6 = 11,67; 26/3 = 8,67; 1/1 = 1. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной X_9, значит, эта переменная исключается из базиса.

В результате преобразований по правилам симплекс-метода будет получена следующая симплекс-таблица (см. таблицу 4.2).

Таблица 4.2 – Вторая симплекс таблица

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	Решение
E	0	-656	0	0	0	0	0	-626	626	626
-W	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_3	0	1	1	0	0	0	0	1	-1	11
X_4	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	7
X_5	0	8	0	0	1	0	0	5	-5	76
X_6	0	4	0	0	0	1	0	6	-6	64
X_7	0	1	0	0	0	0	1	3	-3	23
X_1	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	1

Как видно из таблицы 4.2, искусственная целевая функция равна нулю, и в базисе нет искусственных переменных. Получено допустимое решение: $X_1 = 1$; $X_2 = X_8 = X_9 = 0$; $X_3 = 11$; $X_4 = 7$; $X_5 = 76$; $X_6 = 64$; $X_7 = 23$. В том, что оно допустимо, легко убедиться, подставив значения переменных в систему ограничений.

Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы (см. таблицу 4.3).

Таблица 4.3 – Третья симлекс таблица

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
E	0	-656	0	0	0	0	0	-626	626
X_3	0	1	1	0	0	0	0	1	11
X_4	0	0	0	1	0	0	0	1	7
X_5	0	8	0	0	1	0	0	5	76
X_6	0	4	0	0	0	1	0	6	64
X_7	0	1	0	0	0	0	1	3	23
X_1	1	0	0	0	0	0	0	-1	1

Полученное решение является допустимым, но не оптимальным: признак неоптимальности решения – наличие отрицательных коэффициентов в строке целевой функции *E*. Поэтому реализуется второй этап двухэтапного метода: максимизация основной целевой функции *E*.

В базис включается переменная X_2, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляются симплексные отношения: 11/1 = 11; 76/8 = 9,5; 64/4 = 16; 23/1 = 23. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной X_5, значит, эта переменная исключается из базиса. После преобразования по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (см. таблицу 4.4).

Таблица 4.4 – Четвертая симплекс таблица

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
E	0	0	0	0	82	0	0	-216	6858
X_3	0	0	1	0	-0,125	0	0	0,375	1,5
X_4	0	0	0	1	0	0	0	1	7
X_2	0	1	0	0	0,125	0	0	0,625	9,5
X_6	0	0	0	0	-0,5	1	0	3,5	26
X_7	0	0	0	0	-0,125	0	1	2,375	13,5
X_1	1	0	0	0	0	0	0	-1	1

Решение, полученное в таблице 4.4, еще не является оптимальным (в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент). Поэтому продолжаются вычисления по правилам симплекс-метода. В базис включается переменная X_8. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляем симплексные отношения: 1,5/0,375 = 4; 7/1 = 7; 9,5/0,625 = 15,2;

26/3,5 = 7,43; 13,5/2,375 = 5,68. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной X_3, значит, эта переменная исключается из базиса. По результатам преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (см. таблицу 4.5).

Таблица 4.5 – Итоговая симплекс таблица с оптимальным решением

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
E	0	0	576	0	10	0	0	0	7722
X_8	0	0	2,666	0	-0,333	0	0	1	4
X_4	0	0	-2,666	1	0,333	0	0	0	3
X_2	0	1	-1,666	0	0,333	0	0	0	7
X_6	0	0	-9,333	0	0,666	1	0	0	12
X_7	0	0	-6,333	0	0,666	0	1	0	4
X_1	1	0	2,666	0	-0,333	0	0	0	5

Получено оптимальное решение (признак его оптимальности – отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции). Основные переменные задачи приняли следующие значения: $X_1 = 5$; $X_2 = 7$. Это означает, что ежедневно необходимо формировать пять скорых и семь пассажирских поездов. Целевая функция $E = 7722$ показывает количество перевозимых при этом пассажиров.

Остаточная переменная $X_4 = 3$ означает, что три почтовых вагона не используются, аналогично $X_6 = 12$ – количество оставшихся купейных вагонов, $X_7 = 4$ – количество оставшихся мягких вагонов.

Избыточная переменная $X_8 = 4$ показывает на сколько больше сформировано скорых поездов от требуемого минимума в один поезд.

Рабочий лист с результатами решения задачи с использованием табличного процессора *Excel* приведен в приложении А.

5 АНАЛИЗ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

5.1 Статус и ценность ресурсов

По статусу ресурсы делятся на дефицитные и недефицитные. Если для реализации оптимального решения ресурс расходуется полностью, то он называется дефицитным, если не полностью – недефицитным.

Статус ресурсов определяется по значениям остаточных переменных.

Определим статус ресурсов для нашей задачи. В рассматриваемой задаче ресурсами являются багажные, почтовые, плацкартные, купейные и мягкие вагоны. Багажные и плацкартные вагоны являются дефицитным ресурсом, т. к. они расходуется полностью. Почтовые, купейные и мягкие вагоны недефицитные ресурсы, т.к. остатки составляют три, 12 и четыре вагонов соответственно. Поэтому увеличение их запаса нецелесообразно: оно приведет только к увеличению неизрасходованного остатка. Таким образом, почтовых, купейных и мягких вагонов можно хранить меньше; это никак не повлияет на оптимальный план перевозок. Если количество этих вагонов снизить более чем на три, 12 и четыре штук соответственно (запасы составят менее пяти, 58 и 22 вагонов), то потребуется заново определять оптимальный план железнодорожных перевозок; по смыслу задачи, очевидно, что в этом случае количество перевозимых пассажиров снизится.

Увеличение запасов дефицитных ресурсов позволяет увеличить целевую функцию (прибыль). Снижение запасов дефицитных ресурсов приводит к снижению прибыли. Для нашей задачи увеличение количества багажных и плацкартных вагонов позволит увеличить количество перевозимых пассажиров.

Проанализируем значение избыточной переменной X_8. Как видно из ее значения $X_8 = 4$, показывает на сколько больше сформировано скорых поездов от требуемого минимума, значит, он является недефицитным. Таким образом, минимум скорых поездов можно увеличить на 4 шт.; это никак не повлияет на оптимальный план железнодорожных перевозок. Если минимум скорых поездов возрастет более чем на четыре шт. (т.е. составит более пяти шт.), то потребуется заново определять оптимальный план производства мебели.

Ценность ресурса – это увеличение значения целевой функции (прибыли) при увеличении запаса ресурса на единицу (или, соответственно, снижение целевой функции при уменьшении запаса ресурса на единицу).

Ценность багажных вагонов равна 576 мест., ценность плацкартных вагонов равна 10 мест. Это означает, что увеличение запаса багажных и плацкартных вагонов на одну шт. приведет к увеличению мест на 576 и 10 соответственно. Снижение этих запаса приведет к соответствующему снижению прибыли. Нулевые значения ценности почтовых купейных и мягких вагонов означают, что увеличение их запасов или их снижение (не более чем на три, 12 и четыре шт. соответственно) не приведут к изменению прибыли, так как данный ресурсы недефицитны.

Таблица 5.1 - Общая характеристика ресурсов по значению их ценности

Переменная	Название ресурса	Значение	Статус	Ценность
X_3	Багажные вагоны	0	Дефицитный	576
X_4	Почтовые вагоны	3	Недефицитный	0
X_5	Плацкартные вагоны	0	Дефицитный	10
X_6	Купейные вагоны	12	Недефицитный	0
X_7	Мягкие вагоны	4	Недефицитный	0

5.2 Анализ на чувствительность к изменениям запаса ресурса

Проанализируем, как влияют на оптимальный план железнодорожных перевозок изменения количества вагонов определенного типа, например, плацкартных вагонов. Для анализа влияния таких изменений на оптимальное решение используются коэффициенты из столбца остаточной переменной, входящей в изменившееся ограничение.

Пусть максимально возможный запас плацкартных вагонов изменился на d единиц, т.е. составляет не 81, а 81 + d единиц. Для определения нового оптимального решения при изменившемся запасе плацкартных вагонов используем коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.5) из столбца остаточной переменной X_5, так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$X_8 = 4 - 0{,}33d$$

$$X_4 = 3 + 0{,}33d$$

$$X_2 = 7 + 0{,}33d$$

$$X_6 = 12 + 0{,}67d$$

$$X_7 = 4 + 0{,}67d$$

$$X_1 = 5 – 0{,}33d$$

$$E = 7722 + 10d$$

Определим диапазон изменений запаса плацкартных вагонов, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных $X_8, X_4, X_2, X_6, X_7, X_1$). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$X_8 = 4 – 0{,}33d \geq 0$$

$$X_4 = 3 + 0{,}33d \geq 0$$

$$X_2 = 7 + 0{,}33d \geq 0$$

$$X_6 = 12 + 0{,}67d \geq 0$$

$$X_7 = 4 + 0{,}67d \geq 0$$

$$X_1 = 5 – 0{,}33d \geq 0$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-5{,}97 \leq d \leq 12{,}12$. Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных X_8, X_4, X_2, X_6, X_7 X_1 если запас плацкартных вагонов будет составлять от 76 вагонов до 93 вагонов. Иначе для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на количество плацкартных вагонов).

Пусть, например, максимально возможный запас плацкартных вагонов составляет не 81, а 88 шт., т.е. $d = 7$. Найдем новое оптимальное решение:

$$X_8 = 4 – 0{,}33\ 7 = 1$$

$$X_4 = 3 + 0{,}33 \cdot 7 = 5$$

$$X_2 = 7 + 0{,}33 \cdot 7 = 9$$

$$X_6 = 12 + 0{,}67 \cdot 7 = 16$$

$$X_7 = 4 + 0{,}67 \cdot 7 = 8$$

$$X_1 = 5 – 0{,}33 \cdot 7 = 2$$

$$E = 7722 + 10 \cdot 7 = 7792$$

Новое оптимальное решение оказывается следующим: $X_8 = 1$; $X_4 = 5$; $X_2 = 9$; $X_6 = 16$; $X_7 = 8$; $X_1 = 2$; $E = 7792$. Это означает, что в новых условиях (при запасе плацкартных вагонов 88 шт.) следует формировать два скорых и девять пассажирских поездов. Неизрасходованные остатки почтовых, купейных и мягких вагонов пять, 16 и восемь соответственно. Итоговое количество пассажиров составит 7792 человека (на 70 человек больше). Плацкартные вагоны будут израсходованы полностью (переменная X_5 остается небазисной, т.е. равная нулю).

5.3 Анализ на чувствительность к изменениям минимального необходимого количества скорых поездов

Проанализируем, как влияет на оптимальный план производства изменение минимального количества скорых поездов.

Пусть минимальное количество скорых поездов изменится на d единиц, т.е. составляет не один, а $1 + d$ единиц. Для определения нового оптимального решения при изменившемся размере заказа используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.5) из столбца остаточной переменной X_8, так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$X_8 = 4 - 1d$$

$$X_4 = 3 + 0d$$

$$X_2 = 7 + 0d$$

$$X_6 = 12 + 0d$$

$$X_7 = 4 + 0d$$

$$X_1 = 5 + 0d$$

$$E = 7722 + 0d$$

Определим диапазон изменений минимального количества скорых поездов, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных X_8, X_4, X_2, X_6, X_7, X_1). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$X_8 = 4 - 1d \geq 0$$

$$X_4 = 3 + 0d \geq 0$$

$$X_2 = 7 + 0d \geq 0$$

$$X_6 = 12 + 0d \geq 0$$

$$X_7 = 4 + 0d \geq 0$$

$$X_1 = 5 + 0d \geq 0$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-\infty \leq d \leq 4$. Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных X_8, X_4, X_2, X_6, X_7, X_1, если минимальное необходимое количество скорых поездов будет составлять не более пяти штук. Если заказ на скорые поезда превысит пять штук, то для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на заказ скорых поездов).

Пусть, например, заказ на скорые поезда составит четыре штуки, а не один, т.е. $d = 3$. Найдем новое оптимальное решение:

$$X_8 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$$

$$X_4 = 3 + 0 \cdot 3 = 3$$

$$X_2 = 7 + 0 \cdot 3 = 7$$

$$X_6 = 12 + 0 \cdot 3 = 12$$

$$X_7 = 4 + 0 \cdot 3 = 4$$

$$X_1 = 5 + 0 \cdot 3 = 5$$

$$E = 7722 + 0 \cdot 3 = 7722$$

Из этих уравнений видно, что изменения заказа на скорые поезда (если эти изменения не выходят за определенный диапазон) не приведут к каким-либо изменениям в решении задачи.

5.4 Анализ на чувствительность к изменениям вместительности пассажирских поездов

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения вместительности одного из поездов, например, пассажирского.

Пусть количество мест в пассажирском поезде изменилось на d шт., т.е. составляет не 656, а 656 + d шт. Для анализа влияния этих изменений на оптимальное решение используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (см. таблицу 4.5) из строки переменной X_2, так как для этой переменной изменился коэффициент целевой функции. Новые значения коэффициентов Е-строки при небазисных переменных (т.е. при переменных X_3, X_5) для окончательной симплекс-таблицы, а также новое оптимальное значение целевой функции определяются следующим образом:

$$F_3 = 576 - 1{,}67d$$

$$F_5 = 10 + 0{,}33d$$

$$E = 7722 + 7d$$

Определим диапазон изменений количества мест в пассажирском поезде, при котором остается оптимальным решение, найденное для исходной постановки задачи. Условием оптимальности решения является неотрицательность всех коэффициентов E – строки:

$$F_3 = 576 - 1{,}67d \geq 0$$

$$F_5 = 10 + 0{,}33d \geq 0$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-30{,}3 \leq d \leq 344{,}91$. Это означает, что решение, найденной для исходной постановки задачи оптимально при количестве мест в пассажирском поезде от 626 до 1000. При отклонении от этих значений, для получения оптимального решения потребуется решить задачу заново, используя симплекс-метод. Новое оптимальное решение будет отличаться от прежнего решения не только значениями, но и составом переменных в оптимальном базисе. При этом прежнее решение уже не будет оптимальным, но останется допустимым, так оно удовлетворяет ограничениям задачи.

Пусть, например, количество мест в пассажирском поезде уменьшилось до 630, т.е. составляет не 656, а 630 мест, d = -26. Найдем новые значения коэффициентов Е - строки при небазисных переменных для окончательной симплекс-таблицы и новое оптимальное значение целевой функции:

$$F_3 = 576 - 1{,}67 \cdot (-26) = 619$$

$$F_5 = 10 + 0{,}33 \cdot (-26) = 1$$

$$E = 7722 + 7 \cdot (-26) = 7540$$

Видно, что коэффициенты Е-строки остались неотрицательными. Это значит, что оптимальное решение не изменится: $X_1 = 5$, $X_2 = 7$, $X_3 = 0$, $X_4 = 3$,

$X_5 = 0$, $X_6 = 12$, $X_7 = 4$, $X_8 = 4$. Таким образом, при уменьшении количества мест в пассажирском поезде до 630, следует отправлять семь пассажирских поездов. Для новых условий максимальное количество перевозимых людей составит 7540 человек, которое является максимально возможным в этом случае.

6 ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации, можно выделить следующие недостатки в плане железнодорожных перевозок:

– значительная часть купейных вагонов не используется;

В плане железнодорожных перевозок не используется значительная часть купейных вагонов в связи с нехваткой багажных и плацкартных вагонов, так как для так как для составления доступных видов поездов требуются все вышеперечисленные ресурсы. Найдем, на какую величину необходимо увеличить допустимое количество багажных и плацкартных вагонов, чтобы использовать все ресурсы по возможности более полно. Это позволит также увеличить количество поездов и получить большую вместимость пассажиров.

Предположим, например, что запас багажных и плацкартных вагонов увеличили до 16 и 119 штук соответственно. Внесём соответствующее изменение в правую часть ограничения математической модели:

$$X_1 + X_2 \leq 16$$

$$X_1 \leq 8$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq 119$$

$$6X_1 + 4X_2 \leq 70$$

$$3X_1 + X_2 \leq 26$$

$$X_1 \geq 1$$

$$X_i \geq 0,\ i = 1{,}2.$$

$$E = 626X_1 + 656X_2 \rightarrow max.$$

Решив задачу заново, используя MS Excel, получим следующее оптимальное решение:

$E = 10406$; $X_1 = 3$; $X_2 = 13$; $X_3 = 0$; $X_4 = 5$; $X_5 = 0$; $X_6 = 0$; $X_7 = 4$; $X_8 = 2$.

Неизрасходованный остаток купейных вагонов снизился (с 12 до 0 вагонов). Увеличилось количество поездов. Таким образом, количество перевозимых пассажиров увеличилась с 7722 до 10406 человек.

Рабочий лист с результатами оптимизации на основе модифицированной модели с использованием табличного процессора Excel приведен в Приложении Б.

Сравнительные характеристики двух планов работы предприятия (при базовом и новом варианте ограничений) приведена в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Сравнительная характеристика железнодорожных перевозок

Показатели	Базовый вариант	Новый вариант
Количество поездов, шт.		
Скорый	5	3
Пассажирский	7	13
Количество неизрасходованных вагонов, шт.		
Багажные	0	0
Почтовые	3	5
Плацкартные	0	0
Купейные	12	0
Мягкие	4	4
Превышение запроса на скорые поезда, шт.	4	2
Количество перевозимых людей, чел.	7722	10406

Очевидно, что модифицированный план позволяет существенно улучшить показатели: обеспечивается лучшее использование ресурсов, увеличивается количество формируемых поездов и, соответственно, количество перевозимых пассажиров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения курсового проекта разработан оптимальный план железнодорожных перевозок, формирования скорых и пассажирских поездов с целью перевозки максимального количества пассажиров.

Для осуществления перевозки максимального количество людей требуется формировать пять скорых и семь пассажирских поездов. Максимальное количество перевозимых людей составило 7722 человек. После формирования этих поездов остаются не использованными три почтовых, 12 купейных и мягких вагона.

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации, можно выделить следующий недостаток в организации железнодорожных перевозок: значительная часть купейных вагонов не используется.

Данный недостаток можно устранить. Для этого была построена модифицированная модель, в которой было увеличено количество багажных и плацкартных вагонов с целью уменьшения количества неиспользованных купейных вагонов и увеличения количества перевозимых людей. В результате увеличения запаса багажных и плацкартных вагонов до 16 и 119 штук соответственно получили новое оптимальное решение:

– остаток купейных вагонов уменьшился (с 12 шт. до 0);

– увеличилось количество формируемых пассажирских поездов;

– количество перевозимых людей увеличилось (с 7722 до 10406 чел.).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Краснопрошин, В. В. Исследование операций / В. В. Краснопришин, Н. А. Лепешинский. – Минск : БГУ, 2013. - 192 с.

[2] Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

[3] Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. – М.: Юнити, 1997. – 590 с.

[4] Мур, Дж.Х. Экономическое моделирование в *Microsoft Excel* / Дж.Х. Мур, Л.Р. Уэдерфорд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.

[5] Смородинский, С. С. – Системный анализ и исследование операций : оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования : учебно-методическое пособие / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2010. – 192 с. : ил.

[6] Смородинский, С. С. – Системный анализ и исследование операций : сборник заданий и методических указания по курсовому проектированию для студентов специальности I-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и дистанционной форм обучения / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск. : БГУИР, 2006. – 74 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели

Количество поездов	
Скорые	Пассажирские
5	7

Целевая функция			Места
626	656	→ max	7722

Ограничения					
X1	X2		Пр. ч.	Исп.	Ост.
1	1	<=	12	12	0
1	0	<=	8	5	3
5	8	<=	81	81	0
6	4	<=	70	58	12
3	1	<=	26	22	4
1	0	>=	1	5	4

Рис А.1 – *Excel*-документ результатов поиска решения

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(обязательное)
Рабочий лист *Excel* с результатами решения задачи на основе модифицированной аналитической модели

Количество поездов	
Скорые	Пассажирские
3	13

Целевая функция			Места
626	656	→ max	10406

Ограничения					
X1	X2		Пр. ч.	Исп.	Ост.
1	1	<=	16	16	0
1	0	<=	8	3	5
5	8	<=	119	119	0
6	4	<=	70	70	0
3	1	<=	26	22	4
1	0	>=	1	3	2

Рис Б.1 – *Excel*-документ результатов поиска решения

Обозначение	Наименование	Дополнительные сведения
	Текстовые документы	
БГУИР КП 1-53 01 02 06 039 ПЗ	Пояснительная записка	30 с.

БГУИР КП 1-53 01 02 06 039 ПЗ

Изм.	Л.	№ докум.	Подп.	Дата		Лит	Лист	Листов
Разраб.		Шумигай			Разработка оптимального плана железнодорожных перевозок Ведомость курсового проекта	Т	30	30
Провер.		Протченко				Кафедра ИТАС гр. 020601		