フーリエ変換

鳥取大学持続性社会創成科学研究科
工学専攻
情報エレクトロニクスコース
情報通信研究室
M18J4010Z　浦田　優

前置き

- ポイントだけつまんだ
  - ~~式の導出~~
  - ~~いっぱいある性質~~
  - ~~教科書の説明順番~~
- 範囲は4章 (p.65~)

目次

- フーリエ級数とフーリエ変換について
- 演習２つ

フーリエ変換とは

- どのような周波数の音が含まれているか知るツール
- 正弦波との「似ている度合い」を計算している
- 計算の都合で正弦波の代わりに複素正弦波を用いている

定義式

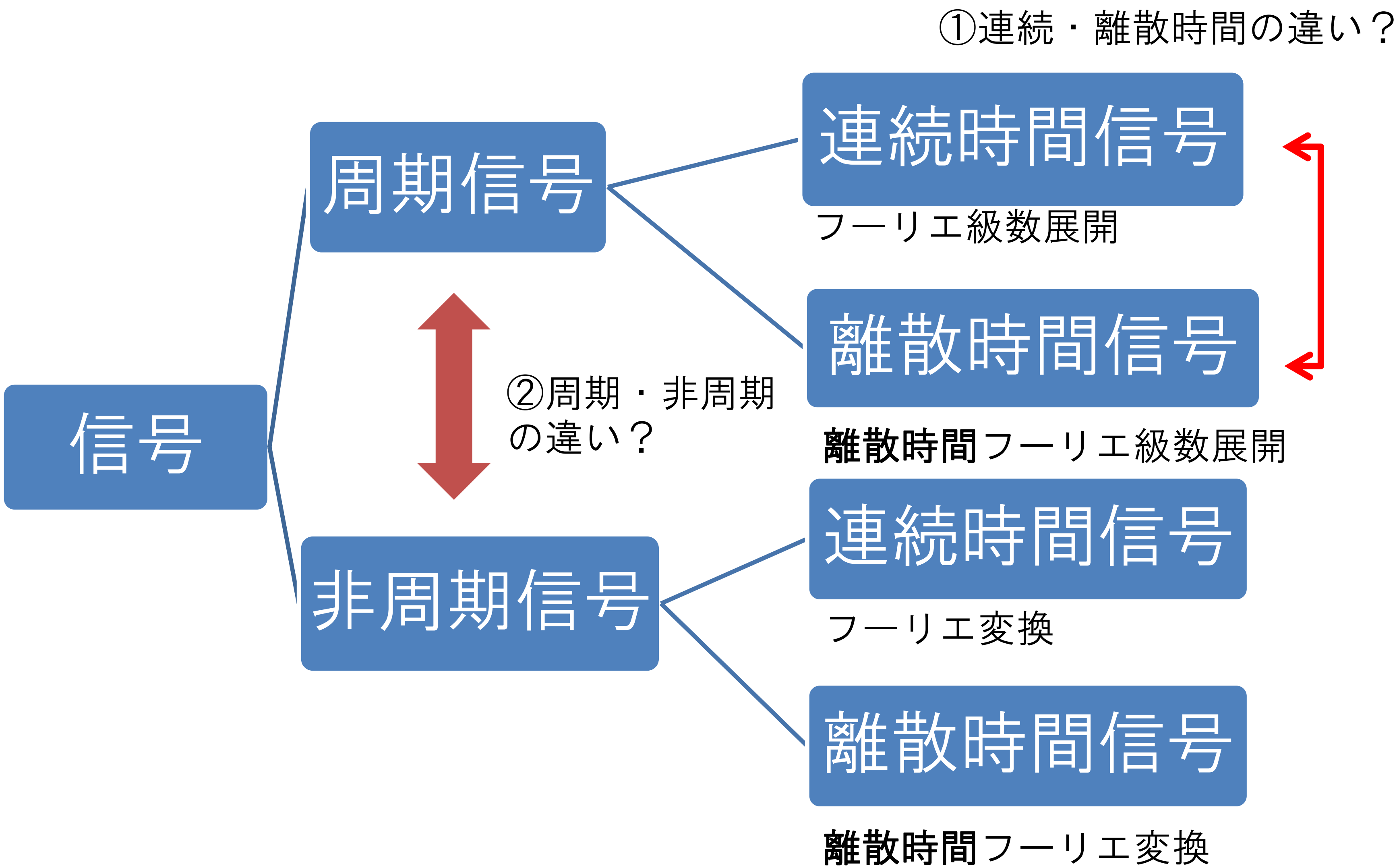
- $X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$

分かりずらい…

https://pudding.cool/2018/02/waveforms/

どういう計算か？

復習：信号に対する周波数解析の名称



昨日のやつ：連続と離散時間

身近な言葉でいうと…

連続→<u>アナログ</u>

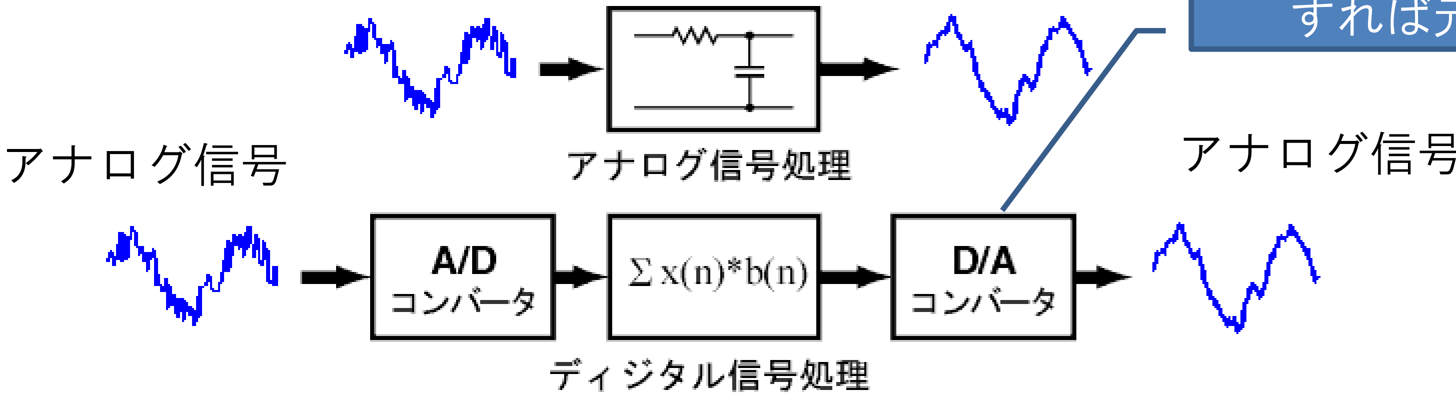
回路が簡単（素子構成）

離散時間→<u>ディジタル</u>

フィルタ構成が簡単（プログラマブル）

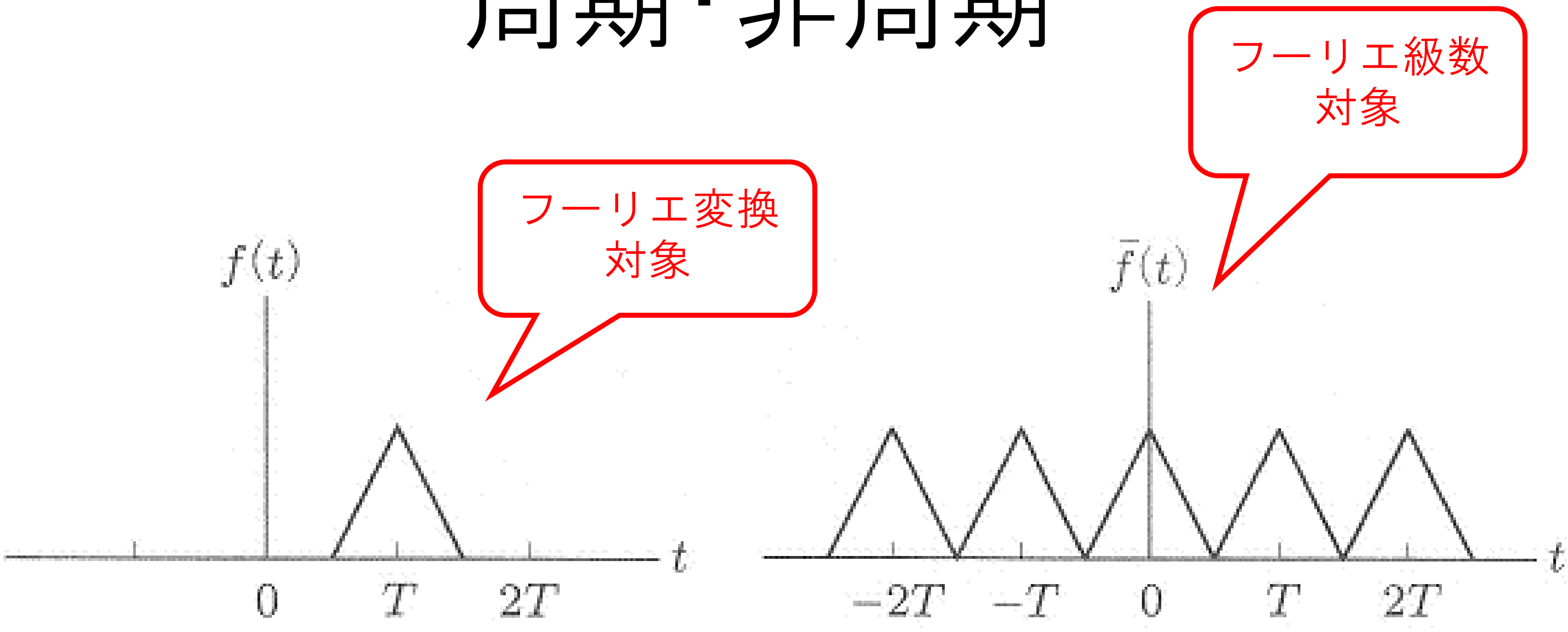
主にディジタル信号処理を行う

条件を満たして変換すれば元通り



アナログ信号処理とディジタル信号処理の大まかなシステム図

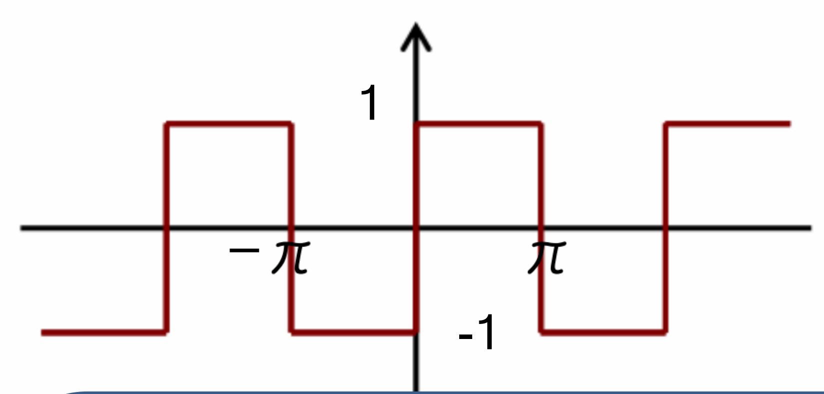
周期･非周期



（a）孤立パルス信号　（b）周期信号

- <u>フーリエ変換</u>
  – フーリエ積分（周期2T→∞）の複素表示
- <u>フーリエ級数</u>
  – 周期２Ｔを持つ関数f(t)を、三角関数の無限級数で表した（展開した）

演習①



$$x(n) = \begin{cases} 1 \ (-\pi < n < 0) \\ -1 \ (0 < n < \pi) \end{cases}$$

図の矩形波は{①周期②非周期}で{①連続②離散時間}信号であるのでフーリエ{①級数展開②変換}を行う

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

ただし，$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) cos\frac{2n\pi x}{T}\,dt,$

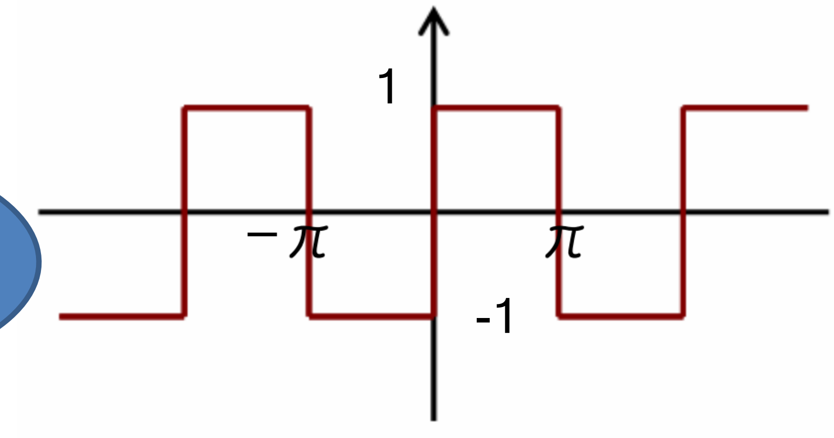
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) sin\frac{2n\pi x}{T}\,dt$$

を用いる．ただし，周期Tは{①π②$2\pi$}である．$f(x)$？（グラフも書ければ…）

ヒント①：a_0 , a_n , , b_n それぞれを求めてから$f(x)$の式に代入する

ヒント②：奇関数と偶関数の性質を用いると早いかも

解答(1)



積分区間を分離

$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$より

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{0}(-1)\,dt + \int_{0}^{\frac{2\pi}{2}} 1\,dt\right] = \frac{1}{\pi}[(-1)\pi + \pi] = 0$$

$\therefore a_0 = 0$

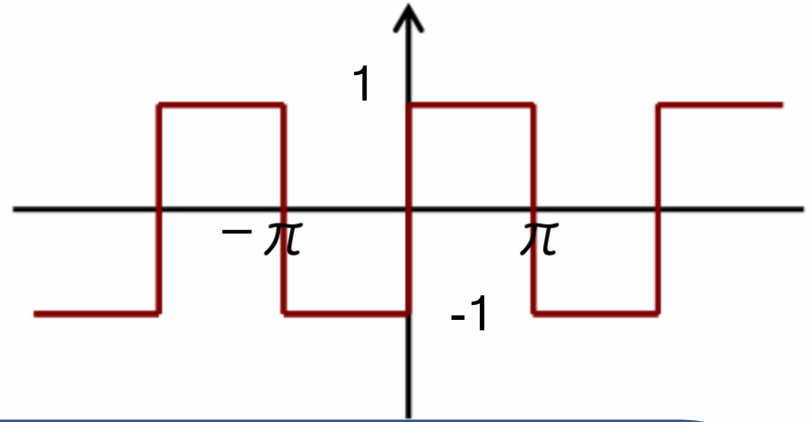
$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) cos\frac{2n\pi x}{T}\,dt$より

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{0}(-1) cos\frac{2n\pi x}{2\pi}\,dt + \int_{0}^{\frac{2\pi}{2}} 1 * cos\frac{2n\pi x}{2\pi}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-1)\sin(nx)\,\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

$\therefore a_n = 0$

解答(2)



$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) sin \frac{2n\pi x}{T} dt$$

別解（偶関数と奇関数）

$f(-x) = f(x)$ → 偶関数 (特徴：$a_n = \frac{4}{T}\int_0^T x(t) cos \frac{2n\pi x}{T} dt,\ b_n = 0$)

$f(-x) = -f(x)$ → 奇関数 (特徴： $b_n = \frac{4}{T}\int_0^T x(t) sin \frac{2n\pi x}{T} dt,\ a_n = 0$)

$x = \pi$のとき，上の波形の関数は

$$f(-\pi) = -1$$

$$f(\pi) = 1$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

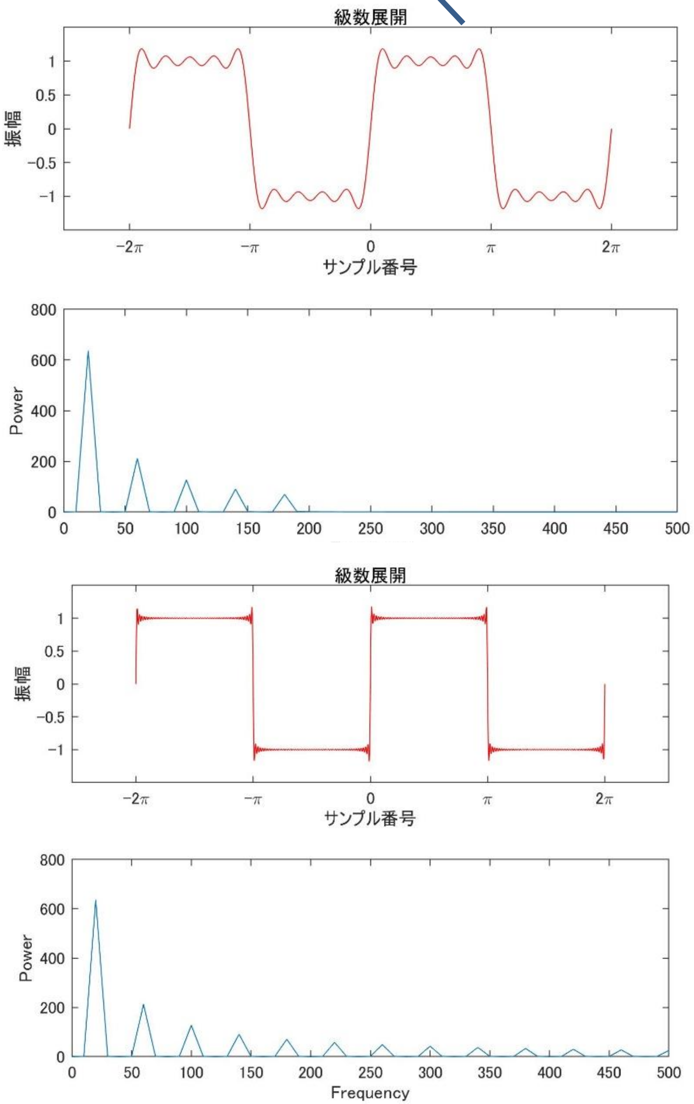
よって奇関数なので

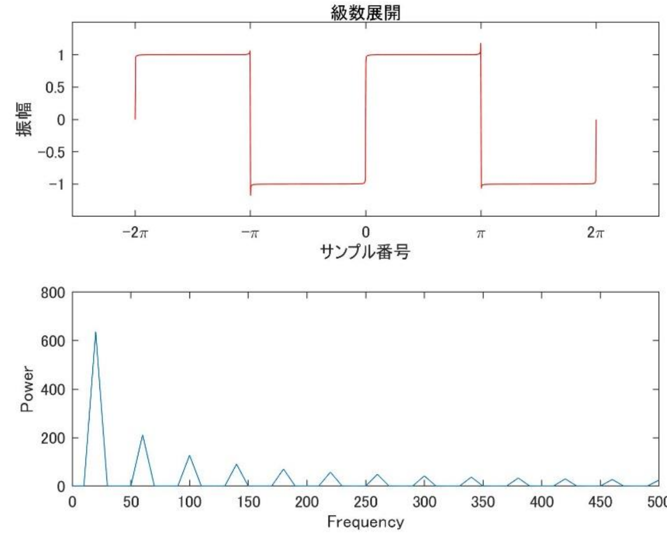
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^T x(t) sin \frac{2n\pi x}{T} dt,\ a_n = 0$$

を用いることが可能

実際に見てみる

波打ってる





ソースコード(matlab)

```
%フーリエ級数展開
clear
t = linspace(-2*pi(),2*pi(),1000);%等間隔ベクトル作成
n = 10;%Σ項数を入力
ft = 0;
for k = 1:1:n
    ft = ft + 2*(((1-((-1)^k))/(k*pi()))) * sin(k*t);%矩形波
end

figure
subplot(2,1,1)       % add first plot in 2 x 1 grid
plot(t,ft,'r');

xticks([-3*pi -2*pi -pi 0 pi 2*pi 3*pi])
xticklabels({'-3¥pi','-2¥pi','-¥pi','0','¥pi','2¥pi','3¥pi'})
yticks([-1 -0.5 0 0.5 1])
xlabel('サンプル番号')
ylabel('振幅')
title('級数展開')
```

ギブスの現象

- 不連続な関数をフーリエ級数展開すると、不連続点の近くで元の関数に収束せず、角が飛び出たようになる現象

⇒複数の正弦波で近似的に表現時，起こる

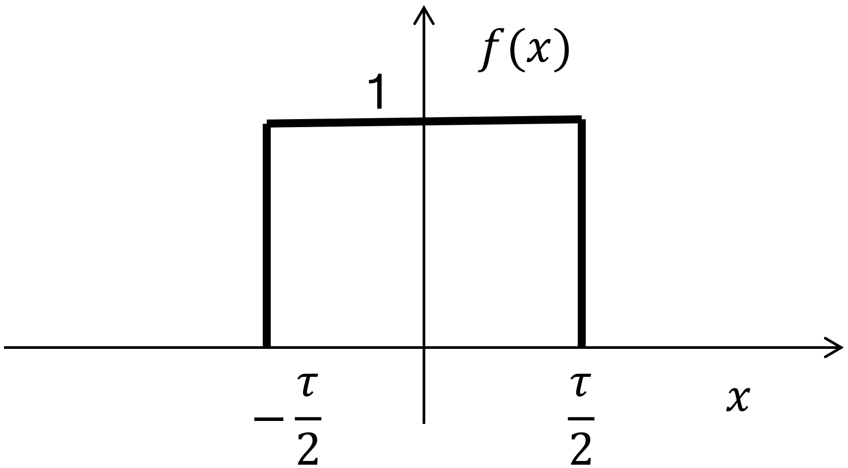
- 項数N→大 とすると近似精度up

(But) N→∞はDFT(FFT)では無理（有限）

- サンプリング定理に従う(次回解説)

結論：複数の正弦波で近似するが限界もある

演習②



$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq \frac{\tau}{2}) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

図の孤立波は{①周期②非周期}で{①連続②離散時間}信号であるのでフーリエ{①級数展開②変換}を行う

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

ただし，$\omega = 2\pi f$　(ω: 角周波数,　f: 周波数)

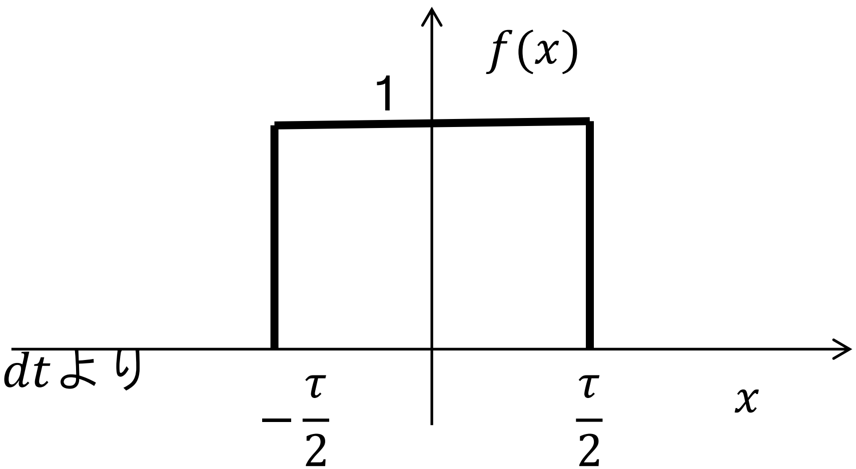
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

を用いる．ただし，積分区間は{①$-\frac{\tau}{2}$②$-\tau$}から{①$\frac{\tau}{2}$②τ}である．$F(\omega)$？

ヒント①： $F(\omega)$を求める式を使用．

ヒント②：オイラーの公式で指数関数を三角関数にまとめる

解答



積分区間 $|x| \leq \frac{\tau}{2}$であり

フーリエ変換公式$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dt$より

$$F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega x} dx = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega x}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}\right) \quad (\because \omega = 2\pi f)$$

$$= \tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$ (∵ オイラーの公式： $\sin(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)$)

$$= \tau sinc(\pi f\tau)$$

周波数ごとにみると…

- 矩形波の時と違い，周波数分布が波打つイメージがわかる
- 周波数fが変数なので$|f| \rightarrow$ 大 で 分母→大　⇒　振幅が減衰して広がる?
- 最大値とゼロ点（ヌル点）を求める

最大値とゼロ点（ヌル点）

数III(高校),
微分積分（大学）
で習ったかも..

- 最大値

$F(f)=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$は$\lim_{f\to 0}F(f)$のとき
不定形の極限を持つ
⇒ロピタルの定理を用いる

ちなみに$\lim_{f\to\infty}F(f)$のときは
$$\lim_{f\to\infty}F(f)=\lim_{f\to\infty}\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$
∴収束しない⇒ 不定形ではない

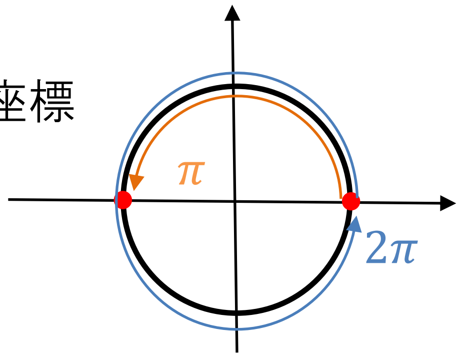
$$\lim_{f\to 0}F(f)=\tau\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\quad(\because x=\pi f\tau)$$
$$=\tau\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1}\quad(\because \text{ロピタルの定理})$$
$$=\tau$$
最大値τ $(f=0)$

不定形
極限を取ると
$$\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty},0\times\infty,\frac{0}{0}$$
のように相反する向きに
引っ張り合っている形

ロピタルの定理
不定形で
$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=0\ (or\ \pm\infty)$$
を満たすとき
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
（実際はもう少し条件はあるみたい..）

最大値とゼロ点(ヌル点)

極座標



$$F(f) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$

- ゼロ点（ヌル点）

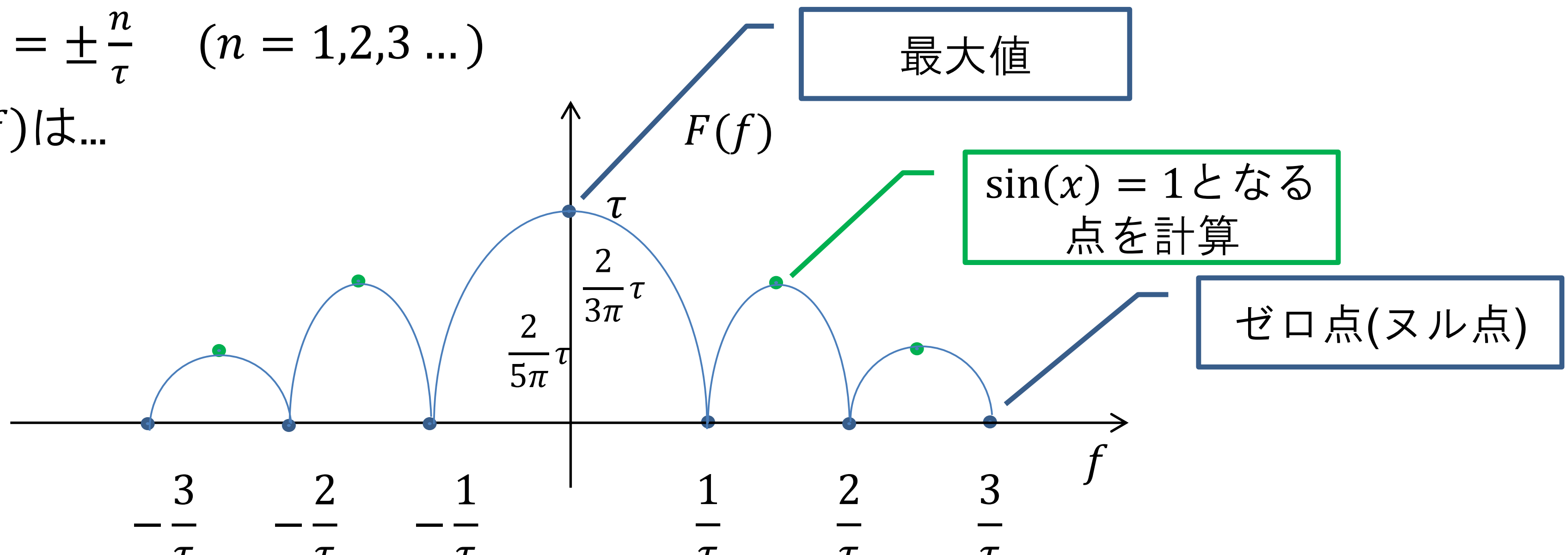
$\sin(x)$は$x = \pm n\pi\ (n = 0,1,2 \dots)$のとき0

ただし，$x = 0$のとき最大値を持つので$x = 0$は除く

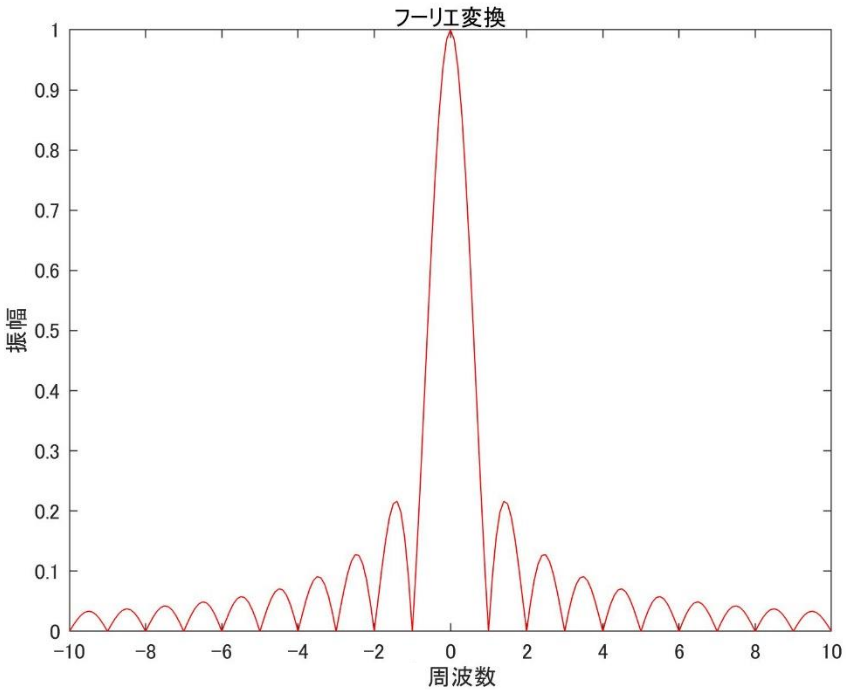
$\pi f \tau = \pm n\pi \quad (n = 1,2,3 \dots)$

$\therefore f = \pm \frac{n}{\tau} \quad (n = 1,2,3 \dots)$

$F(f)$は…



実際に見てみる



ソースコード(matlab)

```
tau = 1;%τ
f = -10:0.1:10;%周波数
F = tau*(sin(pi()*f*tau+eps)./(pi()*f*tau+eps));%F(ω)[孤立波]
plot(f,abs(F),"r");
xlabel('  周波数')
ylabel('振幅')
%xgrid();
%xtitle("","freq","Amplitude");
title('フーリエ変換')
```

次回の信号処理ゼミ

- サンプリング定理
- 離散フーリエ変換
- 高速フーリエ変換（導入部分）