DFTとFFT

鳥取大学持続性社会創成科学研究科
工学専攻
情報エレクトロニクスコース
情報通信研究室
M18J4010Z　　浦田　優

目次

- 教科書p.74-96(4章後半)
- 復習
- サンプリング定理
- 離散時間フーリエ変換
- 演習１つ
- 離散フーリエ変換

前回のスライド：連続と離散時間

身近な言葉でいうと…

連続→アナログ

離散時間→ディジタル

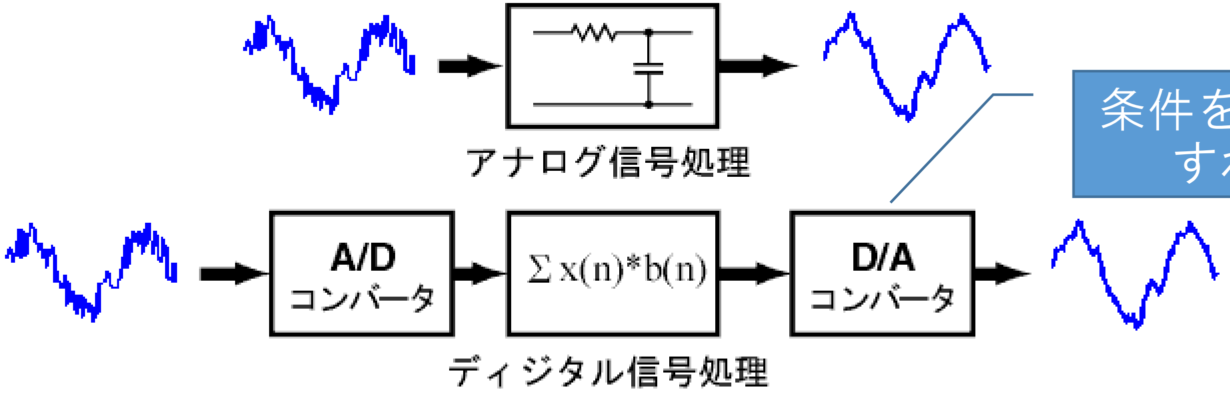
主にディジタル信号処理を行う

回路が簡単（素子構成）

フィルタ構成が簡単（プログラマブル）

連続信号も離散時間信号として扱えると説明
⇒サンプリング定理

アナログ信号



条件を満たして変換すれば元通り

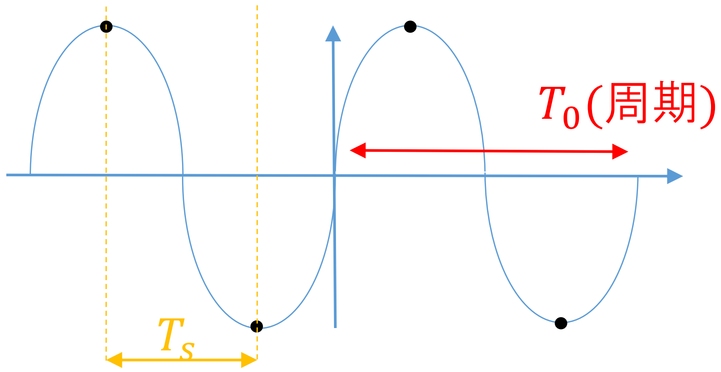
アナログ信号

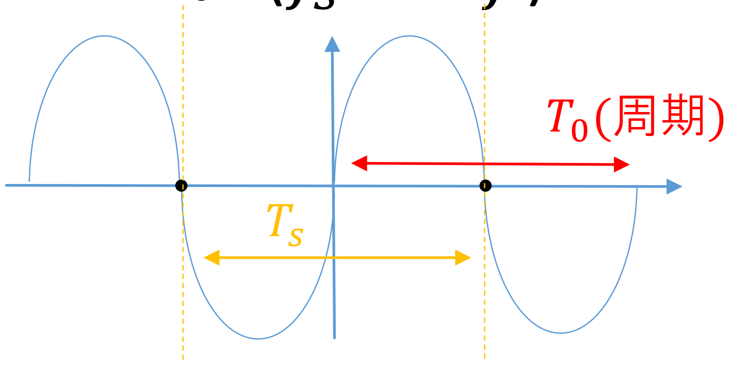
アナログ信号処理とディジタル信号処理の大まかなシステム図

サンプリング定理

- 連続時間信号の有する最大周波数の２倍以上の周波数でサンプリングを行えば、連続時間信号の性質を損なうことなく、忠実に元の連続時間信号を復元することができる。$(f_s \geq 2f)$

Ex)



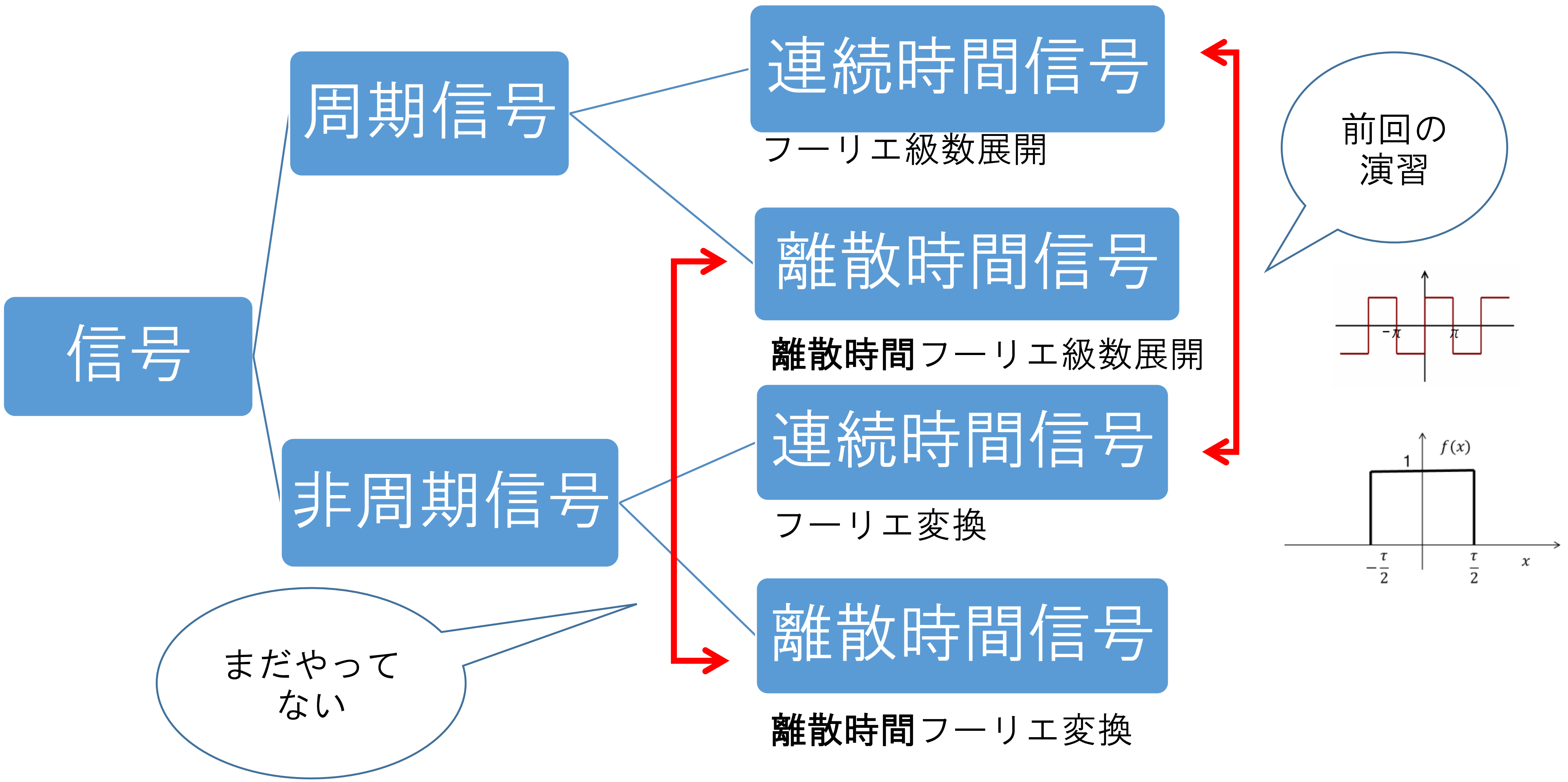


$$T_s = \frac{1}{f_s}$$ (T_s: サンプリング間隔, f_s: サンプリング周波数)

$T_0 = 2T_s$ つまり $f_s = 2f$

$T_0 = T_s$ つまり $f_s = f$

復習：信号に対する周波数解析の名称

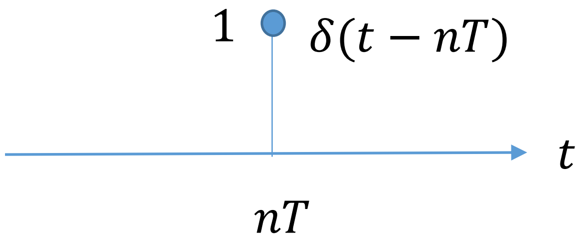


離散時間フーリエ変換(DTFT)

周期nTで$x(t)$を
サンプリングし，その総和
⇒離散値を持ちxの変数は$t \to n$

DTFT : Discrete-time Fourier Transfor

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}[x_s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\delta(t - nT)} e^{-j\omega t} dt$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega nT}$$

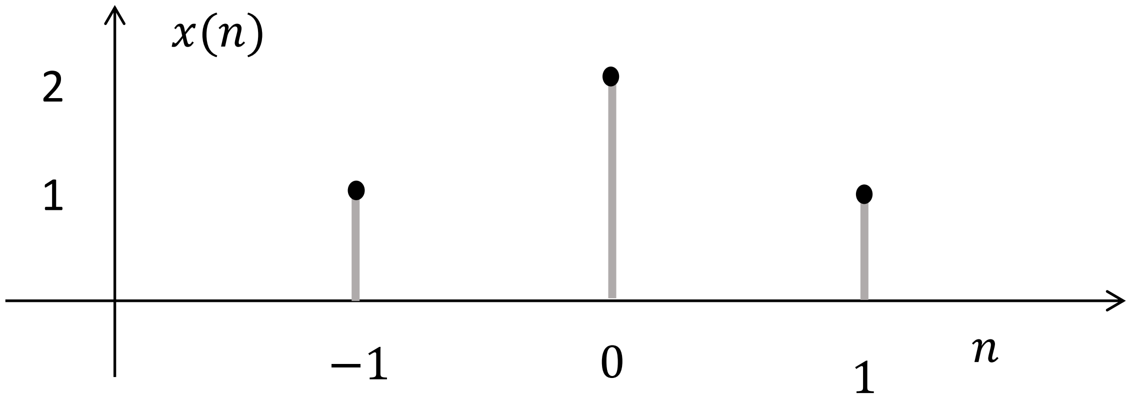
フーリエ変換公式

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

デルタ関数の畳み込み

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t)\, dt$$

演習③



$$x(n) = \begin{cases} 2 & (n = 0) \\ 1 & (n = \pm 1) \end{cases}$$

図の孤立波は{①周期②非周期}で
{①連続②離散時間}信号であるので離散時間
フーリエ{①級数展開②変換}を行う

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

ただし，$\omega = 2\pi f$　(ω: 角周波数,　f: 周波数)

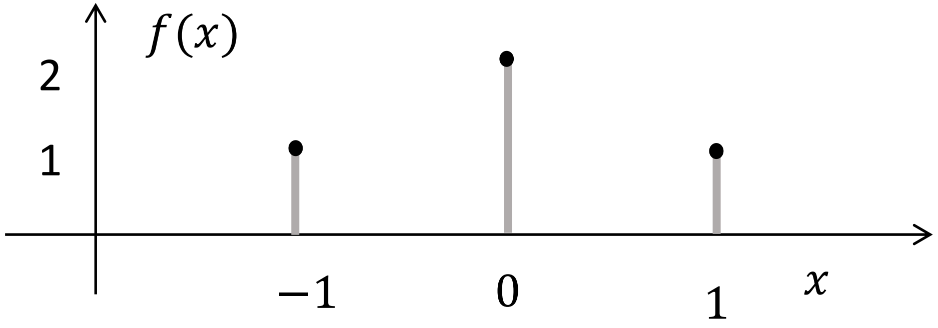
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

を用いる．$F(\omega)$？

ヒント①： $F(\omega)$を求める式を使用.

ヒント②：オイラーの公式で指数関数を三角関数にまとめる

解答



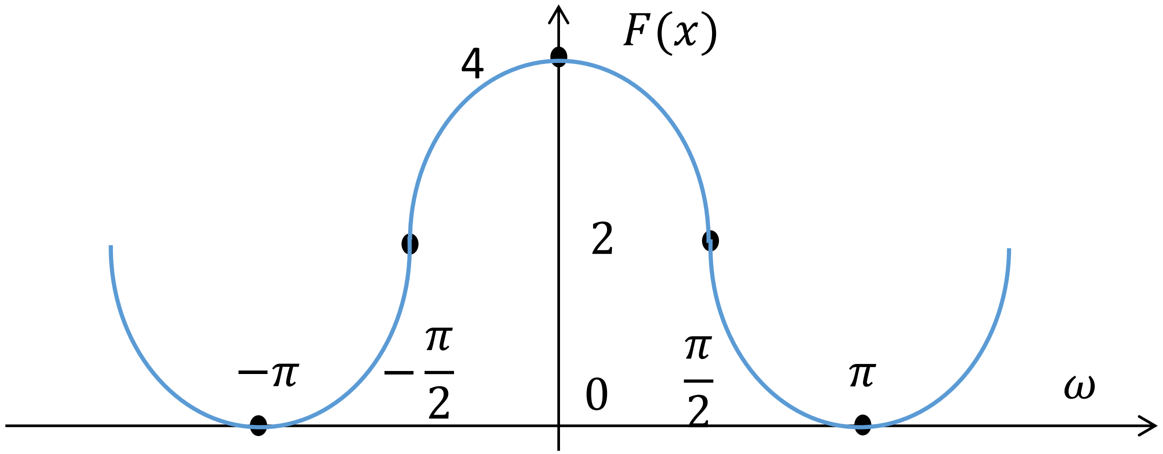
離散フーリエ変換より

$$F(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega(-1)} + 2 \cdot e^{-j\omega(0)} + 1 \cdot e^{-j\omega(1)}$$

$$= e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}$$

$$= 2\left(1 + e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)$$

$$= 2(1 + \cos(\omega)) \ \ (\because e^{jx} = cos(x) + jsin(x))$$



周波数解析法の問題点(p.95)

コンピュータを用いて計算するとき離散時間フーリエ変換では総和が無限大にあり計算が不可能

⇒有限の範囲でのみ値を持つ信号x(n)を考えるか，信号x(n)のある有限な範囲のみに着目し，積分を近似的に計算する手法をとる

⇒離散フーリエ変換を用いる

離散フーリエ変換(DFT)

●非周期信号$x(n)$に対して周期Nを仮定し，離散時間フーリエ級数の問題として周波数解析を実行する方法

●周期Nの仮定には自由度がある⇒Nの大きさにより周波数の離散化の細かさが決定される

離散フーリエ変換（DFT）へ

DFT : Discrete Fourier Transform

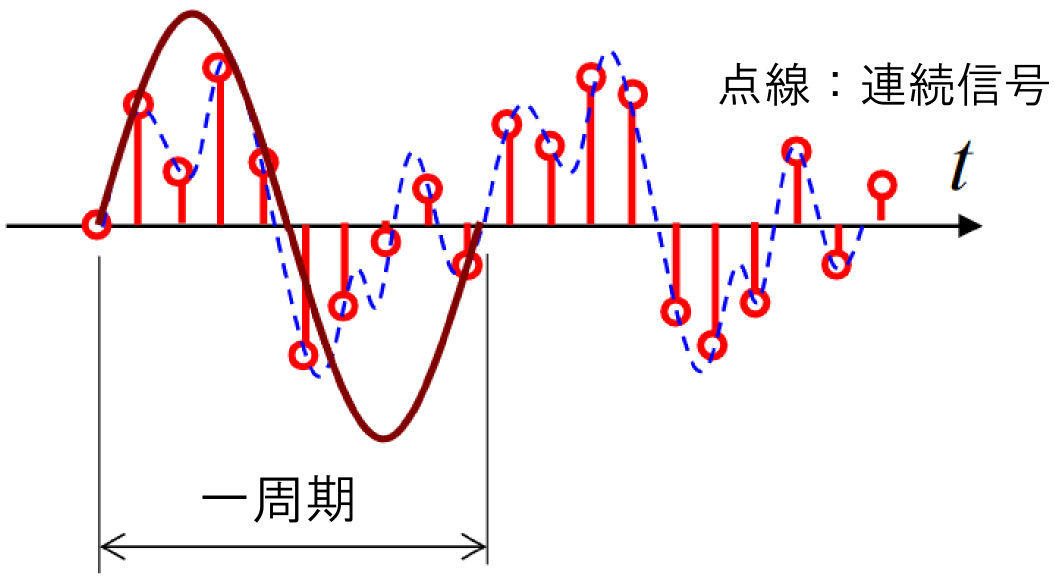
ここまで→

現状：周期nTで変数n

→角周波数の関数へ拡張表記する

最も多くのN個の点を使う繰り返す

長さを一周期とする



このときの角周波数を基本角周波数$\omega_0 = \frac{2\pi}{TN}$といい

この整数倍の各周波数をω $= \frac{2\pi}{T}\frac{k}{N}\ (k = 1,2,3,\dots,N-1)$

離散時間フーリエ変換（DFT）

$$X_s(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega nT}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}\frac{k}{N}nT} \quad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\frac{k}{N}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

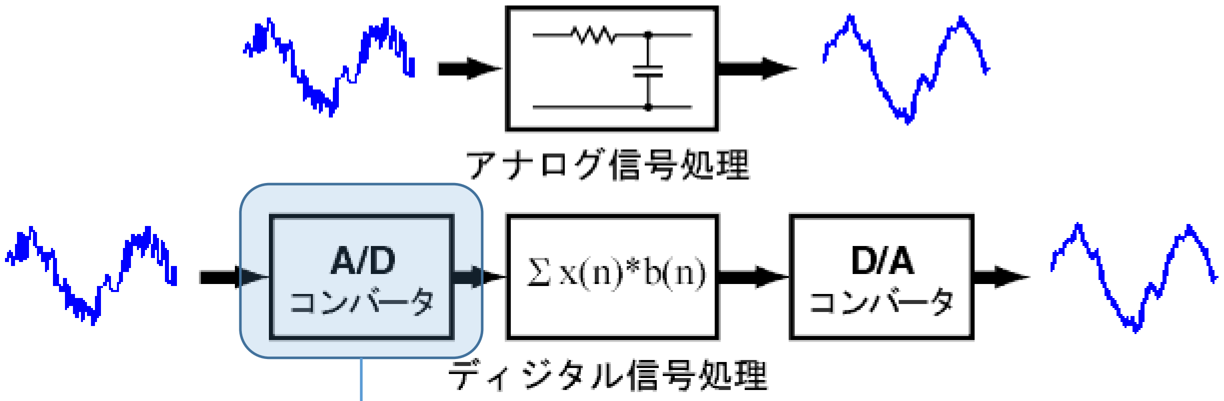
一般に$\mathrm{W} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$とし

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}[x_s(t)] = X(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W^{kn} \quad (k\text{: 周波数の関数}, n\text{: 時間の関数})$$

有限長とする前処理とDFT

アナログ信号



アナログ信号

アナログ信号処理とディジタル信号処理の大まかなシステム図

アンチ
エイリアス
フィルタ → サンプリング → 窓関数で切り出し → 離散フーリエ変換

- ローパスフィルタ
- サンプリング定理を満たすようにする

- サンプリング間隔で
- 離散化

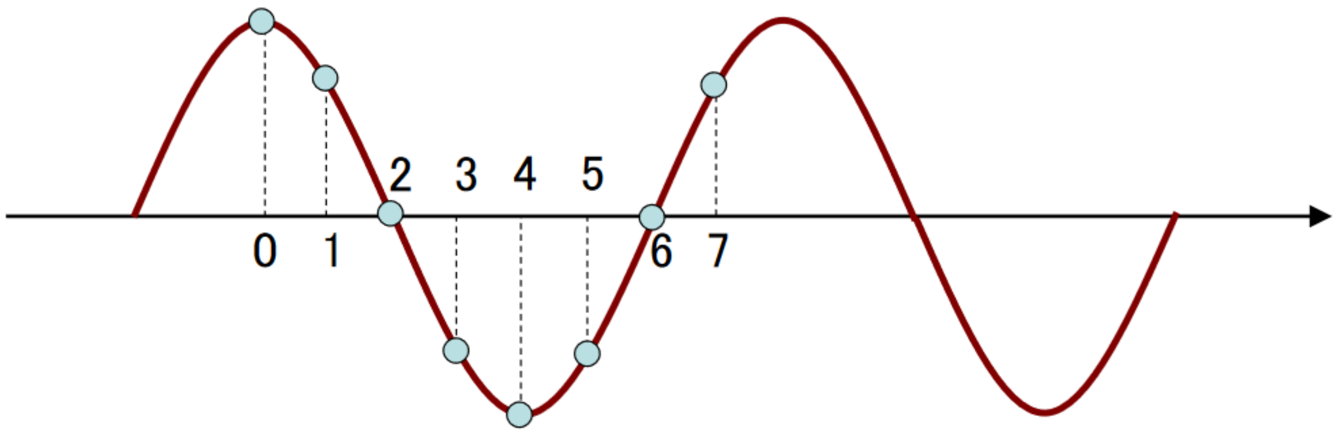
- 必須
- 多く含む周波数を強調（次回）

離散フーリエ変換での計算量

$$X_s(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W^{kn} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right)$$

$\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\frac{k}{N} \text{より} k \text{の関数とした} \right)$

$N = 8$(DFTへの入力が8点)の場合



離散フーリエ変換での計算量

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W^{kn}$$

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots + x(7)$$

(直流成分)

$$X(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + \cdots + x(7)W^7$$

(基本周波数成分)

$$X(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + \cdots + x(7)W^{14}$$

(基本周波数の二倍の成分)

$$\vdots$$

$$X(7) = x(0)W^0 + x(1)W^7 + x(2)W^{14} + \cdots + x(7)W^{49}$$

離散フーリエ変換での計算量

- 64回の複素乗算
- 56回の複素加算

一般には

- N^2回の複素乗算
- $N(N-1)$回の複素加算

⇒ Nの増加に伴って演算量が膨大になる

⇒W^{kn}の周期性と対称性に着目するとW^{kn}の統合・分解をうまく組み合わせることで演算量の軽減が可能

高速フーリエ変換(FFT : Fast Fourier Transform)　(くわしくは次回)

- 24回の複素乗算
- 24回の複素加算

4章まとめ

- フーリエ解析は対象信号に含まれる周波数を得る方法でいくつかある
- フーリエ級数展開は周期信号が対象で正弦波で表現
- フーリエ変換は非周期信号が対象で変数を時刻 (サンプリング値)から周波数で表現
- ディジタル信号処理を行う際はサンプリング定理を考慮する
- 離散時間フーリエ変換は手計算だと積分区間をみて決めるが計算機では演算量が膨大なので離散フーリエ変換を用いる
- その離散フーリエ変換でも多いので高速フーリエ変換で演算量減らす