Reálná čísla

$\mathbb{N}$ ... *přirozená* čísla: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$ ... *celá* čísla: $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$ ... *racionální* čísla: $\left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$
$\mathbb{R}$ ... *reálná* č.: délky, doplnění limit, suprem/infim, řezy
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... *iracionální* čísla ($\sqrt{2}$, π, e, ...)
$\mathbb{C}$ ... *komplexní* čísla: $\{x + \mathrm{j}y : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{j}^2 = -1$

Tvrzení. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz: Sporem, předpokládejme $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná. Pak $2b^2 = a^2$; a je dělitelné 2; existuje $c \in \mathbb{N}$ tak, že $a = 2c$; $b^2 = 2c^2$; b je dělitelné 2; a, b soudělná – spor.

Tvrzení. *Racionální čísla jsou právě ta, která mají konečný nebo periodický dekadický rozvoj.*

Důkaz: $\Rightarrow$: Při použití algoritmu dělení celých čísel a/b jsou možné zbytky jen $0, 1, \dots, b-1$, po přechodu přes desetinnou čárku se připisují jen 0, takže se po nejvýše $(b-1)$ krocích vše opakuje.
$\Leftarrow$: Přenásobením číslem $10^{\text{délka periody}}$ a odečtením dostaneme, že celočíselný násobek má konečný dekadický rozvoj.

Tvrzení. *Nenulová čísla s konečným dekadickým rozvojem mají dva dekadické rozvoje.*

Příklady. $1/7 = 0{,}\overline{142857}$, $1/3 = 0{,}\overline{3}$, $1/6 = 0{,}1\overline{6}$; $2{,}7 = \frac{27}{10}$; $2{,}7\overline{31} = \frac{2704}{990}$; $2{,}3 = 2{,}2\overline{9}$.

(lineární) uspořádání $\mathbb{R}$, *reálná osa*

Definice. Reálné číslo x se nazývá:
kladné, pokud $x > 0$;
záporné, pokud $x < 0$;
nezáporné, pokud $x \geq 0$;
nekladné, pokud $x \leq 0$.

Definice. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy *intervalů* s *krajními body* a, b:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (*otevřený*);
$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (*uzavřený*);
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ pro $b \in \mathbb{R}$ (*zleva otevřený, zprava uzavřený*);
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ pro $a \in \mathbb{R}$ (*zleva uzavřený, zprava otevřený*).
Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní*.

Tvrzení. *V každém intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel* (hustota $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$).

Definice. *Rozšířená množina reálných čísel* je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají *nevlastní* čísla. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pokládáme:
1) $-\infty < x < +\infty$
2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$
3)
$$x + \infty = \infty\,, \qquad \infty + \infty = \infty\,,$$
$$x - \infty = -\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty\,,$$
$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty\,, & x > 0\,, \\ -\infty\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad \infty \cdot \infty = \infty\,,$$
$$\frac{x}{\infty} = 0\,.$$
Nedefinujeme: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka. Využití: věty o limitách, popisy intervalů:
$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (otevřené i s $\pm\infty$).

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $z \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá:
horní závora M, pokud $M \leq z$ ($x \leq z$ pro každé $x \in M$);
dolní závora M, pokud $z \leq M$ ($z \leq x$ pro každé $x \in M$).
Množina M se nazývá:
shora omezená, pokud má reálnou horní závoru;
zdola omezená, pokud má reálnou dolní závoru;
omezená, pokud je shora i zdola omezená.

Příklady.
1) $\mathbb{N}$ je zdola omezená, není shora omezená.
2) $\mathbb{Z}$ není omezená ani zdola, ani shora.
3) $(0, 1\rangle$ je omezená.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Maximum M ($\max M$) je největší prvek M.
Minimum M ($\min M$) je nejmenší prvek M.
Supremum M ($\sup M$) je nejmenší horní závora M.
Infimum M ($\inf M$) je největší dolní závora M.

Příklady.
$\max \mathbb{N}$ neexistuje, $\sup \mathbb{N} = +\infty$,
$\max\langle 0, 1\rangle = 1$, $\sup\langle 0, 1\rangle = 1$,
$\max(0, 1)$ neexistuje, $\sup(0, 1) = 1$
$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$

Poznámky.
1) Jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny.
2) $\max M$ ($\min M$) existuje právě tehdy, když $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$).

Věta. *Každá množina reálných čísel má supremum i infimum (jediné).*

Řez $(A|B)$: $A, B \subset \mathbb{Q}$ neprázdné, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A < B$.
Řezy s $\max A$ nebo $\min B$ odpovídají racionálním číslům (uvažujeme např. druhý typ), ostatní iracionálním. Rozšiřujeme relace a operace z $\mathbb{Q}$:
$(A_1|B_1) \leq (A_2|B_2)$ pro $A_1 \subset A_2$;
$(A_1|B_1) + (A_2|B_2) = (\dots|B_1 + B_2)$;
$(A_1|B_1) \cdot (A_2|B_2) = (\dots|B_1 \cdot B_2)$ pro $0 \in A_1 \cap A_2$.
Platí $\sup_{x \in M}(A_x|B_x) = (\bigcup_{x \in M} A_x|\dots)$, pokud přidáme $(\mathbb{Q}, \emptyset) \sim +\infty$.
Korespondence řezů a dekadických rozvojů.

Věta (princip vnořených intervalů). *Jsou-li I_n ($n \in \mathbb{N}$) uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

Poznámka. Podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná: je-li $I_n = (0, \frac{1}{n}\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Funkce

Definice. (*Reálná*) *funkce* (*reálné proměnné*) f je zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.
Množina A je *definiční obor* funkce f ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x) \colon x \in A\}$ je *obor hodnot* funkce f ($R(f)$).
Graf funkce f je množina $\{[x, f(x)] \colon x \in D(f)\}$.

Poznámka. Pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný.

Definice. Funkce $f \colon A \to B$ je:
prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;
na B, pokud její obor hodnot je B ($f \colon A \xrightarrow{\text{na}} B$);
vzájemně jednoznačná (*bijekce*), pokud je prostá na B.

Příklady.
1) x^2 není prostá ($f(1) = f(-1)$), je na $\langle 0, +\infty)$.
2) x^3 je prostá na $\mathbb{R}$.

Poznámka. Neostré uspořádání $f \leq g$ a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí definujeme „bodově“.

Definice. *Složení* funkcí $f \colon A \to B$ a $g \colon B \to C$ je funkce $g \circ f \colon A \to C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Příklad. $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$:
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 = (2x)^2 = 4x^2$,
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) = 2x^2$.

Definice. Funkce $g \colon R(f) \to A$ je *inverzní* k funkci $f \colon A \to B$, pokud $(g \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in A$. Značíme $g = f_{-1}$.

Věta. *Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak $D(f_{-1}) = R(f)$, $R(f_{-1}) = D(f)$, f je inverzní funkce k f_{-1} a graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici $y = x$).*

Příklad. $f(x) = \mathrm{e}^x \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je prostá, má inverzní $f_{-1}(x) = \ln x \colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$; $f_{-1} \circ f \neq f \circ f_{-1}$.

Definice. Funkce f je (*zdola*, *shora*) *omezená na* $A \subset D(f)$, pokud je (zdola, shora) omezená množina $f(A)$.

Poznámka. Pokud neurčujeme A, myslíme $D(f)$.

Příklady.
1) x^2 je zdola omezená ($x^2 \geq 0$), není shora omezená.
2) $\operatorname{arctg} x$ je omezená.
3) x^3 není omezená zdola ani shora.

Definice. Funkce f je *rostoucí* (*klesající*, *neklesající*, *nerostoucí*) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $f(x) \geq f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$. Takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*.

Příklady.
1) x^2 je klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $\langle 0, +\infty)$.
2) $\operatorname{sign} x$ je neklesající.
3) $\frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$, není monotonní.

Věta. *Rostoucí (klesající) funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí (klesající).*

Definice. Funkce f je:
sudá, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$;
lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklady. 1) x^2 je sudá. 2) x^3 je lichá.

Poznámka. Graf sudé funkce je symetrický podle osy y, graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Definice. Funkce f je *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Poznámka. Pro periodu p, jsou i np ($n \in \mathbb{N}$) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní.*

Příklad. Funkce $\sin x$ má základní periodu 2π.

Lineární transformace a graf funkce:
1) Graf $f(x) + c$ je posunutý o c ve směru osy y.
2) Graf $f(x + c)$ je posunutý o $-c$ ve směru osy x.
3) Graf $c\,f(x)$ je c-krát roztažený od osy x.
4) Graf $f(cx)$ ($c \neq 0$) je c-krát stažený k ose y.
(Pro $c < 0$ opačná orientace nebo překlopení.)

Definice. Množiny A, B mají stejnou *mohutnost* (*kardinalitu*), pokud existuje bijekce $A \xrightarrow{\text{na}} B$. Množiny které mají mohutnost $\mathbb{N}$, se nazývají *spočetné.*

Tvrzení. *$\mathbb{Q}$ je spočetná, $\mathbb{R}$ je nespočetná.*

Důkaz: 1) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru přiřadíme přirozeným číslům primárně vzestupně podle $|a| + b$, pak libovolně.
2) Pro $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ najdeme dekadický rozvoj čísla, které není v $f(\mathbb{N})$: jako n-tou cifru dekadického rozvoje vybereme cifru různou od n-té cifry dekadického rozvoje $f(n)$ a od 9.

Elementární funkce

Mocniny x^a
$a \in \mathbb{N}$: $x^a = x \cdot \ldots \cdot x$ ($a\times$); inverzní $\sqrt[a]{x}$ ($\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$);
$x^0 = 1$ i pro $x = 0$; $x^{-a} = 1/x^a$;
$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělná:

$D(x^{p/q})$	q liché	q sudé ($x \geq 0$)
$p \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty)$
$p < 0$ ($x \neq 0$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro $a \notin \mathbb{Q}$ pokládáme $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$, tedy $D(f) = (0, +\infty)$.

Exponenciální o základu $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$: a^x (impl. e^x);
inverzní: *logaritmus o základu a*: $\log_a x$;
($\log x = \log_{10} x$ *dekadický*, $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ *přirozený*).
Pro $x \in \mathbb{Q}$ je a^x definováno (viz mocniny),
pro $x \notin \mathbb{Q}$ dodefinujeme monotónně, tj. např. pro $a > 1$:
$a^x = \sup\{a^q \colon q \in \mathbb{Q},\ q < x\} = \inf\{a^q \colon q \in \mathbb{Q},\ q > x\}$.
Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Pro každé $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad x, y > 0\,,$$
$$\log_a x^y = y \log_a x\,, \qquad x > 0\,.$$

Exponenciální funkce i logaritmy lze převést na základ e:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}\,, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

goniometrické: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
inverzní: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

hyperbolické:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

inverzní: $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Poznámka. V $\mathbb{C}$:
$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\right)$.

Limity a spojitost funkcí

Definice. *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$U(a,r) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$.
Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\} = (a-r, a) \cup (a, a+r)$.
Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):
$U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < r\} = (-\infty, r)$,
$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > r\} = (r, +\infty)$.

Definice. Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a *limitu* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$), jestliže platí: Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Poznámka. Obecněji limita v hromadném bodě definičního oboru (v každém prstencovém okolí leží bod $D(f)$) je dána podmínkou $f(P \cap D(f)) \subset U$.

Tvrzení. *Pro každé* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí:*
1) $\lim_{x\to a} c = c$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.
2) $\lim_{x\to a} x = a$.

Důkaz: 1) $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ pro každé U, např. $P = P(a,1)$.
2) $f^{-1}(U) = U$ pro každé U, např. $P = U \setminus \{a\}$.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje: pro $b \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje $U_b \not\supset \langle -1, 1\rangle$, $f^{-1}(U_b)$ neobsahuje prstencové okolí $+\infty$.

Jednostranné limity zleva/zprava pro levá/pravá prstencová okolí a (body prstencového okolí nalevo/napravo od a).

Příklad. $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = +1$.

Věta. *Pro funkci* f *definovanou v prstencovém okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ *je* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *právě tehdy, když* $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b$.

Důkaz: $\Rightarrow$: pro $P(a,\delta)$ bereme jednostranná prstencová okolí $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$
$\Leftarrow$: pro $(a-\delta_-, a)$, $(a, a+\delta_+)$, $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$ bereme $P(a,\delta)$

Poznámka. Věty lze formulovat i pro jednostranné limity.

Věta (o jednoznačnosti)**.** *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ není limitou: existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c, $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a.

Věta (o monotonii)**.** *Je-li* $f \le g$ *na prstencovém okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *pak* $b \le c$.

Důkaz (sporem): Pro $b > c$ existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c a prstencová okolí $P_f \subset f^{-1}(U_b)$, $P_g \subset g^{-1}(U_c)$ bodu a, pro $x \in P_f \cap P_g$ je $f(x) > g(x)$ – spor.

Příklad. Ne pro $<$: $0 < \frac{1}{x}$ na $(0, +\infty)$, v $+\infty$ stejná limita.

Věta. *Funkce s vlastní limitou v* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *je omezená na prstencovém okolí* a.

Důkaz: Existuje omezené okolí U limity, k němu P.

Věta. *Funkce s kladnou (zápornou) limitou v* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *je na prstencovém okolí* a *kladná (záporná).*

Důkaz: Existuje okolí U limity neobsahující 0, k němu P.

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz: $f(x) \in U(0,\varepsilon)$ právě tehdy, když $|f(x)| \in U(0,\varepsilon)$.

Věta. *Monotonní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).*

Důkaz (pro f nekles. na $I = (a,b)$, $\to b-$): $c = \sup f(I)$, pro $U(c,\varepsilon)$ existuje $d \in I$ s $f(d) > c - \varepsilon$, (d, b) je levé prstencové okolí b s $f\big((d,b)\big) \subset U(c,\varepsilon)$.

Příklad. $\mathrm{e}^x : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je rostoucí, tedy
$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \inf(0, +\infty) = 0$,
$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \sup(0, +\infty) = +\infty$.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ +\infty, & a < 0. \end{cases}$$

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)**.** *Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly).*

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro $U(b+c, \varepsilon)$ uvažujme $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset U(b+c, \varepsilon)$.

Příklady.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+1) = |\infty - \infty + 1|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(2-3x^{-1}+x^{-2}) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty\,,$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+1} = \left|\dfrac{-\infty}{+\infty}\right|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^{-1}-x^{-2}}{1+x^{-2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0\,,$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Věta. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = +\infty$.*

Poznámka. $\left|\frac{1}{0\pm}\right| = \pm\infty$.

Příklady.

1) $$\lim_{x\to 1\pm}\frac{2}{x-1} = \left|\frac{2}{0\pm}\right| = \pm\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x-1)^2} = \left|\frac{-2}{0+}\right| = -\infty\,.$$

3) $$\lim_{x\to 2-}\frac{\ln(2-x)}{x^2-4} = \left|\frac{-\infty}{0-}\right| = +\infty\,.$$

Věta (o sevření). *Je-li $f \le h \le g$ na prst. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x\to a} h(x) = b$.*

Příklad. $$\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x} = 1\,.$$

stačí $x \to 0+$ (sudá) a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, věta o sevření:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sin x < {}&\tfrac{x}{2} < \tfrac{1}{2}\tfrac{\sin x}{\cos x}\\ 1 < {}&\tfrac{x}{\sin x} < \tfrac{1}{\cos x}\\ 1 > {}&\tfrac{\sin x}{x} > \cos x \end{aligned}$$

Věta. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, g je omezená na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$.*

Důkaz: $|g| \le M$, $0 \le |f(x)\,g(x)| \le M\,|f(x)|$, věta o sevření.

Poznámka. $|0\cdot\text{om.}| = \left|\frac{\text{om.}}{\pm\infty}\right| = 0$.

Příklad. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = |0\cdot\text{om.}| = 0$.

Věta. *Je-li $f \le g$ na prst. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ($\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$), pak $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).*

Věta. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$ a g je omezená na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = b$.*

Důkaz: Pro $+\infty$: $g \ge M$, $f(x)+g(x) \ge f(x)+M \xrightarrow{x\to a} +\infty$.

Poznámka. $|\pm\infty + \text{om.}| = \pm\infty\,.$

Příklad. $\lim_{x\to\infty}(x+\cos x) = |+\infty+\text{om.}| = +\infty$.

Tvrzení. *Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, pak platí:*
1) Je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ vlastní, pak $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)$ neexistuje.
2) Je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ vlastní a nenulová, pak neexistují $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ a $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$.

Důkaz: Sporem, existovala by $\lim_{x\to a} f(x)$ podle věty o limitě součtu, součinu, podílu.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{1-2^{-x}} = \left|\frac{\text{neex.}}{1}\right|$ neexistuje.

Věta (limita složené funkce). *Nechť pro $a,b,c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:*
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,
(2) $\lim_{y\to b} g(y) = c$,
(3) $g(b) = c$ nebo $f(x) \ne b$ na prstencovém okolí a.
Pak $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

Důkaz: U_c
(2): existuje P_b: $P_b \xrightarrow{g} U_c$
(1): existuje P_a: $P_a \xrightarrow{f} P_b \cup \{b\}$
(3): pro $g(b) = c$ je $P_b \cup \{b\} \xrightarrow{g} U_c$, $P_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$,
jinak existuje P'_a: $P'_a \xrightarrow{f} P_b$, $P'_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{y\to 0}\mathrm{e}^{y} = 1$ ($\frac{1}{x} \ne 0$).

Příklad. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;
$g(y) = 0$ pro $y \ne 0$, $g(0) = 1$: $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$;
$(g\circ f)(x) = 1$ pro $x \in \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, jinak 0;
$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$ neexistuje.

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f\big(V \cap D(f)\big) \subset U$. Funkce je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Věta. *Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Poznámka. Funkce f je spojitá v izolovaných bodech $D(f)$ (pro které je $D(f)$ disjunktní s některým prst. okolím).

Poznámka. Podobně spojitosti zleva/zprava.

Příklady. 1) x je spojitá.
2) $\operatorname{sign} x$ je spojitá v bodech $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, není spojitá v bodě 0.
3) Charakteristická funkce $\langle 0, +\infty)$ je spojitá v bodech $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, zprava spojitá v 0.
4) *Dirichletova funkce* není spojitá v žádném bodě (v žádném nemá limitu):

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,,\\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Poznámka. *Po částech spojitá funkce*: v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich konečné jednostranné limity.

Věta. 1) *Jsou-li f, g spojité v a, pak $f \pm g$, $f\cdot g$, f/g (pokud je definována), $|f|$ jsou spojité v a.*
2) *Je-li f spojitá v a, pak je omezená na okolí a.*
3) *Je-li f spojitá v a, $f(a) > 0$, pak $f(x) > 0$ na okolí a.*
4) *Je-li f spojitá v a, g v $f(a)$, pak $g\circ f$ je spojitá v a.*

Věta. *Racionální funkce jsou spojité.*

Důkaz: Spojitost konstant, x, součtu, součinu a podílu.

Věta. *Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.*

Posloupnosti

Definice. (Nekonečná) *posloupnost* (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n je *n-tý člen.*

nekonečněrozměrný aritmetický vektor
obecněji $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$

Příklady.
1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots)$
$a_n = a_1 q^{n-1}$ ... *geometrická* s *kvocientem* q.
2) $(1, 3, 5, 7, \dots)$
$a_n = a_1 + (n-1)d$ ... *aritmetická* s *diferencí* d.
3) rekurentně $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$:
$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots)$ (Fibonacciho)

Pojmy a věty jako pro funkce: omezená, monotonní (stačí vztahy mezi a_n, a_{n+1}), limita. Posloupnost s vlastní limitou je omezená (nejen lokálně).

Věta. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$), pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.*

Definice. Posloupnost s vlastní limitou je *konvergentní.*

Věta. *Nechť f je definována na prstencovém okolí a. Pak $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$ pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ čísel z $D(f) \setminus \{a\}$ s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje:
$\lim_{n\to\infty} \pi n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$,
$\lim_{n\to\infty} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$.

Definice. *Vybraná posloupnost* (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Poznámka. $a_n = f(n)$, $k_n = g(n)$: $a_{k_n} = (f \circ g)(n)$.

Definice. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je *hromadná hodnota posloupnosti*, pokud v každém okolí a leží nekonečně mnoho jejích členů.

Věta. *Limita posloupnosti je její hromadnou hodnotou. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé její vybrané posloupnosti.*

Důkaz: 1. Zřejmé. 2. Okolí U_n hromadné hodnoty smršťující se k ní, $a_{k_n} \in U_n$ tak, aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla rostoucí.

Příklad. Posl. $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné hodnoty ± 1.

Věta. *Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

Důkaz: $-\infty$ nebo $+\infty$, pokud není omezená. Pro omezenou sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) uzavřených intervalů obsahujících nekonečně mnoho členů posloupnosti, jejich průnik obsahuje hromadnou hodnotu.

Věta. *Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.*

Důkaz: Okolí U obsahuje hrom. hodnotu a její okolí $U' \subset U$.

limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$)
limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$)

Věta. *Pro posloupnost je ekvivalentní:*
1) *Má limitu.*
2) *Má jedinou hromadnou hodnotu.*
3) *Limes inferior a limes superior posloupnosti jsou stejné.*
4) *Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu.*

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass). *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.*

Důkaz: Pro $m = \sup f(I)$ existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} m$, ta má v I hromadnou hodnotu a, k ní konverguje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, ze spojitosti f vyplývá $f(a_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$, tedy $m = f(a)$.

Příklady.
1) $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0,1)$ (ryze monotonní funkce na otevřeném intervalu) nenabývá maxima ani minima.
2) $f(x) = -x - 1$ na $\langle -1, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1 - x$ na $(0, 1\rangle$ nenabývá extrémů.

Věta (o mezihodnotě). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M\rangle$.*

Důkaz: $c \in (m, M)$, m, M se nabývají v krajních bodech intervalu I_1, sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) intervalů s hodnotami v krajních bodech kolem c, jejich průnik obsahuje a, pro které $f(a) = c$.

Důsledky.
1) *Pro spojitou nekonstantní funkci je obrazem intervalu interval (uzavřeného uzavřený).*
2) *Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotonní.*

Důkaz: 2) Např. pro $x_1 < x_1 < x_3$, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_1), f(x_3) < c < f(x_2)$ ex. vzory c v (x_1, x_2) i v (x_2, x_3).

Poznámka. Metoda bisekce pro hledání nulového bodu spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $f(a)\,f(b) < 0$, používá metodu důkazu věty o mezihodnotě.

Věta. *Inverzní funkce k ryze monotonní funkci na intervalu je spojitá.*

Důkaz: f na I, $a \in D(f_{-1})$, $a = f(b)$, např. b vnitřní bod I, $U = (c, d) \subset I$ okolí b, existuje okolí V bodu a neobsahující $f(c), f(d)$, $f_{-1}\big(V \cap D(f_{-1})\big) \subset U$.

Příklad. $f(x) = x$ na $\langle 0, 1 \rangle$, $f(x) = x - 1$ na $(2, 3\rangle$ je rostoucí (i spojitá), inverzní není spojitá v 1.

Derivace funkce

„Okamžitá“ změna funkce jako limita průměrných změn.

Definice. *Derivace funkce* f *v bodě* a je
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky.
1)
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
2) Podobně jednostranné derivace.
3) *Derivace funkce v bodě*: $f'(a)$ (číslo, i nevlastní).
Derivace funkce: $f' : a \mapsto f'(a)$ (funkce, jen vlastní hod.).
Derivace: $' : f \mapsto f'$ (operátor).
4) Funkce f má *derivaci na intervalu* I, pokud f' existuje na I (v případných krajních bodech I příslušná jednostranná).

Příklad. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left| \frac{1}{0+} \right| = +\infty.$$

Věta.
0) $(c)' = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{R}$ je konstanta).
1) $(x^a)' = ax^{a-1}$ $\quad x \in D(x^a)$ pro $a \notin (0, 1)$,
$x \in D(x^a) \setminus \{0\}$ pro $a \in (0, 1)$.
2) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ $\quad x \in \mathbb{R}$.
3) $(\sin x)' = \cos x$ $\quad x \in \mathbb{R}$.
$(\cos x)' = -\sin x$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: 0) $(c)' = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$.
1) pro $a \in \mathbb{N}$: $(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [(x+h)^n - x^n] =$
$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n - x^n) =$
$= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$.
2) $(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x$.
3) pro $\sin x$: $(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$
$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos(x + h/2) \sin h/2}{h} =$
$= \lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) \cdot \lim_{h/2 \to 0} \frac{\sin h/2}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x$.

Příklady.
1) $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
2) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = 1/\big(3\sqrt[3]{x^2}\big)$, $x \neq 0$.

Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Důkaz: $f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \xrightarrow{x \to a}$
$f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$.

Příklady.
1) $\operatorname{sign} x$ je nespojitá v 0,
$\operatorname{sign}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sign} h - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} = \left| \frac{1}{0+} \right| = +\infty$.
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá v 0, $f'(0) = +\infty$.
3) $f(x) = |x|$ je spojitá v 0, $f'(0)$ neexistuje:
$f'_{\pm}(0) = \lim_{h \to 0\pm} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0\pm} \pm 1 = \pm 1$.

Poznámka. Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě derivaci.

Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Mají-li funkce* f, g *vlastní derivace v bodě* a*, pak:*
1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$*;*
2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$*;*
3) *je-li* $g(a) \neq 0$*, pak*
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}.$$

Důkaz:
$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$\xrightarrow{x \to a} f'(a) \pm g'(a);$$
$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} =$$
$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$\xrightarrow{x \to a} f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a);$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} =$$
$$= \frac{1}{g(a)\, g(x)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$
$$\xrightarrow{x \to a} \frac{1}{g(a)^2} \left[f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a) \right].$$

Poznámky.
1) Podobně pro derivace funkcí (nejen v bodě).
2) Pro $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$ („derivace násobku je násobek derivace“).
3) Zobrazení $' : f \to f'$ je lineární.
4) $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$,
$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$.

Příklady.
1) $(3x^2 + 2x + 7)' = 6x + 2$.
2) $(x^2\, \mathrm{e}^x \sin x)' = 2x\, \mathrm{e}^x \sin x + x^2\, \mathrm{e}^x \sin x + x^2\, \mathrm{e}^x \cos x$.
3) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Věta (o derivaci složené funkce)**.** *Má-li* f *vlastní derivaci v* a*,* g *vlastní derivaci v* $f(a) = b$*, pak* $g \circ f$ *má v* a *derivaci*
$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

Důkaz: Označme $f(x) = y$. Funkce
$$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}, & y \neq b, \\ g'(b), & y = b, \end{cases}$$
je spojitá v b, v okolí b je $g(y) - g(b) = t(y)\,(y - b)$, platí
$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} =$$
$$= \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \frac{t(y)\,(y - b)}{x - a} =$$
$$= t(y)\, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \to a\ (\Rightarrow\ y \to b)} g'(b)\, f'(a).$$

Poznámky.
1) Schematicky pro $f(x) = y$, $g(y) = z$: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
2) $(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)' = f_n' \cdots f_2' f_1'$.

Příklady.
1) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$.
2) $(\mathrm{e}^{\cos x^3})' = \mathrm{e}^{\cos x^3} \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2$.
3) $\big(f(ax)\big)' = f'(ax) \cdot a$.

Poznámka. Obecnější vzorce pro $a \in \mathbb{R}$ (na $\mathbb{R}$):
$(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$, $(\sin ax)' = a \cos ax$, $(\cos ax)' = -a \sin ax$.

Derivací $(f_{-1} \circ f)(x) = x$ dostaneme $f'_{-1}\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$.

Věta (o derivaci inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v $a \in I$, pak*

$$f'_{-1}\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Důkaz: Označme $y = f(x)$, $b = f(a)$. $f(I)$ je otevřený interval, existuje spojitá f_{-1} na $f(I)$.

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow{y \to b\ (\Rightarrow\ x \to a)} \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Poznámka. Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověřujeme pro inverzní funkci.

Příklad. $\ln x$ je inverzní k e^y, která je spojitá, rostoucí a má nenulovou derivaci. Pro $x \in D(\ln) = (0, +\infty)$ je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\,.$$

Věta.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}\,,\ (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

Příklad. Důkaz vzorce o derivaci x^a pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$:
$(x^a)' = \big(\mathrm{e}^{a \ln x}\big)' = \mathrm{e}^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\,x^{a-1}$.

Definice. *Derivaci řádu n (n-tou derivaci)* funkce f značíme $f^{(n)}$ nebo $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x}$ a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f\,,\qquad f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)' \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad. Pro $f(x) = 1/x = x^{-1}$ dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2} \\ f''(x) &= \big((-1)x^{-2}\big)' = (-1)(-2)x^{-3} \\ f'''(x) &= \big((-1)(-2)x^{-3}\big)' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \\ &\ \ \vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

Poznámky.
1) Derivace řádu n je lineární zobrazení, takže
$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_k f_k)^{(n)} = c_1 f_1^{(n)} + c_2 f_2^{(n)} + \cdots + c_k f_k^{(n)}$.
2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg'\,, \\ (fg)'' &= (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''\,, \\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\,, \\ &\ \ \vdots \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\,. \end{aligned}$$

Aplikace derivací

Geometrické aplikace

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ... směrnice sečny body $[a, f(a)]$, $[x, f(x)]$
$f'(a)$ ... směrnice tečny v $[a, f(a)]$
tečna:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$
$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

směrový vektor tečny (kolmý k normále): $\big(1, f'(a)\big)$
normála:

$$x + f'(a)\,y = a + f'(a)\,f(a)$$
$$x = a\,, \qquad \text{pro } f'(a) = 0\,,$$
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x-a) \qquad \text{pro } f'(a) \neq 0\,.$$

Příklad. Určete tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě [1,?].
$f(1) = \mathrm{e}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(1) = \mathrm{e}$
tečna: $y = f(1) + f'(1)\,(x-1) = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = \mathrm{e}x$
normála: $y = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}(x-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}\,x + (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolleova)**.** *Nechť pro funkci f platí*
(1) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;
(2) má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);
(3) $f(a) = f(b)$.
Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a, b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f' = 0$ na (a, b);
nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a, b\rangle$;
například pro maximum v bodě $c \in (a, b)$:
$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$,
$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$.

Příklady. Žádný předpoklad nelze vypustit.
1) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1)$, $f(1) = 0$ nesplňuje (1).
2) Funkce $f(x) = |x|$ na $\langle -1, 1\rangle$ nesplňuje (2).
3) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1\rangle$ nesplňuje (3).

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)\,.$$

Důkaz: funkce $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:
$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+)$, pak*

$$f'_+(a) = f'(a+)\,.$$

Důkaz: z existence $f'(a+)$ plyne existence vlastní derivace a tedy i spojitost f na pravém okolí a; pro x z tohoto okolí podle Lagrangeovy věty existuje $c_x \in (a, x)$; pro $x \to a+$ je $c_x \to a+$; $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} f'(c_x) = {}$
$= \lim_{c_x \to a+} f'(c_x) = f'(a+)$

Poznámka. Podobně pro derivaci zleva, oboustrannou.

Příklad. $f(x) = \arcsin x$:
$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty.$

Příklad. $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$:
$f'(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ neex.

Tvrzení (Cauchy). *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, mají vlastní derivaci na (a, b) a $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Důkaz: funkce $h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:
$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c)$,
protože $g'(x) \neq 0$ na (a, b), je $g'(c) \neq 0$ a také $g(b) \neq g(a)$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro funkce f, g platí:*
(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *nebo*
$\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$,
(2) *existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz: pro $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$:
f', g' existují a $g'(x) \neq 0$ na některém $(a, b\rangle$, položme $f(a) = g(a) = 0$ (pak f, g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$); podle Cauchyovy věty pro $\langle a, x\rangle$ ($x \in (a, b)$) existuje $c_x \in (a, x)$:
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x\to a+]{x\to a+} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Poznámky.
1) Podobně pro limitu zleva či oboustrannou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2) L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklady.
1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$
2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{(1/2)x^{-1/2}} =$
$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$
3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x} =$
$= \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty.$
4) $\lim_{x\to 0+} x \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} =$
$= \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$
5) $\lim_{x\to +\infty}(1 + 1/x)^x = \exp[\lim_{x\to +\infty} x \ln(1 + 1/x)] =$
$= \exp\big[\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\big] =$
$\overset{\text{l'H}}{=} \exp\big[\lim_{x\to +\infty} \frac{1/(1+1/x)\cdot(-1)/x^2}{-1/x^2}\big]$
$= \exp[\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+1/x}] = \exp 1 = \mathrm{e}.$
6) $\lim_{x\to +\infty}(\ln x - x) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty.$

Poznámka. Pokud limita podílu derivací neexistuje, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít. To neznamená, že limita podílu funkcí neexistuje: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\text{omez.}}{+\infty}\right| = 0$, ale limita podílu derivací $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{1}$ neexistuje.

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet limit posloupností, pokud najdeme vhodnou funkci. Například $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n/n = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x/x = +\infty$.

Taylorův polynom

Věta (Taylor). *Nechť funkce f má spojité derivace do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x\rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a, x). Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

$T_n(x)$: *Taylorův polynom* funkce f v bodě a řádu n, *zbytek v Lagrangeově tvaru.*

Poznámky.
1) Podobně pro $\langle x, a\rangle$.
2) $n = 0$: $f(x) = f(a) + f'(c)\,(x - a)$ (Lagrange).
3) $f^{(n+1)}$ spojitá, x blízko a … c blízko a … $f^{(n+1)}(c)$ blízko $f^{(n+1)}(a)$ … T_{n+1} přesnější

Důkaz:
$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a)\\ T_n'(a) &= f'(a)\\ &\vdots\\ T_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a)\end{aligned}$$

$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$
$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}, \qquad t \in \langle a, x\rangle$$

Rolle $(n+1)$-krát:
$$\begin{array}{rll} & g(x) = 0 & g(a) = 0\\ \exists\, c_1 \in (a, x): & g'(c_1) = 0 & g'(a) = 0\\ \vdots & & \\ \exists\, c_n \in (a, c_{n-1}): & g^{(n)}(c_n) = 0 & g^{(n)}(a) = 0\\ \exists\, c \in (a, c_n): & g^{(n+1)}(c) = 0 & \end{array}$$

$$f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)! = 0$$
$$M = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Příklady.
$$\mathrm{e}^x \sim 1 + \tfrac{1}{1!}\,x + \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}\,x^n$$
$$\cos x \sim 1 - \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \tfrac{1}{4!}\,x^4 - \tfrac{1}{6!}\,x^6 + \cdots$$
$$\sin x \sim x - \tfrac{1}{3!}\,x^3 + \tfrac{1}{5!}\,x^5 - \tfrac{1}{7!}\,x^7 + \cdots$$

Poznámky.
1) Taylorův p. sudé (liché) funkce v 0 je funkce sudá (lichá).
2) Taylorův p. řádu n pro polynom P stupně $\leq n$ je P.
3) Taylorova řada: nekonečný součet.

Pro výpočet sinu nebo kosinu stačí interval $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Například $\cos\frac{45}{8}\pi = \cos\frac{13}{8}\pi = -\cos\frac{5}{8}\pi = \cos\frac{3}{8}\pi = \sin\frac{\pi}{8}$.

Příklad. Odhadněte $\sin\frac{\pi}{6}$ Taylorovým p. řádu 3 v 0.
$T_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3$, $T_3(\frac{\pi}{6}) = 0{,}499\,674\ldots$
Protože $T_3 = T_4$, je chyba
$|\sin(\frac{\pi}{6}) - T_4(x)| = \left|\frac{\sin^{(5)}(c)}{5!} \cdot (\frac{\pi}{6})^5\right| \leq \frac{1}{120} \cdot (\frac{\pi}{6})^5 =$
$= 0{,}000\,327\ldots$
Skutečná chyba je dost přesně rovna tomuto odhadu, T_5 dá výrazně přesnější hodnotu $0{,}500\,002\ldots$

Příklad. Spočtěte číslo e s přesností 10^{-3}, víte-li, že e < 3.
$f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$, $\mathrm{e} = f(1) \approx T_n(1)$
chyba $\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\, 1^{n+1}\right| \le \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$ pro $n \ge 6$
$T_6(1) = 2{,}718\,0\overline{5}$, chyba $0{,}000\,226\ldots$, odhad $0{,}000\,595\ldots$

Průběh funkce

Monotonie a extrémy

Věta (o monotonii)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*
1) *Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí v I.*
2) *Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I, pak f je klesající v I.*
3) *Je-li $f'(x) \ge 0$ uvnitř I, pak f je neklesající v I.*
4) *Je-li $f'(x) \le 0$ uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.*

Důkaz: $x, y \in I$, $x < y$
Lagrange: $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x - y)$, $c \in (x, y)$
1) $f(x) - f(y) < 0 \ldots\ f(x) < f(y) \ldots$ rostoucí
2)–4) podobně

Poznámky.
1) Je-li $f' = 0$ na intervalu, pak f je konstantní.
2) Je-li $f' = g'$ na intervalu, pak f, g se liší o konstantu.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
$f' > 0$ na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \ldots\ f$ rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$
$f' < 0$ na $(-1, 1) \ldots\ f$ klesající na $\langle -1, 1\rangle$

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f' > 0$ na $(-\infty, 0), (0, +\infty)$
$\ldots\ f$ rostoucí na $(-\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty) \ldots$ rostoucí na $\mathbb{R}$

Věta. *Je-li $f'(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$ (f je rostoucí v bodě a).*

Důkaz:
$$0 < f'(a) = \begin{cases} \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & f(x) < f(a) \text{ vlevo} \\ \lim_{y\to a+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a}, & f(y) > f(a) \text{ vpravo} \end{cases}$$

Poznámky.
1) $f'(a) < 0 \ldots\ f$ je klesající v bodě a.
2) Pro $f'(a) = 0$ se nic netvrdí.

Definice. Funkce f má v bodě a *lokální minimum* (*lokální maximum*), jestliže $f(x) \ge f(a)$ ($f(x) \le f(a)$) na některém prstencovém okolí bodu a.

Poznámky.
1) *Lokální extrém*: lok. minimum nebo lok. maximum.
2) *Ostrý* lokální extrém: ostrá nerovnost.

Věta. *Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$ (a je* stacionární bod *f).*

Důkaz: $f'(a) > 0 \ldots\ f$ rostoucí v $a \ldots$ není lokální extrém
$f'(a) < 0 \ldots\ f$ klesající v $a \ldots$ není lokální extrém

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, existuje všude, nulová v ± 1
$f(-1) = 3 \ldots$ ostré lokální maximum
$f(1) = -1 \ldots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = |x|$
$f'(x) = \operatorname{sign} x$ pro $x \ne 0$, $f'(0)$ neexistuje
$f(0) = 0$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$ existuje všude, nulová v 0
$f(0) = 0$ není lokální extrém

Věta. *Nechť $f'(a) = 0$.*
1) *Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lokální minimum.*
2) *Je-li $f''(a) < 0$, pak f má v a ostré lokální maximum.*

Důkaz: 1) $f''(a) > 0 \ldots\ f'$ rostoucí v $a \ldots\ f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$ pro $x < a < y$ v některém okolí $\ldots\ f$ klesající vlevo, rostoucí vpravo $\ldots$ v a ostré lok. minimum
2) podobně nebo přechodem k $-f$

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $x_{1,2} = \pm 1$, $f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0 \ldots$ ostré lokální maximum
$f''(1) = 6 > 0 \ldots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$, $x_{1,2} = 0$, $f''(x) = 6x$
$f''(0) = 0 \ldots$ kritérium nerozhodne, není l. e.

Příklad. $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$, $x_{1,2,3} = 0$, $f(0) = 0$ ostré lok. minimum
$f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0 \ldots$ kritérium nerozhodne, je l. e.
$f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$

Poznámka. Pro $f'(a) = \cdots = f^{(2n-1)}(a) = 0$:
1) $f^{(2n)}(a) > 0 \ldots$ ostré lokální minimum,
2) $f^{(2n)}(a) < 0 \ldots$ ostré lokální maximum.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) buď v bodě, ve kterém má lokální maximum (minimum), nebo v některém krajním bodě intervalu.*

Důkaz: Extrém ve vnitřním bodě je lokální.

Poznámka. Porovnáváme hodnoty v bodech, kde derivace není nebo je nulová, v krajních bodech intervalu, které do něj patří. Ověříme limity v nepatřících krajních bodech.

Příklad. $f(x) = x^2 + 2x$ na $\langle -2, +\infty)$. $f'(x) = 2x + 2$,
nemá derivaci: $\emptyset$,
stacionární body: -1, $f(-1) = -1$,
patřící krajní body: -2, $f(-2) = 0$,
nepatřící krajní body: $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
$\min f = f(-1) = -1$, $\max f$ neexistuje.

Konvexita, konkavita, inflexní body

Konvexita: 1) spojnice grafu nad grafem, 2) tečna pod grafem, 3) směrnice sečen rostou.

Definice. Funkce f je *konvexní* na intervalu I, jestliže pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

(*konkávní* pro $\geq$, *ryze konv.* pro $<$, *ryze konk. pro* $>$).

Věta. *Je-li f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I druhou derivaci, pak:*
1) *Je-li $f''(x) \geq 0$ uvnitř I, pak f je konvexní.*
2) *Je-li $f''(x) \leq 0$ uvnitř I, pak f je konkávní.*

Důkaz: 1) $x < y < z$: f' je neklesající, Lagrange ... existují $c \in (x, y)$, $d \in (y, z)$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Poznámka. Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

Definice. Bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje $f'(a)$ a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.

Věta.
1) *Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, pak f má v a inflexi.*

Poznámka. $f''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$, $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$ ... inflexe v a.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$, $x_1 = 0$
$f'''(x) = 6$, $f'''(0) \neq 0$ ... 0 je inflexní bod
nebo: $f'' < 0$ pro $x < 0$, $f'' > 0$ pro $x > 0$

Asymptoty

$f(x) \sim px + q$

Definice. Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku o rovnici $x = a$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě a. *Asymptota* grafu funkce f v bodě $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$ taková, že:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - px - q\big) = 0\,.$$

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$ ... $x = 1$ je asymptota v 1
$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - \frac{1}{2}x\big) = 0$ ... $y = \frac{1}{2}x$ je asymptota v $\pm\infty$

Věta. *Graf funkce f má v $a \in \{\pm\infty\}$ asymptotu o rovnici $y = px + q$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = p\,, \quad \lim_{x\to a}\big(f(x) - px\big) = q\,.$$

Příklad. $f(x) = x \sin x$
$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\infty} \sin x$ neex. ... as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x^2$
$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$ ... as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = \ln x$
$\lim_{x\to\infty}(\ln x)/x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ (l'H)
$\lim_{x\to\infty}(\ln x - 0\cdot x) = +\infty$ ... as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x + |x| + 1 + \frac{1}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim_{x\to 1\pm} = \pm\infty$ ... asymptota $x = 1$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - 2x\big) = 1$
... asymptota $y = 2x + 1$ v $+\infty$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
... asymptota $y = 1$ v $-\infty$

Poznámky.
1) Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ pro $a \in \{\pm\infty\}$, pak asymptota v a má rovnici $y = b$.
2) Existují-li asymptota v $a \in \{\pm\infty\}$ o rovnici $y = px + q$ a $\lim_{x\to a} f'(x)$, pak $p = \lim_{x\to a} f'(x)$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2$
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ... asymptota $y = 0$ v $\pm\infty$
$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\big(-\frac{1}{x^2}\sin x^2 + 2\cos x^2\big)$ ... neex.

Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

f: definiční obor, sudost, lichost, perioda, spojitost, limity v hraničních bodech $D(f)$, v bodech nespojitosti, asymptoty.
f': monotonie, (lokální) extrémy, obor hodnot, tečny grafu v hraničních bodech $D(f)$, $D(f')$.
f'': konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen).
Graf.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3|x|$

Příklad. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

Asymptotické chování funkcí

Definice. Nechť funkce g je definována na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
1) Funkce f je třídy $O(g)$ ($f \in O(g)$, $f = O(g)$) pro $x \to a$, pokud existuje číslo M a prstencové okolí P bodu a tak, že $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$ pro každé $x \in P$.
2) Funkce f je třídy $\Theta(g)$ ($f \in \Theta(g)$, $f = \Theta(g)$) pro $x \to a$, pokud existují kladná čísla m, M a prstencové okolí P bodu a tak, že $m\,|g(x)| \leq |f(x)| \leq M\,|g(x)|$ pro každé $x \in P$.

Poznámka. Podobně pro jednostranné limity, posloupnosti.

Poznámka. $f \in \Theta(g)$ právě tehdy, když platí $f \in O(g)$ a $g \in O(f)$, tj. právě tehdy, když $g \in \Theta(f)$.

Věta. *Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
1) *Je-li* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$, *pak $f \in O(g)$ pro $x \to a$.*
2) *Je-li* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *pak $f \in \Theta(g)$ pro $x \to a$.*

Důkaz: 1) Vlastní limita ... omezenost M na prstencovém okolí P bodu a, tj. $\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| \leq M$ na P.
2) Limita abs. hodnoty b ... existuje $m \in (0, b)$, $M \in (b, +\infty)$ a prstencové okolí P bodu a tak, že $m \leq \big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| \leq M$ na P.

Příklad. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x^3)$ pro $x \to +\infty$
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 5 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x)$ pro $x \to 0$

Poznámky.
1) Stačí příslušná „omezenost“ $|f/g|$ na prstencovém okolí a ($\limsup_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$, pro Θ navíc $\liminf_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > 0$).
2) Existují různé definice Θ (jen pro kladné/nezáporné funkce, bez absolutních hodnot), shodují se pro kladné.
3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$: $f \sim g$ (asymptoticky ekvivalentní, speciální případ $f \in \Theta(g)$).
4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$: $f \in o(g)$ ($o(g) \subset O(g)$).
5) Pokud označíme $f \in o(g)$ pro $n \to \infty$ jako $f \prec g$:
$\ln n \prec n^a \ (a > 0) \prec a^n \ (a > 1) \prec n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \prec n^n$.
6) Obvykle $x \to 0(+)$ (např. chyba aproximace Taylorovým polynomem), $x \to +\infty$ (např. konvergence integrálu), $n \to \infty$ (např. konvergence řad, složitost algoritmů).

Věta. *Uvažujme $x \to a$ pro $a \in \overline{\mathbb{R}}$, g, g_1, g_2 funkce na prstencovém okolí a.*
1) *Třída $O(g)$ je uzavřena na součet a násobek.*
2) *Je-li $f_1 \in O(g_1)$ a $f_2 \in O(g_2)$, pak $f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$.*

Důkaz:
1) $f_1, f_2 \in O(g)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; pro $i \in \{1,2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \le M_i\,|g(x)|$ na P_i; $|c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)| \le |c_1|\,|f_1(x)| + |c_2|\,|f_2(x)| \le$ $\le (|c_1| M_1 + |c_2|\, M_2)\,|g(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.
2) Pro $i \in \{1,2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \le M_i\,|g_i(x)|$ na P_i; $|f_1(x)\, f_2(x)| \le$ $\le M_1 M_2\,|g_1(x)\, g_2(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.

Poznámka. Speciálně pro $f \in O(g)$, h, platí $fh \in O(gh)$.

Příklad.
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,(1 - \cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(1 - (1 - \frac{1}{2}\,x^2 + O(x^3))\right) =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\,x^2 + O(x^3)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + O(x)\right) = \frac{1}{2}$.

Neurčitý integrál

Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I, jestliže $F' = f$ na I.

Poznámky.
1) V krajních bodech jednostranné derivace.
2) Lze zobecnit: na sjednocení intervalů; $F' = f$ až na konečnou (či jinou) množinu.
3) Ne všechny funkce mají primitivní.

Tvrzení (vlastnost mezihodnoty pro derivaci)**.** *Nechť f je derivací F na intervalu I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$. Pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = d$.*

Důkaz: $G(x) = F(x) - dx$ má vlastní derivaci ... je spojitá ... nabývá minima v c ... $G'_{(\pm)}(a) < 0 < G'_{(\pm)}(b)$, tj. c mezi a, b ... $G'(c) = 0$ ... $f(c) = d$.

Příklad. $\operatorname{sign} x$ není derivací žádné funkce.

Věta. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

Poznámka. Primitivní funkce k e^{-x^2} existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta.
1) *Je-li F primitivní funkce k f na I, $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je primitivní funkce k f na I.*
2) *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na I, pak $F_1 - F_2$ je konstantní na I.*

Důkaz:
1) $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$
2) $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ ... $F_1 - F_2$ konst. na I

Příklad. Na disjunktních intervalech mohou být konstanty různé, např. pro $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \ne 0$:

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1\,, & x < 0\,, \\ \ \ x + c_2\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* f na I (pokud je neprázdná).

$$\int f = \int f(x)\ \mathrm{d}x = \{F + c\colon\ c \in \mathbb{R}\} = F + c\,.$$

Tabulkové integrály:

$$\int x^a\ \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, \qquad \text{intervaly } D(x^a)\ (a \ne -1)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c\,, \qquad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$$
$$\int \mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \ne 0)$$
$$\int \sin ax\ \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{a}\cos ax + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \ne 0)$$
$$\int \cos ax\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\sin ax + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \ne 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Příklady.
1) $\int x^6\ \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,x^7 + c$, $x \in \mathbb{R}$.
2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{-1}{2x^2} + c$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$.
3) $\int \sqrt[4]{x}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\,x\,\sqrt[4]{x} + c$, $x \in \langle 0, +\infty)$.
4) $\int \sqrt[5]{x}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\,x\,\sqrt[5]{x} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta (linearita)**.** *Jsou-li $F_1, \dots, F_n$ primitivní funkce k $f_1, \dots, f_n$ na I, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1 F_1 + \dots + c_n F_n$ je primitivní funkce k $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ na I.*

Důkaz:
$(c_1 F_1 + \dots + c_n F_n)' = c_1 F_1' + \dots + c_n F_n' = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$

Příklad.
$\int \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{1}{2}\,x^2 + 6x + 9\ln|x| + c$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$

Věta (integrace per partes)**.** *Nechť na intervalu I existují u', v', $\int u'v$. Pak*

$$\int uv' = uv - \int u'v \ \text{ na } I\,.$$

Důkaz: $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$.

Příklad. $\int (x+1)\sin x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x+1 & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -(x+1)\cos x - \int -\cos x \, \mathrm{d}x = -(x+1)\cos x + \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $\int x^2 \,\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + c$, $x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$ (P polynom, $a \neq 0$).

Příklad. $I = \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \sin x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \cos x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = \sin x \end{vmatrix} =$
$= -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I$
$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c$, $x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$, $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ ($a, b \neq 0$).

Příklad. $\int \frac{1}{x}\ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$

Příklad. $\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} =$
$= x\ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c$, $x \in (0, \infty)$

Poznámka. Podobně $x^a \ln x$ ($a \neq -1$).

Věta (substituce). *Nechť* $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' *existuje na* (α, β), $F(x)$ *je primitivní funkce k* $f(x)$ *na* (a, b).
1)
$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) + c \text{ na } (\alpha, \beta).$$
2) *Je-li* $\varphi\colon (\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{na}} (a, b)$ *prostá a* G *je primitivní funkce k* $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ *na* (α, β), *pak*
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c \text{ na } (a, b).$$

Důkaz: 1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\varphi(t)\big) = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$.
2) $G(t)$ i $F\big(\varphi(t)\big)$ jsou primitivní k $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) \dots G(t) = F\big(\varphi(t)\big) + c_0$; existuje $\varphi_{-1}(x) \dots G\big(\varphi_{-1}(x)\big) = F(x) + c_0$ je primitivní k f.

Používáme (v obou směrech) zápis:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklady.
1) $\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} -x^2 = t \\ x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \dots = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + c$, $x \in \mathbb{R}$
2) $\int \frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$
3) $\int \frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$
4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c$, $x \in (-1, 1)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Poznámky.
1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} ax + b = t \\ a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + c$ ($a \neq 0$).
2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} f(x) = t \\ f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \ln|f(x)| + c$.

Příklady.
1) $\int (x+1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,(x+1)^5 + c$, $x \in \mathbb{R}$
2) $\int \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3(3x-1)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$, $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$
3) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + c$, $x \in \mathbb{R}$
5) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, $x \in \mathbb{R}$

Integrace racionálních funkcí

Rozklad racionální funkce

Definice. *Racionální* (lomená) funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q je nenulový. *Ryze lomená* funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ ($\operatorname{st} 0 = -1$). *Parciální zlomky* jsou funkce ve tvaru
$$\frac{A}{(x-a)^n}\,,\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,,\qquad A, B, a, p, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$
kde $(x^2 + px + q)$ nemá reálný kořen, tj. $p^2 - 4q < 0$.

Poznámka. V $\mathbb{C}$ jen první typ parciálních zlomků.

Věta. *Nenulový polynom lze (jednoznačně) napsat ve tvaru*
$$a(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$
kde $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}$,
$a, a_1, \dots, a_r, p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{R}$,
$a_1, \dots, a_r$ *jsou různé reálné kořeny,*
$x^2 + p_ix + q_i$ ($i = 1, \dots, s$) *jsou různé a nemají reálné kořeny.*

Věta. *Racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a parciálních zlomků. Jmenovatelé těchto zlomků dělí jmenovatel dané racionální funkce.*

Důkaz: (částečný) Dělením polynomů dostaneme součet polynomu a ryze lomené funkce $P_1 + L_1$. Pro jiný zápis $P_2 + L_2$ je $P_1 - P_2 = L_2 - L_1$ polynom i ryze lomená funkce, tj. nulová funkce a tedy $P_2 = P_1$, $L_2 = L_1$. Pro nenulovou ryze lomenou funkci P/Q a k-násobný kořen a polynomu Q ($k > 0$) je $Q(x) = (x-a)^k Q_2(x)$ pro některý polynom Q_2 s $Q_2(a) \neq 0$.
$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q_2(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q_2(a)}\,Q_2(x)}{(x-a)^k Q_2(x)}\,.$$
Čitatel má za kořen a, je tedy roven $(x-a)P_2(x)$ (P_2 nulový pro nulový čitatel),
$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q_2(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-1}Q_2(x)}\,.$$
Snížili jsme stupeň jmenovatele, pokračujeme dokud je a kořen jmenovatele a pak pro další kořeny. V $\mathbb{C}$ nebo v $\mathbb{R}$ bez imaginárních kořenů Q tak dostaneme rozklad.

Postup:
1) Dělení (polynom + ryze lomená funkce).
2) Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů a ireducibilních kvadratických polynomů.
3) Rozpis na parciální zlomky s „neurčitými koeficienty“.
4) Určení koeficientů.

Příklad. $\frac{2x^2+x-24}{x^2-2x-8} = 2+\frac{5x-8}{(x-4)(x+2)} = 2+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$. Určení koeficientů: porovnání po přenásobení jmenovatelem:

$$5x-8 = A(x+2)+B(x-4)$$

A) Stejné koeficienty, řešení (regulární) soustavy lin. rovnic:

$$\begin{array}{lll} x^1: & 5 = A + B & A=2 \\ x^0: & -8 = 2A-2B & B=3 \end{array}$$

B) Dosazení kořenů (lineární rovnice s 1 proměnnou):

$$\begin{array}{lll} x=4: & 12 = 6A & A=2 \\ x=-2: & -18 = -6B & B=3 \end{array}$$

B') *Zakrývací pravidlo*:

$$A = \frac{5x-8}{(x+2)}\bigg|_{x=4} = 2\,, \qquad B = \frac{5x-8}{(x-4)}\bigg|_{x=-2} = 3$$

Příklad. $\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$.
Zakrývacím pravidlem $A=1$, $C=1$. Porovnáme

$$-2x+5 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

A) Jen potřebné rovnice, dosadíme už určené koef., např.

$$x^2: \quad 0 = B+C = B+1 \qquad B=-1$$

B) Dosadíme do derivace

$$-2 = A + B(x+2)+B(x-1)+C\cdot 2(x-1)$$

vícenásobné kořeny

$$x=1: \quad -2 = A+3B = 1+3B \qquad B=-1$$

C) Odečteme parciální zlomek pro vícenásobný kořen, zakrývací pravidlo pro zjištění koeficientu u nižší mocniny

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-3x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$$

Integrace parciálních zlomků

1) Mocnina lineárního polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \left|\begin{array}{r} x-a=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2) Mocnina kvadratického polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

2a) V čitateli derivace kvadratického polynomu:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2b) V čitateli konstanta: převedeme na $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = I_n$.
Pro $n>1$ upravíme

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = I_{n-1} + \int \frac{-t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u=t & v' = \frac{-t}{(t^2+1)^n} \\ u'=1 & v = \frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \end{array}\right| =$$

$$= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\,I_{n-1}\,,$$

dostaneme rekurentní vzorec:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}\,, \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,,$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} t + c\,.$$

Příklad. $\int \frac{5}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4} = \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1} = \left|\,\frac{x-1}{2}=t\,\right| = \frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

Příklad. $\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\left((x-3)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = $
$= \left|\,x-3=t\,\right| = 2I_2 = \frac{t}{t^2+1} + I_1 = \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + c = $
$= \frac{x-3}{x^2-6x+10} + \operatorname{arctg}(x-3)+c$, $x\in\mathbb{R}$.

Integrace dalších typů funkcí

1)
$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \mathrm{e}^{ax}=t \\ x = \frac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int R(t)\,\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$$

$$x\in\mathbb{R} \leftrightarrow t\in(0,+\infty) \quad (a\neq 0)$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}+3}{\mathrm{e}^{4x}-1}\,\mathrm{d}x = \left|\,\mathrm{e}^{2x}=t\,\right| = \int \frac{t^2+2t+3}{2t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$,
$\int \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}+3}{\mathrm{e}^{4x}-1}\,\mathrm{d}x = \left|\,\mathrm{e}^{x}=t\,\right| = \int \frac{t^4+2t^2+3}{t(t^4-1)}\,\mathrm{d}t$.

2)
$$\int \frac{R(\ln ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \ln ax = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int R(t)\,\mathrm{d}t \quad (a>0)$$

Příklad. $\int \frac{2}{x(\ln^2 x+4)}\,\mathrm{d}x = \left|\,\ln x = t\,\right| = \int \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$.

3)
$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

$$x\in(-\pi,\pi) \leftrightarrow t\in\mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Někdy nutno spojovat přes sousední intervaly.

Příklad. $\int \frac{2}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t^2+1} = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + c + k\pi$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$), limity v $\pi+2k\pi$.

3a) „sudé mocniny“ ($R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x)$):

$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \operatorname{tg} x = y \\ x = \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

$$x\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \leftrightarrow t\in\mathbb{R}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t}{t^2+1}$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \left|\,\sin x = t\,\right| = \int (t^2+1)\,\mathrm{d}t$.

3b) „lichá“ v sin nebo v cos:

$$\int R(\sin^2 x,\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin^2 x = 1-t^2 \end{array}\right|$$

$$\int R(\sin x,\cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \cos^2 x = 1-t^2 \end{array}\right|$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x} = \left| \sin x = t \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^3}$.

3c) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, \mathrm{d}x$: pro liché m či n viz 3b); pro sudá m, n přechod k dvojnásobnému argumentu

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,, \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,.$$

Příklad. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \left| \cos x = t \right| = \int (t^6 - t^4) \, \mathrm{d}t$.

Příklad. $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x \right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \right) \mathrm{d}x$.

4) $n > 1$, $ad - bc \neq 0$:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}} &= t \\ x &= R_{\mathrm{s}}(t) \\ \mathrm{d}x &= R_{\mathrm{s}}'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right|$$

5) Odmocnina z kvadratická funkce: vytknutím koef. u x^2, doplněním na čtverec a lineární substitucí upravíme na integrál ve tvaru $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2})$, $a > 0$. Lze použít různé substituce: goniometrické, hyperbolické, Eulerovy.

5a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in (-a, a)$, například

- $x = a \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$;
- upravíme $\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{(a - x)/(a + x)}$ a použijeme substituci pro typ 4 (Eulerova).

Příklad. $\int \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x = \left| x = 2 \sin t \right| = \int 4 \cos^2 t \, \mathrm{d}t = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + c$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

5b) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$, například

- $x = a \sinh t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t$;
- $\sqrt{x^2 + a^2} + x = t$ (Eulerova).

Příklad.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \left| x + 1 = 2 \sinh t \right| = \int \mathrm{d}t$.

5c) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, -a)$, $x \in (a, +\infty)$, například

- $x = a \cosh t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a |\sinh t|$;
- $\sqrt{x^2 - a^2} + x = t$ (Eulerova).

Určitý integrál

Definice. *Dělení intervalu* $\langle a, b \rangle$ je konečná množina $D \subset \langle a, b \rangle$ obsahující a, b.

Značíme $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definice. Pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ a dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ zavádíme *dolní* a *horní integrální součet*:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Přidáme-li k dělení další bod, dolní součet se nezmenší a horní se nezvětší. Pro libovolná dělení D_1, D_2 dostaneme:

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_2)\,.$$

Každý dolní součet je menší nebo roven každému hornímu součtu, supremum dolních integrálních součtů je menší nebo rovno infimu horních integrálních součtů.

Definice. Je-li pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu *určitý* (*Riemannův*) *integrál* funkce f na $\langle a, b \rangle$. Čísla a, b se nazývají *dolní* a *horní* mez integrálu.

Značení: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, (R)–$\int_a^b f$, (R)–$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Poznámka. Obecnější limita pro $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$:

$$\lim_{\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_i f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\,.$$

Věta. *Pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ existuje $\int_a^b f$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení $\langle a, b \rangle$ taková, že* $\lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \to \infty} \bar{S}(f, D_n)\,.$
V takovém případě je integrál roven těmto limitám.

Důkaz: $\Rightarrow$: existují $(D_n')_{n=1}^{\infty}$, $(D_n'')_{n=1}^{\infty}$:
$\underline{S}(f, D_n') \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f$, $\bar{S}(f, D_n'') \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f$,
$\underline{S}(f, D_n') \leq \underline{S}(f, D_n' \cup D_n'') \leq \bar{S}(f, D_n' \cup D_n'') \leq \bar{S}(f, D_n'')$,
$(D_n' \cup D_n'')_{n=1}^{\infty}$ je hledaná posloupnost dělení.
$\Leftarrow$: $\sup_D \underline{S}(f, D) \geq \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \to \infty} \bar{S}(f, D_n) \geq \inf_D \bar{S}(f, D) \geq \sup_D \underline{S}(f, D)$,
… všude rovnosti.

Poznámka. Pro existenci integrálu ve výše uvedené větě stačí $\lim_{n \to \infty} \big(\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \big) = 0$:
$0 \leq \inf_D \bar{S}(f, D) - \sup_D \underline{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)$.

Příklad. $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$
$\underline{S}(c, D_n) = \bar{S}(c, D_n) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$.

Příklad. $\int_0^2 \operatorname{sign} x \, \mathrm{d}x = 2$:
$D_n = \{0, \frac{1}{n}, 2\}$, $\underline{S}(f, D_n) = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 2$, $\bar{S}(f, D_n) = 2$.

Poznámka. Hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech.

Poznámka. *Lebesgueův* integrál – dělení v oboru hodnot:

$$\sum_I d_I \cdot \lambda\big(f^{-1}(I)\big)\,, \quad d_I \in I\,.$$

Nezávisí na hodnotách funkce ve spočetně mnoha bodech.

Příklad. $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, jinak 0.
(R)–$\int_0^1 d(x) \, \mathrm{d}x$ neex.: $\underline{S}(f, D) = 0$, $\bar{S}(f, D) = 1$.
(L)–$\int_0^1 d(x) \, \mathrm{d}x =$ (L)–$\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0$, nebo
$0 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}) = 0$
(Lebesgueova míra spočetných mn. je nulová, tj. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

Věta. *Monotonní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.*

Důkaz: $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ (ekvidistantní na n částí), $\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \big|f(b) - f(a)\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Tvrzení. *Z každého pokrytí uzavřeného intervalu otevřenými lze vybrat konečné pokrytí.*

Důkaz: Sporem. Střed intervalu je pokryt některým otevřeným intervalem, zůstanou nejvýše 2 nepokryté uzavřené intervaly, alespoň jeden se nedá pokrýt konečně mnoha danými intervaly, ten vezmeme a postup opakujeme. Dostaneme posloupnost $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ vnořených uzavřených intervalů, jejichž délky klesají k nule. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, c je pokryto některým otevřeným intervalem, který ale pokrývá všechny dostatečně krátké I_n – spor.

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in I$ taková, že $|y - z| < \delta$* (stejnoměrná spojitost).

Důkaz: $\varepsilon > 0$; pro $x \in I$ ex. $\delta_x > 0$:
$|f(u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $u \in U(x, \delta_x) \cap I$; $u \in \{y, z\}$
$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in U(x, \delta_x) \cap I$;
$\{U(x, \delta_x) : x \in I\}$ je pokrytí I, vezmeme konečné;
označme δ nejmenší vzdálenost (různých) krajních bodů;
pro $y, z \in I$, $0 < z - y < \delta$ je v $\langle y, z\rangle$ nejvýše 1 krajní bod;
pokud 0, pak y je pokryto $U(x, \delta_x) \ni z$;
pokud 1, pak je pokryt $U(x, \delta_x) \ni y, z$.

Příklad. Funkce $\frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, +\infty)$.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.*

Důkaz: f na $\langle a, b\rangle$;
pro $\frac{1}{n}$ ex. δ_n: $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$ pro $|y - z| < \delta_n$, $y, z \in \langle a, b\rangle$;
ex. D_n s intervaly kratšími než δ_n;
$0 \le \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) < \frac{1}{n}(b - a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Věta. *Nechť funkce f, g jsou omezené na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ existují, $c \in \mathbb{R}$. Pak:*
1) $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.
2) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
3) Je-li $f \le g$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.
4) $\big|\int_a^b f\big| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz:
1) $c \ge 0$:
$\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c\underline{S}(f, D) = c \sup \underline{S}(f, D) = c\int_a^b f$,
$\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c\bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, d) = c\int_a^b f$;
$c < 0$:
$\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c\bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, D) = c\int_a^b f$,
$\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c\underline{S}(f, D) = c \sup \bar{S}(f, d) = c\int_a^b f$.
2) sup/inf int. součtů f, g jsou limity pro společ. $(D_n)_{n=1}^{\infty}$;
$\inf f(I) + \inf g(I) \le (f + g)(x)$, pro $x \in I$,
$\inf f(I) + \inf g(I) \le \inf(f + g)(I)$,
$\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n) \le \underline{S}(f + g, D_n) \le \bar{S}(f + g, D_n) \le$
$\le \bar{S}(f, D_n) + \bar{S}(g, D_n)$ (podobně), limita pro $n \to \infty$.
3) $\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(g, D)$, $\sup \underline{S}(f, D) \le \sup \underline{S}(g, D)$.
4) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$,
ex. $(D_n)_{n=1}^{\infty}$: $\underline{S}(f, D_n), \bar{S}(f, D_n) \to \int_a^b f$,
$0 \le \bar{S}(f_+, D_n) - \underline{S}(f_+, D_n) \le \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
$\int_a^b f_+$ ex., $\int_a^b f_- = \int_a^b (f_+ - f)$ ex., $\int_a^b |f| = \int_a^b (f_+ + f_-)$ ex.,
$-|f| \le f \le |f| \dots -\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$

Příklad. $\int_0^1 \big(d(x) - \frac{1}{2}\big)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, $\int_0^1 \big|d(x) - \frac{1}{2}\big|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Poznámka. Omezené integrovatelné funkce na $\langle a, b\rangle$ tvoří lineární prostor, zobrazení $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f$ je lineární.

Věta. *Nechť $a < b < c$ a funkce f je omezená na $\langle a, c\rangle$. Pak $\int_a^c f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. V takovém případě $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Důkaz: D' dělení $\langle a, b\rangle$, D'' dělení $\langle b, c\rangle$,
$D = D' \cup D''$ je dělení $\langle a, c\rangle$ obsahující b,
$\underline{S}(f, D') + \underline{S}(f, D'') = \underline{S}(f, D)$,
$\bar{S}(f, D') + \bar{S}(f, D'') = \bar{S}(f, D)$,
přechodem k supremu a infimu:
$$\begin{array}{ccccc} \sup\limits_{D'} \underline{S}(f, D') & + & \sup\limits_{D''} \underline{S}(f, D'') & = & \sup\limits_{D} \underline{S}(f, D)\,, \\ \le & & \le & & \le \\ \inf\limits_{D'} \bar{S}(f, D') & + & \inf\limits_{D''} \bar{S}(f, D'') & = & \inf\limits_{D} \bar{S}(f, D)\,, \end{array}$$
stejné sčítance pod sebou právě tehdy, když stejné součty.

Definice. Definujeme $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$ pro $a < b$.

Poznámka. Rovnost v předešlé větě pro libovolná a, b, c.

Poznámka. Po částech spojité funkce (konečně mnoho bodů nespojitosti s konečnými jednostrannými limitami) i po částech monotonní funkce jsou integrovatelné.

Věta. *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pak*
1) F je spojitá.
2) $F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti funkce f.

Důkaz: F je definována (aditivita na definičním oboru)
$F(x+h) - F(x) = \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$,
1) $|f| \le M$ na $\langle a, b\rangle$,
$|F(x+h) - F(x)| = \big|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\big| \le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le$
$\le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} M\,\mathrm{d}t = M \cdot |h| \xrightarrow{h\to 0(\pm)} 0$.
2) $\big|\frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) - f(x)\big| =$
$= \big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t\big| =$
$= \big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\big| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \le$
(f spoj. v x: pro $\varepsilon > 0$ je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ na okolí x)
$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon$.

Důsledek. *Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz: $a \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (případně $+F(a)$).

Poznámka. Derivace integrálu podle horní meze (pro f spojitou): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Poznámka. Po částech spojitá f: jednostranné derivace F jsou rovny příslušným jednostranným limitám f.

Příklad. $f(x) = \operatorname{sign} x$:
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\,, & x \ge 0 \\ \int_0^x -1\,\mathrm{d}t = -x\,, & x \le 0 \end{array}\right\} = |x|\,,$$
$F'_-(0) = -1 = f(0-)$, $F'_+(0) = 1 = f(0+)$.

Věta (Newtonova–Leibnizova formule)**.** *Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak*
$$\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+)\,.$$
Důkaz: $|f|\le M$ na $\langle a,b\rangle$, $a_n = a+\frac{1}{n}\in\langle a,b\rangle$ pro $n\ge n_0$,
pro $x\in(a,a_n)$ (Lagrange):
$|F(x)-F(a_n)| = |f(c_{x,n})\cdot(x-a_n)| \le \frac{M}{n}$,
$F\big((a,a_n)\big)\subset\langle F(a_n)-\frac{M}{n}, F(a_n)+\frac{M}{n}\rangle = I_n$,
$(I_n)_{n=n_0}^\infty$ uzavřené vnořené intervaly délek $\frac{2M}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$,
$\bigcap_{n=n_0}^\infty I_n = \{F(a+)\}$, $F(a+)$ existuje (podobně $F(b-)$);
$D=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$,
$F(b-)-F(a+) = \sum_{i=1}^n\big(F(x_i)-F(x_{i-1})\big) =$ (Lagrange)
$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i-x_{i-1})$
$$\underline{S}(f,D)\le F(b-)-F(a+)\le \bar{S}(f,D)$$
$$\sup_D \underline{S}(f,D)\le F(b-)-F(a+)\le \inf_D \bar{S}(f,D)$$

Příklady.
1) $\int_0^1 x\;\mathrm{d}x = \big[\frac12 x^2\big]_0^1 = \frac12 - 0 = \frac12$.
2) $\int_0^\pi x\sin x\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u=x & v'=\sin x\\ u'=1 & v=-\cos x\end{matrix}\right| =$
$= \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\;\mathrm{d}x = \pi-0+\big[\sin x\big]_0^\pi = \pi+(0-0) = \pi$.
3) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x^2+1=t\\ x\,\mathrm{d}x=\frac12\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int_1^2\sqrt{t}\;\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{8}-1}{3}$.
4) $\int_0^\pi \sin x\cos x\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int_0^0 t\;\mathrm{d}t = 0$.

Poznámka. *Newtonův int.*: (N)–$\int_a^b f(x) = F(b-)-F(a+)$. Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál, jsou stejné.

Příklady.
1) $r(x)=\frac1b$ pro $x=\frac ab$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ nesoudělná, jinak 0,
(N)–$\int_{-1}^1 r(x)\;\mathrm{d}x$ neex., (R)–$\int_{-1}^1 r(x)\;\mathrm{d}x = 0$.
2) (N)–$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}x$ ex., (R)–$\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}x$ ex., F nelze „dobře“ vyjádřit.
3) (N)–$\int_0^1 x^{-1/2}\;\mathrm{d}x = 2$, (R)–$\int_0^1 x^{-1/2}\;\mathrm{d}x$ neex.
4) (N)–$\int_1^\infty x^{-2}\;\mathrm{d}x = 1$, (R)–$\int_1^\infty x^{-2}\;\mathrm{d}x$ neex.

Nevlastní integrál

I neomezené funkce či intervaly, nevlastní hodnoty.

Definice. Nechť $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\bar{\mathbb{R}}$) není omezená nebo (a,b) není omezený, $\int_c^d f$ existuje pro každý $\langle c,d\rangle\subset\subset(a,b)$. Definujeme *nevlastní integrál*:
$$\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)\;\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)\;\mathrm{d}x\,,$$
pokud je výraz vpravo definován pro některé $e\in(a,b)$. Je-li konečný, řekneme, že integrál *konverguje*.

Poznámka. Výběr e není podstatný, pro e' je:
$\lim_{c\to a+}\int_c^{e'} f = \lim_{c\to a+}\int_c^e f + \int_e^{e'} f$,
$\lim_{d\to b-}\int_{e'}^d f = \lim_{d\to b-}\int_e^d f - \int_e^{e'} f$.

Příklady.
1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^\infty = \frac\pi2 - (-\frac\pi2) = \pi$, konverguje.
2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty$, existuje, nekonverguje.
3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\;\mathrm{d}x = \frac12\big[\ln(x^2+1)\big]_{-\infty}^\infty = \infty-\infty$, neexistuje.
4) $\int_0^{+\infty}\sin x\;\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{+\infty} = |\text{neex.} - (-1)|$ neex.

Příklady.
1) $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u=x & v'=\mathrm{e}^{-x}\\ u'=1 & v=-\mathrm{e}^{-x}\end{matrix}\right| = \cdots =$
$= \big[\mathrm{e}^{-x}(-x-1)\big]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{\mathrm{e}^x} - (-1) = 0+1 = 1$.
2) $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} -x^{-1}=t\\ x^{-2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^t\;\mathrm{d}t =$
$= \big[\mathrm{e}^t\big]_{-1}^0 = 1-\frac1{\mathrm{e}}$.
3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int_1^{+\infty}\big(\frac1x - \frac1{x+1}\big)\;\mathrm{d}x = \big[\ln\frac{x}{x+1}\big]_0^{+\infty} = \ln 2$,
nelze $\int_1^{+\infty}\frac1x\;\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac1{x+1}\;\mathrm{d}x = \infty-\infty$.

Poznámka. Linearita, monotonie, odhad absolutní hodnoty integrálu integrálem z absolutní hodnoty platí i pokud připustíme nevlastní integrály (pokud existují příslušné násobky či součty pro případné nevlastní hodnoty).

Poznámka. Definice integrálu by šla vylepšit v případě potřeby jako součet integrálů přes vhodné podintervaly. Například $\int_{-1}^1 x^{-2/3}\;\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^{-2/3}\;\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-2/3}\;\mathrm{d}x = 6$.

Poznámka. Alternativní rozšíření o nevlastní integrály: Pro $(a,b) = \bigcup_{n=1}^\infty\langle a_n,b_n\rangle$ skoro disjunktní takové, že $\int_{a_n}^{b_n} f$ existují, existují $\int_{a_n}^{b_n} f_\pm$ a $I_\pm = \sum_{n=1}^\infty\int_{a_n}^{b_n} f_\pm$. Pokládáme $\int_a^b f = I_+ - I_-$, pokud je rozdíl definován. Pokud tento integrál konverguje, pak i $\int_a^b |f| = I_+ + I_-$ konverguje (absolutní konverence integrálu). Newtonův integrál ani zavedený nevlastní integrál nejsou absolutně konvergentní.

Příklad. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\;\mathrm{d}x$ konverguje, $\int_0^{+\infty}\big|\frac{\sin x}{x}\big|\;\mathrm{d}x = +\infty$.

Věta. 1) *Jestliže $|f|\le g$ na (a,b), $\int_a^b g$ konverguje a f je po částech spojitá, pak $\int_a^b f$ konverguje.*
2) *Jestliže $f\le g$ na (a,b), $\int_a^b f = +\infty$ a g je po částech spojitá, pak $\int_a^b g = +\infty$.*

$$\int_0^1 x^a\;\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty\,, & a=-1\\ \Big[\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big]_0^1 = \begin{cases}\frac1{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty\,, & a<-1\\ \frac1{a+1} - 0 = \frac1{a+1}\,, & a>-1\end{cases}\end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a\;\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty\,, & a=-1\\ \Big[\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big]_1^\infty = \begin{cases}\infty - \frac1{a+1} = \infty\,, & a>-1\\ 0-\frac1{a+1} = \frac{-1}{a+1}\,, & a<-1\end{cases}\end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť P,Q jsou nenulové polynomy, Q nemá v $\langle a,+\infty)$ kořeny. Pak $\int_a^{+\infty}\frac PQ$ konverguje právě tehdy, když* $\operatorname{st} Q\ge\operatorname{st} P+2$.
Důkaz: $n = \operatorname{st} P - \operatorname{st} Q\in\mathbb{Z}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} = A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, např. $A>0$
existuje $b>a,0$ tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)\,x^n}\in\big(\frac12 A,\frac32 A\big)$ pro $x>b$
$\frac12 Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \frac32 Ax^n$ ($\frac PQ\in\Theta(x^n)$ pro $x\to+\infty$)
$\int_b^\infty\frac32 Ax^n$ konv. pro $n<-1$, $\int_b^\infty\frac12 Ax^n = \infty$ pro $n\ge-1$
$\int_b^\infty\frac PQ$ a $\int_a^\infty\frac PQ$ konv. právě pro $n<-1$, tj. $n\le-2$

Příklady. $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ konv., $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Tvrzení. *Nechť P, Q jsou nenulové polynomy, $c \in \langle a, b\rangle$ je jediný kořen polynomu Q v $\langle a, b\rangle$ násobnosti n, není kořen polynomu P. Pak $\int_a^b \frac{P}{Q} \in \{\pm\infty\}$ pro n sudé nebo $c \in \{a, b\}$, jinak neexistuje.*

Důkaz: $\frac{P}{Q} \in \Theta\big(\frac{1}{(x-c)^n}\big)$ pro $x \to c$.

Příklady. $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ neex., $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Příklad (Laplaceova transformace). Nechť funkce $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá a má omezený exponenciální růst, tj. existují konstanty $M, a \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \le M\,\mathrm{e}^{at}$ ($f = O(\mathrm{e}^{at})$). *Laplaceovým obrazem* funkce f je funkce F daná předpisem

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Je definována pro $p > a$ ($\mathrm{Re}\,p > a$ v $\mathbb{C}$):
$|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| \le M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}$,
$\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\,\mathrm{d}t = \big[\frac{M}{a-p}\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\big]_0^\infty = 0 - \frac{M}{a-p}$ konverguje.

Příklad.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Konverguje pro $x > 0$:
$|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^{x-1}$, $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $x > 0$;
pro $n \ge x - 1$ je $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^n\,\mathrm{e}^{-t}$, $\int_1^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$ = (per partes) $= [P_n(t)\,\mathrm{e}^{-t}]_1^\infty = 0 - P_n(1)\,\mathrm{e}^{-1}$ konverguje.
$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$.
$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t^x & v' = e^{-t} \\ u' = xt^{x-1} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} =$
$= \big[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\,\Gamma(x)$.
$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

Aplikace určitého integrálu

Definice. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrál konverguje.

Příklad. Střídavé napětí $u(t) = U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$ má na odporu R okamžitý výkon $p(t) = \frac{1}{R}\,u^2(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2\frac{2\pi t}{T}$. Jeho střední hodnota (například na intervalu $\langle 0, T\rangle$) je $\frac{U_0^2}{2R}$ což pro stejnosměrný proud odpovídá napětí $U_\mathrm{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,U_0$ (*efektivní napětí střídavého proudu*).

Věta (o střední hodnotě). *Spojitá spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.*

Důkaz: f na $\langle a, b\rangle$ má primitivní F, podle Lagrangeovy věty je $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$ pro některé $c \in (a, b)$.

Poznámka. Aritmetický průměr $\big(f(i)\big)_{i=1}^n$ je střední hodnota f, pokud použijeme Lebesgueův integrál vzhledem k součtu Diracových měr $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ($\delta_i(M) = 1$ pro $i \in M$, jinak 0): $\big(\int_1^n f\,\mathrm{d}\mu\big)/\big(\int_1^n 1\,\mathrm{d}\mu\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i)$.

Věta. *Nechť funkce $f \le g$ jsou po částech spojité na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Obsah $\{[x, y]\colon\ a < x < b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ je*

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$:
ex. $(D_{f,n})_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(f, D_{f,n}), \bar{S}(f, D_{f,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_c^d f$,
ex. $(D_{g,n})_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(g, D_{g,n}), \bar{S}(g, D_{g,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_c^d g$,
pro $D_n = D_{f,n} \cup D_{g,n}$:

$$\underline{S}(g, D_n) - \bar{S}(f, D_n) \le P \le \bar{S}(g, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\,,$$
$$\textstyle\int_c^d (g - f) \le P \le \int_c^d (g - f)\,;$$

limity $c \to a+$, $d \to b-$.

Příklad. Obsah plochy uvnitř elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ je $4\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \pi ab$.

Příklad. Obsah plochy mezi grafy $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x+1}$ na $(1, \infty)$ je $\ln 2$.

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b). Délka grafu funkce f je*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity):
délka = supremum délek po částech lineárních interpolací,
$l(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$, $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$,
$\underline{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D) \le l(D) \le \bar{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D)$,
integrál i supremum délek interpolací jako limity

Příklad. Délka astroidy $(x/r)^{2/3} + (y/r)^{2/3} = 1$ je $4\int_0^r \sqrt{1 + [((r^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})']^2}\,\mathrm{d}x = 6r$.

Věta. *Nechť funkce f je po částech spojitá na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Objem $\{[x, y, z]\colon\ a < b < a,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$ je*

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity): pro dělení D uvažujeme vepsané/opsané válce:

$$\underline{S}(\pi f^2, D) \le V \le \bar{S}(\pi f^2, D)$$
$$\textstyle\pi\int_a^b f^2 \le V \le \pi\int_a^b f^2$$

Příklad. Objem kužele ($f(x) = \frac{r}{v}\,x$ na $\langle 0, v\rangle$) je $\pi\int_0^v r^2x^2/v^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v$.

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b). Obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem osy x je*

$$2\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (náznak pro uzavřený interval):
supremum pro po částech lineární interpolace f,
obsah pláště komolého kužele: $2\pi\,\frac{r_1 + r_2}{2}\,s$,
$\sum_{i=1}^n 2\pi\,f(c_i)\,\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
$\sum_{i=1}^n 2\pi\,f(c_i)\,\sqrt{1 + [f'(c_i')]^2}\,(x_i - x_{i-1}) \sim$
$\sim S(2\pi f\sqrt{1 + (f')^2}, D) \to 2\pi\int_a^b f\sqrt{1 + (f')^2}$

Příklad. Obsah sféry ($f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle -r, r\rangle$) je $2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-1/2}(-2x)\right]^2}\, \mathrm{d}x = 4\pi r^2$.

Souřadnice těžiště v rovině:

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{M_y}{m}, \qquad y_{\mathrm{T}} = \frac{M_x}{m}.$$

Momenty lineárních útvarů (λ je lineární hustota):

$$M_y = \lambda \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Příklad. Těžiště čtvrtkružnice ($f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle 0, r\rangle$) má souřadnice $x_{\mathrm{T}} = y_{\mathrm{T}} = \frac{2}{\pi} r$.

Momenty plošných útvarů ($f \geq 0$, σ je plošná hustota):

$$M_y = \sigma \int_a^b x\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad M_x = \frac{\sigma}{2} \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Příklad. Těžiště plochy pod obloukem kosinusoidy ($f(x) = \cos x$ na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$) má souřadnice $x_{\mathrm{T}} = 0$, $y_{\mathrm{T}} = \frac{\pi}{8}$.

Číselné řady

Definice. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$, kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je *k-tý člen*, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ je *n-tý částečný součet* (s_n), limita posloupnosti částečných součtů je *součet*. Řekneme, že řada *konverguje*, má-li konečný součet; *diverguje*, má-li nekonečný součet; *osciluje*, nemá-li součet.

Poznámky.
1) Obecněji $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ pro $n \in \mathbb{Z}$ (lze přeindexovat $\mathbb{N}$).
2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n liché, $s_n = 0$ pro n sudé.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty}(1 - 2^{-n}) = 1$ konverguje.

Poznámka. Caesarův součet $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{2}$ pro 2).

Poznámka. V komplexním oboru konvergence odpovídá konvergenci reálné a imaginární části. Komplexní čísla se doplňují o jediné ∞, takže existují (reálné) řady, které v $\mathbb{C}$ divergují a v $\mathbb{R}$ oscilují (posloupnosti částečných součtů mají za hromadné hodnoty $\pm\infty$).

Příklad. *Aritmetická řada* s *diferencí* d je řada ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \bigl(a + (k-1)d\bigr) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots$. Částečné součty $s_n = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$, speciálně $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada* s *kvocientem* q je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$.

Věta. $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$ *pro* $|q| < 1$, *pro* $|q| \geq 1$ *a* $a_1 \neq 0$ *řada nekonverguje.*

Důkaz:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \\ q s_n &= a_1(\quad q + \cdots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q) s_n &= a_1(1 - q^n) \\ s_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad (q \neq 1) \end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$ ($a_1 = \frac{4}{3}$, $q = \frac{1}{3}$).

Věta. *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergují,* $c \in \mathbb{R}$, *pak*
1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz: Použití vět o limitách součtu a součinu pro posloupnosti částečných součtů.

Poznámka. Ve výše uvedené větě postupujeme zprava doleva, obráceně to obecně nejde. Část 1) je speciální případ nekonečné komutativity a asociativity, část 2) je nekonečná distributivita.

Věta (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, pak* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz: $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. *Řada s nezápornými členy má součet.*

Důkaz: Posloupnost částečných součtů je neklesající, má tedy limitu.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = +\infty$ pro $a \leq 0$: nekonverguje (členy nejdou k nule), má součet (členy jsou nezáporné).

Věta (srovnávací kr.)**.** *Nechť* $0 \leq a_k \leq b_k$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$.
1) *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak i* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*
2) *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje, pak i* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverguje.*

Důkaz: $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$, limity pro $n \to \infty$ existují (předcházející věta), věta o monotonii pro limity.

Příklady.
1) *Harmonická řada*:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots = +\infty. \end{aligned}$$

2) $a \leq 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^a \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, diverguje.

Definice. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta. *Absolutně konvergentní řada konverguje.*

Důkaz: $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$
$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje …
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kritérium) …
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.

Poznámka. Geometrická řada konverguje absolutně (když konverguje).

Věta (podílové kritérium). *Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*
1) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje (absolutně).*
2) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nekonv.*

Důkaz:
1) $|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq \cdots \leq |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^\infty |a_1|q^{k-1}$ konv.
2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_1|$, $a_k \not\to 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k, tj. počínaje některým k_0.

Věta (limitní tvar podílového kritéria).
1) *Je-li $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konv. (abs.).*
2) *Je-li $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nekonverguje.*

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} \to 0$.
2) $\sum_{k=1}^\infty \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2} \to +\infty$.
3) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje – nestačí, aby podíly byly menší než 1).
4) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (odmocninové kritérium).
1) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje (absolutně).*
2) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nekonv.*

Důkaz:
1) $|a_k| \leq q^k$, $\sum_{k=1}^\infty q^k$ konverguje
2) $|a_k| \geq 1$, $a_k \not\to 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria).
1) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konv. (abs.).*
2) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, pak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nekonverguje.*

Příklad. $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kr. nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$ – diverguje.

Poznámka. V limitních tvarech podílového a odmocninového kritéria stačí $\limsup < 1$ nebo $\liminf > 1$.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$:
$\sum_{k=1}^\infty a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \cdots = 3$,
$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in \{2, \frac{1}{4}\}$ – podílové kritérium nerozhodne,
$\sqrt[k]{|a_k|} \to 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.

Věta (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz: $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1)$,
$\sum_{k=1}^\infty f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^\infty f(k) - f(1)$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}$.

Věta (Leibnizovo kr.). *Je-li $(a_k)_{k=1}^\infty$ nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} a_k$ konverguje.*

Důkaz: $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \nearrow s'' \leq s'$, $s' - s'' = \lim_{k\to\infty} a_k$.

Poznámka. Jiná formulace: Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^\infty |a_k| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$ (podle integrálního kritéria).

Příklad. $a_{2k-1} = 1/k$, $a_{2k} = -1/2^k$. Střídají se znaménka, $|a_k| \to 0$, ale ne monotónně. $\sum_{k=1}^\infty a_k = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$ (rozdíl harmonické a geometrické řady).

Definice. *Přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^\infty a_{f(k)}$, kde f je bijekce na $\mathbb{N}$.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje (absolutně) a má stejný součet.*

Důkaz:
1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$
$\sum_{k=1}^n a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^\infty a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^\infty a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f_{-1}
důsledek: přerovnání abs. konv. řady je abs. konv.
2) $a_k \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^\infty a_{f(k)} = \sum_{k=1}^\infty a^+_{f(k)} - \sum_{k=1}^\infty a^-_{f(k)} =$
$= \sum_{k=1}^\infty a^+_k - \sum_{k=1}^\infty a^-_k = \sum_{k=1}^\infty a_k$

Poznámka. Pro řadu, která konverguje, ale ne absolutně, je $\sum_{k=1}^\infty a^+_k = \sum_{k=1}^\infty a^-_k = +\infty$. Pro každé $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ji pak lze přerovnat tak, abychom dostali součet c.
Pro $c \in \mathbb{R}$ opakujeme:
1) bereme nezáp. členy, dokud součet nebude (poprvé) $> c$
2) bereme záporné členy, dokud součet nebude (poprvé) $< c$
Pro $c = +\infty$ ($c = -\infty$) použijeme v n-tém kroku n ($-n$).

Věta. *Jestliže řada $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje absolutně, pak $\sum_{k=1}^\infty a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^\infty a_{2k}$ konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz: $\sum_{k=1}^\infty |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^\infty |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k| \ldots$ konv.
$\sum_{k=1}^\infty a_{2k-1} + \sum_{k=1}^\infty a_{2k} = \sum_{k=1}^\infty (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^\infty a_k$

Důsledek. *Rozdělením absolutně konvergentní řady na konečně mnoho přerovnaných částí se součet nezmění.*

Poznámka. Neabsolutně konvergentní řada má nekonečné součty nezáporných i záporných členů, jejich rozdíl není definován.

Numerická integrace

Chyby: metody, výpočtu.
Metody: na 1 pokus, iterační (posloupnost konv. k řešení).
Řád: popisuje rychlost konv. při zlepšování parametru.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\big(w_1 f(x_1) + \cdots + w_k f(x_k)\big)\,.$$

Střední hodnotu funkce aproximujeme váženým průměrem hodnot v *uzlech* $x_i \in \langle a, b\rangle$ s *váhami* w_i ($w_1 + \cdots + w_k = 1$). Uzly dle metody, váhy pro největší řád, integrují se přesně polynomy menšího stupně. $M_n = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(n)}(x)|$.

Gaussova metoda

Optimální volba uzlů, řád je dvojnásobek jejich počtu. Řešíme soustavu rovnic pro střední hodnoty mocnin.
Pro $k=1$ je $w_1 = 1$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, odhad chyby $M_2(b-a)^3/24$.
Pro $k=2$ na $\langle -1, 1\rangle$ je $w_{1,2} = \frac{1}{2}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$ řešením

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad 1 = w_1 \quad + w_2 \\ x^1 &: \quad 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ x^2 &: \quad \tfrac{1}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \\ x^3 &: \quad 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 \end{aligned}$$

Odhad chyby je $M_4(b-a)^5/4320$.

Newtonovy–Cotesovy metody

Uzly z ekvidistantního dělení $\langle a, b\rangle$, včetně (*uzavřená* metoda) nebo bez (*otevřená* metoda) krajních bodů a, b. Řád metody je počet uzlů zaokrouhlený na sudé číslo nahoru.

Poznámka. Někdy nekonvergují (pro rostoucí počet uzlů).

Složené metody

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n částí délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, na každé použijeme vybranou metodu. Zlepšujeme zvětšováním n.

Obdélníková metoda používá otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro jeden uzel (uprostřed, váha je 1):

$$R(h) = h\left[f\left(\tfrac{x_0+x_1}{2}\right) + \cdots + f\left(\tfrac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Věta. *Má-li f na $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci, pak*

$$|I - R(h)| \le \tfrac{M_2}{24}\,(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|\,.$$

Důkaz: $\langle x_0, x_1\rangle$, $s_1 = (x_0+x_1)/2$. Taylorova věta:

$$f(x) = f(s_1) + f'(s_1)\,(x-s_1) + \tfrac{f''(c_x)}{2}\,(x-s_1)^2$$

pro některý bod $c_x \in (x_0, x_1)$. Chyba integrace je

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x - h\,f(s_1)\right| = \left|\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - f(s_1)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left| f'(s_1) \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} (x-s_1)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(c_x)\,(x-s_1)^2\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} |f''(c_x)|\,(x-s_1)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-s_1)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \left|\begin{array}{r} x - s_1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = M_2 \int_0^{h/2} t^2\,\mathrm{d}t = M_2\left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^{h/2} = \tfrac{M_2}{24}\,h^3\,.$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - R(h)| \le \tfrac{M_2}{24}\,h^3 n = \tfrac{M_2}{24}\,(b-a)h^2\,.$$

Poznámka. Pokud bychom použili hodnotu (např.) v levém krajním bodě (pro funkci danou tabulkou), dostali bychom metodu řádu 1 s odhadem chyby $\frac{M_1}{2}\,(b-a)h$.

Lichoběžníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly (váhy jsou 1/2):

$$T(h) = h\left[\tfrac{1}{2}\,f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\,f(b)\right].$$

Věta. *Je-li P lineární interpolace funkce f se spojitou druhou derivací na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ (tj. P je lineární funkce, $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$), pak pro $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ je*

$$|f(x) - P(x)| \le \tfrac{M_2}{2}\,|(x-x_0)(x-x_1)|\,.$$

Důkaz: Pro $x \in (x_0, x_1)$ má funkce

$$g(t) = f(t) - P(t) - \big(f(x) - P(x)\big)\,\frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)}\,.$$

tři nulové body x_0, x_1, x. Podle Rolleovy věty má g' dva nulové body v (x_0, x_1) a g'' nulový bod $c_x \in (x_0, x_1)$:

$$0 = g''(c_x) = f''(c_x) - \big(f(x) - P(x)\big)\,\tfrac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}$$
$$f(x) - P(x) = \tfrac{f''(c_x)}{2}\,(x-x_0)(x-x_1)\,,$$
$$|f(x) - P(x)| \le \tfrac{M_2}{2}\,|(x-x_0)(x-x_1)|\,.$$

Poznámka. Je-li P polynomiální interpolace funkce f se spojitou derivací řádu $n+1$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ pro různé body $x_0, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$, pak pro $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| \le \tfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)\ldots(x-x_n)|\,.$$

Věta. *Má-li f na $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci, pak*

$$|I - T(h)| \le \tfrac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|\,.$$

Důkaz: $\langle x_0, x_1\rangle$, $s_1 = (x_0+x_1)/2$. Chyba integrace je

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - P(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{x_0}^{x_1} \big|f(x) - P(x)\big|\,\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1} |(x-x_0)(x-x_1)|\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} x - s_1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right|$$
$$= \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - t^2\right)\mathrm{d}t = M_2\left[\tfrac{1}{4}\,h^2 t - \tfrac{1}{3}\,t^3\right]_0^{h/2}$$
$$= M_2\left(\tfrac{1}{8}\,h^3 - \tfrac{1}{24}\,h^3\right) = \tfrac{M_2}{12}\,h^3\,.$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - T(h)| \le \tfrac{M_2}{12}\,h^3 n = \tfrac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,.$$

Poznámka. Odhad chyby obdélníkové metody je lepší než u lichoběžníkové, přestože se používá horší polynom. Využití středu intervalu odpovídá totiž aproximaci tečnou.

Simpsonova metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly. Rozděluje tedy každý podinterval na dva. Pro lepší srovnání označme n (sudý) počet všech takto vzniklých podintervalů. Hodnoty vah získáme integrací kvadratické interpolace, kterou dostaneme lineární kombinací Lagrangeových polynomů P_i, $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} (x - x_1) = ht \\ \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = h\int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= h\int_{-1}^{1} \big(f(x_0)\,P_0(t) + f(x_1)\,P_1(t) + f(x_2)\,P_2(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= h\int_{-1}^{1} \Big(f(x_0)\,\tfrac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(x_1)\,\tfrac{(t+1)(t-1)}{(0+1)(0-1)} + $$
$$+ f(x_2)\,\tfrac{(t+1)(t-0)}{(1+1)(1-0)}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= h\left[\tfrac{1}{3}\,f(x_0) + \tfrac{4}{3}\,f(x_1) + \tfrac{1}{3}\,f(x_2)\right].$$

Sečtením přes dvojice podintervalů dostaneme

$$S(h) = \tfrac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \cdots + 4\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Věta. *Má-li f na $\langle a,b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, pak*

$$|I-S(h)|\le \tfrac{M_4}{180}\,(b-a)h^4\,,\qquad M_4=\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f^{(4)}(x)|\,.$$

Poznámka. Simpsonova metoda je řádu 4 a je tedy přesná i pro polynomy stupně 3. Pro ověření stačí (linearita integrálu i $S(h)$) spočítat $\int_{x_1-h}^{x_1+h} x^3\,\mathrm{d}x = 2x_1^3h+2x_1h^3 = S(h)$.

Richardsonova extrapolace

Pro metodu F řádu p konvergující k $F(0)$ je

$$F(h)=F(0)+ah^p+O(h^q)\,,$$

kde $a\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}$, $q>p$. Uvažujme $h>0$ a proložme body $[h^p,F(h)]$ a $[(2h)^p,F(2h)]$ přímku:

$$P(x)=F(h)+\frac{F(2h)-F(h)}{(2^p-1)h^p}\,(x-h^p)\,.$$

Richardsonova extrapolace je $P(0)\approx F(0)$, tj.

$$F(h)+\frac{F(h)-F(2h)}{2^p-1}=F_1(h)\,.$$

Věta. *Nechť $F(h)=F(0)+ah^p+O(h^q)$, $p,q\in\mathbb{N}$, $p<q$. Pak $F_1(h)=F(0)+O(h^q)$.*

Důkaz: $O(h^q)$ je uzavřeno na lineární kombinace:

$$\begin{aligned} F(2h)&=F(0)+a2^ph^p+O(h^q)\\ F_1(h)&=F(0)+ah^p+\frac{a(1-2^p)h^p}{2^p-1}+O(h^q)=\\ &=F(0)+O(h^q)\,.\end{aligned}$$

Příklady. Uvedené metody mají chyby jen sudých řádů:

$$T_1(h)=T(h)+\tfrac13\big(T(h)-T(2h)\big)\qquad \text{řádu } 4\,,$$
$$S_1(h)=S(h)+\tfrac1{15}\big(S(h)-S(2h)\big)\qquad \text{řádu } 6\,.$$

Poznámky. Odstraníme chybu nejnižšího řádu.
1) Dostaneme přesnější metodu.
2) Přičítaná hodnota dobře odhaduje chybu (nemusí to být horní odhad), což můžeme použít v iteračním postupu: Spočteme pro h, opakovaně počítáme pro poloviční krok a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Pro lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu stačí dopočítat hodnoty jen v nových bodech (můžeme mít dokonce uloženy součty pro předcházející krok).

Poznámka. $T_1(h)=\frac43\,T(h)-\frac13\,T(2h)=$
$=\frac{4h}{3}\big(\frac12\,f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots\big)-\frac{2h}{3}\big(f(x_0)+f(x_2)+\cdots\big)=$
$=\frac{h}{3}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots\big)=S(h)$.

Rombergova metoda

Začneme s lichoběžníkovou metodou, při přechodu k polovičnímu kroku dopočítáme všechny dostupné Richardsonovy extrapolace (v k-tém sloupci je metoda řádu $2k$), odhadujeme chyby hodnot pod diagonálou:

$$\begin{array}{lllll} T(h) & & & & \\ T(h/2) & T_1(h/2) & & & \\ T(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) & & \\ T(h/8) & T_1(h/8) & T_2(h/8) & T_3(h/8) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ s přesností $\varepsilon=10^{-6}$.

Pro uvedené složené metody (R,T,S) můžeme využít odhady chyb, ve kterých přepíšeme $h=(b-a)/n$.

$$M_2=\max_{x\in\langle0,1\rangle}\left|\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2-1)\right|=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$
$$M_4=\max_{x\in\langle0,1\rangle}\left|\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^4-6x^2+3)\right|=\tfrac{3}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

$$\varepsilon>\frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2}\quad n_R>\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}\doteq 128{,}9\quad n_R\ge 129$$
$$\varepsilon>\frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2}\quad n_T>\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}\doteq 182{,}3\quad n_T\ge 183$$
$$\varepsilon>\frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4}\quad n_S>\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}\doteq 7{,}2\quad n_S\ge 8$$

Skutečné chyby jsou o něco menší:

metoda	R	T	S
$10^6\cdot$ chyba	$-0{,}606$	$0{,}602$	$-0{,}660$

Stačilo by:

metoda	R	T	S	Romberg	Gauss
dělení	101	143	8	4	1
hodnot	101	144	9	5	3

Iterační proces by skončil:

metoda	R	T	S
dělení	128	256	8
hodnot	255	257	9

Diferenciální rovnice

(*Obyčejná*) *dif. rovnice řádu n*: $F(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$.
Speciální tvar: $x^{(n)}=f(t,x,\dots,x^{(n-1)})$.
Řešení na intervalu I: funkce $x\colon I\to\mathbb{R}$ taková, že pro každé $t\in I$ je $x^{(n)}(t)=f\big(t,x(t),\dots,x^{(n-1)}(t)\big)$.
Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.
Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínky*: $x(t_0)=x_{0,0}$, $x'(t_0)=x_{0,1}$, …, $x^{(n-1)}(t_0)=x_{0,n-1}$.
Počáteční podmínky „obvykle“ vyberou jedno z pole řešení.
Jednoznačnost Cauchyovy úlohy: řešení splývají na okolí t_0.

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x'=g(t)\,h(x),\qquad x(t_0)=x_0}$$

Věta. *Nechť I,J jsou otevřené intervaly, funkce g je spojitá na $I\ni t_0$, funkce h je spojitá na $J\ni x_0$. Pak $x'=g(t)\,h(x)$, $x(t_0)=x_0$, má řešení na intervalu $I'\subset I$ obsahujícím t_0. Je-li navíc h' spojitá na J, pak je toto řešení jednoznačné.*

Postup řešení:
1) $h(x_0)=0\ \dots\ x(t)=x_1$, $t\in I$ je *stacionární* řešení

2) $h(x_0) \neq 0 \ldots\ h(x) \neq 0$ na okolí x_0

$$x'(t) = g(t)\, h\big(x(t)\big)$$

$$\int \frac{x'(t)}{h\big(x(t)\big)}\ \mathrm{d}t = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\left| \begin{array}{c} x(t) = y \\ x'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{array} \right| : \qquad \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(t)\ \mathrm{d}t$$

$$H_1(y) = G(t) + c$$

$$x(t) = y = \ldots$$

3) Počáteční podmínka: dopočítat c nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(u)\ \mathrm{d}u$$

4) Interval řešení: graf řešení se „zarazí“ o hranici $I \times J$.

Poznámka. Separaci proměnných lze použít pouze pro nestacionární řešení!!!

Příklad. $x' = -\lambda x$, $x(0) = x_0 > 0$ (radioaktivní rozpad).
$g(t) = -\lambda$, $h(x) = x$, $h'(x) = 1$ spoj. na $\mathbb{R} \ldots$ ex. a jedn.;
stacionární řešení: $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ (nevyhovuje);
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int -\lambda\ \mathrm{d}t$$

$$\ln|x| = -\lambda t + \ln|c| \qquad (c > 0)$$

$$|x| = |c|\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (c \neq 0)$$

dosazení počáteční podmínky: $x_0 = c\,\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0}$, tj. $c = x_0$;
řešení: $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad. $x' = \frac{x^2-1}{2t}$.
$g(t) = \frac{1}{t}$, spojitá na $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, $h(x) = \frac{x^2-1}{2}$, $h'(x) = x$ spojité na $\mathbb{R}$, … existence a jednoznačnost;
stacionární řešení: $x_{1,\pm}(t) = \pm 1$, $t \in (-\infty, 0)$, $x_{2,\pm}(t) = \pm 1$, $t \in (0, +\infty)$;
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x^2-1}{2t}$$

$$\int \frac{2}{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \ln|t| + \ln|c| \qquad (c > 0)$$

$$\frac{x-1}{x+1} = ct \qquad (c \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{1+ct}{1-ct}$$

intervaly řešení: $t \neq 0$, $t \neq \frac{1}{c}$;
pro počáteční podmínky:
a) $x(0) = 2$: nelze ($t \neq 0$);
b) $x(1) = -1$: stac. $x(t) = -1$, $t \in (0, +\infty)$;
c) $x(1) = 0$: $c = -1$, $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$, $t \in (0, +\infty)$;
d) $x(-\frac{1}{2}) = 3$: $c = -1$, $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$, $t \in (-1, 0)$;
e) $x(1) = -1$: $c = 3$, $x(t) = \frac{1+3t}{1-3t}$, $t \in (\frac{1}{3}, 0)$.

Příklad. $x' = 3x^{2/3}$.
$g(t) = 1$, $h(x) = 3x^{2/3}$ spojité na $\mathbb{R} \ldots$ existence,
navíc $h'(x) = 2x^{-1/3}$ spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ldots$ jedn. pro $x \neq 0$;
stacionární řešení: $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$;
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x^{2/3}$$

$$\int \tfrac{1}{3}\, x^{-2/3}\ \mathrm{d}x = \int\ \mathrm{d}t$$

$$x^{1/3} = t - c$$

$$x(t) = (t-c)^3\,, \quad t \in (-\infty, c)\,,\ t \in (c, +\infty)$$

Řešení se v bodech nejednoznačnosti dají spojovat, obecné řešení je

$$x_{c,d}(t) = \begin{cases} (t-c)^3\,, & t \leq c\,, \\ 0\,, & c < t < d\,, \\ (t-d)^3\,, & d \leq t\,, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ c \leq d\,. \end{array}$$

Příklad. $x' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
separace:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln t}\ \mathrm{d}t$$

integrály nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Příklad. nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$\int \frac{x-1}{x+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$x - 2\ln|x+1| = \ln t + c$$

pro poč. podmínku: $0 - 0 = 0 + c$, tj. $c = 0$ ($t > 0$, $|x| < 1$),
$x(t) - 2\ln\big(x(t)+1\big) - \ln t = 0$, je zadaná *implicitně*

Lineární diferenciální rovnice (LDR)

$$\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b(t)}$$

$a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou *koeficienty*, b je *pravá strana.*
(*Přidružená*) *homogenní* LDR: $b(t) = 0$.
Předpoklady: $a_{n-1}, \ldots, a_0, b$ spojité na intervalu $I \ni t_0$.

Věta. *Cauchyova úloha má právě jedno řešení na* I.

$C(I)$: lineární prostor funkcí spojitých na I.
$C^n(I)$: lineární prostor funkcí se spoj. n-tou derivací na I.
Lineární diferenciální operátor $D\colon C^n(I) \to C(I)$:
$x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0\, x$.

Věta. 1) *Jsou-li* x_1, x_2 *řešení LDR, pak* $x_1 - x_2$ *je řešení přidružené homogenní rovnice.*
2) *Je-li* x *řešení LDR a* $\tilde{x}$ *řešení přidružené homogenní rovnice, pak* $x + \tilde{x}$ *je řešení dané LDR.*
3) *Jsou-li* x_1, x_2 *řešení pro pravé strany* b_1, b_2*, pak* $x_1 + x_2$ *je řešení pro pravou stranu* $b_1 + b_2$ (princip superpozice).

Poznámka. Obecné řešení LDR lze zapsat ve tvaru $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$, kde $\hat{x}(t)$ je libovolné (*partikulární*) řešení a $\tilde{x}(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice.

Věta. *Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz: $D\colon x \mapsto x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$ je lineární, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	$\dots$	$x^{(n-1)}(t_0)$		řešení C. úlohy
1	0	$\dots$	0	$\to$	$x_0(t)$
0	1	$\dots$	0	$\to$	$x_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	$\to$	$x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$\dots$	$x_{0,n-1}$	$\to$	$\sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i}\, x_i(t)$

$\dots$ lineární obal $\{x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$ je celý prostor řešení

$$A_0\, x_0(t) + \dots + A_{n-1}\, x_{n-1}(t) = 0 \overset{t=t_0}{\Longrightarrow} A_0 = 0$$

$$'\colon\ A_0\, x_0'(t) + \dots + A_{n-1}\, x_{n-1}'(t) = 0 \overset{t=t_0}{\Longrightarrow} A_1 = 0 \qquad \dots$$

$\dots$ funkce $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$ jsou lineárně nezávislé

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní LDR 1. řádu $x' + a(t)\, x = 0$ je separovatelná: $x' = -a(t)\, x$. Stacionární řešení je $x_s(t) = 0$, $t \in I$. Nestacionární řešení dostaneme separací proměnných

$$\tilde{x}(t) = -a(t)\, \tilde{x}(t)$$

$$\int \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)}\, \mathrm{d}t = \int -a(t)\, \mathrm{d}t$$

$$\ln|\tilde{x}(t)| = -A(t) + \ln|c| \quad (c > 0)$$

$$|\tilde{x}(t)| = |c|\, \mathrm{e}^{-A(t)}$$

$$\tilde{x}(t) = c\, \mathrm{e}^{-A(t)} \quad (c \neq 0)$$

Přidáme stacionární řešení: $\tilde{x}(t) = c\, \mathrm{e}^{-A(t)}$, $t \in I$ $(c \in \mathbb{R})$.

Partikulární řešení LDR 1. řádu $x' + a(t)\, x = b(t)$ najdeme *variací konstanty*, tj. ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí: $\hat{x}(t) = c(t)\ \mathrm{e}^{-A(t)}$. Dostaneme:

$$c'(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} + c(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} a(t) + a(t)\, c(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)} = b(t)$$

$$c'(t) = b(t)\, \mathrm{e}^{A(t)}$$

integrací najdeme některou funkci $c(t)$.

Příklad. $x' = 0{,}1 + \frac{x}{t+0{,}1}$, $x(0) = 0$, $t \in \langle 0, +\infty)$.
$a(t) = -\frac{1}{t+0{,}1}$, $b(t) = 0{,}1$ spojité na $\langle 0, +\infty)$ $\dots$ existence a jednoznačnost na $\langle 0, +\infty)$;
řešení přidružené homogenní rovnice:

$$\int \frac{\tilde{x}'(t)}{\tilde{x}(t)}\, \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t + 0{,}1}$$

$$\ln|\tilde{x}(t)| = \ln|t + 0{,}1| + \ln|c|$$

$$|\tilde{x}(t)| = \bigl|c(t + 0{,}1)\bigr|$$

$$\tilde{x}(t) = c(t + 0{,}1)$$

partikulární řešení ve tvaru $\hat{x}(t) = c(t)\,(t + 0{,}1)$:

$$c'(t)\,(t + 0{,}1) + c(t) \cdot 1 = c(t) + 0{,}1$$

$$c'(t) = \frac{0{,}1}{t + 0{,}1}$$

$$c(t) = 0{,}1 \ln(t + 0{,}1)$$

$$\hat{x}(t) = c(t)\,(t + 0{,}1) = 0{,}1\,(t + 0{,}1) \ln(t + 0{,}1)$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t) = (t + 0{,}1)\,(0{,}1 \ln(t + 0,1) + c)$$

pro počáteční podmínku: $0 = 0{,}1\,(0{,}1 \ln(t + 0{,}1) + c)$, tj. $c = -0{,}1 \ln 0{,}1$:

$$x(t) = 0{,}1\,(t + 0{,}1) \ln(10t + 1)\,, \quad t \in \langle 0, +\infty)\,.$$

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Funce $\mathrm{e}^{\lambda t}$ vyhovuje homogenní LDR s konstantními koeficienty právě tehdy, když $\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$.

Charakteristická rovnice pro LDR s konstantními koeficienty: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Má-li reálný polynom imaginární kořen, pak má za kořen i číslo k němu komplexně sdružené (stejné násobnosti).
Pro imaginární kořeny $\alpha \pm \beta\mathrm{j}$ dostaneme komplexní řešení

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha + \beta\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{j}\sin\beta t)\,,$$

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha - \beta\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{j}\sin\beta t)\,.$$

Z těchto komplexních řešení dostaneme reálná řešení

$$\tfrac{1}{2}\bigl(x_1(t) + x_2(t)\bigr) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t = \operatorname{Re} x_1(t)\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\bigl(x_1(t) - x_2(t)\bigr) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t = \operatorname{Im} x_1(t)\,.$$

Věta. *Bázi prostoru řešení homogenní LDR s konstantními koeficienty dostaneme z kořenů její charakteristické rovnice:*
1) *Pro každý k-násobný reálný kořen λ vezmeme*

$$\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

2) *Pro každou dvojici k-násobných imaginárních kořenů $\alpha \pm \beta\mathrm{j}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ vezmeme*

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \quad t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \dots, \quad t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \quad t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \quad \dots, \quad t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$

Příklad. $x' + ax = 0$, $x(0) = x_0$ (radioaktivní rozpad).
Homogenní LDR s konstantními koef., jedno řešení na $\mathbb{R}$.
Charakteristická rovnice $\lambda + a = 0$ má řešení $\lambda_1 = -a$, tomu odpovídá řešení LDR $x_1(t) = \mathrm{e}^{-at}$. Obecné řešení (jednorozměrný prostor) je $c\,\mathrm{e}^{-at}$ $(c \in \mathbb{R})$.
Dosazení počáteční podmínky: $x_0 = c\,\mathrm{e}^{-a\cdot 0}$, tj. $c = x_0$.
Řešení: $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-at}$, $t \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení LDR najdeme *variací konstant.* Při derivování si přidáváme podmínky, dostaneme soustavu rovnic pro neznámé $c_i'(t)$ (pro každé $t \in I$ regulární soustavu lineárních rovnic):

$$\tilde{x}(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

$$\hat{x}(t) = c_1(t)\, x_1(t) + \dots + c_n(t)\, x_n(t)$$

$$\hat{x}'(t) = c_1(t)\, x_1'(t) + \dots + c_n(t)\, x_n'(t) + \underbrace{c_1'(t)\, x_1(t) + \dots + c_n'(t)\, x_n(t)}_{=0}$$

$$\hat{x}''(t) = c_1(t)\, x_1''(t) + \dots + c_n(t)\, x_n''(t) + \underbrace{c_1'(t)\, x_1'(t) + \dots + c_n'(t)\, x_n'(t)}_{=0}$$

$$\vdots$$

$$\hat{x}^{(n)}(t) = c_1(t)\, x_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)\, x_n^{(n)}(t) + c_1'(t)\, x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t)\, x_n^{(n-1)}(t)$$

Příklad. $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
LDR, funkce 1, $\frac{1}{\cos t}$ spojité na I, řešení na I.
Char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{j}$, báze $\{\cos t, \sin t\}$,
$\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$,

$$c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0$$
$$-c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

$c_1'(t) = -\operatorname{tg} t$, $c_1(t) = \ln|\cos t|$, $c_2'(t) = 1$, $c_2(t) = t$,
$x(t) = \ln(\cos t) \cdot \cos t + t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Metoda odhadu pro nalezení partikulárního řešení LDR s konstantními koef. a kvazipolynomiální pravou stranou:
Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m,
$$b(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t\big),$$
$(\alpha + \beta\,\mathrm{j})$ (číslo pravé strany) je k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak existuje partikulární řešení ve tvaru
$$\hat{x}(t) = t^k\,\mathrm{e}^{\alpha t}\big(\hat{P}(t) \cos \beta t + \hat{Q}(t) \sin \beta t\big),$$
kde $\hat{P}, \hat{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše m.

Příklad. $x'' - 4x = \mathrm{e}^{2t} - 4 \cos 2t$.
Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R}$, řešení budou na $\mathbb{R}$.
Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4 = 0$, řešení $\lambda_{1,2} = \pm 2$.
Obecné řešení přidružené hom.: $\tilde{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Pro $b_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$: číslo pravé strany $2 + 0\mathrm{j} = 2$ je kořen char. rovnice násobnosti 1, partikulární řešení $\hat{x}_1(t) = At\,\mathrm{e}^{2t}$.
Pro $b_2(t) = -4 \cos t$: $0 + 2\mathrm{j} = 2\mathrm{j}$ není kořen char. rovnice, partikulární řešení $\hat{x}_2(t) = B \cos 2t + C \sin 2t$.
Princip superpozice: $\hat{x}(t) = At\,\mathrm{e}^{2t} + B \cos 2t + C \sin 2t$.
Do DR: $4A\,\mathrm{e}^{2t} - 8B \cos 2t - 8C \sin 2t = \mathrm{e}^{2t} - 4 \cos 2t$.
Provnáním koeficientů u jednotlivých funkcí:
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2t}: &\quad 4A = 1\,, \\ \cos 2t: &\quad -8B = -4\,, \\ \sin 2t: &\quad -8C = 0\,. \end{aligned}$$
Řešení soustavy lineárních rovnic: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$.
Partikulární řešení: $\hat{x}(t) = \frac{1}{4} t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t$.
Obecné řešení: $x(t) = \frac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t + c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.