

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z ANALÝZY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

MIROSLAV KORBELÁŘ

PRAHA 2016

Předmluva

Tento text je určen pro studenty technických vysokých škol, zejména studentům Fakulty elektrotechnické ČVUT, k procvičení analýzy funkcí více proměnných, především diferenciálního a integrálního počtu. Sbírka obsahuje vzorová řešení příkladů k těmto tématům. K řešením jsou také připojena znění vět a definic a to tam, kde to slouží buď k připomenutí pojmu nebo k lepšímu pochopení postupu. Protože sbírka bude sloužit především jako podklad ke cvičením z předmětu *Matematická analýza 2* a *Matematika-vícedimenzionální kalkulus* vyučovaných na FEL ČVUT, obsahuje také příklady z Fourieových řad.

Část příkladů byla vytvořena pedagogy vyučujícími na FEL ČVUT a část byla převzata ze zdrojů uvedených na konci sbírky a byla doplněna řešeními.

Sbírka byla vytvořena s podporou grantu RPAPS č. 13101/105/1051603C005.

Obsah

1	Množiny v \mathbb{R}^n jejich vlastnosti	4
2	Limity funkcí více proměnných	9
3	Derivace ve směru, gradient, totální diferenciál	13
4	Taylorův polynom, lokální extrémy	22
5	Vázané a absolutní extrémy	29
6	Dvojný integrál	39
7	Trojný integrál	50
8	Křivkový integrál	57
9	Plošný integrál	63
10	Integrální věty	66
11	Fourierovy řady	74

1 Množiny v \mathbb{R}^n jejich vlastnosti

Příklad 1.1. Necht' $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a necht' $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$ značí doplněk (complement) množiny A v \mathbb{R}^n . Ukažte, že platí:

- (i) $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ, \overline{(A^c)} = (A^\circ)^c,$
- (ii) A, B otevřené $\Rightarrow A \cap B$ otevřená,
- (iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$
- (iv) A, B uzavřené $\Rightarrow A \cup B$ uzavřená,
- (v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Řešení:

Pojem *otevřená* množina intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit “odkudkoliv”). Přesněji:

Otevřená množina G je taková, že s každým bodem $x_0 \in G$ obsahuje i nějaké jeho okolí $U_\varepsilon(x_0)$ v podobě tzv. otevřené koule s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě x_0 :

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

tj.

$$G \text{ je otevřená} \iff (\forall x_0 \in G) (\exists \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$$

Pojmem uzavřené množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při “limitách posloupností,” tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko. Přesněji:

Uzavřená množina F je taková, že každý bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jehož libovolné okolí $U_\varepsilon(x_0)$ má s množinou F průnik, už musí ležet v F :

$$F \text{ je uzavřená} \iff (\forall x_0 \in \mathbb{R}^n) ((\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x_0) \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow x_0 \in F$$

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové v tom smyslu:

$$G \text{ je otevřená} \iff G^c \text{ je uzavřená}$$

$$F \text{ je uzavřená} \iff F^c \text{ je otevřená}$$

Připomeňme si ještě, že

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím (neboli vnitřek je největší otevřená množina obsažená v A)

$$x \in A^\circ \iff (\exists \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

- *uzávěr* \overline{A} množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A .

$$x \in \overline{A} \iff (\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů, jejich libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A , tak do jejího doplňku A^c

$$x \in \partial A \iff (\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap A^c$$

Pro libovolnou množinu A se tak celý prostor \mathbb{R}^n vždy disjunktne rozloží (značeno pomocí “ \cup ”) na vnitřek A° , hranici ∂A a vnějšek $(A^c)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ$$

Kromě toho ještě platí:

- $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A}^c$
- Uzávěr \overline{A} je uzavřená množina a sice nejmenší uzavřená, která obsahuje množinu A .
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(i) Snadno teď máme:

$$x \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow \neg[(\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset] \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0) U_\varepsilon(x) \subseteq A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ.$$

Tedy

$$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ. \quad (\text{E.1})$$

Druhou rovnost dostaneme buď analogicky nebo přechodem k doplňkům $A := B^c$ a následně aplikací doplňků:

$$\overline{A} \stackrel{(\text{E.1})}{=} ((A^c)^\circ)^c \Rightarrow \overline{(B^c)} = (B^\circ)^c \quad (\text{E.2})$$

Tedy můžeme prohazovat pořadí uzávěru a doplňku, když pak uzávěr změníme na vnitřek.

(ii) Jestliže A a B jsou otevřené, pak s každým bodem obsahují i nějakou otevřenou kouli. Když si vezmeme tu s menším poloměrem, bude obsažena v obou množinách, tedy v průniku. Takže $A \cap B$ je také otevřená.

(iii) Použijeme základní vlastnosti vnitřku:

$$A^\circ \subseteq A \quad (\text{E.3})$$

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \quad (\text{E.4})$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ \quad (\text{E.5})$$

Teď ukážeme, že $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$(A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B) \stackrel{(\text{E.5})}{\implies} ((A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \ \& \ (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ) \implies (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

A ještě zbývá udělat $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$A^\circ \text{ a } B^\circ \text{ jsou otevřené} \stackrel{(2)}{\implies} A^\circ \cap B^\circ \text{ je otevřená} \implies (A^\circ \cap B^\circ)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Tedy

$$A^\circ \cap B^\circ \stackrel{(\text{E.3})}{\subseteq} A \cap B \stackrel{(\text{E.5})}{\implies} A^\circ \cap B^\circ \stackrel{(\text{E.4})}{=} (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

Takže máme $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iv) Můžeme postupovat podobně jako v (2) a použít základní vlastnosti uzávěru:

$$A \subseteq \overline{A} \quad (\text{E.6})$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \quad (\text{E.7})$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \quad (\text{E.8})$$

nebo můžeme využít dokázanou část (2) a přejdeme k doplňkům:

$$A, B \text{ uzavřené} \Rightarrow A^c, B^c \text{ otevřené} \Rightarrow A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{ otevřená} \Rightarrow A \cup B \text{ uzavřená.}$$

(v) Můžeme postupovat podobně jako v (3) nebo můžeme využít dokázanou část (3) a přejdeme k doplňkům s pomocí (1):

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= ((\overline{A \cup B})^c)^c \stackrel{(1)}{=} (((A \cup B)^c)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c \stackrel{(1)}{=} ((\overline{A})^c \cap (\overline{B})^c)^c = ((\overline{A \cup B})^c)^c = \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

Jak je vidět, při základní “manipulaci” s uzávěry, vnitřky atd.. si do velké míry vystačíme s “algebraickým” popisem těchto pojmů (viz vlastnosti (E.3) - (E.8)) a nemusíme jít až do základní definice, která využívá pojem okolí.

Příklad 1.2. Najděte příklady, kdy uvedená tvrzení neplatí “pro zbylé možnosti,” předchozího z příkladu, tj.

- (i) A_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou otevřené, ale $\bigcap_n A_n$ už není otevřená,
- (ii) $(A \cup B)^\circ \supsetneq A^\circ \cup B^\circ$,
- (iii) A_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou uzavřené, ale $\bigcup_n A_n$ už není uzavřená,
- (iv) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Řešení:

(i) $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcap_n A_n = \{0\}$.

(iii) $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_n A_n = (-\infty, 0)$.

(ii), (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x\}$. Pak je

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2 \supsetneq \mathbb{R}^2 \setminus \text{osa } y = A^\circ \cup B^\circ$$

a

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Příklad 1.3. Ukažte, že uzávěr každé množiny M je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.

Řešení:

Plyne ihned z definic:

$$a \in \overline{M} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

$$a \text{ je hromadný bod } M \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

Příklad 1.4. Sestrojte příklady neprázdných množin M v \mathbb{R}^2 , že

- (i) nemá žádný vnitřní bod,
- (ii) nemá žádný hraniční bod,
- (iii) nemá žádný vnější bod,
- (iv) nemá žádný hromadný bod,
- (v) nemá žádný izolovaný bod.

Řešení:

(i) jakákoliv spočetná množina (např. \mathbb{Q}^2), kružnice, přímka (a mnoho dalších příkladů).

(ii) Z požadavku $\partial M = \emptyset$ plyne, že $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^\circ = M^\circ$, tedy $M^\circ = M = \overline{M}$ a množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Jediná taková neprázdná množina je pouze $M = \mathbb{R}^2$. (Pro podrobnosti viz příklad o souvislých množinách.)

(iii) Vnější množina je roven $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$, tedy potřebujeme, aby $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ (množina je tzv. *hustá*). Můžeme opět volit např. $M = \mathbb{Q}^2$.

(iv) jakákoliv konečná množina; \mathbb{N}^2 (a mnoho dalších příkladů).

(v) jakákoliv otevřená množina (a mnoho dalších příkladů).

Příklad 1.5. Stanovte hromadné body množiny $M = \{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:

Ukážeme, že množina hromadných bodů je

$$N = \{(1/n, 0), (0, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Zřejmě každý prvek N je hromadný bod M .

Naopak, nechť $a \in \mathbb{R}^2$ je hromadný bod M , speciálně $a \in \overline{M}$. Protože jednotlivé projekce

$$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_1(x, y) := x, \quad \pi_2(x, y) := y$$

jsou spojité funkce, tak pro posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ je také $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(a_n) = \pi_i(a)$. Tedy

$$\pi_i(a) \subseteq \overline{\pi_i(M)} = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

pro $i = 1, 2$. Máme tak, že

$$a \in \left(\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \right)^2 = M \cup N.$$

Všechny body původní množiny M jsou ale izolované, tedy musí být $a \in N$.

Příklad 1.6. Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:

(i) $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\};$

(ii) $M = \mathbb{Q}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, kde \mathbb{Q} je množina všech racionálních čísel.

Řešení:

(i) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost upravit na $(a+1)^2 + b^2 \leq 4$ neboli $\|(a, b) - (-1, 0)\|^2 \leq 4$. Podobně druhá nerovnost znamená $\|(a, b) - (2, 0)\|^2 \leq 4$. Množinu M proto můžeme vyjádřit jako

$$M = A \cap B, \text{ kde } A = \overline{U}_2(-1, 0) \text{ a } B = \overline{U}_2(2, 0),$$

tedy jako průnik dvou uzavřených koulí (viz dále). Pro $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^2$ používáme značení

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

Uzavěr M : Nyní víme, že obě množiny A i B jsou uzávěry nějakých množin, tedy jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli $\overline{M} = M$).

Vnitřek M : Použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Protože $A^\circ = \left(\overline{U}_2(-1, 0)\right)^\circ = U_2(-1, 0)$ (což není těžké ukázat). Podobně to platí pro B a dostáváme tak

$$M^\circ = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}.$$

Hranice M :

$$\begin{aligned} \partial M &= \overline{M} \setminus M^\circ = \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2 + 2a + b^2 = 3 \ \& \ a^2 - 4a + b^2 \leq 0) \vee (a^2 + 2a + b^2 \leq 3 \ \& \ a^2 - 4a + b^2 = 0)\}. \end{aligned}$$

Důležitá poznámka: Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak množina

$$f^{-1}(-\infty, 0) = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) < 0\}$$

je otevřená množina (tj. vzor otevřeného intervalu $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina). Podobně

$$f^{-1}(-\infty, 0] = \{a \in D \mid f(a) \leq 0\}$$

je uzavřená množina (tj. vzor uzavřeného intervalu $(-\infty, 0] \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina).

Protože funkce $f(a, b) = a^2 + 2a + b^2 - 3$ a $g(a, b) = a^2 - 4a + b^2$ jsou spojité na celém \mathbb{R}^2 , je množina

$$M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\}$$

uzavřená (neboli $\overline{M} = M$) a množina

$$N = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}$$

je otevřená (neboli $N^\circ = N$).

POZOR! Tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat přímo vnitřek M° , ale jen nějakou jeho podmnožinu $N \subseteq M^\circ$. Rovnost nemusí obecně nastat např. pro $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 \leq 0\}$ je

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 < 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = A^\circ.$$

Pro rovnost je potřeba použít větu o implicitní funkci. Z té pak plyne toto tvrzení:

Věta: Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce na U . Položme

$$A = \{x \in U \mid f(x) \leq 0\}.$$

Pokud pro každé $x_0 \in A$ takové, že $f(x_0) = 0$, je $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x_0) \neq 0$, pak

$$A^\circ = \{x \in U \mid f(x) < 0\}.$$

V našem případě opravdu pro $f(a, b) = a^2 + 2a + b^2 - 3$ máme $f'(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}\right) = (2a + 2, 2b)$. Pokud by náhodou nastalo, že $f'(a, b) = 0$, pak je $a = -1$ a $b = 0$ a tudíž $f(-1, 0) = -4 \neq 0$. Podmínku z předchozí věty tak máme splněnou a proto opravdu $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3\}$ je vnitřek množiny $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3\}$.

(ii) Uvědomíme si, že v libovolném okolí libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, 3$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $|(r_1, r_2, r_3) - (s_1, s_2, s_3)| \leq \sqrt{3} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $x \in \mathbb{R}^3$ leží jak nějaký prvek z \mathbb{Q}^3 , tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^3} = \mathbb{R}^3, \quad (\mathbb{Q}^3)^\circ = \emptyset \quad \text{a} \quad \partial \mathbb{Q}^3 = \overline{\mathbb{Q}^3} \setminus (\mathbb{Q}^3)^\circ = \mathbb{R}^3.$$

Příklad 1.7. Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^n ?

Řešení:

Jediné takové dvě množiny jsou \emptyset a \mathbb{R}^n .

Abychom si to ověřili, použijeme následující pojem souvislé množiny, který intuitivně odpovídá tomu, že množinu nemůžeme “rozkouskovat” na oddělené bloky a tedy to, co se děje v jedné její části, ovlivňuje i celý zbytek této množiny (tento pojem se uplatní hlavně při spojitém rozšiřování funkcí, existenci potenciálu atd.)

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *souvislá* právě když nejde rozdělit pomocí dvou otevřených disjunktních neprázdných množin, tj.

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je souvislá} \stackrel{\text{def}}{\iff} \neg \left[(\exists U_1, U_2 \text{ otevřené a neprázdné}) \quad A \subseteq U_1 \cup U_2 \quad \& \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset \right]$$

Pokud by nyní existovala nějaká obojetná množina $U \neq \emptyset$ v \mathbb{R}^n , taková, že také $U \neq \mathbb{R}^n$, znamenalo by to, že \mathbb{R}^n se dá rozdělit pomocí dvou disjunktních neprázdných otevřených množin U a U^c . Tedy \mathbb{R}^n by pak nebyla souvislá množina.

Dokázat, že \mathbb{R}^n je skutečně souvislá, dá trochu práci, ale zkusíme se podívat, jak by se to pro $n \geq 2$ dalo udělat, pokud bychom už věděli, že \mathbb{R} je souvislá množina.

Budeme postupovat sporem.

- Předpokládejme, že \mathbb{R}^n není souvislá pro $n \geq 2$. Dá se tedy zapsat jako $\mathbb{R}^n = U \cup V$, kde U a V jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny.

- Zvolme si bod $a \in U$ a $b \in V$ a necht' $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je obvyklá parametrizace přímky, která spojuje body a a b (tj. $\varphi(t) = a + t(b - a)$ pro $t \in \mathbb{R}$).
- Zobrazení φ je tedy spojitě a proto vektor $\varphi^{-1}(U)$ otevřené množiny U je opět otevřená množina (a neprázdná, protože $0 \in \varphi^{-1}(U)$).
Podobně i $\varphi^{-1}(V)$ je otevřená a neprázdná množina (protože $1 \in \varphi^{-1}(V)$), která je navíc disjunktní s $\varphi^{-1}(U)$.
- A navíc určitě platí, že $\mathbb{R} = \varphi^{-1}(U) \cup \varphi^{-1}(V)$. To ale znamená, že \mathbb{R} není souvislá, což je spor! \mathbb{R}^n tak musí být souvislá a proto nemá žádné další (neprázdné) obojetné množiny.

Příklad 1.8. Rozhodněte, zda množina je souvislá:

- (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq \|(x, y)\| < 5\}$,
- (ii) \mathbb{Q}^2 ,
- (iii) $\mathbb{R}^2 \setminus \text{"bod," } \mathbb{R}^2 \setminus \text{"přímka,"}$
- (iv) $\mathbb{R}^3 \setminus \text{"bod," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"přímka," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"rovina."}$

Řešení:

(i) Dokazovat souvislost jako takovou je trochu obtížnější. Pomůžeme si proto o něco silnějším pojmem:

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obloukově souvislá*, pokud každé dva body $a, b \in M$ existuje spojitá křivka $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow M$, že $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$.

Věta: Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

Pozor! Existují ale množiny, která jsou sice souvislé, ale nejsou obloukově souvislé, např.

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, \infty) \right\} \cup \{0\} \times \langle -1, 1 \rangle$$

kde body na ose y nejdou propojit s grafem funkce $\sin \frac{1}{x}$.

Pro otevřené množiny ale oba pojmy splývají:

Věta: Necht' $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Pak je obloukově souvislá právě když je souvislá. (Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.)

Množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq \|(x, y)\| < 5\}$ je souvislá, protože se jedná o mezikružší, které je obloukově souvislé (body lze spojit např. soustřednými kružnicemi a ty pak propojit úsečkou směřující do počátku).

(ii) Množina není souvislá, protože ji lze rozložit pomocí dvou neprázdných disjunktních otevřených množin A a B , např. $A = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x < \sqrt{2}\}$ a $B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x > \sqrt{2}\}$.

(iii), (iv) souvislé jsou tyto množiny: $\mathbb{R}^2 \setminus \text{"bod," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"bod," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"přímka"}$ (protože jsou zjevně obloukově souvislé),

a nesouvislé tyto: $\mathbb{R}^2 \setminus \text{"přímka," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"rovina"}$ (protože se zjevně dají napsat pomocí dvou otevřených poloprostorů).

2 Limity funkcí více proměnných

Příklad 2.1. Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:

- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$
- (iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

$$(iv) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)x^2y^2$$

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod $(0, 0)$ je hromadným bodem množiny D_f (tedy má smysl ptát se na limitu f v tomto bodě). Limitu určíme podle věty o limitě složené funkce $f(x, y) = h(g(x, y))$, kde $g(x, y) = x + y$ a $h(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.

Pro korektní použití věty o limitě složené funkce ale ještě potřebujeme zajistit, aby

- buď v okolí bodu $(0, 0)$ bylo $g(x, y) \neq 0$
- nebo aby funkce h byla spojitá v $z = 0$.

První případ si můžeme zajistit tak, že omezíme definiční obor funkce g , tj. vezmeme $D_g := D_f$ a druhý tak, že funkci h spojitě dodefinujeme v $z = 0$. Nyní tedy máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y = 0 \quad (\text{protože } g \text{ je součet spojitých funkcí}),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

takže

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(g(x, y)) = 1.$$

(ii) Pro funkci $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}.$$

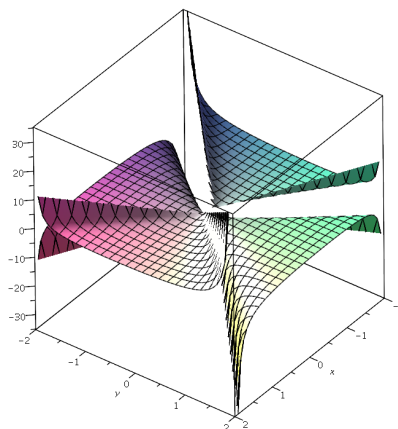
Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Na druhou stranu zúžením f na osu y (tj. $x = 0$) dostáváme

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.



(iii) Pro funkci $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 2x^2} = \frac{2}{3}.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iv) Pro funkci $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$. Použijeme odhad

$$0 \leq \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \leq (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right| = (x^2 + y^2)^2 \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro

$$g(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad h(z) = z^2 \ln z$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z \rightarrow 0+} h(z) = 0 \quad (\text{např. L'Hospitalovo pravidlo})$$

dostáváme

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(g(x, y)) = 0.$$

Z věty o sevření pak máme

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$$

tedy

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^0 = 1.$$

Příklad 2.2. Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:

$$(i) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$(ii) \quad \lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 1, 1)} \frac{xz^2 - y^2 z}{xyz - 1}$$

$$(iii) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(iv) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$$

$$(v) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x^2 y - 1}{xy - 1}.$$

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$$

a bod $(0, 1)$ je tedy hromadným bodem D_f . Pro limitu použijeme obvyklý trik, jak se zbavit odmocniny (tj. vzorec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + (y-1)^2}{(x^2 + (y-1)^2) \cdot (\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Pro funkci $f(x, y, z) = \frac{xz^2 - y^2z}{xyz - 1}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 1\}$$

a bod $(1, 1, 1)$ je tedy hromadným bodem D_f . Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímkou $x = y = z$ (bez bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$) dostáváme $f(x, x, x) = \frac{x^3 - x^3}{x^3 - 1} = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1) \\ x=y=z}} f(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x, x, x) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímkou $x = y = 1$ (opět bez bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$) dostáváme $f(1, 1, z) = \frac{z^2 - z}{z - 1} = z$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1) \\ x=y=1}} f(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(1, 1, z) = \lim_{z \rightarrow 1} z = 1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iii) Pro funkci $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

a má hromadný bod $(0, 0)$. Polynom v čitateli má vyšší stupeň než ve jmenovateli, takže spíš zkusíme ukázat, že limita existuje a bude nulová (což si můžeme otestovat zúžením f např. na souřadné osy).

Použijeme opět odhady a pak větu o limitě sevřené funkce. Zřejmě platí

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|,$$

což je důležitá nerovnost, která se hodí na dokazování limit. Podobně $|y| \leq \|(x, y)\|$, takže máme

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{\|(x, y)\|^2 \cdot \|(x, y)\|^2}{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|^2.$$

Z definice limity snadno dostáváme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x, y)\|^2 = 0$ (podobná tvrzení už můžeme brát skoro jako “fakt”) a tedy z věty o limitě sevřené funkce je rovněž

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

(iv) Na rozdíl od předchozího případu zde bude situace podstatně jiná a to kvůli nulovým hodnotám jmenovatele. Pro funkci $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\sqrt[3]{x^2}\}$$

a zřejmě má hromadný bod $(0, 0)$.

Zúžením f na přímkou $x = 0$ (bez bodu $(x, y) = (0, 0)$) dostáváme $f(0, y) = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

Pokud by tedy limita existovala, musí být rovna 0. Polynom v čitateli je nulový na osách $x = 0$ a $y = 0$, zatímco polynom ve jmenovateli je nulový na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$. V bodech $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ takových, že $y_0 = -\sqrt[3]{x_0^2}$ a $x_0 \neq 0$ tedy máme

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ 0 \neq y_0 = -\sqrt[3]{x_0^2}}} \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3} \right| = \frac{x_0^2 y_0^2}{+\infty} = +\infty$$

(pokud na chvíli připustíme, že $+\infty$ může také být limitou, kterou jinak smí podle naší definice být pouze prvek z \mathbb{R} .)

Pokud by funkce f měla v $(0, 0)$ limitu 0, musela by speciálně být na nějakém okolí $(0, 0)$ omezená, tj. existují $K > 0$ a $\varepsilon > 0$, že $\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^3} \right| \leq K$ pro všechna $(x, y) \in U_\varepsilon(0, 0) \cap D_f$.

V okolí $U_\varepsilon(0, 0)$ se ale také nacházejí body $(x_0, -\sqrt[3]{x_0^2})$, ve kterých je v limitě funkce f naopak neomezená.

To je spor a původní limita tedy NEEXISTUJE.

(v) Výraz v limitě má definiční obor

$$D : xy \neq 1 ,$$

což jsou dvě větve hyperboly. Zkusíme přiblížení ve směru souřadných os. Přiblížením po přímce $x = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x=1}} \frac{x^2 y - 1}{xy - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y - 1} = 1 .$$

Na druhou stranu přiblížením po přímce $y = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ y=1}} \frac{x^2 y - 1}{xy - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 .$$

Původní limita tedy neexistuje.

3 Derivace ve směru, gradient, totální diferenciál

Příklad 3.1. Najděte gradient funkce $f(x, y) = e^x \sin y$ v bodě $a_0 = (1, \frac{\pi}{4})$ a rychlost růstu f v bodě a_0 ve směru vektoru $\vec{v} = (-1, 2)$.

Řešení:

Gradient $\text{grad}f(a_0)$ je maticí (ve standardních souřadnicích) derivace $f'(a_0)$ funkce f v bodě a_0 . Postačující podmínkou pro existenci derivace funkce f v bodě a_0 je existence spojitých partiálních derivací na nějakém okolí bodu a_0 (což je v našem případě splněno).

$$\text{grad}f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{|a_0} = (e^x \sin y, e^x \cos y)_{|a_0} = \left(e \frac{\sqrt{2}}{2}, e \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Rychlost růstu $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0)$ funkce f v bodě a_0 ve směru vektoru \vec{v} je dána

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \text{grad}f(a_0) \cdot \vec{v} = \left(e \frac{\sqrt{2}}{2}, e \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-1, 2) = e \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Příklad 3.2. Najděte jednotkový směr největšího růstu funkce $f(x, y, z) = xe^y + z^2$ v bodě $a_0 = (1, \ln 2, \frac{1}{2})$.

Řešení:

$$\text{grad}f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{|a_0} = (e^y, xe^y, 2z)_{|a_0} = (2, 2, 1)$$

Jednotkový směr největšího růstu funkce f v bodě a_0 je

$$\frac{1}{\|\text{grad}f(a_0)\|} \cdot \text{grad}f(a_0) = \frac{1}{\|(2, 2, 1)\|} \cdot (2, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) .$$

Příklad 3.3. Určete derivaci funkce

(i) $f(x, y, z) = z^3 - x^2y$ v bodě $a = (1, 6, 2)$ podle vektoru $\vec{v} = (3, 4, 12)$,

(ii) $f(x, y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a = (0, 0)$ podle vektoru $\vec{v} = (-1, 2)$.

Řešení:

Derivace funkce f v bodě a podle vektoru \vec{v} je definovaná jako

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Pokud ovšem existuje derivace f'_a funkce f v bodě a (tj. totální diferenciál), pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = f'(a)[\vec{v}] = \text{grad} f(a) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v_n$$

kde $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

(i) Pro $f(x, y, z) = z^3 - x^2y$ a $a = (1, 6, 2)$ máme

$$\text{grad} f(a) = (-2xy, -x^2, 3z^2)|_a = (-12, -1, 12)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (-12, -1, 12) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 104.$$

Pokud bychom brali derivaci podle SMĚRU \vec{v} , pak je potřeba vektor ještě znormovat, tj. použijeme vektor $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ a pak je $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}|_a = \frac{104}{13} = 8$.

(ii) Pro $f(x, y) = e^x \cos y + 2y$ a $a = (0, 0)$ máme

$$\text{grad} f(a) = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)|_a = (1, 2)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (1, 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Příklad 3.4. Velmi unavený horolezec leze po ploše, která je grafem funkce $f(x, y) = e^{xy} + \ln x$. Právě se nachází v bodě $A = (1, 1, ?) \in \mathbb{R}^3$. Kterým ze dvou směrů

$$\mathbf{U} = (1, 2, ?) \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = (2, 1, ?)$$

(v tečné rovině grafu funkce f v bodě A) se má vydat, aby šel cestou menšího stoupání?

Řešení:

Pro $a = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ je $f(a) = e$, tedy $A = (1, 1, e)$. Spočítáme gradient (derivaci) funkce f :

$$\text{grad} f(1, 1) = f'(1, 1) = (ye^{xy} + \frac{1}{x}, xe^{xy})|_{(1,1)} = (e + 1, e)$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a je

$$z = f(1, 1) + f'(1, 1) \left[\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right] = e + (e + 1, e) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (e + 1)x + ey - (e + 1)$$

Vektory \mathbf{U} a \mathbf{V} leží v této tečné rovině (přesněji v jejím zaměření) právě když jsou kolmé na její normálový vektor $\mathbf{N} = (e + 1, e, -1)$ (tj. když $\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$). Máme tak, že $\mathbf{U} = (1, 2, 3e + 1)$ a $\mathbf{V} = (2, 1, 3e + 2)$. Strmost stoupání je dána úhlem, který tyto vektory svírají s rovinou $z = 0$, tedy $\arctan\left(\frac{3e+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro \mathbf{U} a $\arctan\left(\frac{3e+2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro \mathbf{V} . Menší stoupání je tak ve směru vektoru \mathbf{U} .

Poznámky:

(1) Mohli jsme využít implicitního zadání grafu $\Phi(x, y, z) = 0$ pro $\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$. Pak bychom rovnou dostali normálový vektor jako gradient Φ , tj. $\mathbf{N} = \text{grad} \Phi(A)$.

(2) Pokud položíme $\mathbf{u} = (1, 2)$ a $\mathbf{v} = (2, 1)$, pak máme $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, f'(a)[\mathbf{u}])$ a $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, f'(a)[\mathbf{v}])$. Pokud navíc platí $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ (jako v našem případě), pak pro strmost stoupání ve směru vektorů \mathbf{U} a \mathbf{V} stačí porovnat pouze jejich poslední složky, tj. hodnoty $f'(a)[\mathbf{u}]$ a $f'(a)[\mathbf{v}]$.

Příklad 3.5. Předpokládejme, že výška terénu v \mathbb{R}^3 je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$. V bodě A daném $x = 2$ a $y = 1$ upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v \mathbb{R}^2), kterým se bude kutálet.

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě B daném $x = 0$ a $y = 1$ (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou $z = 0$).

Řešení:

Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\text{grad}(f)|_A = \left(-\frac{2x}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}, -\frac{4y}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2} \right)|_A = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2} \right)$$

tedy ve směru určeném např. vektorem $\vec{v} = (1, 1)$ (směr je určen vektorem až na kladný násobek).

Normálový vektor tečné roviny grafu funkce ve zvoleném bodě je $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$. Jde tedy o normálové vektory

$$\vec{n}_A = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}, -1 \right)$$

a

$$\vec{n}_B = \left(0, -\frac{4}{3^2}, -1 \right)$$

s normami $\|\vec{n}_A\| = \sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}$ a $\|\vec{n}_B\| = \sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}$. Normálový vektor roviny $z = 0$ je $\vec{e} = (0, 0, 1)$. Úhly jednotlivých rovin jsou dány jako

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_A \cdot \vec{e}|}{\|\vec{n}_A\| \cdot \|\vec{e}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}}$$

a

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_B \cdot \vec{e}|}{\|\vec{n}_B\| \cdot \|\vec{e}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}}$$

Porovnáním dostaneme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &\stackrel{?}{>} \cos(\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1} \stackrel{?}{>} \sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2^4}{3^4} \stackrel{?}{>} \frac{2^5}{7^4} \Leftrightarrow 7 \cdot 7^3 \stackrel{?}{>} (2 \cdot 3) \cdot 3^3. \end{aligned}$$

Poslední vztah platí, proto $\cos(\alpha) > \cos(\beta)$ a tedy $\alpha < \beta$ a v bodě B je rovina strmější.

Příklad 3.6. Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce

(i) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1, ?)$,

(ii) $f(x, y) = xy + \sin(x + y)$ v bodě $(1, -1, ?)$.

Řešení:

(i) Graf funkce f je $\{(a, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(a)\}$. Tečná rovina $T_{(a_0, f_{a_0})}$ ke grafu f v bodě $(a_0, f_{a_0}) = (1, 1, 3)$ je dána rovnicí

$$z = f(a_0) + \text{grad}f|_{a_0} \cdot (a - a_0).$$

Máme $\text{grad}f|_{a_0} = (4x, 2y)|_{a_0} = (4, 2)$, tedy tečná rovina má rovnici

$$z = 3 + (4, 2) \cdot (x - 1, y - 1) = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

neboli

$$4x + 2y - z = 3.$$

(ii) Graf funkce f je množina $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \text{ \& } (x, y) \in D_f\}$. Tečná rovina $T_{(x_0, y_0, z_0)}$, ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, -1)$, kde $z_0 = f(x_0, y_0) = -1$ je dána rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + \text{grad}f|_{(x_0, y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$\text{grad}f|_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = \left(y + \cos(x + y), x + \cos(x + y) \right) \Big|_{(1, -1)} = (0, 2),$$

tedy tečná rovina má rovnici

$$z = -1 + (0, 2) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = -1 + 2(y - 1)$$

neboli

$$2y - z = 3.$$

Příklad 3.7. Nalezněte úhel, který v bodě $(1, 0, 0)$ svírají grafy funkcí

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad a \quad g(x, y) = \sin(xy).$$

Řešení:

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0 \text{ \& } (x, y) \neq (0, 0)\}$, kde

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 0\}$, kde

$$G(x, y, z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F|_{(1, 0, 0)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, -1 \right) \Big|_{(1, 0, 0)} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G|_{(1, 0, 0)} = \left(y \cos(xy), x \cos(xy), -1 \right) \Big|_{(1, 0, 0)} = (0, 1, -1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je nyní dán jako

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Příklad 3.8. Určete gradienty funkcí $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $g(x, y) = e^{\sin(xy)}$ v bodě $(-1, 0)$. Určete úhel, který v bodě $(-1, 0, 1)$ svírají grafy těchto funkcí.

Řešení:

Gradienty jsou

$$\text{grad } f|_{(-1,0)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \right)_{|(-1,0)} = (-1, 0)$$

$$\text{grad } g|_{(-1,0)} = \left(y \cos(xy) e^{\sin(xy)}, x \cos(xy) e^{\sin(xy)} \right)_{|(-1,0)} = (0, -1)$$

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty funkcí

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

a

$$G(x, y, z) = e^{\sin(xy)} - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F|_{(1,0,0)} = (-1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G|_{(1,0,0)} = (0, -1, -1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je nyní dán jako

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Příklad 3.9. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která

(i) je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 3$,

(ii) vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:

Když je nějaká množina M zadána jako vrstevnice nějaké spojitě diferencovatelné funkce (tj. rovností $f(x, y, z) = 0$), pak tečná rovina k M je kolmá ke gradientu funkce f (pokud je tento gradient nenulový), tj. gradient je její normálový vektor.

V našem případě si vezmeme $f(x, y, z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$. Takže normálový vektor tečné roviny je

$$f'|_{a_0} = \text{grad}(f)|_{a_0} = \left(\frac{2x}{25}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{9} \right)$$

(i) Tečná rovina má být rovnoběžná s rovinou $\rho : 4x + 2y + z = 3$, která má normálový vektor $\vec{n}_\rho = (4, 2, 1)$. To nastane právě když

$$\left(\frac{2x}{25}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{9} \right) = \text{grad}(f)|_{a_0} = \lambda \cdot \vec{n}_\rho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy $x = 50\lambda$, $y = 16\lambda$ a $z = \frac{9}{2}\lambda$.

Současně má také platit, že

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Po dosazení pak dostaneme $100\lambda^2 + 16\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{473}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor \vec{n}_ρ , tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $(x_0, y_0, z_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{473}} \cdot (100, 32, 9)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{473}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{473}.$$

(ii) Postupujeme podobně. Rovina, vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x}{25}, \frac{2y}{16}, \frac{2z}{9}\right) = \text{grad}(f)|_{u_0} = \lambda \cdot \vec{n} = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}.$$

Příklad 3.10. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho: 4x + 2y + z = 0$.

Řešení:

Použijeme následující větu (důsledek věty o implicitní funkci):

Věta: Necht' G je otevřená množina v \mathbb{R}^n , $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G . Necht' bod $u_0 \in G$ je takový, že $f(u_0) = 0$ a $f'(u_0) \neq 0$. Pak tečná rovina k nadploše (tzv. *varietě*)

$$M = \{u \in G \mid f(u) = 0 \text{ \& } f'(u_0) \neq 0\}$$

v bodě u_0 má rovnici

$$f'(u_0)(u - u_0) = 0.$$

V našem případě je $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Protože pro $u_0 = (x, y, z)$ je derivace $f'(u_0) = \text{grad}(f)|_{u_0} = (2x, 4y, 2z)$ nulová pouze pro $u_0 = (0, 0, 0)$ (a $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$) můžeme použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $u_0 \in M$ je právě $\text{grad}(f)|_{u_0}$. Tato rovina bude rovnoběžná s ρ , která má normálový vektor $\vec{n}_\rho = (4, 2, 1)$, právě když $(2x, 4y, 2z) = \text{grad}(f)|_{u_0} = \lambda \cdot \vec{n}_\rho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor \vec{n}_ρ , tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

Příklad 3.11. Najděte úhel sevřený dvěma plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad a \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$$

v bodě $a_0 = (2, 0, 2)$.

Řešení:

Úhel sevřený dvěma rovinami je roven úhlu, který svírají přímky určené normálovými vektory těchto rovin. Podle předchozího je tedy

$$\vec{n}_1 = (2x, 2y, 2z)|_{a_0} = (4, 0, 4)$$

a

$$\vec{n}_2 = \left(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\right)|_{a_0} = (2, -4, -2).$$

Pro hledaný úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pak je

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = 0$$

takže $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 3.12. *Vyšetřete existenci derivace (totálního diferenciálu) v bodě $(0, 0)$ u funkce*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Řešení:

Podle definice je derivace f v bodě $a_0 = (0, 0)$ takové lineární zobrazení $f'_{|a_0} = L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, že

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = 0 .$$

Pokud derivace existuje, pak je jednoznačně určena parciálními derivacemi v daném bodě:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$

Pro $a = (x, y)$ tak je

$$L(a - a_0) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = x .$$

Takže

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pokud si teď vezmeme zúžení výsledného výrazu např. pro $x = y$ dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{8} \cdot |x|} .$$

Tato limita ale neexistuje a tím spíš původní limita neexistuje (a už vůbec není nulová, jak bychom potřebovali). Derivace (totální diferenciál) v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje.

Příklad 3.13. *Najděte derivaci složené funkce $f \circ g$, kde*

$$(i) \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(s, t) = \begin{pmatrix} st \\ s \cos t \\ s \sin t \end{pmatrix} \quad a \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$(ii) \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(s, t) = \begin{pmatrix} st \\ e^{st} \\ t^2 \end{pmatrix} \quad a \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Řešení:

(i) Můžeme buď vyjádřit funkci $h(s, t) = (f \circ g)(s, t) = (st)^2 + (s \sin t)^2 + (s \cos t)^2 = s^2 t^2 + s^2$ a tu zderivovat

$$h'(s, t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = (2st^2 + 2s, 2s^2 t)$$

nebo použít větu o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} h'(s, t) &= (f \circ g)'(s, t) = f'(g(s, t)) \circ g'(s, t) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{|g(s, t)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}_{|g(s, t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s \sin t \\ \sin t & s \cos t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2st & 2s \cos t & 2s \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s \sin t \\ \sin t & s \cos t \end{pmatrix} = (2st^2 + 2s, 2s^2t) \end{aligned}$$

kde $g_i(s, t)$ jsou jednotlivé složky zobrazení g . Přitom je třeba při derivování f mít stejně (zvolené) pořadí proměnných jako je pak pořadí jednotlivých složek g_i v matici derivace zobrazení g (tedy např. pokud bychom derivovali v pořadí podle y, z, x pak pořadí složek v matici derivace g bude odshora postupně g_2, g_3 a g_1 .) Změna pořadí jen odpovídá tomu, že si matici derivace zvolíme v jiné bázi.

(ii) Postupujeme podobně: $h(s, t) = (f \circ g)(s, t) = ste^{st} + t^2e^{st} + st^3$

$$h'(s, t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \left((t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3, (s + s^2t + 2t + st^2)e^{st} + 3st^2 \right)$$

nebo

$$\begin{aligned} h'(s, t) &= f'(g(s, t)) \circ g'(s, t) = \begin{pmatrix} y + z & z + x & x + y \end{pmatrix}_{|g(s, t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{st} + t^2 & st + t^2 & e^{st} + st \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \\ &= \left((t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3, (s + s^2t + 2t + st^2)e^{st} + 3st^2 \right). \end{aligned}$$

Příklad 3.14. Najděte derivaci složeného zobrazení $f \circ g$, kde

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení:

Označme si jednotlivé složky zobrazení f jako $f_1(x, y) = xy$ a $f_2(x, y) = x^2 + y^2$. Pro matici derivace zobrazení f pak máme

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

tedy v jednotlivých řádcích jsou zapsány gradienty jednotlivých složek.

Podobně pro $g_1(\alpha, \beta) = \cos \alpha$ a $g_2(\alpha, \beta) = -\sin(\alpha\beta)$ bude

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\beta \cos(\alpha\beta) & -\alpha \cos(\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

Takže derivace $f \circ g$ bude

$$(f \circ g)' = f'_{|g} \circ g' = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x = \cos \alpha \\ y = -\sin(\alpha\beta)}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\beta \cos(\alpha\beta) & -\alpha \cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha\beta) & \cos \alpha \\ 2 \cos \alpha & -2 \sin(\alpha\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\beta \cos(\alpha\beta) & -\alpha \cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta) \sin \alpha - \beta \cos(\alpha\beta) \cos \alpha & -\alpha \cos(\alpha\beta) \cos \alpha \\ -2 \cos \alpha \sin \alpha + 2\beta \sin(\alpha\beta) \cos(\alpha\beta) & 2\alpha \sin(\alpha\beta) \cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta) \sin \alpha - \beta \cos(\alpha\beta) \cos \alpha & -\alpha \cos(\alpha\beta) \cos \alpha \\ -\sin(2\alpha) + \beta \sin(2\alpha\beta) & \alpha \sin(2\alpha\beta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Složky se dají také vypočítat řetízkovým pravidlem bez sestavování matic. Složky zobrazení $f \circ g$ budou $(f \circ g)_i = f_i(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$, kde proměnné x a y jsou závislé na α a β jako $x(\alpha, \beta) = g_1(\alpha, \beta)$ a $y(\alpha, \beta) = g_2(\alpha, \beta)$. Matice derivace složeného zobrazení bude mít tvar

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f \circ g)_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial(f \circ g)_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

a podle řetízkového pravidla budeme mít např.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial f_2(\cos \alpha, -\sin(\alpha\beta))}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial(-\sin(\alpha\beta))}{\partial \alpha} = \\
&= 2x \cdot (-\sin \alpha) + 2y \cdot (-\beta \cos(\alpha\beta)) = -2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2\beta \sin(\alpha\beta) \cdot \cos(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

Příklad 3.15. Najděte derivaci funkce $z = f(x, y)$, která splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = 2$ pro všechna (x, y) z vhodného definičního oboru funkce. Postupujte nejdříve obecně a pak v bodě $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

Řešení:

Funkci z sice neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x} (z^3 - 3xyz) = 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y} (z^3 - 3xyz) = 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy \frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz}{z^2 - xy} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz}{z^2 - xy}
\end{aligned}$$

To samozřejmě děláme za předpokladu, že $3z^2 - 3xy \neq 0$. Tento výraz je právě parciální derivaci podle \tilde{x} funkce $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{z}^3 - 3\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} - 2$ tří NEZÁVISLÝCH proměnných, která určuje původní rovnici jako $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$ (tzv. implicitně určená funkce). Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} = 3\tilde{z}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y}.$$

V bodě $z(1, 1) = 2$, který splňuje implicitní rovnici a ve kterém je výraz $3z^2 - 3xy \neq 0$, pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)} &= \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 1} = \frac{2}{3} \\
\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)} &= \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.16. Najděte derivaci zobrazení $\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x+y, z) \\ f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}$, kde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě

Řešení:

Složky zobrazení Φ označme Φ_1 a Φ_2 . Potřebujeme sestavit matici

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

K výpočtu jednotlivých složek použijeme řetízkové pravidlo. K tomu si potřebujeme nějak označit proměnné funkce f , např. jako $f(u, v)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \frac{\partial f(x+y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) \cdot \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) \end{aligned}$$

a podobně

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial f(x+y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z)$$

a pro druhou složku budeme mít

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

Celkem tedy máme

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) & \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, z) & \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, z) \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}.$$

4 Taylorův polynom, lokální extrémy

Příklad 4.1. Ortogonální transformací převedte homogenní kvadratický polynom (tedy kvadratickou formu) $g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ na diagonální tvar.

Řešení:

(i) Matice $(g)_{\mathcal{B}}$ kvadratické formy g v dané bázi \mathcal{B} je jednoznačně určena vztahem

$$g(u) = (u)_{\mathcal{B}}^T \cdot (g)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$$

pro všechna $u \in V$, kde $(u)_{\mathcal{B}}$ je souřadnicový zápis vektoru u v bázi \mathcal{B} .

Ve standardní bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ (tj. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) pro $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tedy máme

$$(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$g(u) = (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Novou ortonormální bázi, ve které bude mít g diagonální tvar, najdeme jako vlastní (normované) vektory matice \mathbb{A} . Tedy potřebujeme spočítat kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9$. Tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$. Po dosazení pak pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro $\lambda_2 = 8$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a hledaná ortonormální báze je $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$. Matice přechodu $\mathbb{M} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{E} je pak ortogonální, tedy $\mathbb{M}\mathbb{M}^T = \mathbb{E} = \mathbb{M}^T\mathbb{M}$ a $\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^T$. V nové bázi \mathcal{B} má matice formy g diagonální tvar $(g)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. To můžeme ověřit např. i takto: pro přechod mezi souřadnicemi vektoru u v různých bázích máme vztah $(u)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$ a ten dosadíme do vyjádření formy

$$g(u) = (u)_{\mathcal{E}}^T (g)_{\mathcal{E}} (u)_{\mathcal{E}} = (\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}})^T (g)_{\mathcal{E}} (\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}) = (u)_{\mathcal{B}}^T (\mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M}) (u)_{\mathcal{B}}$$

tedy v bázi \mathcal{B} má forma matici

$$(g)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by nás zajímalo nalezení jakékoliv báze (ne nutně ortogonální), ve které bude mít forma diagonální matici (tzv. *polární* báze) můžeme postupovat doplňováním na čtverec (tj. použijeme vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$):

$$g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5 \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{5}y + \left(\frac{3}{5}y \right)^2 \right) - 5 \left(\frac{3}{5}y \right)^2 + 5y^2 = 5 \left(x - \frac{3}{5}y \right)^2 + \frac{16}{5}y^2$$

V nových souřadnicích $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odpovídajících nové bázi \mathcal{B}' má tedy forma tvar

$$g(x', y') = 5(x')^2 + \frac{16}{5}(y')^2$$

a proto je pozitivně definitní. Příslušná matice přechodu ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pak ale není ortogonální - matice se odvodí ze vztahu

$${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} \cdot (u)_{\mathcal{E}} = (u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_{\mathcal{E}}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}^2$.

(iii) K pouhé definitnosti pak také stačí ověřit podmínky Sylvestrova kritéria, tj. znaménka hlavních subdeterminantů matice $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = 5 > 0$$

$$\Delta_2 = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 16 > 0$$

Tedy forma g je pozitivně definitní.

Příklad 4.2. Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0 :

(i) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $a_0 = (1, 2, 1)$,

(ii) $f(x, y, z) = xe^y \cos z$, $a_0 = (0, 0, 0)$.

Řešení:

(i) Taylorův polynom řádu (nejvýše) 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0 , je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)\vec{h} + \frac{1}{2!}f''(a_0)(\vec{h}, \vec{h})$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Máme

$$f'(a_0) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)|_{a_0} = (4, 4, 12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2 z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2 z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2 z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T_2(a_0 + \vec{h}) &= 4 + (4, 4, 12) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \\ &= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2. \end{aligned}$$

Polynom lze v tomto případě také získat přímo dosazením do původní funkce, kde si v rozvoji vezmeme pouze členy do stupně nejvýše 2:

$$\begin{aligned} f(1 + h_1, 2 + h_2, 1 + h_3) &= (1 + h_1)(2 + h_2)^2(1 + h_3)^3 = (1 + h_1)(4 + 4h_2 + h_2^2)(1 + 3h_3 + 3h_3^2 + h_3^3) = \\ &= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2 + \text{vyšší členy}. \end{aligned}$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)|_{a_0} = (1, 0, 0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ -e^y \sin z & -xe^y \sin z & -xe^y \cos \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = h_1 + h_1h_2.$$

Polynom lze i v tomto případě také získat rozvojem jednotlivých funkcí jedné proměnné v daných bodech:

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \varphi(h_2)$$

$$\cos h_3 = 1 + \psi(h_3)$$

$$\text{kde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0 \text{ a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0.$$

$$\begin{aligned} f(0 + h_1, 0 + h_2, 0 + h_3) &= h_1 e^{h_2} \cos h_3 = h_1 (1 + h_2 + \varphi(h_2)) (1 + \psi(h_3)) = \\ &= h_1 + h_1h_2 + \Omega(\vec{h}) \end{aligned}$$

kde $\Omega(\vec{h}) = h_1\varphi(h_2) + (h_1 + h_1h_2 + h_1\varphi(h_2))\psi(h_3)$.

Ukážeme, že platí $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0$ a tedy jsme skutečně tímto způsobem našli hledaný Taylorův polynom:

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|^2} &\leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|h_1h_2|}{\|\vec{h}\|^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_3|}{\|\vec{h}\|^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_2h_3|}{\|\vec{h}\|^2} + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_2h_3|}{\|\vec{h}\|^2} \leq \\ &\leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \|\vec{h}\| + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \|\vec{h}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pro $\vec{h} \rightarrow 0$, protože $|h_i| \leq \|\vec{h}\|$ pro všechna $i = 1, 2, 3$. Uvedené odhady platí i když je náhodou $h_i = 0$ pro nějaké $i = 1, 2, 3$.

Příklad 4.3. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \cos(x-y)$$

v bodě $a = (0, 0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$\begin{aligned} f'_{|(0,0)} &= \left(2xe^{x^2+y^2} + \sin(x-y), 2ye^{x^2+y^2} - \sin(x-y) \right)_{|(0,0)} = (0, 0) \\ f''_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) & 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) \\ 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0, 0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$) je matice $f''_{(0,0)}$ pozitivně definitní, takže v bodě $a = (0, 0)$ je lokální minimum.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovými polynomy funkcí jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \psi(t) \cdot |t|^2$$

kde $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$ a $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$.

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) &= e^{h_1^2+h_2^2} - \cos(h_1 - h_2) = 1 + h_1^2 + h_2^2 + \varphi(h_1^2 + h_2^2) - \left(1 - \frac{(h_1 - h_2)^2}{2} + \psi(h_1 - h_2) \right) = \\ &= \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2 + \Omega(\vec{h}), \end{aligned}$$

kde $\Omega(\vec{h}) = \varphi(h_1^2 + h_2^2) \cdot |h_1^2 + h_2^2| - \psi(h_1 - h_2) \cdot |h_1 - h_2|^2$.

Výraz $T(h_1, h_2) = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$:

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \leq |\varphi(||\vec{h}||^2)| + |\psi(h_1 - h_2)| \cdot \frac{|h_1 - h_2|^2}{||\vec{h}||^2} \leq |\varphi(||\vec{h}||^2)| + 4|\psi(h_1 - h_2)| \rightarrow 0$$

pro $\vec{h} \rightarrow 0$, protože $|h_1 - h_2|^2 \leq (|h_1| + |h_2|)^2 \leq (2||\vec{h}||)^2$.

Příklad 4.4. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{2xy} - y^2$$

v bodě $a = (0, 0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$\begin{aligned} f'_{|(0,0)} &= \left(2ye^{2xy}, 2xe^{2xy} - 2y \right)_{|(0,0)} = (0, 0) \\ f''_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} 4y^2e^{2xy} & 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} \\ 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} & 4x^2e^{2xy} - 2 \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2.$$

Kvadratická forma

$$g(h_1, h_2) = 2h_1h_2 - h_2^2 = h_2(2h_1 - h_2)$$

druhé derivace je indefinitní (např. $g(1,1) = 1 > 0$ a $g(0,1) = -1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy sedlový bod funkce f .

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovým polynomem funkce jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

$$\text{kde } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0.$$

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) &= e^{2h_1h_2} - h_2^2 = 1 + 2h_1h_2 + \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2| - h_2^2 = \\ &= 1 + 2h_1h_2 - h_2^2 + \Omega(\vec{h}), \end{aligned}$$

kde $\Omega(\vec{h}) = \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2|$.

Výraz $T(h_1, h_2) = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0:$$

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|^2} \leq |\varphi(2h_1h_2)| \cdot \frac{|2h_1h_2|}{\|\vec{h}\|^2} \leq 4 \cdot |\varphi(2h_1h_2)| \rightarrow 0$$

pro $\vec{h} \rightarrow 0$, protože $|h_i| \leq \|\vec{h}\|$ pro $i = 1, 2$.

Příklad 4.5. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{xy} - 2xy$$

v bodě $a = (0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

Funkce je symetrická vzhledem k záměně proměnných, což usnadňuje výpočet.

$$f'_{|(0,0)} = \left(ye^{xy} - 2y, xe^{xy} - 2x \right)_{|(0,0)} = (0, 0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} - 2 \\ e^{xy} + xye^{xy} - 2 & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 - h_1h_2.$$

Kvadratická forma

$$Q(\vec{h}) := f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = -2h_1h_2$$

druhé derivace je indefinitní (např. $Q(1,1) = -1 > 0$ a $Q(-1,1) = 1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy SEDLO.

Příklad 4.6. Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

$$(i) \quad f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6,$$

$$(ii) \quad f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y,$$

(iii) $f(x, y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

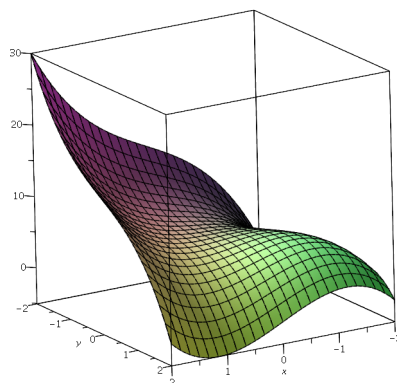
$$f'_{|(x,y)} = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je $f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = -4h_1h_2$ a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy sedlo.

Pro $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''_{|(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) maximum. Toto maximum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3 + 6$).



(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'_{|(x,y)} = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

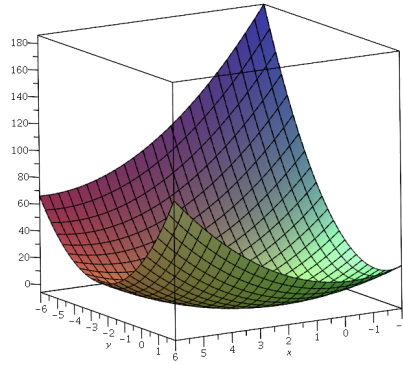
Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $(x, y) = (2, -1)$. Druhá derivace

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2, -1)$ je (ostré) lokální minimum $f(2, -1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. kvadrik) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y = \\ &= 2 \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4}y + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 2 \cdot \frac{3}{4}y \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 \right) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y = \\ &= 2 \left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2 \left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6 \end{aligned}$$

Tedy skutečně $f(x, y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y+1 = 0$ neboli $(x, y) = (2, -1)$.



Poznámka:

Obecně můžeme použít i následující přístup: Každý polynom f v proměnných x_1, \dots, x_n stupně nejvýše dva můžeme pro $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ vyjádřit jako

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$$

pro vhodnou symetrickou matici \mathbb{A} , vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme nyní, že $f'_{|\vec{x}_0} = 0$ pro nějaké $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pro derivace obecně máme:

$$f'_{|\vec{x}}(\vec{h}) = \vec{h}^T \mathbb{A} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{h} + 2\vec{b}^T \vec{h} = 2(\vec{x}^T \mathbb{A} + \vec{b}^T) \vec{h}$$

$$f''_{|\vec{x}}(\vec{h}, \vec{k}) = 2\vec{h}^T \mathbb{A} \vec{k}$$

Tedy $f'_{|\vec{x}_0} = 0$ právě když $\vec{x}_0^T \mathbb{A} + \vec{b}^T = 0^T$, tj. $\mathbb{A} \vec{x}_0 = -\vec{b}$. Posunutím souřadnic pak dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} f(\vec{y} + \vec{x}_0) &= (\vec{y} + \vec{x}_0)^T \mathbb{A} (\vec{y} + \vec{x}_0) + 2\vec{b}^T (\vec{y} + \vec{x}_0) + c = \\ &= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} + 2\vec{y}^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + \vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + 2\vec{b}^T \vec{y} + 2\vec{b}^T \vec{x}_0 + c = \\ &= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} - 2\vec{y}^T \vec{b} - \vec{x}_0^T \vec{b} + 2\vec{b}^T \vec{y} + 2\vec{b}^T \vec{x}_0 + c = \\ &= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} - \vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + c. \end{aligned}$$

Protože matice druhé derivace je $f''_{|\vec{x}} = 2\mathbb{A}$, tak pokud je tato forma pozitivně definitní, pak $\vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} \geq 0$, tedy

$$f(\vec{y} + \vec{x}_0) = \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} - \vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + c \geq -\vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + c$$

a rovnost nastává právě pro $\vec{y} = 0$. Tedy v bodě $\vec{x} = \vec{x}_0$ je ostré globální minimum a $f(\vec{x}_0) = -\vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + c$.

V našem případě máme:

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \left(-\frac{5}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže $\vec{x}_0 = - \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{23} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ jak už víme.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'_{|(x,y)} = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

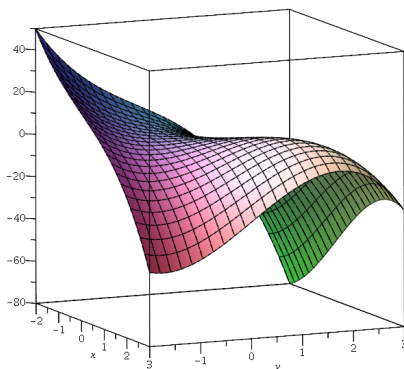
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

Pro $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''_{|(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivací negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x, 0) = -x^3 + 2$.



5 Vázané a absolutní extrémy

Příklad 5.1. Najděte nejmenší a největší hodnoty

- (i) funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,
- (ii) funkce $f(x, y) = 2x - y + 1$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$,
- (iii) funkce $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 4y - 2x$,
- (iv) funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:

(i) V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y)} = (6x + 5y, 5x + 6y)$$

tak $\Phi'_{|(x,y)}$ není regulární (tj. v tomto případě $\Phi'_{|(x,y)} = 0$) právě když $(x, y) = (0, 0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x, y) = 0$ a $\Phi'_{|(x,y)} = 0$. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1\}$$

je $\Phi'_{|(x,y)}$ regulární. Pro bod $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1) = f'_a = \lambda \Phi'_a = \lambda (6x + 5y, 5x + 6y)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1, -1), \quad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \quad f(-1, 1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplňnám na čtverec

$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3 \left(x + \frac{5}{6}y \right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1, -1)$ a $(-1, 1)$.

(ii) Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$, kde $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = (x + 1)^2 + y^2 - 1$. Pro extrém $a = (x, y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2, -1) = f'_a = \lambda g'_a = \lambda \cdot (2(x + 1), 2y)$$

a

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

Vyjádříme x a y pomocí λ a dosadíme do vazby. Dostaneme $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right), \quad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

s hodnotami

$$f \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \sqrt{5} - 1, \quad f \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = -\sqrt{5} - 1.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

(iii) Útvar je kružnice $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(-4, -3) = f'_a = \lambda \Phi'_a = \lambda \cdot (2(x + 1), 2(y - 2))$$

a

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Vyjádříme $x + 1 = -\frac{2}{\lambda}$ a $y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}$ a dosadíme do zbývajících rovnic. Dostaneme $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{3\sqrt{5}}{5} + 2 \right), \quad \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{3\sqrt{5}}{5} + 2 \right)$$

s odpovídajícími hodnotami po řadě

$$5\sqrt{5} + 4, \quad -5\sqrt{5} + 4.$$

Kružnice je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá po řadě svého maxima a minima.

(iv) Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ a $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U . Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \text{ \& } \Phi'_a \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M , pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g'_i(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ , tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \dots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnotu, tedy hodnotu k , tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru \mathbb{R}^n sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ .)

V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^3$ a $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y,z)} = (2x, 2y, 8z)$$

tak $\Phi'_{|(x,y,z)} = 0$ právě když $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$$

je $\Phi'_{|(x,y,z)} \neq 0$. Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1, 3) = f'_a = \lambda \Phi'_a = \lambda(2x, 2y, 8z)$$

a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \quad z = \frac{3}{8\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}(4, -4, 3)$ a $\lambda = \pm \frac{\sqrt{17}}{16}$. Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 2\sqrt{17}$.

Příklad 5.2. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

na kružnici $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:

Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$, kde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Pro extrém $a = (x, y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x + 2y, -2y + 2x) = f'_a = \lambda g'_a = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Rovnice tedy vyjadřují to, že hledáme vektor $\vec{a} = (x, y)^T$ takový, že $\|\vec{a}\| = 2$ a

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má netriviální řešení právě když determinant soustavy je roven nule, tj. $-(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 1 = 0$, tedy $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Jde v podstatě o hledání vlastních čísel matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a jejích vlastních vektorů s normou rovnou 2.

Pro $\lambda = \sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_1 = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot (1, \sqrt{2} - 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_1) = 4\sqrt{2}.$$

Pro $\lambda = -\sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_2 = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot (-1, \sqrt{2} + 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_2) = -4\sqrt{2}.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto bodech skutečně nabývá svého maxima a minima.

Příklad 5.3. Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Jestliže $a = (x, y) \in A^\circ$ je extrém T na A , pak je i extrémem T na A° . Takže musí platit, že

$$T'_a = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x, y) \in \partial A$ je extrém T na A , pak je i (vázaným) extrémem T na $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, y) = 0\}$, kde $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'_a = \lambda \Phi'_a = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dostáváme $a = \pm(1, 0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 0), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ a } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $(\frac{1}{2}, 0)$ a maxima v $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Příklad 5.4. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.

Řešení:

Množina $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ je čtverec a je zřejmě omezená i uzavřená (je vzorem uzavřeného intervalu $(-\infty, 1]$ při spojitém zobrazení $\Psi(x, y) = |x| + |y|$).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

a vázaného extrému na množině

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\},$$

kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme

použitím symetrií $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takových, že zachovávají jak množinu ∂A , tak danou funkci f . Tedy má platit, že $\varphi(\partial A) = \partial A$ a $f \circ \varphi = f$.

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$(x, y) \mapsto (-x, -y) \quad (\text{středová souměrnost})$$

$$(x, y) \mapsto (y, x) \quad (\text{souměrnost podle osy } x = y)$$

$$(x, y) \mapsto (-y, -x) \quad (\text{souměrnost podle osy } x = -y)$$

Extrém na A° :

$f|_a = (2x - y, 2y - x) = 0$ nastává právě pro $a = (0, 0) \in A^\circ$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

Extrém na ∂A :

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \text{ s vazbou } \Phi_1(x, y) = x + y - 1$$

a na

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < 0\} \text{ s vazbou } \Phi_2(x, y) = x - y - 1$$

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol $(1, 0)$ čtverce A jako samostatnou vazbu).

Pro extrém na U_1 má tedy existovat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f|_a = \lambda_1 \Phi_1'|_a = \lambda_1(1, 1)$$

a

$$x + y = 1,$$

tedy $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in U_1$ a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Podobně pro extrém na U_2 má existovat $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f|_a = \lambda_2 \Phi_2'|_a = \lambda_2(1, -1)$$

a

$$x - y = 1,$$

tedy $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in U_2$ a $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Zbývá bod $(1, 0)$ s hodnotou $f(1, 0) = 1$.

Minimum tedy nabývá funkce v bodě $(0, 0)$ a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu $(1, 0)$ pomocí symetrií).

Příklad 5.5. Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:

Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kváдру, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Hledáme sice jen kladná čísla, ale pro využití věty o nabytí maxima (a minima) spojitě funkce je potřeba pracovat s množinou, která je uzavřená (a omezená). Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \text{ \& } x + y + z = 100\},$$

(což je trojúhelník i s okraji), tj. hledáme *nezáporná* čísla. Množina A je zřejmě uzavřená a omezená.

Výšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\},$$

tedy na $A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$ s vazbou $\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$ (trojúhelník bez okrajů) a na případ $A \setminus U$ (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (protože na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in A \cap U$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'_a = \lambda \Phi'_a = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100,$$

takže $a = \frac{100}{3}(1, 1, 1)$ a $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$ a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A .

Příklad 5.6. Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

$$x + y + z = 5 \quad a \quad xy + yz + zx = 8.$$

Řešení:

Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \text{ \& \& } \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M :

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M :

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x + y)(5 - x - y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \quad \implies \quad \text{grad}(\Phi_1)|_a \quad a \quad \text{grad}(\Phi_2)|_a \quad \text{jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$$\text{grad}(\Phi_1)|_a = (1, 1, 1)$$

$$\text{grad}(\Phi_2)|_a = (y + z, z + x, x + y).$$

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body $z \in M$ tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Ted' konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:

Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M ted' existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \text{grad}(f)|_a = \lambda \cdot \text{grad}(\Phi_1)|_a + \mu \cdot \text{grad}(\Phi_2)|_a = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5 \quad \text{a} \quad xy + yz + zx = 8.$$

Když ted' od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda - \mu(y + z)$$

$$zx = \lambda - \mu(z + x)$$

dostaneme $z(y - x) = \mu(y - x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body ted' mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).

Příklad 5.7. Na elipse $M : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p : 3x + y - 9 = 0$.

Řešení:

Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x, y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v \mathbb{R}^3 (pro \mathbb{R}^2 je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v \mathbb{R}^3 má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ . Vzdálenost bodu $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n , tedy pomocí vztahu

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ , platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left| (a - b) \cdot \frac{n}{\|n\|} \right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x, y) = 10 \cdot \left(f(x, y)\right)^2 = (3x + y - 9)^2$$

(snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p , což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $3x + y - 9$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x, y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 (= 0)$ je zřejmě $\text{grad}(\Phi) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) \neq 0$. Pro bod $a = (x, y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(3, 1) = \text{grad}(h)|_a = \lambda \cdot \text{grad}(\Phi)|_a = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda \frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda \frac{2y}{9},$$

tedy $\lambda = 0$ nebo $y = \frac{3}{4}x$.

Pokud $\lambda = 0$, pak platí $3x + y - 9 = 0$ a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p , který je ale prázdný.

Takže zbývá případ $y = \frac{3}{4}x$, který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body $(x, y) = \pm \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. V těchto funkcí f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ a $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

(2) Použijeme “intuitivní” náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

Tvrzení: Pokud je množina M (daná vazbou)

- uzavřená,
- omezená a
- má tečny ve všech svých bodech,

pak body z M , které jsou od přímky p nejdál nebo nejbližší, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce $\Phi(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$, takže normála kolmá na tečnu v bodě $a = (x, y) \in M$ je gradientem funkce Φ . Hledáme tedy body $a = (x, y) \in M$, ve kterých je normála k M násobkem normály přímky p . Pak tedy existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \text{grad}(\Phi)|_a = \lambda \cdot (3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici $y = \frac{3}{4}x$ a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

Poznámka: Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M , pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale *NENÍ uzavřená*: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale *NENÍ omezená*: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale *NEMÁ tečny ve všech svých bodech*: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).

(3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a $3u + v - 9 = 0$. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x, y, u, v) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

a

$$\Phi_2(x, y, u, v) = 3u + v - 9$$

s gradienty

$$\text{grad}(\Phi_1)|_a = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0 \right)$$

$$\text{grad}(\Phi_2)|_a = (0, 0, 3, 1)$$

kde $a = (x, y, u, v)$. Označme si

$$K = \{a \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a) = 0 \text{ \& } \Phi_2(a) = 0\}.$$

Pro body $a \in K$ jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$\left(2(x - u), 2(y - v), 2(u - x), 2(v - y) \right) = \text{grad}(h)|_a = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0 \right) + \mu \cdot (0, 0, 3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{a} \quad 3u + v - 9 = 0$$

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda \frac{x}{2} = 2(x - u) = -3\mu$$

$$\lambda \frac{2y}{9} = 2(y - v) = -\mu$$

tedy opět rovnici $\lambda \left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} \right) = 0$, kde případ $\lambda = 0$ opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

$$(x_2, y_2) = - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

a pomocí rovnice $x - u = 3(y - v)$ dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{27\sqrt{5} - 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} + 27}{10\sqrt{5}} \right)$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{27\sqrt{5} + 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} - 27}{10\sqrt{5}} \right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdáleností) bodů $a_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ platí

$$h(a_1) < h(a_2).$$

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro $a \in K$ a $\|a\| \rightarrow \infty$ jdou hodnoty $h(a)$ také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ byly hodnoty funkce h větší než např. $h(a_2) + 1$. A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině $K \cap B$ bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině $K \cap \partial B$ budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě $h(a_2) + 1$ (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$).
- Na množině $K \cap B^\circ$ (díky otevřenosti množiny B°) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body a_1 a a_2 (které se evidentně musí nacházet v $K \cap B^\circ$ díky svým funkčním hodnotám $h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$).
- Absolutní minimum funkce h na množině $K \cap B$ se tedy NEMŮŽE nacházet na “okraji” $K \cap \partial B$ protože tam je funkce “moc velká” a může to tedy být jedině bod a_1 . Současně i na množině $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ je funkce “moc velká,” a bod a_1 je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K .

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce “v nekonečnu roste do nekonečna.”

A co bod a_2 ? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

Příklad 5.8. Najděte vzdálenost paraboly $M : y = x^2$ od přímky $p : y = x - 2$.

Řešení:

Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde “v nekonečnu roste do nekonečna.” Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p .

Směrnici $\alpha \in \mathbb{R}$ tečny v bodě $a \in M$, který je grafem funkce $g(x) = x^2$, můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj. $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z $2x = 1$ plyne $x = \frac{1}{2}$ a tedy $y = x^2 = \frac{1}{4}$.

Vzdálenost ρ bodu $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \in M$ od přímky $p : x' - y' - 2 = 0$ je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Příklad 5.9. V rovině $2x + y - z = 1$ najděte bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od bodů $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 3, 4)$ minimální.

Řešení:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro rovinu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$, kde $g(x, y, z) = 2x + y - z - 1$ a funkci

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2$$

vyjadřující součet čtverců vzdáleností bodu (x, y, z) od bodů $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 3, 4)$. Pro extrém $a = (x, y, z)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2(x - 3), 2(y - 4), 2(z - 5)) = f'_a = \lambda g'_a = \lambda \cdot (2, 1, -1)$$

a

$$2x + y - z = 1.$$

Dostaneme $\lambda = -\frac{4}{3}$ a $a = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3})$ s funkční hodnotou $f(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}) = \frac{92}{3}$.

K nabytí minima funkce v tomto bodě bychom (kromě uzavřenosti M) potřebovali také její omezenost, kterou nemáme. Pomůžeme si proto odhadem. Pro $U \in \mathbb{R}^3$ máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$f(U) = \|U - A\|^2 + \|U - B\|^2 \geq (\|U\| - \|A\|)^2 + (\|U\| - \|B\|)^2 \rightarrow +\infty$$

pro $\|U\| \rightarrow +\infty$. Existuje tedy $K > 0$ takové, že pro každé $U \in \mathbb{R}^3$ splňující $\|U\| \geq K$ bude $f(U) \geq f(a) + 1 = \frac{92}{3} + 1$.

Nyní máme, že

- na množině $M_1 = M \cap \{U \in \mathbb{R}^3 \mid \|U\| \geq K\}$ má funkce hodnotu vždy alespoň $f(a) + 1$.

- na množině $M_2 = M \cap \{U \in \mathbb{R}^3 \mid \|U\| \leq K\}$, která je uzavřená i omezená nabývá svého minima.

To nemůže být vázáno na okraj (kde je opět hodnota alespoň $f(a) + 1$), tedy to může být pouze v nalezeném bodě $a = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3})$, který nutně kvůli své funkční hodnotě $f(a)$ musí ležet v M_2 .

Celkově tedy funkce f skutečně nabývá na M svého (jediného) minima v bodě $a = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3})$.

6 Dvojný integrál

Příklad 6.1. Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

$$(i) \int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx$$

$$(iii) \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy dx, \text{ kde } a > 0 \text{ je parametr.}$$

Řešení:

Použijeme **Fubiniho větu**: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint_D |f| dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint_D f dS$ a platí

$$\int_{\pi_2(D)} \left(\int_{(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D} f(x, y) dx \right) dy = \iint_D f dS = \int_{\pi_1(D)} \left(\int_{(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D} f(x, y) dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x, y) = x$ a $\pi_2(x, y) = y$.

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na $D = (0, 1) \times (0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2 + 1} dy = \left[-\arctan(y) \right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(i) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ \& } 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

Máme

$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \leq \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \leq \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \pi - x & , x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! \arcsin a \sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx dy.$$

(ii) Základní oblasti integrace jsou

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ \& } 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ \& } 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Množiny D_1 a D_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $D = D_1 \cup D_2$.

Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké “podstatnější” množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS = \iint_{D_1 \setminus D_2} f dS + 2 \cdot \iint_{D_1 \cap D_2} f dS + \iint_{D_2 \setminus D_1} f dS$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2 - y \rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x, y) dx dy.$$

(iii) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2a \text{ \& } \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}\}.$$

Oblast je tedy se shora omezená parabolou $y^2 = 2ax$ a že zdola polovinou kružnice $2ax - x^2 = y^2$ (neboli ekvivalentně $(x - a)^2 + y^2 = a^2$). Rozdělíme si ji na tři části (tento návod poskytuje obrázek)

$$D_1 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq a\}$$

$$D_2 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq a \text{ \& } x \leq a\}$$

a

$$D_3 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq a \text{ \& } x \geq a\}.$$

Teď si oblasti D_i vyjádříme podle řezu v proměnné x (pomocí křivek $y^2 = 2ax$ a $(x-a)^2 + y^2 = a^2$):

D_1 :

$$a \leq y \leq 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a$$

D_2 :

$$0 \leq y \leq a, \quad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

D_3 :

$$0 \leq y \leq a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a$$

Takže výsledek je

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dS &= \iint_{D_1} f \, dS + \iint_{D_2} f \, dS + \iint_{D_3} f \, dS = \\ &= \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^a f(x, y) \, dx \, dy + \int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_0^a \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Příklad 6.2. Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:

$$(i) \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$$

$$(ii) \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy \, dx}{y^4 + 1}$$

Řešení:

(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ \& } 0 \leq y \leq 4 - x^2 \text{ \& } y \neq 4\}.$$

Funkce $f(x, y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$ na množině D není omezená.

Proč: Množina D je ohraničená parabolou $y = 4 - x^2$. Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolou, která už bude ležet ve vnitřku D , tedy vhodné $\lambda > 0$ tak, aby $(x, 4 - \lambda x^2) \in D$. Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=4-\lambda x^2, \, x>0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Není tedy jasné, jestli je $\iint_D |f| \, dS < \infty$ a jestli tedy vůbec můžeme použít Fubiniovu větu o záměně integrace. Pomůžeme si teď dodatkem:

Věta: Necht'

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál $\iint_E f \, dS$).

Kromě toho ještě připomeňme, jak je definován integrál $\iint_E f \, dS$, pokud je funkce f nebo oblast E integrace *neomezená*. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} |f| \, dS =: \iint_E |f| \, dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \dots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$. V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Máme tedy

$$\pi_2(D) = \langle 0, 4 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, \sqrt{4-y} \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy = \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \left[\frac{e^{2y}}{4} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8 - 1}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 8 \text{ \& } \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2\},$$

takže

$$\pi_2(D) = \langle 0, 2 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, y^3 \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy dx}{y^4 + 1} &= \int_0^2 \left(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4 + 1} dy = \\ &= \left[\frac{\ln(y^4 + 1)}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}. \end{aligned}$$

Příklad 6.3. Vypočítejte integrál

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

přechodem do polárních souřadnic.

Řešení:

Základní oblast integrace je

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ \& } 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \text{ \& } x^2 + y^2 \leq 4\}, \end{aligned}$$

tedy čtvrtkruh.

Použijeme **Větu o substituci**: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná funkce s konečným integrálem a $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U) a
- množina $U \setminus U^\circ (\subseteq \partial U)$ má nulovou míru (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak

$$\iint_{\Phi(U)} f dS = \iint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| dS.$$

Polární souřadnice jsou určeny zobrazením $\Phi : \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$.

Máme $\Phi'_{|(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ a $\det \Phi'_{|(r,\varphi)} = r$. Protože D je čtvrtina kruhu, snadno ji zparametrizujeme $D = \Phi(U)$, kde $U = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Na D° je Φ zřejmě prosté a spojitě diferencovatelné a množina ∂D se skládá ze dvou úseček a oblouku kružnice, což jsou množiny míry nula. Celkem tak dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D=\Phi(U)} (x^2 + y^2) dS = \\ &= \iint_U r^2 \cdot r dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^3 dr \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Příklad 6.4. Vypočítejte integrál

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos \varphi$.

Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ \& } 0 \leq r \leq 1 + \cos \varphi\}$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \iint_U r \cdot r dS = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos \varphi} r^2 dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1+\cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi + 1) d\varphi = \pi + \frac{2}{3} \pi = \frac{5}{3} \pi. \end{aligned}$$

Pro jednotlivé integrály jsme použili vztahy (pro $n \geq 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi &= \int_{0-\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = \left[\begin{array}{l} \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} \\ d\alpha = d\varphi \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) d\alpha = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} \alpha d\alpha = 0. \end{aligned}$$

(plyne z periodicity a lichosti funkcí) a dále podobně:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi$$

a současně

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi$$

tedy

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Příklad 6.5. Vypočítejte integrál

$$\iint_E x e^{-y} \frac{\sin y}{y} dS$$

pro neomezenou množinu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{y}{2}\}$.

Řešení:

Zopakujme si, že pokud je v integrálu $\iint_E f dS$ funkce f nebo oblast E integrace neomezená, pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} |f| dS =: \iint_E |f| dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \dots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$.

V našem případě tedy máme $f(x, y) = x e^{-y} \frac{\sin y}{y}$. Nejdříve potřebujeme ověřit existenci zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenční. Na E máme

$$\left| x e^{-y} \frac{\sin y}{y} \right| \leq x e^{-y}.$$

Pro tuto nezápornou funkci (tzv. *majorantu*) můžeme tedy použít Fubiniho větu (pokud nám při postupné integraci nakonec vyjde konečná hodnota):

$$\iint_E x e^{-y} dS = \int_0^\infty \int_0^{\frac{y}{2}} x e^{-y} dx dy = \int_0^\infty \frac{y^2}{8} e^{-y} dy = \int_0^\infty \left(\frac{y^2}{8} e^{-\frac{y}{2}} \right) e^{-\frac{y}{2}} dy \leq \int_0^\infty K \cdot e^{-\frac{y}{2}} dy < \infty$$

kde jsme použili to, že $\left| \frac{y^2}{8} e^{-\frac{y}{2}} \right| \leq K$ pro vhodnou konstantu $K > 0$ (tato funkce je spojitá a jde k nule v nekonečnu).

Integrál z $|f|$ je proto konečný a my tak můžeme použít Fubiniho větu (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině). Můžeme proto psát:

$$\begin{aligned} \iint_E x e^{-y} \frac{\sin y}{y} dS &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{y}{2}} x e^{-y} \frac{\sin y}{y} dx dy = \frac{1}{8} \int_0^\infty y (e^{-y} \sin y) dy = \\ &= \left[\begin{matrix} g(y)=y, & g'(y)=1 \\ h'(y)=e^{-y} \sin y, & h(y)=-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) \end{matrix} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[y \left(-\frac{e^{-y}}{2} \right) (\cos y + \sin y) \right]_{y=0}^{y=\infty} - \frac{1}{8} \int_0^\infty -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y + \sin y) dy = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\infty e^{-y} (\cos y + \sin y) dy = \frac{1}{16} \left[-e^{-y} \cos y \right]_0^\infty = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Poznámka: K odvození neurčitých integrálů jsme použili následující postup (jednodušší než opakovaná metoda per partes) využívající funkce komplexní proměnné:

$$\begin{aligned} \int e^{-y} \cos y dy + i \int e^{-y} \sin y dy &= \int e^{-y} (\cos y + i \sin y) dy = \int e^{-y} e^{iy} dy = \\ &= \int e^{(i-1)y} dy = \frac{e^{(i-1)y}}{i-1} + C = -\frac{i+1}{2} e^{-y} (\cos y + i \sin y) + C = \\ &= \left[-\frac{e^{-y}}{2} (\cos y - \sin y) \right] + i \left[-\frac{e^{-y}}{2} (\cos y + \sin y) \right] + C. \end{aligned}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí pak dostáváme:

$$\int e^{-y} \cos y dy = -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y - \sin y) + C_1$$

a

$$\int e^{-y} \sin y \, dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) + C_2,$$

kde C_1, C_2 a C jsou konstanty.

Integrály lze odvodit ještě “heuristicky” - primitivní funkce bude nejspíš obsahovat $e^{-y} \cos y$ a $e^{-y} \sin y$. Zkusíme si je tedy zderivovat:

$$\frac{d}{dy} (e^{-y} \cos y) = -e^{-y}(\sin y + \cos y)$$

$$\frac{d}{dy} (e^{-y} \sin y) = -e^{-y}(\sin y - \cos y)$$

a integrály z původních funkcí teď najdeme prostě jen lineární kombinací rovnic:

$$e^{-y} \sin y = \frac{d}{dy} \left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) \right)$$

$$e^{-y} \cos y = \frac{d}{dy} \left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y) \right).$$

Příklad 6.6. Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} \, dx \, dy.$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq \frac{2}{3}, \quad y \leq x \leq 2 - 2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(2,0)$. Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body A_1, \dots, A_n je konvexní obal $[A_1, \dots, A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1, \dots, A_n]_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ \& } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Protože (prostě) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2,0)$$

$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \leq v \leq u, \quad 0 \leq u \leq 2.$$

Dále je $(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} \, dx \, dy &= \iint_{E=\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x} \, dS = \iint_U ue^{-v} \cdot \frac{1}{3} \, dS = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^u ue^{-v} \, dv \, du = \frac{1}{3} \int_0^2 u \left[-e^{-v} \right]_{v=0}^{v=u} \, du = \frac{1}{3} \int_0^2 u(1 - e^{-u}) \, du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u} \right]_{u=0}^{u=2} = \\ &= 1 + e^{-2}. \end{aligned}$$

Příklad 6.7. Vypočítejte integrál

$$\iint_E \frac{y}{x} e^{xy} dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$ a $y = \frac{x}{2}$.

Řešení:

Oblast integrace je

$$E : \quad 0 < x, y, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, \quad \frac{2}{x} \leq y \leq \frac{4}{x}$$

neboli

$$E : \quad 0 < x, y, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad 2 \leq xy \leq 4.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = xy$$

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení Φ , které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení Φ vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že $x, y > 0$)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv} \right)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1} : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{x}, xy \right).$$

Determinant Φ' se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'_{|\Phi(u,v)}} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U : \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 2, \quad 2 \leq v \leq 4.$$

Můžeme tedy psát

$$\iint_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy} dS = \iint_U u e^v \left| -\frac{1}{2u} \right| dS = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_2^4 e^v du dv = \frac{3}{4} (e^4 - e^2).$$

Příklad 6.8. Najděte hmotnost a polohu těžiště

(i) trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 0)$, jehož hustota je rovna $\rho(x, y) = x$.

(ii) části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x , jejíž hustota je rovna $\rho(x, y) = y$.

Řešení:

(i) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 4 - 3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= \iint_E \rho \, dS = \int_0^1 \left(\int_y^{4-3y} x \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=4-3y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

 x -ová souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{m} \iint_E x \rho(x, y) \, dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \left(\int_y^{4-3y} x^2 \, dx \right) dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \left[x^3 \right]_{x=y}^{x=4-3y} dy = \\ &= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \, dy = \left[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{21}{10} \end{aligned}$$

 y -ová souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{m} \iint_E y \rho(x, y) \, dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \left(\int_y^{4-3y} xy \, dx \right) dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \left[x^2 y \right]_{x=y}^{x=4-3y} dy = \\ &= \frac{3}{20} \int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \, dy = \frac{12}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \, dy = \frac{12}{5} \left[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad -3 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 9 - x^2.$$

hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= \iint_E \rho \, dS = \int_{-3}^3 \left(\int_0^{9-x^2} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \left[y^2 \right]_0^{9-x^2} dx = \int_0^3 (x^2 - 9)^2 \, dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81y \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{648}{5} \end{aligned}$$

 x -ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x \rho(x, y) \, dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 x \left(\int_0^{9-x^2} y \, dy \right) dx = 0$$

(je to lichá funkce na množině symetrické podle osy y) y -ová souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{m} \iint_E y \rho(x, y) \, dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 \left(\int_0^{9-x^2} y^2 \, dy \right) dx = \frac{1}{3m} \int_{-3}^3 \left[y^3 \right]_{y=0}^{y=9-x^2} dx = \\ &= \frac{2}{3m} \int_0^3 (3^2 - x^2)^3 \, dx = \frac{5}{3 \cdot 324} \left[3^6 x - 3^4 x^3 + \frac{3^3}{5} x^5 - \frac{x^7}{7} \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{36}{7}. \end{aligned}$$

Příklad 6.9. *K výpočtu integrálu*

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 (e^{y^2} + 2xy) dy dx$$

zvolte vhodný způsob integrace.

Řešení:

Použijeme změnu pořadí integrace jednotlivých proměnných. Oblast integrace je

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ \& } 2x \leq y \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ \& } 0 \leq x \leq \frac{y}{2}\}.$$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 (e^{y^2} + 2xy) dy dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} (e^{y^2} + 2xy) dx dy = \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2} + \frac{y^3}{4} dy = \left[\frac{e^{y^2}}{4} + \frac{y^4}{16} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{e^4 + 3}{4}.$$

Jiné, mnohem náročnější řešení: Použijeme substituci polárních souřadnic Φ

$$\Phi : \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array}, \quad \det \Phi' = r$$

oblasti

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ \& } 2x \leq y \leq 2\}$$

s parametrizací $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \cos \varphi \leq 1 \text{ \& } 2r \cos \varphi \leq r \sin \varphi \leq 2 \text{ \& } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Ta se po úpravách zjednoduší na

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \frac{2}{\sin \varphi} \text{ \& } \arctan 2 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \iint_{E=\Phi(U)} (e^{y^2} + 2xy) dS &= \iint_U (e^{r^2 \sin^2 \varphi} + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dS = \\ &= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sin \varphi}} (e^{r^2 \sin^2 \varphi} + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{r^2 \sin^2 \varphi}}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{r^4 \sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sin \varphi}} d\varphi = \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - 1}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{8 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} d\varphi = \\ &= \left[\frac{1 - e^4}{2} \cotg(\varphi) - \frac{4}{\sin^2 \varphi} \right]_{\varphi=\arctan 2}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \\ &= -4 - \frac{1 - e^4}{2} \frac{1}{\tan(\arctan 2)} + 4 \left(1 + \frac{1}{(\tan(\arctan 2))^2} \right) = \frac{e^4 + 3}{4}. \end{aligned}$$

Příklad 6.10. *Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál*

$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2} dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:

Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x - y) \geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x .

$$E : 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\begin{aligned} \iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2} \, dS &= \int_0^1 \int_y^{10y} e^{y^3} \sqrt{xy - y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy - y^2)^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} dy = \\ &= \int_0^1 e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^2)^{3/2}}{y} dy = 6 \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dy = 6 \left[e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} = 6(e - 1). \end{aligned}$$

Příklad 6.11. *K výpočtu integrálu*

$$\iint_E x \cos(x^2 + y) \, dS$$

kde $E : -\sqrt{\pi} \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq \pi$, zvolte vhodný způsob integrace.

Řešení:

Oblast E je obdélník. Můžeme použít integraci jak podle x tak podle y :

$$\begin{aligned} \iint_E x \cos(x^2 + y) \, dS &= \int_0^\pi \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos(x^2 + y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left[\frac{\sin(x^2 + y)}{2} \right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(y) - \sin(y + \pi) \, dy = \int_0^\pi \sin(y) \, dy = \left[-\cos(y) \right]_{y=0}^{y=\pi} = 2 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \iint_E x \cos(x^2 + y) \, dS &= \int_{-\sqrt{\pi}}^0 \int_0^\pi x \cos(x^2 + y) \, dy \, dx = \int_{-\sqrt{\pi}}^0 \left[x \sin(x^2 + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx = \\ &= \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \sin(x^2 + \pi) - x \sin(x^2) \, dx = \int_{-\sqrt{\pi}}^0 -2x \sin(x^2) \, dx = \left[\cos(x^2) \right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} = 2. \end{aligned}$$

Příklad 6.12. *Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál*

$$\iint_E x^2 \cdot |y| \, dS,$$

kde oblast je $E : x^2 + y^2 \leq 2$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:

Oblast je kruh o poloměru $\sqrt{2}$. K výpočtu použijeme sférické souřadnice:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\iint_E x^2 \cdot |y| \, dS = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi \cdot |r \sin \varphi| \cdot r \, d\varphi \, dr = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi |\sin \varphi| \, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^5}{5} \cdot \left(2 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) = \frac{8\sqrt{2}}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

Příklad 6.13. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \, dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:

Oblast integrace

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y^2 \text{ \& } 0 < y \leq 1\}$$

je omezená, ale u funkce $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0, 0)$. Vyšetříme tedy chování f na E v tomto bodě. Protože pro $(x, y) \in E$ máme $0 \leq x \leq y^2$ a $0 < y$, tak $0 \leq \frac{x}{y} \leq y$ a tedy

$$1 \leq e^{\frac{x}{y}} \leq e^y \rightarrow 1$$

pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a proto $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál

tedy existuje.

Pro výpočet použijeme Fubiniho větu

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \, dS = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y e^y - y \, dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

7 Trojný integrál

Příklad 7.1. Vypočtete

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx.$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E : \quad |x| \leq 2 \quad \& \quad |y| \leq \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

neboli

$$E : \quad x^2 \leq 4 \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

a tedy

$$E : \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. K výpočtu integrálu použijeme *cylindrické souřadnice*:

$$\Phi : \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r.$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U : \quad 0 \leq r \leq z \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \int_{-2-\sqrt{4-x^2}}^2 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2) \, dz \, dy \, dx &= \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2) \, dV = \\ &= \iiint_U r^2 \cdot r \, dV = \int_0^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} r^3 \, d\varphi \, dr \, dz = 2\pi \int_0^2 \int_0^z r^3 \, dr \, dz = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 z^4 \, dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5} \pi . \end{aligned}$$

Příklad 7.2. Vypočtěte

$$\iiint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} \, dV,$$

kde $E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení:

Věta o substituci má analogický tvar a podmínky (pouze "zanedbatelné" množiny nyní zahrnují i plochy, roviny atd.):

$$\iiint_{\Phi(U)} f \, dV = \iiint_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, dV.$$

Použijeme *sférické souřadnice*:

$$\Psi : \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Psi : \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} .$$

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Phi_2 \circ \Phi_1 \\ \Phi_1 : \begin{aligned} \tilde{r} &= r \sin \vartheta \\ \tilde{\varphi} &= \varphi \\ \tilde{z} &= r \cos \vartheta \end{aligned} , \quad \Phi_2 : \begin{aligned} x &= \tilde{r} \cos \tilde{\varphi} \\ y &= \tilde{r} \sin \tilde{\varphi} \\ z &= \tilde{z} \end{aligned} \end{aligned}$$

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r \sin \vartheta) \cdot r = r^2 \sin \vartheta .$$

Zvolíme si parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U : \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi .$$

Takže můžeme psát

$$\begin{aligned} \iiint_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}} \, dV &= \iiint_U \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2-4r \cos \vartheta+4}} \, dV = \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2-4r \cos \vartheta+4}} \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2-4r \cos \vartheta+4}} \, d\vartheta \, dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 \left[r \frac{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int_0^1 r \left(\sqrt{r^2 + 4r + 4} - \sqrt{r^2 - 4r + 4} \right) dr = \\
&= \pi \int_0^1 r \left(|r+2| - |r-2| \right) dr = \pi \int_0^1 r \left(r+2 - (2-r) \right) dr = 2\pi \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Příklad 7.3. Vypočítejte těžiště tělesa

$$E: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha) \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem 2α , jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\begin{aligned}
\Psi: \quad x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\
y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\
z &= r \cos \vartheta
\end{aligned}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: 0 \leq r \leq R \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \alpha$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_{E=\Psi(U)} 1 \, dV = \iiint_U r^2 \sin \vartheta \, dV = \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \\
&= 2\pi \int_0^R \int_0^\alpha r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_0^R r^2 \, dr = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z , budou x -ová i y -ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z -ovou souřadnici těžiště:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{m} \iiint_{E=\Psi(U)} z \, dV = \frac{1}{m} \iiint_U r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, dV = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \\
&= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^\alpha \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m} (1 - \cos 2\alpha) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{3R}{8} (1 + \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Příklad 7.4. Určete těžiště homogenního kužele s výškou $h > 0$ a poloměrem podstavy $R > 0$.

Řešení:

Kužel

$$E: 0 \leq z \leq H \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint_E 1 \, dV = \int_0^h \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z} 1 \, dxdy \right) dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z , budou x -ová i y -ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z -ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_E z \, dV = \frac{1}{m} \int_0^h \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{R}{h} \cdot z} z \, dxdy \right) dz = \frac{1}{m} \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^3 \, dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h.$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislosti plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel"s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

Příklad 7.5. Vypočítejte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{aligned} x/a &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y/b &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z/c &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

které vzniknou složením "klasických"sférických souřadnic Ψ a lineární transformace \mathcal{L} , která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \quad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Phi} \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}'_{|\Phi}) \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin \vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti E si usnadníme znalostí objemu koule K o poloměru 1 a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého elipsoidu F . Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \, dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \, dV = \\ &= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \, dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{\pi abc}{6}. \end{aligned}$$

Pro zjištění těžiště $T = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \, dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr \cos \vartheta) \cdot (abc r^2 \sin \vartheta) \, dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

Příklad 7.6. Vypočítejte moment setrvačnosti rotačního paraboloidu E o výšce h a poloměru postavy R vzhledem k ose, která prochází těžištěm E a je kolmá k ose rotační symetrie paraboloidu E (tzv. ekvatoriální moment).

Řešení:

Oblast integrace je

$$E : \quad \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) \leq z \leq h.$$

Určíme těžiště tělesa E pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ \Phi : \quad y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

a parametrizace $E = \Phi(U)$

$$U : \quad \frac{hr^2}{R^2} \leq z \leq h \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{E=\Phi(U)} 1 \, dV = \iiint_U r \, dV = \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dz \, dr = \\ &= 2\pi \int_0^R r \left(h - \frac{hr^2}{R^2} \right) dr = 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi h R^2}{2}. \end{aligned}$$

Těleso E je rotačně symetrické podle osy z , takže je potřeba určit pouze z -ovou souřadnici těžiště:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \, dV = \frac{1}{m} \iiint_U zr \, dV = \frac{1}{m} \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} zr \, d\varphi \, dz \, dr = \\ &= \frac{4}{hR^2} \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h zr \, dz \, dr = \frac{2}{hR^2} \int_0^R r \left(h^2 - \frac{h^2 r^4}{R^4} \right) dr = \frac{2h}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6R^4} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{2}{3}h. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na osu z a procházející těžištěm nebude (vzhledem k symetrii tělesa E podle osy z) záviset na konkrétní volbě směru této osy. Zvolíme si ji tedy např. rovnoběžnou s osou x - tj. osa p bude mít rovnice $y = 0$ a $z = \frac{2}{3}h$. Hledaný moment setrvačnosti pak bude

$$M = \iiint_E \left(\rho_p(x, y, z) \right)^2 dV,$$

kde $\rho_p(x, y, z) = y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2$ je čtverec vzdálenosti bodu (x, y, z) od přímky p .

K výpočtu momentu použijeme opět transformaci Φ :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{E=\Phi(U)} y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 dV = \iiint_U r^3 \sin^2 \vartheta + r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 dV = \\ &= \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \vartheta + r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 d\varphi \, dz \, dr = \pi \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h r^3 + 2r \left(z - \frac{2}{3}h \right)^2 dz \, dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^R h r^3 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2}{3} r \left[\left(z - \frac{2}{3}h\right)^3 \right]_{z=\frac{hr^2}{R^2}}^{z=h} dr = \pi h \int_0^R r^3 - \frac{r^5}{R^2} + \frac{2}{81} r h^2 - \frac{2}{3} h^2 r \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^3 dr = \\
&= \pi h \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{6} + \frac{R^2 h^2}{81} - \left[\frac{h^2 R^2}{12} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^4 \right]_{r=0}^{r=R} \right) = \frac{\pi h R^2}{12} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right).
\end{aligned}$$

Příklad 7.7. Vypočtěte

$$\iiint_E y \, dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq z \leq x + 2y, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

I zde platí

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f \, dV = \iint_{\pi(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x, y, z) \, dz \right) dS,$$

kde $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y . Případně:

$$\iiint_E f \, dV = \int_{\pi_1(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \pi_{1,2}(E)} \left(\int_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx,$$

kde $\pi_{1,2}, \pi_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$ a $\pi_1(x, y, z) = x$.

$$\begin{aligned}
\iiint_E y \, dV &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} x + \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \\
&= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \, dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.
\end{aligned}$$

Příklad 7.8. Vypočtěte

$$\iiint_E xyz \, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\iiint_E xyz \, dV &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2} \, dy \, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{96}.\end{aligned}$$

Příklad 7.9. Vypočtěte

$$\iiint_E xy \, dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení:

Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \leq z \leq y - x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\iiint_E xy \, dV &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 x - x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \, dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Příklad 7.10. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint_E |z| \, dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ \& } |z| \leq 3 \text{ \& } y \geq 0\}$.

Řešení:

Oblast E je polovina válce. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad \det \Phi' = r$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ \& } |z| \leq 3 \text{ \& } 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\iiint_{E=\Phi(U)} |z| \, dV = \iiint_U |z| r \, dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-3}^3 |z| r \, dz \, d\varphi \, dr = \left(\int_{-3}^3 |z| \, dz \right) \cdot \left(\int_0^\pi 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^1 r \, dr \right) = \frac{9}{2} \pi.$$

Příklad 7.11. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint_E x^2 \, dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \text{ \& } 0 \leq y \text{ \& } x \leq 0\}$.

Řešení:

Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad \det \Phi' = r$$

s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq z \leq 2 \text{ \& } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_{E=\Phi(U)} x^2 dV &= \iiint_U r^3 \cos^2 \varphi dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 \int_0^z r^3 \cos^2 \varphi dr dz d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 z^4 \cos^2 \varphi dz d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 z^4 dz \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{8}{5} \pi. \end{aligned}$$

8 Křivkový integrál

Příklad 8.1. *Integrujte funkci $f(x, y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky $\Gamma: y = \frac{x^2}{2}$ od bodu $A = (1, \frac{1}{2})$ do bodu $B = (0, 0)$.*

Řešení:

Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ , tj. zobrazení $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, které je

- spojitě a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a, b \rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b \rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b \rangle) = \Gamma$.

Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1 - t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + (t-1)^2}.$$

Takže

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^1 \frac{1-t + \frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2} dt = \int_0^1 1-t + \frac{(1-t)^4}{4} dt = \left[\frac{u=1-t}{du=-dt} \right] = \\ &= - \int_1^0 u + \frac{u^4}{4} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}. \end{aligned}$$

Příklad 8.2. *Vypočítejte křivkový integrál*

$$\int_{\Gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds,$$

kde Γ je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, s parametrem $a > 0$.

Řešení:

Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Zparametrizujeme ji proto upravenými polárními souřadnicemi, které budou mít také vhodné exponenty:

$$\varphi : \begin{aligned} x &= a \cdot \cos^3 t \\ y &= a \cdot \sin^3 t \end{aligned}$$

pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(-3a \cos^2 t \cdot \sin t, 3a \sin^2 t \cdot \cos t \right)$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(3a \cos t \cdot \sin t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a |\cos t \cdot \sin t|.$$

Využijeme toho, že asteroida i funkce jsou symetrické podle souřadných os, takže stačí počítat jen na čtvrtině asteroidy:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds &= \int_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a |\cos t \cdot \sin t| dt = \\ &= 12 \cdot a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 t \cdot \sin t + \sin^5 t \cdot \cos t) dt = 2a^{\frac{7}{3}} \left[-\cos^6 t + \sin^6 t \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Příklad 8.3. Integrujte funkci $f(x, y) = x + y$ podél křivky $C: x^2 + y^2 = 4$ v prvním kvadrantu od bodu $A = (2, 0)$ do bodu $B = (0, 2)$.

Řešení:

Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice $\varphi(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \quad \text{a} \quad \|\varphi'(t)\| = 2.$$

Takže

$$\int_C f ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t) dt = 4 \left[\sin(t) - \cos(t) \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8.$$

Příklad 8.4. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\Gamma} xy ds,$$

kde $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ & $x, y \geq 0$ s parametry $a \neq b$.

Řešení:

Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\varphi : \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-a \sin t, b \cos t)$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Takže

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = \left[\begin{array}{l} u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ du = -2(a^2 - b^2) \sin t \cos t \, dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} \, du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}. \end{aligned}$$

Příklad 8.5. Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako $\varphi(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t^2}{2} \right)$. Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:

Křivka leží v plášti válce $x^2 + y^2 = 1$ a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky Γ se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 \, ds = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), t)$$

a

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2} = \sqrt{1 + t^2},$$

takže dostáváme

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_{\Gamma} 1 \, ds = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt = \left[\begin{array}{l} t = \sinh(\alpha) \\ dt = \cosh(\alpha) \, d\alpha \end{array} \right] = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha)} \cdot \cosh(\alpha) \, d\alpha = \\ &= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1 + \sqrt{1 + 1^2})} \cosh^2(\alpha) \, d\alpha = \int_0^{\ln(1 + \sqrt{2})} \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \right)^2 d\alpha = \frac{1}{4} \int_0^{\ln(1 + \sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left((1 + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $u = \sqrt{1 + t^2}$ je částí hyperboly ($u^2 - t^2 = 1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}.$$

Jde o rozklad funkce e^{α} na sudou a lichou funkci, tj. $e^{\alpha} = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $u = \sqrt{1 - t^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$	$\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$
$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha),$	$\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $t = \sinh(\alpha)$:

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right).$$

Příklad 8.6. Spočítejte délku části kuželové spirály \mathcal{C} s $n \in \mathbb{N}$ závitů definované parametrizací $\varphi : \langle 0, 2n\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t).$$

Řešení:

Křivka leží v plášti kužele $x^2 + y^2 = z^2$. Délka křivky \mathcal{C} s parametrizací φ se pak vypočítá jako

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \quad \left(= \int_{\mathcal{C}} 1 ds \right),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky \mathcal{C} . Máme tedy

$$\varphi'(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 1)$$

a

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2},$$

takže dostáváme

$$\begin{aligned} L(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} 1 ds = \int_0^{2n\pi} \sqrt{2 + t^2} dt = \left[\frac{t = \sqrt{2}u}{dt = \sqrt{2}du} \right] = 2 \int_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1 + u^2} du = \left[\frac{u = \sinh(x)}{du = \cosh(x)dx} \right] = \\ &= 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} \cosh^2(u) du = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} 1 + \cosh(2u) du = \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2} \right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \\ &= \left[u + \sinh(u) \cosh(u) \right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \left[u + \sinh(u) \sqrt{1 + \sinh^2(u)} \right]_{u=0}^{u=\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \\ &= \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi \sqrt{1 + 2n^2\pi^2} = \ln \left(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1 + 2n^2\pi^2} \right) + \sqrt{2}n\pi \sqrt{1 + 2n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Poznámka: Opět jsme využili vztahy pro hyperbolické funkce $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ a $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x), \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2 \sinh(x) \cosh(x) = \sinh(2x).$$

Inverzní funkci pro $u = \sinh(x)$ už známe:

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right).$$

Příklad 8.7. Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.

$$(i) \quad \vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z),$$

$$(ii) \quad \vec{F}(x, y, z) = \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, \quad -\frac{1}{x+z}, \quad \frac{y}{(x+z)^2} \right).$$

Řešení:

Práce síly \vec{F} v oblasti U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, že $\text{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U .

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je \mathbb{R}^n nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ “osa x ” nebo torus (tj. “pneumatika”).

V našem případě je oblastí celé \mathbb{R}^3 , tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

(i) Po dosazení máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém \mathbb{R}^3 a pole \vec{F} má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z. \quad (3)$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z . Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z) \right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2} \right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém \mathbb{R}^3 a pole \vec{F} má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z} \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} \quad (6)$$

Začneme třeba druhou rovnicí:

$$f(x, y, z) = \int -\frac{1}{x+z} dy = -\frac{y}{x+z} + C(x, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{x+z} + C(x, z) \right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x, z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x . Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x+z} + D(x) \right) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

Poznámka: Jestliže pole \vec{F} vznikne jako gradient f , pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f . Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly \vec{F} podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1 d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U . Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole \vec{F} nalézt, např.

$$f_1(x, y, z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x, y, z) = \text{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

Příklad 8.8. Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky \mathcal{C} s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.

Řešení:

Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t^2 + t^4, t^4 + t, t + t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 + 5t^4 + 6t^5 dt = \left[t^3 + t^5 + t^6 \right]_0^1 = 3.$$

9 Plošný integrál

Příklad 9.1. Najděte velikost plochy

- (i) části roviny $x + 2y + z = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$,
- (ii) paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží pod rovinou $z = 9$.

Řešení:

Plocha je určena jako $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 4 \text{ \& } x^2 + y^2 \leq 4\}$. Její obsah spočítáme podle vztahu

$$\iint_M 1 dS = \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dS,$$

kde Φ je vhodná parametrizace plochy M , tj. zobrazení $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, které je

- spojitě diferencovatelné a prosté na U° ,
- $\Phi(U) = M$
- matice Φ' má hodnotu 2 na U° (neboli $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$ na U°).

- (i) Protože plocha M je grafem funkce $f(x, y) = 4 - x - 2y$ s definičním oborem

$$U : x^2 + y^2 \leq 4,$$

jako parametrizaci si jednoduše zvolíme

$$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 4 - x - 2y)$$

pro $(x, y) \in U$.

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{6},$$

takže Φ zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky.

Můžeme tedy psát

$$\iint_M 1 dS = \iint_U \sqrt{6} dS = \sqrt{6} \iint_U 1 dS = \sqrt{6} \cdot 4\pi,$$

protože obsah kruhu U o poloměru 2 je 4π .

(ii) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = z \quad \& \quad z \leq 9.$$

Jako parametrizaci si zvolíme

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}.$$

Takže

$$\begin{aligned} \iint_M 1 \, dS &= \iint_U \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dS = \left[\begin{array}{l} x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi \\ (r, \varphi) \in \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \, d\varphi = \\ &= \left(\int_0^3 r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \left[\frac{(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_{r=0}^{r=3} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} \left(37^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Příklad 9.2. Spočítejte

$$\iint_M z \, dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

Řešení:

Integrál z funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f \, dS = \iint_U f(\Phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \, dS,$$

kde Φ je opět vhodná parametrizace.

Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x + 1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 + \cos \varphi.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\begin{aligned} \iint_M f \, dS &= \iint_U z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} z \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2} \right) \, d\varphi = \\ &= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Příklad 9.3. Spočítejte

$$\iint_M yz \, dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$ a $u^2 + v^2 \leq 1$.

Řešení:

Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U : \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

a $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (uv, u + v, u - v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, že druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v + u, v - u) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\begin{aligned} \iint_M yz \, dS &= \iint_U (u^2 - v^2) \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \, dS = \left[\begin{array}{l} u=r \cos \varphi \\ v=r \sin \varphi \\ (r, \varphi) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sqrt{2r^2 + 4} \, dr \, d\varphi = \left(\int_0^3 r^3 \sqrt{2r^2 + 4} \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2 - z^2}{4}$ a $1 \geq u^2 + v^2 = \frac{z^2 + y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \quad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

Příklad 9.4. Spočítejte

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \, dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:

Plochu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ \& } z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2 \sin \vartheta \cos \varphi, 2 \sin \vartheta \sin \varphi, 2 \cos \vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2 \sin \vartheta \sin \varphi, 2 \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (2 \cos \vartheta \cos \varphi, 2 \cos \vartheta \sin \varphi, -2 \sin \vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4 |\sin \vartheta|.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \iint_M x^2 z + y^2 z \, dS &= \iint_U (8 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \cdot 4 |\sin \vartheta| \, dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \\ &= 2\pi \left[8 \sin^4 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi. \end{aligned}$$

10 Integrální věty

Příklad 10.1. Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y, z) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ , která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Podle Greenovy věty tedy pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \left| \begin{smallmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{smallmatrix} \right|$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Máme tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS = \iint_M 2xy^2 \, dS = \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

Příklad 10.2. Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ a sféru $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:

Orientace okraje ∂M je v tomto případě daná vnější normálou.

V našem případě máme

$$M : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

a

$$\partial M : x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

Gaussovu větu teď ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

a

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV &= \iiint_M 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \left[\begin{array}{l} x=r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y=r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z=r \cos \vartheta \\ (r, \varphi, \vartheta) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \end{array} \right] = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 \cdot |r^2 \sin \vartheta| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \left(\int_0^1 3r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi . \end{aligned}$$

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci ∂M pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta),$$

s definičním oborem

$$U : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \cdot (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) = -\sin \vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta).$$

Vektor $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj. $-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$.

Dosazením tedy obdržíme

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_U \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) dS = \iint_U \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot (\sin \vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta)) \, dS = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \left(\sin^4 \vartheta \cos^4 \varphi + \sin^4 \vartheta \sin^4 \varphi + \cos^4 \vartheta \right) d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \left(\int_0^\pi \sin^5 \vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi \, d\varphi \right) + \left(\int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) . \end{aligned}$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi$$

a

$$\int_0^\pi \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \vartheta \, d\vartheta .$$

Pro $n \geq 2$ spočítáme tedy integrál

$$\begin{aligned} A_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha \, d\alpha = [-\cos \alpha \cdot \sin^{n-1} \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \, d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n. \end{aligned}$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_2 = \frac{\pi}{4}$ a $A_0 = 1$. Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \dots = \left(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left[-\frac{\cos^5 \vartheta}{5}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}\right) \cdot (2\pi) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

Příklad 10.3. Spočítejte tok pole $\vec{F} = (e^y, ye^x, x^2y)$ částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.

Řešení:

Plocha M je grafem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ \& } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy “nahoru.” Máme tak

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_U \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint_U (e^y, ye^x, x^2y) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (-2xe^y - 2y^2e^x + x^2y) \, dx \, dy = \int_0^1 -e^y - 2y^2(e^1 - 1) + \frac{y}{3} \, dy = -(e-1) - \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{6} = \\ &= \frac{11}{6} - \frac{5}{3}e. \end{aligned}$$

Příklad 10.4. Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (3x, xy, 2xz)$ a krychli $M = \langle 0, 1 \rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a

$$\iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3 + 3x) \, dx \, dy \, dz = \left(\int_0^1 3 + 3x \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 1 \, dy \, dz \right) = \frac{9}{2}.$$

Integrál přes okraj rozdělíme na jednotlivé stěny $(\partial M)_i$, $i = 1, \dots, 6$ a pro vztah

$$I_i := \iint_{(\partial M)_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{U_i} \vec{F}(\Phi_i) \cdot \vec{n}_i \, dS$$

použijeme parametrizace Φ_i , kde $U_i = \langle 0, 1 \rangle^2$, a příslušné orientace $(\partial M)_i$ pomocí normovaných normálových vektorů \vec{n}_i :

$$\Phi_1(x, y) = (x, y, 1), \quad \vec{n}_1 = (0, 0, 1), \quad I_1 = \int_0^1 \int_0^1 (3x, xy, 2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 2x \, dx \, dy = 1$$

$$\Phi_2(x, y) = (x, y, 0), \quad \vec{n}_2 = (0, 0, -1), \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 (3x, xy, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \, dx \, dy = 0$$

$$\Phi_3(x, z) = (x, 1, z), \quad \vec{n}_3 = (0, 1, 0), \quad I_3 = \int_0^1 \int_0^1 (3x, x, 2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dz = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_4(x, z) = (x, 0, z), \quad \vec{n}_4 = (0, -1, 0), \quad I_4 = \int_0^1 \int_0^1 (3x, 0, 2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx \, dz = 0$$

$$\Phi_5(y, z) = (1, y, z), \quad \vec{n}_5 = (1, 0, 0), \quad I_5 = \int_0^1 \int_0^1 (3, y, 2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, dy \, dz = 3$$

$$\Phi_6(y, z) = (0, y, z), \quad \vec{n}_6 = (-1, 0, 0), \quad I_6 = \int_0^1 \int_0^1 (0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, dy \, dz = 0.$$

Tedy

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = I_1 + \dots + I_6 = 1 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

Příklad 10.5. Vypočítejte průtok kapaliny, která proteče oblastí $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq a$ (kde $a > 0$, $R > 0$ jsou parametry), je-li rychlost proudění $\vec{F} = (xz, yz, xy)$.

Řešení:

Oblast M je válec o poloměru R a výšce a . Integrály v Gaussově větě udávají rozdíl toho, co do oblasti přiteče a co z oblasti odeče (např. pro konstantní proudění je přítok roven odtoku a integrály jsou nulové), ale neříkají nám kolik kapaliny se celkově v objemu vymění (např. při velkém konstantním proudění to bude více než při malém). Abychom toto zjistili, je potřeba v integrálu toku pole přes povrch vzít zvlášť kladnou část integrované funkce, tj. $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co odtéká), a zvlášť zápornou část, tj. $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co vtéká).

Nechť \vec{n} představuje vnější normované normálové pole na okraji ∂M . Pak pro

$$\text{odtok} := \iint_{\partial M} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\} \, dS$$

$$\text{přítok} := \left| \iint_{\partial M} \min\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\} \, dS \right|$$

máme podle Gaussovy věty

$$\text{odtok} - \text{přítok} = \iint_{\partial M} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV.$$

Výpočet toku přes ∂M rozdělíme na horní podstavu $(\partial M)_1$, dolní podstavu $(\partial M)_2$ a plášť $(\partial M)_3$. Pro horní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_1(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, a) \quad \text{pro} \quad U_1 = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \iint_{(\partial M)_1} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}_1\} \, dS &= \iint_{(\partial M)_1} \max\{0, xy\} \, dS = 2 \iint_{\langle 0, R \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, dS = \\ &= \left(\int_0^R r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi \right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{-\cos 2\varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{4}. \end{aligned}$$

Podobně pro dolní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \quad \text{pro} \quad U_2 = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_2 = (0, 0, -1).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \iint_{(\partial M)_2} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}_2\} \, dS &= \iint_{(\partial M)_2} \max\{0, -xy\} \, dS = 2 \iint_{\langle 0, R \rangle \times \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle} -r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, dS = \\ &= \left(\int_0^R r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2\varphi \, d\varphi \right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi} = \frac{R^4}{4}. \end{aligned}$$

Konečně pro plášť použijeme parametrizaci

$$\Phi_3(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \quad \text{pro} \quad U_3 = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle.$$

Pak je

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a vektorový součin

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$$

odpovídá vnější orientaci. Tedy

$$\begin{aligned} \iint_{(\partial M)_3} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\} \, dS &= \iint_{U_3} \max\left\{0, \vec{F}(\Phi_3(\varphi, z)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)\right\} \, dS = \\ &= \iint_{U_3} \max\left\{0, (zR \cos \varphi, zR \sin \varphi, R^2 \sin \varphi \cos \varphi) \cdot \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \, dS = \iint_{U_3} \max\{0, zR^2\} \, dS = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} zR^2 \, d\varphi \, dz = \left(\int_0^a zR^2 \, dz \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \pi R^2 a^2. \end{aligned}$$

Celkově tedy máme

$$\text{odtok} = \frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2.$$

Přítok pak spočítáme pomocí Gaussovy věty:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2z$$

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV &= \iiint_M 2z \, dV = \left[\begin{array}{c} x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi \\ (r, \varphi, z) \in \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle \end{array} \right] = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^R 2zr \, dr \, d\varphi \, dz = \left(\int_0^a z \, dz \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^R 2r \, dr \right) = \pi R^2 a^2. \end{aligned}$$

Tedy

$$\text{přítok} = \text{odtok} - \pi R^2 a^2 = \frac{R^4}{2}.$$

Závěr: Do oblasti přiteče (za jednotku času) $\frac{R^4}{2}$ objemových jednotek kapaliny a odeče $\frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny. Oblast tak za jednotku času ztratí $\pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny.

Příklad 10.6. Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a M je sféra $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ s vnější orientací a $R > 0$ je parametr.

Řešení:

Tok vektorového pole $\vec{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS,$$

kde $\Phi : U \rightarrow M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M . (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Integrál spočítáme podle definice (ale lze použít i Gaussovu větu, protože jde o uzavřenou plochu). Plochu M zparametrizujeme přirozeně pomocí posunutých sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad x - a &= R \sin \vartheta \cos \varphi \\ y - b &= R \sin \vartheta \sin \varphi \\ z - c &= R \cos \vartheta \end{aligned}$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \left(-R \sin \vartheta \sin \varphi, R \sin \vartheta \cos \varphi, 0 \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \left(R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi, -R \sin \vartheta \right)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -R \sin \vartheta \cdot (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta) = -R \sin \vartheta \cdot (x - a, y - b, z - c).$$

Vektor $(x - a, y - b, z - c)$ míří směrem od bodu (a, b, c) k bodu $(x, y, z) \in M$. Takže vektorový součin má opačný směr, než zadaná vnější orientace sféry M . Proto místo $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ vezmeme v integrálu $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$.

Pro skalární součin vektoru v integrálu tedy máme

$$\begin{aligned} & (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \\ & = R \sin \vartheta \cdot \left((a + R \sin \vartheta \cos \varphi)^2, (b + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2, (c + R \cos \vartheta)^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix} = \\ & = R^2 \sin \vartheta \cdot \left[2R(a \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + b \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + c \cos^2 \vartheta) + c^2 \cos \vartheta + R^2 \cos^3 \vartheta + \dots \right] \end{aligned}$$

kde tečky znamenají výrazy, ze kterých se dá vytknout buď pouze "sin φ " nebo pouze "cos φ " a to v liché mocnině. V integrálu pak tyto výrazy dají nulu. Takže už můžeme psát

$$\begin{aligned} & \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \\ & = \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi}} R^2 \sin \vartheta \cdot \left[2R(a \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + b \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + c \cos^2 \vartheta) + c^2 \cos \vartheta + R^2 \cos^3 \vartheta \right] d\varphi d\vartheta = \\ & = \int_0^\pi R^2 \sin \vartheta \cdot \left[2R(\pi a \sin^2 \vartheta + \pi b \sin^2 \vartheta + 2\pi c \cos^2 \vartheta) + 2\pi c^2 \cos \vartheta + 2\pi R^2 \cos^3 \vartheta \right] d\vartheta = \\ & = 2R^3 \pi (a + b) \cdot \left(\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \right) + 4R^3 \pi c \cdot \left(\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) + \\ & \quad + R^2 \pi c^2 \cdot \left(\int_0^\pi \sin(2\vartheta) d\vartheta \right) + 2R^4 \pi \cdot \left(\int_0^\pi \cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ & = 2R^3 \pi (a + b) \cdot \left(\int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right) + 4R^3 \pi c \cdot \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} + 2R^4 \pi \cdot \left[-\frac{\cos^4 \vartheta}{4} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \\ & = 2R^3 \pi (a + b) \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) + 4R^3 \pi c \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi R^3}{3} (a + b + c). \end{aligned}$$

Příklad 10.7. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde

(i) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ a M je řez kostky $J = \langle 0, a \rangle^3$ rovinou $x + y + z = \frac{3a}{2}$. Orientace je určena pořadím bodů $(\frac{a}{2}, a, 0)$, $(a, 0, \frac{a}{2})$ a $(a, \frac{a}{2}, 0)$.

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ a M je trojúhelník $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ a $(0, 0, a)$. Orientace je daná uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení:

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

- (i) Množina M je pravidelný šestiúhelník s hranou o délce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Dále máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = (-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y) .$$

Podle zadání je normálové vektorové pole orientované plochy M určené (normovaným) vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ (směru vektoru také odpovídá zadání). K výpočtu využijeme

- definici toku pole plochou,
- toho, že plocha splňuje rovnici $x + y + z = \frac{3a}{2}$ a
- toho, že známe velikost plochy pravidelného šestiúhelníku:

$$\begin{aligned} \iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_M (\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}) dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_M x + y + z dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_M \frac{3a}{2} dS = \\ &= -2\sqrt{3}a \iint_M 1 dS = -2\sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3 . \end{aligned}$$

- (ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Množina M je rovnostranný trojúhelník s hranou o délce $\sqrt{2}a$ a leží v rovině $x + y + z = a$. Dále máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = (-2z, -2x, -2y) .$$

Normálové vektorové pole orientované plochy M je opět $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. Výpočet provedeme podobně:

$$\begin{aligned} \iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_M (\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}) dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_M x + y + z dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_M a dS = \\ &= -\frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = -a^3 . \end{aligned}$$

Příklad 10.8. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, x, e^{xy} \cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Máme

$$M : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad z \geq 0$$

a

$$\partial M : x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ pro $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$$

$$\iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (0, \cos \alpha, e^{\sin \alpha \cos \alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi .$$

Příklad 10.9. Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$ povrchem krychle $M = \langle 0, 1 \rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:

Gaussova věta

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

dává do souvislosti tok pole \vec{F} přes okraj ∂M oblasti M v \mathbb{R}^3 s integrálem přes tuto oblast M . Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole \vec{F} a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Pro použití Gaussovy věty předpokládáme vnější orientaci povrchu krychle ∂M . Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 9x^2z^2$$

a

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 9x^2z^2 \, dx \, dy \, dz = \left(\int_0^1 9x^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 1 \, dy \right) \cdot \left(\int_0^1 z^2 \, dz \right) = 1.$$

11 Fourierovy řady

Příklad 11.1. Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = t^2$ na $[-1, 1]$.

Řešení:

Definice: Nechť f je T -periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její **Fourierovu řadu** definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) \, dt, \quad \text{for } k \in \mathbb{N}_0,$$

a

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) \, dt, \quad \text{for } k \in \mathbb{N}.$$

Toto pak zapisujeme jako

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)].$$

Tvrzení: (i) Pokud f je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) \, dt$.

(ii) Pokud f je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) \, dt$.

Pro naši funkci f máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Dostáváme tak

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \, dt = \int_{-1}^1 f(t) \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \cos(k\pi t) \, dt = \frac{4 \cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2},$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \sin(k\pi t) \, dt = 0.$$

Tudíž máme

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t).$$

Jordanovo kritérium: Nechť f je T -periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T . Předpokládejme, že její derivace f' je po částech spojitá na I .

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \right) = \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je f navíc spojitá \mathbb{R} , pak $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ konverguje k f *stejněměrně*.

Pro náš příklad tudíž pro $t \in [-1, 1]$ dostáváme, že $t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t)$.

Speciálně pro $t = 0$ pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro $t = 1$ pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Příklad 11.2. Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1), \\ 0 & , t \in [1, 2). \end{cases}$$

Určete

- (i) Fourierovu řadu
 - (ii) sinovou Fourierovu řadu
 - (iii) kosinovou Fourierovu řadu
- příslušného periodického rozšíření funkce f .

Řešení:

Definice: Nechť f je funkce spojitá na $[0, L)$. Její *sinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího lichého periodického rozšíření a její *kosinová Fourierova řada* je definována jako Fourierova řada jejího sudého periodického rozšíření.

Tvrzení: Sinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $a_k = 0$, $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin(k\omega t) dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Kosinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty $b_k = 0$, $a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(k\omega t) dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Poznámka: Součet sinové Fourierovy řady je $T = 2L$ -periodické rozšíření funkce f do liché funkce. Součet kosinové Fourierovy řady je $T = 2L$ -periodické rozšíření funkce f do sudé funkce. Oba součty je potřeba ještě upravit pomocí Jordanova kritéria.

V našem případě je

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1) \\ 0 & , t \in [1, 2) \end{cases}$$

- (i) Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \pi$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(k\pi t) dt = \left[\frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(k\pi t) dt = \left[-\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] = \\ &= \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & , k \text{ sudé}, \\ \frac{2}{(2k+1)\pi} & , k \text{ liché}. \end{cases} \end{aligned}$$

Takže

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] \sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t).$$

(ii) Pro sinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt = \left[-\frac{2}{k\pi} \cos\left(k \frac{\pi}{2} t\right) \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi} [\cos(k\pi) - \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right)].$$

Takže sinová Fourierova řada funkce f je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [(-1)^k - \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right)] \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right).$$

(iii) Pro kosinovou Fourierovu řadu funkce f máme: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt = \left[\frac{2}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right).$$

Takže kosinová Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k \frac{\pi}{2} t\right).$$

Speciálně platí $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi}$, takže řadu můžeme psát jako

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi} \cos\left((2k+1) \frac{\pi}{2} t\right).$$

Příklad 11.3. Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = \sin t$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.

Řešení:

Perioda naší funkce je $T = \frac{\pi}{2}$, takže $\omega = 4$. Funkce f není ani lichá ani sudá. Spočítáme koeficienty Fourierovy řady funkce f :

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{4}{\pi} [-\cos t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(4kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(4k+1)t - \sin(4k-1)t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\cos(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-4}{\pi(16k^2-1)}. \\
b_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin(4kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(4k+1)t + \cos(4k-1)t) dt = \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\sin(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\sin(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-16}{\pi(16k^2-1)}.
\end{aligned}$$

Takže dostáváme

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(16k^2-1)} (\cos 4kt + 4k \sin 4kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření naší funkce f není spojitě v bodech $t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech Fourierova řada konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = \frac{1}{2}$. Ve všech ostatních bodech konverguje řada k periodickému rozšíření funkce f podle Jordanova kritéria.

Příklad 11.4. Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = |t|$, $-1 \leq t < 1$.

Řešení:

Perioda rozšíření bude $T = 2$, takže $\omega = \frac{2\pi}{2}$. Rozšíření funkce f je sudé, takže $b_k = 0$. Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = 1; \\
a_k &= 2 \int_0^1 t \cos k\pi t dt = 2 \left[t \frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2} (\cos k\pi - 1).
\end{aligned}$$

Protože pro sudé k je $\cos k\pi = 1$, máme $a_k = 0$. Podobně, pro liché $k = 2n+1$ je $\cos(2n+1)\pi = -1$, takže $a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi^2(2n+1)^2}$.

Protože periodické rozšíření funkce f je spojitě, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém \mathbb{R} . Proto můžeme napsat dokonce

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi t, \quad -1 \leq t < 1.$$

Příklad 11.5. Určete sinovou Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce $f(t) = \sin t$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.

Řešení:

K určení sinové Fourierovy řady funkce definované na intervalu $[0, L)$, musíme začít s lichým rozšířením funkce f na interval $[-L, L)$.

Budeme tak mít $L = \frac{\pi}{2}$ a liché rozšíření naší funkce na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak bude opět funkce sinus. Proto sinová Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ je totéž jako Fourierova řada funkce $f(t) = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}$. Z lichosti plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(2k+1)t + \cos(2k-1)t) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Liché periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje sinová Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje sinová Fourierova řada k lichému periodickému rozšíření funkce f .

Příklad 11.6. Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in [0, 1), \\ -2 & , \quad t \in [1, 2). \end{cases}$$

Určete Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce f .

Řešení:

Pro Fourierovu řadu máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Určíme koeficienty:

$$a_0 = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 1 \, dt + \int_1^2 -2 \, dt \right) = -1;$$

$$a_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 \cos k\pi t \, dt - 2 \int_1^2 \cos k\pi t \, dt \right) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 \sin k\pi t \, dt - 2 \int_1^2 \sin k\pi t \, dt \right) = \frac{3}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ sudé}, \\ \frac{6}{k\pi} & , \quad k \text{ liché}. \end{cases}$$

Proto pro lichá čísla $k = 2n + 1$ dostaneme tvar

$$f \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\pi} [1 - (-1)^k] \sin k\pi t = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Literatura

Reference

- [1] J. Stewart: *Calculus*, Brooks-Cole, 1991.
- [2] G. Thomas, R. Finney: *Calculus and analytic geometry - Part 2*, Addison-Wesley, 1996.
- [3] J. Hamhalter, J. Tišer: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, ČVUT, 2005.
- [4] J. Hamhalter, J. Tišer: *Integrální počet funkcí více proměnných*, ČVUT, 2005.