1. Představení funkcí více proměnných

1.a Vícerozměrné prostory

Značení:

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Symbol \mathbb{R}^n značí prostor všech n-rozměrných vektorů s reálnými souřednicemi značených $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, také \bar{x} nebo třeba x. Čísla $x_i \in \mathbb{R}$ jsou **souřadnice** či **složky**.

operace s vektory:

Pro vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme **násobek** jako $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Pro vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jejich **součet** jako $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Pro $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jejich skalární součin jako $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

metrika:

Pro vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jeho (Euklidovskou) normu jako $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Pro vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jejich (**Euklidovskou**) vzdálenost jako $||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Vektorovému prostoru \mathbb{R}^n s euklidovskou normou říkáme **Euklidovský prostor** dimenze n, někdy se značí $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ či E_n . My budeme psát jen \mathbb{R}^n , protože jiné normy neuvažujeme.

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Euklidovská norma splňuje následující vlastnosti:

- (i) Pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\max |x_i| \le ||\vec{x}|| \le \sqrt{n} \max |x_i|$.
- (ii) Pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.
- (iii) Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $||\vec{x} + \vec{y}|| \le ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$. (trojúhelníková nerovnost)
- (iv) Pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.
- (v) Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$. (Cauchy-Schwarzova nerovnost)
- (vi) Pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí: $\|\vec{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$.

Fakt.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pro $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi vektory \vec{x} a \vec{y} .

Poznámka: Skalární součin je míra kolmosti. Platí $\vec{x} \bullet \vec{y}$ právě tehdy, když $\vec{x} \perp \vec{y}$. Naopak pro \vec{x}, \vec{y} rovnoběžné nabývá součin maximální možné hodnoty (viz Cauchy-Schwarz výše), $\vec{x} \bullet \vec{y} = \pm ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||$, znaménko záleží na tom, zda je orientace shodná nebo opačná.

Definice.

Nechť M je podmnožina \mathbb{R}^n .

Řekneme, že je **omezená**, jestliže existuje K>0 tak, aby $\|\vec{x}\| \leq K$ pro všechna $\vec{x} \in M$.

Definujeme **diametr** M jako diam $(M) = \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\|; \ \vec{x}, \vec{y} \in M\}.$

Evidentně je množina M omezená právě tehdy, když diam $(M) < \infty$.

Definice.

Nechť $\vec{a} \in I\!\!R^n$ a $\varepsilon > 0$. Definujeme

- ε -okolí bodu \vec{a} jako $U_{\varepsilon}(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; ||\vec{x} \vec{a}|| < \varepsilon\}.$
- prstencové ε -okolí bodu \vec{a} jako $P_{\varepsilon}(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ 0 < ||\vec{x} \vec{a}|| < \varepsilon\}.$

Poznámka: $U_R(\vec{a})$ je otevřená "koule" o poloměru R se středem v \vec{a} .

Definice.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a posloupnost vektorů $\{\vec{x}(k)\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Řekneme, že $\{\vec{x}(k)\}$ konverguje k \vec{x} nebo že \vec{x} je limita posloupnosti $\{\vec{x}(k)\}$, značeno $\lim_{k\to\infty}(\vec{x}(k)) = \vec{x}$ či jen $\vec{x}(k)\to\vec{x}$, jestliže $\lim_{k\to\infty}(\|\vec{x}(k)-\vec{x}\|) = 0$.

Ekvivalentně,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N : \|\vec{x}(k) - \vec{x}\| < \varepsilon$$

neboli

$$\forall U = U(\vec{x}) \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \ge N \colon \vec{x}(k) \in U.$$

Fakt.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a posloupnost vektorů $\{\vec{x}(k)\}\subseteq \mathbb{R}^n$, kde $\vec{x}(k)=(x(k)_1,\ldots,x(k)_n)$. Platí $\vec{x}(k)\to\vec{x}$ právě tehdy, když pro všechna $i=1,\ldots,n$ platí $x(k)_i\to x_i$.

Konvergence tedy funguje po souřadnicích.

Definice.

Nechť M je podmnožina \mathbb{R}^n , řekneme, že $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je

- vnitřní bod M, jestliže existuje $U = U_{\varepsilon}(\vec{x})$ takové, že $U \subseteq M$.
- vnější bod M, jestliže existuje $U = U_{\varepsilon}(\vec{x})$ takové, že $U \cap M = \emptyset$.
- hraniční bod M, jestliže pro každé $U = U_{\varepsilon}(\vec{x})$ platí $U \cap M \neq \emptyset$ a $U M \neq \emptyset$.
- izolovaný bod M, jestliže existuje $U = U_{\varepsilon}(\vec{x})$ takové, že $U \cap M = \{\vec{x}\}.$
- hromadný bod M, jestliže pro každé $P = P_{\varepsilon}(\vec{x})$ platí $P \cap M \neq \emptyset$.

Poznámka: Je-li \vec{x} hromadný bod M, pak je nutně dokonce $P \cap M$ nekonečná. Ekvivalentně, \vec{x} je hromadný bod M, pokud existuje posloupnost $\{\vec{x}(k)\}\subseteq M-\{\vec{x}\}$ taková, že $\vec{x}(k)\to \vec{x}$.

Definice.

Nechť M je podmnožina \mathbb{R}^n . Definujeme její

- vnitřek M^O jako množinu všech vnitřních bodů M.
- hranici ∂M jako množinu všech hraničních bodů M.
- uzávěr \overline{M} jako $M \cup \partial M$.

Uzávěr je množina všech bodů, ke kterým se dá libovolně blízko dojít pomocí bodů z M.

$$\vec{x} \in \overline{M} \iff \text{existuje posloupnost } \{\vec{x}(k)\} \subseteq M \text{ aby } \vec{x}(k) \to \vec{x}.$$

To samozřejmě zahrnuje i body z M, k takovému bodu se dá dojít libovolně blízko pomocí jeho samého.

Definice.

Nechť M je podmnožina \mathbb{R}^n .

Řekneme, že M je **otevřená**, jestliže $M^O = M$.

Řekneme, že M je **uzavřená**, jestliže $\overline{M} = M$.

Poznámka: Množina je otevřená, je-li každý její bod vnitřní.

Množina je uzavřená, jestliže je každý její hromadný bod částí množiny. Jinými slovy, pro libovolnou posloupnost $\{\vec{x}(k)\}\subseteq M$, která konverguje k nějakému \vec{x} , musí platit $\vec{x}\in M$.

Fakt.

Jestliže má množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hromadný bod, pak musí být nekonečná.

Neplatí naopak, například \mathbb{N} je nekonečná podmnožina \mathbb{R}^1 , ale nemá hromadný bod.

Věta.

Každá nekonečná omezená podmnožina \mathbb{R}^n má alespoň jeden hromadný bod.

Definice.

Nechť M je podmnožina \mathbb{R}^n . Řekneme, že je **souvislá**, jestliže neexistují otevřené množiny $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že $M \subseteq G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap M \neq \emptyset$, $G_2 \cap M \neq \emptyset$ a $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Věta.

Jediné souvislé podmnožiny *IR* jsou intervaly.

Vícerozměrné intervaly v \mathbb{R}^n : $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde I_i jsou intervaly v \mathbb{R} . (obdélník, hranol, atd.)

Platí: Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je souvislá právě tehdy, jestliže pro libovolné dva body $\vec{x}, \vec{y} \in M$ existuje nepřerušovaná čára (viz spojité parametrické křivky později) z \vec{x} do \vec{y} , která celá leží v M.

Funkce více proměnných (C) pHabala 2010

Definice.

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **oblast**, jestliže je otevřená a souvislá.

Definice.

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Definujeme **úsečku** $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ jako množinu $\{t\vec{x} + (1-t)\vec{y}; t \in \langle 0, 1 \rangle\}$.

Definice.

Nechť M je podmmnožina \mathbb{R}^n . Řekneme, že je **konvexní**, jestliže pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ platí $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \subseteq M$.

1.b Funkce

Definice.

Funkcí více proměnných rozumíme libovolné zobrazení $f: D \mapsto \mathbb{R}$, kde D = D(f) je nějaká podmnožina \mathbb{R}^n . Není-li D explicitně dáno, pak jako definiční obor D(f) bereme množinu všech $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pro kterou má $f(\vec{x})$ smysl.

Pro tyto funkce zavádíme obor hodnot $R(f) = \{f(\vec{x}); \ \vec{x} \in D(f)\}.$

Obecněji, pro $M \subseteq D(f)$ definujeme obraz M vzhledem k f jako $f[M] = \{f(\vec{x}); \vec{x} \in M\}.$

Příklad.

Určíme D(f) těchto funkcí:

- a) $f(x,y) = x^2 \sin(x+y)$: evidentně $D(f) = \mathbb{R}^2$.
- b) $f(x,y) = \sqrt{9 x^2 y^2}$: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \le 3^2\},$

je to kruh se středem v počátku o poloměru 3.

- c) $f(x, y, z) = \sqrt{9 x^2 y^2 z^2}$: $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + y^2 + z^2 \le 3^2\},$
- je to koule se středem v počátku o poloměru 3.
- d) $f(x,y) = \frac{e^{x+y}}{x-y}$: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ y \neq x\},$
- je to rovina s vynechanou přímkou—hlavní diagonálou.
- e) $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \cdot x \ge 0\}$,
- je to uzavřený první a třetí kvadrant v rovině.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Definujeme **graf** f jako $G(f) = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y = f(\vec{x})\}.$

Ke znázornění grafu tedy potřebujeme n+1 rozměrů. Důsledek: Problém se znázorněním pro n=2, nemožné pro n>3.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme příslušnou **hladinu konstantnosti** $H_c = \{\vec{x} \in D(f); \ f(\vec{x}) = c\}.$

Z definice vidíme, že $H_c \subseteq D(f)$, takže na znázornění hladin nám stačí jen n rozměrů, což je pokrok oproti grafům. Známe je všichni, jsou to vrstevnice na mapě.

Jiná metoda: řezy. Nechť N je přímka v \mathbb{R}^n , pak restrikce f na N vytváří funkci jedné proměnné.

Příklad.

a)
$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$
: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \le 2^2\}$, evidentně $R(f) = \langle 0, 2 \rangle$.

Nejprve zkusíme obecné metody:

Pro $c \in \langle 0, 2 \rangle$ je hladina konstantnosti křivka $x^2 + y^2 = 4 - c^2$, tedy kružnice o poloměru $\sqrt{4 - c^2}$. Při zvětšujícím c se kružnice zmenšují, tak vypadají kopečky.

Řezy: Zvolíme-li x=0, pak se ptáme, jak vypadá graf nad osou y. Dostáváme $f(0,y)=\sqrt{4-y^2}$, grafem je horní půlkružnice. Pro jiná pevně zvolená x jsou grafem menší půlkružnice $f(x_0,y)=\sqrt{(4-x_0^2)-y^2}$. Takto tedy vypadají řezy svislými rovinami rovnoběžnými s osou y.

Funguje to i symetricky, takže i svislé řezy grafem rovnoběžné s osou x jsou horní půlkružnice. To o tvaru grafu ledacos napoví.

Teď metody speciální:

Pokud máme štěstí, je funkce nějak postavena z výrazu $x^2 + y^2$. To je vzdálenost bodu (x,y) od počátku na druhou. Pokud opravdu funkce pracuje jen s tímto výrazem, tak to znamená, že má stejnou hodnotu ve všech bodech stejně vzdálených od počátku, tedy na na kružnici kolem počátku. Jinými slovy, graf musí být imunní vůči rotaci okolo osy z. Naše funkce to splňuje: $f(x,y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$. Víme, že nad osou y (či nad osou x) graf vypadá jako horní půlkružnice, celý graf tedy získáme její rotací a už víme, jak vypadá. Závěr: Grafem je horní polosféra (dóm).

Jiná speciální metoda: Tvar objektu je dán rovnicí $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Někdy se dá takováto rovnice přepsat do tvaru, který poznáme. Zde to je možné, umocněním a malou reorganizací dostaneme $x^2+y^2+z^2=2^2$. Toto je rovnice sféry o poloměru 2. Náš graf je tedy její součástí, ovšem ještě musíme zjistit, jakou. Protože D(f) je kruh v rovině xy o poloměru 2, bude graf zabírat celou rozlohu oné sféry, ale sféra jako taková to být nemůže, protože ta má pro většinu bodů (x,y) dvě různé hodnoty. Musíme si tedy vybrat, jestli je grafem horní nebo dolní polosféra. To poznáme z původní rovnice $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, je to ta horní.

Tato metoda je nespolehlivá (většinu rovnic, které lze vymyslet, neznáme) a zároveň velice užitečná (Když někdo zadává funkci ve škole, tak si většinou vybere něco pěkného).

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$: $D(f) = \mathbb{R}^2$, hladiny konstantnosti: $x^2 + y^2 = c$ neboli zvětšující se kružnice.

Řezy: Zvolíme-li x=0, dostáváme $f(0,y)=y^2$, grafem je parabola. Pro jiná x jsou grafem paraboly posunuté nahoru tím více, čím dále jsme od počátku, $f(x_0,y)=x_0^2+y^2$, vrcholy těchto parabol jsou samy na parabole. Funguje to i symetricky.

Zde zafunguje rotační trik krásné, grafem je parabola zrotovaná okolo osy z. Závěr: Graf je paraboloid.

c) $f(x,y)=x^2-y^2$: $D(f)=\mathbb{R}^2$, hladiny konstantnosti: $x^2-y^2=c$ neboli hyperboly se zvětšujícím se poloměrem.

Řezy: Zvolíme-li x = 0, dostáváme $f(0, y) = -y^2$, grafem je parabola otočená dolů. Pro jiná x jsou grafem dolů otočené paraboly posunuté nahoru tím více, čím dále jsme od počátku, $f(x_0, y) = x_0^2 - y^2$, vrcholy těchto parabol jsou na parabole otočené vzhůru.

Zvolíme-li y=0, dostáváme $f(x,0)=x^2$, grafem je parabola. Pro jiná y jsou grafem paraboly posunuté dolů tím více, čím dále jsme od počátku, $f(x,y_0)=x^2-y_0^2$, vrcholy těchto parabol jsou na parabole otočené dolů.

Pomocné metody: Rotační symetrii nemáme, rovnici $z=x^2-z^2$ také všichni neznají. Nezbývá než si o tvaru udělat představu z řezů.

Závěr: Je to zvláštní graf, který stojí za nakreslení.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Řekneme, že f je **omezená**, jestliže existuje K > 0 takové, že $|f(\vec{x})| \leq K$ pro všechna $\vec{x} \in D(f)$.

Nechť $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že f je **omezená** na M, jestliže existuje K > 0 takové, že $|f(\vec{x})| \le K$ pro všechna $\vec{x} \in M$.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod $D(f), L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že L je limita f pro \vec{x} jdoucí k \vec{a} , značeno $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) = L$, jestliže

$$\forall U = U(L) \; \exists P = P(\vec{a}) \colon f[P \cap D(f)] \subset U.$$

Pro ilustraci tohoto pojmu je lepší si funkce představit způsobem, který se používá pro obecné zobrazení (šipky $D \mapsto I\!\!R$).

Ukážeme, že ve více dimenzích funguje limita podobně jako v jedné. Hned na začátku ale narazíme na jeden podstatný rozdíl. Bod \vec{a} leží v D(f), což je vícedimenzionální objekt (třeba část roviny), takže se k němu lze přibližovat mnoha způsoby, nejen zleva či zprava (tyto pojmy v více dimenzích nemají ani smysl). Potřebujeme tedy obecnější pojem.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod $D(f), L \in \mathbb{R}^*$. Nechť $N \subseteq \mathbb{R}^n$ je taková množina, že \vec{a} je hromadný bod $N \cap D(f)$. Řekneme, že L je limita f pro \vec{x} jdoucí k \vec{a} vzhledem k N, značeno $\lim_{n \to \infty} (f(\vec{x})) = L$, jestliže

$$\forall U = U(L) \; \exists P = P(\vec{a}) \colon f[P \cap N \cap D(f)] \subseteq U.$$

Často se jako N berou různé křivky, po kterých se do \vec{a} dojede. Teď přijde věta odpovídající větě o limitách zleva a zprava, rovnou také ukážeme i zobecnění Heineho věty.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod D(f), $L \in \mathbb{R}^*$.

(i) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) = L$ právě tehdy, když $\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in N}} (f(\vec{x})) = L$ pro libovolnou $N \subseteq \mathbb{R}^n$ takovou, že \vec{a} je hromadný

bod $N \cap D(f)$.

(ii) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) = L$ právě tehdy, když $\lim_{k \to \infty} (f(\vec{x}(k))) = L$ pro libovolnou posloupnost $\{\vec{x}(k)\} \subseteq D(f) - \{\vec{a}\}$ takovou, že $\vec{x}(k) \rightarrow \vec{a}$.

Příklad.

a) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y^4} \rightarrow 0$ v (0,0), neboť pro $|y| \leq 1$ můžeme odhadovat

$$|f| \le \sqrt{2x^2 + y^2} \le \sqrt{2x^2 + 2y^2} = \sqrt{2} ||(x, y)||$$

a $\|(x,y)\| \to 0,$ závěr pak plyne ze srovnávací věty (viz níže).

b) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, limita v (0,0)? Zkusíme po přímkách, po přímce y=kx pošleme $x\to 0$ a dostaneme $f(x,y) \to \frac{k^2}{1+k^4}$, výsledek tedy záleží na tom, z které strany se po přímce blížíme k počátku. Závěr: Limita f v (0,0) neexistuje.

c) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$, limita v (0,0)? Zkusíme po přímkách, y=kx a $x\to 0$ dává $f(x,y)\to 0$, že by byla limita nula? Zkusíme jít po parabole, když $y=x^2$ tak $f(x,y)\to \frac{1}{2}$, limita f v (0,0) neexistuje.

d)
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \text{ v } (0,0), \text{ nebof } |f| \le \frac{|x| \cdot |y|}{\|(x,y)\|} \le |y| \to 0.$$

Teď přijde pár vět, které jsou docela evidentním zobecněním z jedné proměnné.

Věta. (o limitě a operacích)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ a $g: D(g) \mapsto \mathbb{R}$ jsou funkce, kde $D(f), D(g) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$. Pak platí:

(i)
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{d}} ((f+g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{d}} (f(\vec{x})) + \lim_{\vec{x} \to \vec{d}} (g(\vec{x})),$$

(ii)
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left((f - g)(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left(f(\vec{x}) \right) - \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left(g(\vec{x}) \right)$$

(iii)
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f \cdot g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) \cdot \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x}))$$

Nechť
$$\vec{a}$$
 je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$. Pak pl
(i) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f+g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) + \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x})),$
(ii) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f-g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) - \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x})),$
(iii) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f \cdot g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) \cdot \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x})),$
(iv) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (\frac{f}{g}(\vec{x})) = \frac{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x}))}{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x}))},$
(v) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f^g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x}))^{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x}))},$
pokud mají pravé strany smysl.

$$(\mathbf{v}) \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((f^g)(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x}))^{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x}))},$$

pokud mají pravé strany smysl.

Věta. (o limitě složené funkce)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod D(f), nechť $h: P \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde P je nějaké prstencové okolí v \mathbb{R} bodu $b = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})).$

Předpokládejme, že existuje $Q=P(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{x}) \neq \vec{b}$ pro $\vec{x} \in Q \cap D(f)$. Pak $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} ((h \circ f)(\vec{x})) = \lim_{t \to b} (h(t)).$

Prakticky vzato, $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left(h(f(\vec{x})) \right) = h \left[\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left(f(\vec{x}) \right) \right]$, pokud má výraz na pravé straně smysl, například pro hspojitou na U(b).

Ve více dimenzích platí i zobecněné verze klasických vět o vlastnostech limity.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je hromadný bod D(f). Jestliže limita f v \vec{a} konverguje, tak je f omezená na nějakém prstencovém okolí \vec{a} . Věta. (o limitě a srovnání)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ a $g: D(g) \mapsto \mathbb{R}$ jsou funkce, kde $D(f), D(g) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$.

(i) Jestliže existuje $P = P(\vec{a})$ takové, že $f \leq g$ na P, a f i g mají limitu v \vec{a} ,

pak $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) \le \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x}))$. (ii) Jestliže existuje $P = P(\vec{a})$ takové, že $|f| \le g$ na P, a $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (g(\vec{x})) = 0$, pak i $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) = 0$.

Věta. (o sevření)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}, g: D(g) \mapsto \mathbb{R}$ a $h: D(h) \mapsto \mathbb{R}$ jsou funkce, kde $D(f), D(g), D(h) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

Jestliže existuje $P=P(\vec{a})$ takové, že $f\leq g\leq h$ na P, a existuje $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(f(\vec{x})\right)=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(h(\vec{x})\right)=L$, pak existuje $\mathrm{i} \ \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \bigl(g(\vec{x}) \bigr) = L.$

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a} \in D(f)$ je hromadný bod D(f). Řekneme, že f je **spojitá** v \vec{a} , jestliže $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (f(\vec{x})) = f(\vec{a})$.

Proč je v předpokladu podmínka s hromadným bodem? Druhou možností je, že \vec{a} je izolovaný bod D(f) a pak nemá smysl o spojitosti mluvit, protože graf f se k $f(\vec{a})$ nemá šanci přiblížit, je to jen osamělý bodík, okolo kterého je prostor bez grafu. Má to obdobu v jedné dimenzi, máme-li funkci definovanou na množině $(0,1) \cup \{2\}$, tak se graf na (0,1) nemůže už z principu přiblížit k tečce nad x=2. Nemá pak smysl se ptát, zda tam graf navazuje nebo ne.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq D(f)$, jestliže je restrikce f na množinu M spojitá ve všech bodech M, které jsou hromadnými body M.

Řekneme, že funkce je spojitá, jestliže je spojitá na svém definičním oboru.

Fakt.

Funkce vytvořené pomocí elementárních funkcí, algebraických operací a skládání jsou spojité.

a)
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x > y; \\ 1, & x \le y. \end{cases}$$

Příklad.
a)
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x > y; \\ 1, & x \le y. \end{cases}$$
Funkce je nespojitá na přímce $y = x$.
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \ne (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Tato je v $(0,0)$ spojitá vůči přímkám s

Tato je v (0,0) spojitá vůči přímkám skrz počátek, ale není spojitá v (0,0), neboť je problém po parabolách, viz výše.

I tento pojem se chová obdobně jako v jedné proměnné.

Věta. (o extrémní hodnotě)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže je M omezená uzavřená podmnožina D(f) a fje spojitá na M, pak f nabývá svého minima a maxima na M, tedy existují $\vec{x}_{\min}, \vec{x}_{\max} \in M$ takové, že $f(\vec{x}_{\min}) = \inf\{f(\vec{x}); \ \vec{x} \in M\} \ a \ f(\vec{x}_{\max}) = \sup\{f(\vec{x}); \ \vec{x} \in M\}.$

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť M je omezená uzavřená podmnožina D(f) a f je spojitá na M.

- (i) Pak je f[M] uzavřená omezená množina.
- (ii) Jestliže je f prostá na M, pak je i inverzní funkce f_{-1} : $f[M] \mapsto M$ spojitá.

© pHabala 2010

Věta. (o mezihodnotě)

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže je f spojitá, pak pro každou souvislou $M \subseteq D(f)$ je i f[M] souvislá.

Koutek pro pokročilé: V mnoha aplikacích se nám na spojitých funkcích líbí, že když jsme v nějakém bodě \vec{a} a o kousek se pohneme, tak se f také změní jen o kousek. Někdy ale potřebujeme vědět, jak malý ten kousek je, a mohou se objevit problémy, dokonce v jedné proměnné. Víme například, že funkce $\arctan(x)$, $\frac{1}{x}$ a x^2 jsou spojité. Teď si představme, že jsme v bodě a a posuneme se o $\Delta x = 0.1$. U funkce $\arctan(x)$ je úplně jedno, kde je a, funkce se prostě při tom malém posunu nemůže změnit o víc než o 0.1. Toto ale neplatí o dalších dvou funkcí. Při pohledu na graf vidíme, že když bereme a blízko počátku, tak posun o Δx může znamenat velkou změnu funkce, přičemž pro tuto změnu není horní mez. Čím blíže k 0 se a dostane, tím větší změnu hodnot vyvolá posun o 0.1, přičemž můžeme dosáhnout libovolně velké změny. U funkce x^2 je podobný problém u nekonečna.

Dá se nicméně ukázat, že například na intervalu $\langle 0,13 \rangle$ už se x^2 chová rozumně, tam posun o 0.1 nikdy nevyvolá změnu větší než 2.6. Podobně je $\frac{1}{x}$ pěkná třeba na intervalu $\langle 1,\infty \rangle$. Funkce, které jsou takto pěkné, si zaslouží speciální jméno.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $M \subseteq D(f)$.

Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$
: $||f(\vec{x}) - f(\vec{a})|| < \varepsilon$ pro všechna $\vec{a}, \vec{x} \in D(f)$ splňující $||\vec{x} - \vec{a}|| < \delta$.

Některé funkce jsou stejnoměrně spojité na celém definičním oboru již z podstaty, třeba onen výše zmíněný $\operatorname{arctg}(x)$, také třeba $\sin(x)$ či $\frac{1}{x^2+1}$. Nemá to ale nic společného s omezeností, například $\sin(x^2)$ je omezený, ale není to stejnomřrně spojitá funkce na \mathbb{R} . Naopak $\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})$ není na $\langle 0,\infty\rangle$ omezený, ale stejnomřrně spojitý tam je.

Velice mnoho užitečných funkcí není stejnoměrně spojitých na \mathbb{R} (třeba e^x či mocniny), pak se můžeme snažit dosáhnout "lepší spojitosti" alespoň omezením na rozumnou množinu.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže je M omezená a uzavřená podmnožina D(f) a f je spojitá na M, pak je f stejnoměrně spojitá na M.

To je jen další potvrzení naší zkušenosti, že spojité funkce na omezených uzavřených množinách jsou velice pěkné. Stejnoměrná spojitost je v některých oblastech analýzy zásadní, ale my ji už opustíme.

1.c Vektorové funkce

Definice.

Pod pojmem vektorová funkce rozumíme libovolné zbrazení $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hodnoty funkce F jsou vektory z \mathbb{R}^m . Jednotlivé souřadnice těchto vektorů závisí na \vec{x} , takže vlastně pro každou souřadnici dostáváme samostatnou funkci, tyto funkce pak dávají F. Platí tedy, že $F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_m(\vec{x}))$, kde F_i jsou funkce F_i : $D(F) \mapsto \mathbb{R}$. Dá se tedy čekat, že se spousta věcí z předchozích sekcí přenese sem.

Definice.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod D(F), $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Řekneme, že \vec{b} je limita F pro \vec{x} jdoucí k \vec{a} , značeno $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (F(\vec{x})) = \vec{b}$, jestliže

$$\forall U = U(\vec{b}) \ \exists P = P(\vec{a}) \colon F[P \cap D(F)] \subseteq U.$$

Ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \|F(\vec{x}) - F(\vec{a})\| < \varepsilon \text{ pro všechna } \vec{x} \in D(F) \text{ splňující } \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta.$$

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod D(F), $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Pak $\lim_{\vec{x} \to \vec{d}} (F(\vec{x})) = \vec{b}$ právě tehdy, když $\lim_{\vec{x} \to \vec{d}} (F_i(\vec{x})) = b_i$ pro všechna i.

Takže limita funguje po souřadnicích v cílovém prostoru, čímž se situace redukuje na funkce více proměnných jdoucí do $I\!\!R$. Proto platí Věta o limitě a operacích a podobně, většina předchozích pojmů a vět se hravě zobecní.

Věta. (Heineho věta)

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je hromadný bod D(F), $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Pak $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (F(\vec{x})) = \vec{b}$ právě tehdy, když $\lim_{k \to \infty} (F(\vec{x}(k))) = \vec{b}$ pro všechny posloupnosti $\{\vec{x}(k)\} \subseteq D(F) - \{\vec{a}\}$ splňující $\vec{x}(k) \to \vec{a}$.

Definice.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a} \in D(F)$ je hromadný bod D(F). Řekneme, že F je **spojitá** v \vec{a} , jestliže $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} (F(\vec{x})) = F(\vec{a})$.

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a} \in D(F)$ je hromadný bod D(F). F je spojitá v \vec{a} právě tehdy, když jsou F_i spojité v \vec{a} pro každé i.

Definice.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Řekneme, že funkce F je spojitá na množině $M \subseteq D(F)$, jestliže je restrikce F na množinu M spojitá ve všech bodech M, které jsou hromadnými body M.

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Jestliže limita F v \vec{a} konverguje, tak je F omezená na nějakém prstencovém okolí \vec{a} .

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť M je omezená uzavřená podmnožina D(F) a F je spojitá na M.

- (i) Pak je F[M] uzavřená omezená množina.
- (ii) Jestliže je F prostá na M, pak je i inverzní funkce F_{-1} : $F[M] \mapsto M$ spojitá.

Věta. (o mezihodnotě)

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže je F spojitá, pak pro každou souvislou $M \subseteq D(F)$ je i F[M] souvislá.

Definice.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť M je podmnožina D(F).

Řekneme, že F je **stejnoměrně spojitá** na M, jestliže

 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $||F(\vec{x}) - F(\vec{a})|| < \varepsilon$ pro všechna $\vec{a}, \vec{x} \in D(F)$ splňující $||\vec{x} - \vec{a}|| < \delta$.

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Jestliže je M omezená uzavřená podmnožina D(F) a F je spojitá na M, pak je F stejnoměrně spojitá na M.

2. Funkce více proměnných: Derivace

2.a Derivace ve směru a parciální

Tečna? Jakmile je více proměnných, tak jen ve směru. Pracujeme pak s řezem, což je jednorozměrná situace. Jak to vypadá podrobněji? Jsme v bodě \vec{a} , zvolíme si směr \vec{u} , který nás zajímá. Pak vlastně do

© pHabala 2010

f dosazujeme jen \vec{x} z přímky $\vec{a} + t\vec{u}$, čímž vznikne funkce $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{u})$, což je funkce jedné proměnné a s těmi si už umíme poradit.

Definice.

Nechť $f \colon D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f) a \vec{u} je vektor z \mathbb{R}^n . Řekneme, že funkce f je **diferencovatelná** v bodě \vec{a} ve směru \vec{u} , jestliže limita $\lim_{t \to 0} \left(\frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} \right)$ konverguje. Pak definujeme (směrovou) derivaci f v bodě \vec{a} ve směru \vec{u} jako

$$D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} \right).$$

Alternativní značení: $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \partial_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{a}) = f'_{\vec{u}}(\vec{a}).$

Fakt. Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f) a \vec{u} je vektor z \mathbb{R}^n . Definujme funkci $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{u})$. Pak $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \varphi'(0)$.

Poznámka: Mnoho autorů vyžaduje, aby byl \vec{u} jednotkový vektor. V případě vektoru obecného \vec{v} je tedy třeba použít $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, jedině pak je směrová derivace také směrnicí tečny.

Pokud se připouští obecný vektor (což je užitečné třeba ve fyzice), pak platí $D_{\lambda \vec{u}} f(\vec{a}) = \lambda D_{\vec{u}} f(\vec{a})$. Má to pak jiný význam, jde o rychlost, jakou funkce roste/klesá, pokud se daným bodem pohybujeme směrem a rychlostí danými vektorem \vec{u} . Už z toho ale nedostaneme směrnici tečny.

Příklad.

 $f(x,y)=\sin(x+y)$, chceme směrovou derivaci v bodě $\vec{a}=(0,0)$ a směru $\vec{v}=(1,1)$. Nejprve si uděláme jednotkový vektor v daném směru: $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Teď si vytvoříme funkci, která popisuje hodnoty f pro případ, že procházíme daným bodem daným směrem: $\varphi(t)=f(\vec{a}+t\vec{u})=f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\sin\left(\sqrt{2}t\right)$.

Zderivujeme: $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\Big|_{t=0} = \sqrt{2}.$

Příklad.

 $f(x,y)=x^2+y^2$, chceme všechny směrové derivace v $\vec{a}=(1,2)$. Zvolíme si tedy obecně vektor (u,v), pak uvažujeme funkci

$$\varphi(t) = f((1,2) + t(u,v)) = f(1+tu,2+tv) = (1+tu)^2 + (2+tv)^2.$$

Její derivací získáme $D_{(u,v)}f(1,2) = \varphi'(0) = [2(1+tu)u + 2(2+tv)v]\Big|_{t=0} = 2u + 4v.$

Protože směrová derivace v zásadě vychází z derivace funkce jedné proměnné, přenáší se spousta pravidel a vlastností.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}, g: D(g) \mapsto \mathbb{R}$ jsou funkce, $D(f), D(g) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť \vec{a} je vnitřní bod $D(f) \cap D(g)$ a \vec{u} je vektor z \mathbb{R}^n , předpokládejme, že f a g jsou diferencovatelné v \vec{a} ve směru \vec{u} . Pak jsou v \vec{a} ve směru \vec{u} diferencovatelné i funkce $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}$ a platí

$$D_{\vec{u}}(f+g)(\vec{a}) = D_{\vec{u}}f(\vec{a}) + D_{\vec{u}}g(\vec{a}),$$

$$D_{\vec{u}}(f-g)(\vec{a}) = D_{\vec{u}}f(\vec{a}) - D_{\vec{u}}g(\vec{a}),$$

$$D_{\vec{u}}(f \cdot g)(\vec{a}) = D_{\vec{u}}f(\vec{a}) \cdot g(\vec{a}) + f(\vec{a}) \cdot D_{\vec{u}}g(\vec{a}),$$

$$D_{\vec{u}}(\frac{f}{g})(\vec{a}) = \frac{D_{\vec{u}}f(\vec{a}) \cdot g(\vec{a}) - f(\vec{a}) \cdot D_{\vec{u}}g(\vec{a})}{g^2(\vec{a})}.$$

Důsledek.

 $D_{\vec{u}}(\alpha f)(\vec{a}) = \alpha D_{\vec{u}} f(\vec{a}).$

Dokonce máme i následující. Připomeňme, že Věta o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné vede na rovnost f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).

Věta. (o střední hodnotě)

Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast, uvažujme $f \colon G \mapsto \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in G$. Předpokládejme, že úsečka $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ leží v G a f má na této úsečce derivaci ve směru $\vec{u} = \frac{\vec{y} - \vec{x}}{\|\vec{y} - \vec{x}\|}$. Pak existuje $\vec{c} \in \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ takové, že

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = D_{\vec{u}}f(\vec{c}) \cdot ||\vec{y} - \vec{x}|| = D_{\vec{y} - \vec{x}}f(\vec{c}).$$

Jinak řečeno, existuje $t \in (0,1)$ takové, že

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = D_{\vec{u}} f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \cdot ||\vec{y} - \vec{x}|| = D_{\vec{y} - \vec{x}} f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}).$$

Tím správným zobecněním derivace ovšem směrové derivace nejsou, což hned ukážeme.

Příklad.

Uvažujme funkci $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2; \\ 0, & y \neq x^2. \end{cases}$ Vidíme, že f není spojitá v (0,0), přitom ale $D_{\vec{u}}f(0,0) = 0$ ve všech směrech.

Pro směrové derivace tedy neplatí obdoba věty "diferencovatelná, pak spojitá". Pro správné zobecnění je třeba se podívat do další sekce, teď zkusíme přeci jen něco užitečného ze směrových derivací vykutat.

Speciální případ: Označíme souřadnicové vektory $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde je *i*-tá souřadnice rovna 1. Pak definujeme následující.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Pro $i=1,\ldots,n$ definujeme **parciální derivaci** f vzhledem k x_i jako $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = D_{\vec{e}_i}f(\vec{a})$, pokud tato existuje.

Alternativní značení: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = D_i f(\vec{a}) = f_{x_i}(\vec{a}).$

Takze
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{h} \right) = \lim_{x \to a_1} \left(\frac{f(x, a_2, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{x - a_1} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a_1, a_2 + h, a_3, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{h} \right) = \lim_{x \to a_2} \left(\frac{f(a_1, x, a_3, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{x - a_2} \right) \text{ atd.}$$

Z praktického pohledu: Předstíráme, že ostatní proměnné jsou konstanty (parametry), a normálně derivujeme podle x_i .

Příklad.

$$f(x,y) = e^{13x+y^2} + 2x^2y + y^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 13e^{13x+y^2} + 4xy, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 2ye^{13x+y^2} + 2x^2 + 3y^2.$$

Ono značení dolním indexem vypadá velice prakticky, a taky je, zjevná úspora psaní z něj udělala populární volbu pro lidi, kteří hodně parciálně derivují, třeba fyziky. na druhou stranu je snadné ta malá písmenka přehlédnout a lidé používají dolní indexy i k jiným účelům (třeba ke značení souřadnic), takže to budeme hrát na jistotu a psát ta krouceníčka.

Ani parciální derivace nejsou náhradou běžné drivace, k tomu bude třeba něco víc. Nicméně je to silný nástroj, začneme jedním užitečným pojmem.

Definice.

Nechť $f \colon D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ pro $=1,\ldots,n$, pak definujeme **gradient** f v \vec{a} jako vektor

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right).$$

Alternativní značení: $\nabla f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \operatorname{grad}(f)(\vec{a}).$

Značení "nabla" ∇ je univerzálně používané, varianta $\vec{\nabla}$ se někdy čte "del". Většina autorů při uvádění gradientu také zavede alternativu grad(f), ale pak ji nepoužívá. Jsou ale výjimky, například doporučené skriptum používá výhradně toto značení a ∇ ignoruje, navíc grad už názvem studentovi napovídá, co to vlastně je za objekt. Je to tedy těžká volba, nakonec zvítězila lenost. Budu nablovat, ale občas připomenu tu alternativu.

Protože jsme jen dali dohromady pěkně se chovající derivace, dostáváme také pro gradient obvyklá pravidla, ale v praxi se moc nepoužívají:

Věta.

Nechť f,g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že pro obě funkce existuje gradient $\nabla f(\vec{a})$ a $\nabla g(\vec{a})$. Pak mají gradient i $f+g, f\cdot g, \frac{f}{g}$ a platí

$$\begin{split} \nabla(f+g)(\vec{a}) &= \nabla f(\vec{a}) + \nabla g(\vec{a}), \\ \nabla(f\cdot g)(\vec{a}) &= \nabla f(\vec{a})g(\vec{a}) + f(\vec{a})\nabla g(\vec{a}), \\ \nabla\Big(\frac{f}{g}\Big)(\vec{a}) &= \frac{\nabla f(\vec{a})g(\vec{a}) - f(\vec{a})\nabla g(\vec{a})}{[g(\vec{a})]^2}. \end{split}$$

Příklad.

Pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ je $\nabla f = (2x, 2y)$, proto $\nabla f(1,2) = (2,4)$.

Zajímavá shoda s $D_{(u,v)}f(1,2)=2u+4v$. Není to náhoda (viz níže), ale bohužel ani pravidlo.

Příklad.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^4 + y^4) - x^2y^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{2xy^6 - 2x^5y^2}{(x^4 + y^4)^2} \text{ a } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2y(x^4 + y^4) - x^2y^2 \cdot 4y^3}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{2x^6y - 2x^2y^6}{(x^4 + y^4)^2}.$$

Priklad.

Uvažujme $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$ a f(0,0) = 0.

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ derivace vzorcem, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^4+y^4)-x^2y^2\cdot 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2xy^6-2x^5y^2}{(x^4+y^4)^2} \text{ a } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2y(x^4+y^4)-x^2y^2\cdot 4y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2x^6y-2x^2y^6}{(x^4+y^4)^2}.$ V bodě (0,0) dle definice $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{0-0}{x}\right) = 0$, podobně $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Tedy $\nabla f(0,0) = (0,0).$

Z toho ale neplyne existence derivací v (0,0) ve všech směrech, protože ve směru přímky y=kx vyjde $f(x,kx) = \frac{k^4}{1+k^4}$ pro $x \neq 0$ a f(0,0) = 0, v tomto směru tedy f není spojitá v (0,0) a tudíž v něm nemá

To ukazuje, že obecně nestačí znát parciální derivace k určení derivací směrových. Pro pěkné funkce už to ale funguje.

Věta.

Nechť $f \colon D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existuje nějaké okolí $U = U(\vec{a})$ takové, že pro všechna $i = 1, \ldots, n$ existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ pro všechna $\vec{x} \in U$ a funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou spojité v \vec{a} , pak má f v \vec{a} derivace ve všech směrech a pro každé \vec{u} platí $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{u}$.

V zásadě pokud je funkce dána rozumným vzorcem, tak předpoklady splňuje, tyto funkce jsou důležité a zavedeme si pro ně značení.

Definice.

Nechť G je otevřená podmnožina \mathbb{R}^n a $f: G \mapsto \mathbb{R}$.

Řekneme, že f má spojité parciální derivace na G, jestliže pro všechna $i=1,\ldots,n$ existuje existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ve všech bodech G a jsou to spojité funkce na G.

Množinu všech takovýchto funkcí značíme $C^1(G)$.

V takovém případě pak již ∇f funguje podobně jako derivace klasická. Platí například toto:

Věta.

Nechť je G otevřená podmnožina \mathbb{R}^n . Funkce z $C^1(G)$ jsou spojité na G.

Nechť G je oblast v \mathbb{R}^n a $f \in C^1(G)$. Jestliže $\nabla f = \vec{0}$ na G, pak je f konstantní na G.

Geometrický význam gradientu $\nabla f = \operatorname{grad}(f)$:

1) Tečná nadrovina: Jak vypadá zobecnění tečny? Nebudou to přímky, je jasné, že například ke grafu v \mathbb{R}^3 nemá smysl o tečné přímce mluvit (její směrnice závisí na směru, v jakém jdeme). Tím správným zobecněním jsou tedy **nadroviny**, což jsou afinní objekty o dimenzi n-1. (Připomeňme, že afinní prostory jsou podprostory, které mohou být posunuty přičtením vektoru). Například funkce f(x) má graf v \mathbb{R}^2 a nadrovinou je útvar o dimenzi 1 neboli přímka, souhlasí. Funkce f(x,y) mají grafy v \mathbb{R}^2 a nadrovinou jsou tam roviny, to dává smysl, k rozumně se kroutícímu povrchu v \mathbb{R}^3 (třeba reliéfu krajiny) by měla jít přiložit tečná rovina. Ve více rozměrech už si to neumíme představit, ale myšlenka trvá.

Jak tedy takovou tečnou nadrovinu najdeme? Inspirace z jedné proměnné říká, že tečna je přímka s nejlepší aproximací f okolo a. Když popojdeme z a do x a krok není moc velký, tak se funkce změní přibližně o f'(a)(x-a), odtud

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a).$$

A máme rovnici tečny, T(x) = f(a) + f'(a)(x - a).

Ve více dimenzích se z \vec{a} lze pohnout více směry, ale každý takový pohyb si lze představit rozloženě do složek ve směrech jednotlivých os. Celková změna je tedy

$$f(\vec{x}) \sim f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i).$$

Odtud máme tečnou nadrovinu

$$T(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \bullet (\vec{x} - \vec{a}).$$

To je první geometrická aplikace gradientu, získáme díky němu tečnou nadrovinu. Tato úvaha se nám ještě bude hodit níže, zapamatujme si ji.

Zkusíme si to přepsat. Roznásobením závorek získává rovnice tečné nadroviny $y = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i)$

tvar $y = A + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})x_i$, tedy $A + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})x_i - y = 0$. Tato nadrovina je tedy dána kolmým (normálovým) vektorem $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}), -1).$

Závěr: Normálový vektor ke grafu f v bodě \vec{a} je $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}), -1\right)$. 2) Víme, že $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{u} = \|\nabla f(\vec{a})\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi $\nabla f(\vec{a})$ a \vec{u} . Použijeme-li $\|\vec{u}\| = 1$, pak $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \|\nabla f(\vec{a})\|\cos(\alpha)$ a vidíme, že maximální hodnota $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ se získá, když je \vec{u} rovnoběžně s $\nabla f(\vec{a})$.

Závěr: Vektor $\nabla f(\vec{a})$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě \vec{a} , funkce v tomto směru roste rychlostí $\|\nabla f(\vec{a})\|.$

Naopak $-\nabla f(\vec{a})$ udává směr největšího spádu funkce f v bodě \vec{a} , funkce roste rychlostí $-\|\nabla f(\vec{a})\|$.

3) Jestliže máme ve směru $\nabla f(\vec{a})$ maximální růst/klesání funkce, pak by si člověk tipnul, že ve směru kolmém se naopak funce měnit nebude. Dá se to opravdu dokázat, jaký to má význam? Pokud jdeme někudy v D(f) a hodnota funkce se nemění, tak vlastně jdeme po hladině konstantnosti.

Závěr: Vektor $\nabla f(\vec{a})$ je kolmý na hladinu konstantnosti $H_{f(\vec{a})}$ v bodě \vec{a} . To je zase velice užitečné při práci s těmi hladinami.

Pokud jsme v \mathbb{R}^2 , pak obvyklým trikem z ∇f dostaneme k hladině konstantnosti tečný vektor $\vec{t} = (f_y, -f_x)$.

Příklad.

Uvažujme $f(x,y) = 9 - x^2 + y^2$ a bod (1,2). Najdeme tečnou nadrovinu.

Máme $\nabla f = (-2x, 2y)$, proto $\nabla f(1, 2) = (-2, 4)$. Normálový vektor ke grafu je tedy například $\vec{n} =$ (-2, 4, -1).

Skrz jaký bod má tečná rovina jíť? Protože f(1,2) = 12, je to bod (1,2,12). Máme bod a normálový vektor, z toho napíšeme rovinci roviny snadno:

$$0 = \vec{n} \bullet ((x, y, z) - (1, 2, 12)) = -2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 12) \implies 2x - 4y + z = 6.$$

Alternativa: Tečná rovina má proto rovnici -2x + 4y - z + A = 0. Dosazením bodu (1, 2, 12) dostaneme -2 + 8 - 12 + A = 0 a tedy A = 6, odtud 6 - 2x + 4y - z = 0.

Závěr: Tečná rovina ke grafu f v bodě daném $\vec{a} = (1,2)$ má rovnici 2x - 4y + z = 6.

Co se v daném bodě děje?

Funkce poroste nejrychleji, pokud se vydáme ve směru (-2,4) neboli ve směru (-1,2) (každý kladný násobek má stejný směr), rychlost růstu funkce pak bude $\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Bod $(1,2) \in D(f)$ leží na hladině konstantnosti f(1,2) = 12 neboli na křivce $y^2 - x^2 = 3$ (hyperbola). V bodě (1,2) je vektor $\nabla f(1,2) = (-2,4)$ kolmý na tuto křivku, díky čemuž hravě získáme rovnici tečny k této křivce:

$$0 = \nabla f(1,2) \bullet ((x,y) - (1,2)) = -2(x-1) + 4(y-2) \implies 2y - x = 3.$$

Závěr: Hyperbola $y^2 - x^2 = 3$ má v bodě (1,2) tečnu danou rovnicí 2y - x = 3.

Pomocí triku z normálového směru (-2,4) dostaneme (4,2) jako směr tečný, zase jej můžeme modifikovat na (2,1). Z praktického pohledu to vypadá takto: Pokud bychom se tedy pohybovali po dotyčné hyperbole, tak bychom v okamžiku průchodu bodem (1,2) cítili odstředivou sílu v směru rovnoběžném s (-1,2) a jeli bychom ve směru (2,1).

Výše jsme měli pravidla pro základní algebraické operace, ale ještě jsme se nepodívali na zobecnění pravidla pro složenou funkci. U funkcí $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ to není zcela jasné, protože se nabízí dvě situace. Mějme tedy funkci $f \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Jedna možnost je navázat na ni tam, kde končí, čili funkcí jedné proměnné.

Věta.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n , mějme funkci $f \in C^1(G)$. Nechť g je funkce $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ diferencovatelná na množině M taková, že $f[G] \subseteq M$. Pak $g \circ f = g(f) \in C^1(G)$ a pro $\vec{a} \in G$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(\vec{a}) = g'(f(\vec{a}))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

Stručně: $\nabla(g \circ f) = g'(f)\nabla f$ na G.

Zajímavější situace je, pokud se pokusíme nějakou funkci předřadit před f. Pak ovšem musí jít o vektorovou funkci s hodnotami v \mathbb{R}^n . Takovéto obecné vzorce najdete v kapitolce o vektorových funkcích dále, zde se pokusíme zůstat u funkcí $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Pak je pořád možné zkusit něco předřadit, když se na to podíváme jako na úlohu o transformaci proměnných.

Věta.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^m , mějme funkci $f(y_1,\ldots,y_m)\in C^1(G)$.

Uvažujme následující transformaci souřadnic:

Nechť M je otevřená množina v \mathbb{R}^n , pro $j=1,\ldots,m$ nechť $y_j=y_j(x_1,\ldots,x_n)\in C^1(M)$ a platí $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)\colon M\mapsto G.$ Pak $f\circ\vec{y}=f(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_m(x_1,\ldots,x_n))\in C^1(M)$ a pro $\vec{a}\in M$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \vec{y})(\vec{a}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\vec{y}(\vec{a})) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

Proč se mluví o transformaci? Představme si, že $f(\vec{y})$ je funkce, která měří určitou kvantitu v závislosti na poloze, přičemž polohu určujeme klasicky kartézskými souřadnicemi. Pak se ale z nějakého důvodu rozhodneme měřit polohu jinak, třeba pomocí azimutu a vzdálenosti od nějakého pevného bodu. Jestliže víme, jak se f mění vzhledem k pohybu měřenému v kartézských souřadnicích, dokážeme z toho zjistit, jak se mění při pohybu měřeném vzhledem k novým souřadnicím? Takovéto změny souřadnic jsou většinou dělány tak, abychom uměli z jedněch odvodit druhé a naopak, tomu se právě říká transformace a jsou to ty funkce $y_i(\vec{x})$ ve větě.

(C) pHabala 2010

Ukážeme si to pro m=n=2:

Máme f(x,y), zavedeme transformace x=x(s,t) a y=y(s,t) (tedy zjistili jsme, že původní souřadnice závisejí na nějakých nových). Pak dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Myšlenka je velice jednoduchá. Připomeňme, jak funguje řetízkové pravidlo u jedné proměnné. Když chceme derivovat f(y(s)) podle s, tak se musíme krok za krokem dostat k s a cestou zderivujeme všechno, na co narazíme (nejprve f, pak y). Jak je to ve více dimenzích? Ve funkci f(x(s,t),y(s,t)) se s vyskytuje na dvou místech, takže se při derivování musíme dostat na obě místa (varianty sčítáme), cestou pak vždy derivujeme vše, co potkáme (nejprve f, pak x popř. y).

Jsou dvě obvyklé možnosti použití:

1) Chceme znát $\frac{\partial f}{\partial s}$ a $\frac{\partial f}{\partial t}$ v závislosti na $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. To přesně nám dávají vzorce výše. Pokud chceme mít na pravých stranách jen výrazy s s a t, pak do parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ dosadíme $x=x(s,t),\ y(s,t).$ V

případě více proměnných to funguje obdobně.

2) Chceme najít $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ vyjádřené pomocí $\frac{\partial f}{\partial s}$ a $\frac{\partial f}{\partial t}$, tedy opak předchozího. To se dá udělat dvěma způsoby. Jeden je, že tu soustavu výše vyřešíme pro $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. To je většinou pracnější, ale má to lepší šanci na úspěch. Druhá možnost je, že obrátíme role, tedy z rovnic $x=x(s,t),\ y=(s,t)$ odvodíme rovnice s=s(x,y), t=t(x,y), čímž vlastně uvažujeme inverzní transformaci, a pak už přímo počítáme $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ z f(s,t) podle věty. Bývá to rychlejší, ale jen pokud se podaří vyřešit rozumně ty rovnice, což občas nejde vůbec. Typická situace, kdy chceme 2): Máme diferenciální výraz (nebo rovnici) s $\frac{\partial f}{\partial x}$ atd. a chceme jej přepsat do nových proměnných.

Příklad.

Máme funkci f(x,y) v kartézských souřadnicích, pro kterou má platit rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Přejdeme k polárním souřadnicím $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$. Jak ta rovnice bude vypadat?

Po transformaci vznikne nová funkce $(r,\varphi)\mapsto f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))$, my potřebujeme do daného vztahu dosadit za $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ tak, aby se místo toho objevilo $\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial \varphi}$. Přímý výpočet nám umí vyjádřit $\frac{\partial f}{\partial r}$ pomocí $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$, ale my to potřebujeme přesně naopak. Pro takovou situaci jsme výše navrhli dva postupy. Jeden z nich je přejít k inverzní transformaci, pak už se přímo spočítá, co potřebujeme. Umíme snadno

najít $r=\sqrt{x^2+y^2}$, ale vyjádření pro úhel je již komplikovanější a nelze to udělat jedním vzorcem. Tento postup tedy není tím pravým.

Druhý postup říká, ať si nejprve najdeme transformaci v tom "špatném" směru a pak řešíme výsledné rovnice. Jdeme na to.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(\varphi),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot r \sin(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \cos(\varphi).$$

Stručným zápisem, $f_r = \cos(\varphi) f_x + \sin(\varphi) f_y$ a $f_\varphi = r \sin(\varphi) f_x - r \cos(\varphi) f_y$. Když tyto rovnice vyřešíme pro f_x a f_y , dostaneme

$$f_x = f_r \cos(\varphi) - \frac{1}{r} f_{\varphi} \sin(\varphi),$$

$$f_y = f_r \sin(\varphi) + \frac{1}{r} f_{\varphi} \cos(\varphi).$$

Po dosazení do dané rovnice vyjde $f_r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + \frac{1}{r} f_\varphi \cdot (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) = 0$ neboli $\frac{\partial f}{\partial r} \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) = 0.$ Poznámka: K čemu to je? Přírodní zákony (šíření vln, vedení tepla, zákon zachování hmoty atd.) mají

většinou právě formu rovnic, ve kterých se vyskytují derivace. Obvykle se udávají vzhledem ke kartézským souřadnicím, ale v některých situacích jsou lepší alternativní souřadnice a pak je třeba vědět, jak vůči nim zákony vypadají, aby se situace daly řešit.

Derivace vyšších řádů: $D_{\vec{v}}(D_{\vec{u}}f) = D_{\vec{v}}D_{\vec{u}}f$. Speciální případ: $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ Případu $i \neq j$ říkáme smíšená derivace, pro i = j máme kratší zápis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Příklad.

Uvažujme
$$f(x,y) = e^{13x+y^2} + 2x^2y + y^3$$
, už jsme si spočítali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 13 \, e^{13x+y^2} + 4xy, \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 2y \, e^{13x+y^2} + 2x^2 + 3y^2$. Proto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[13 \, e^{13x+y^2} + 4xy] = 13^2 \, e^{13x+y^2} + 4y, \, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[13 \, e^{13x+y^2} + 4xy] = 26y \, e^{13x+y^2} + 4x,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[2y \, e^{13x+y^2} + 2x^2 + 3y^2] = (2+4y^2)e^{13x+y^2} + 6y, \, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[2y \, e^{13x+y^2} + 2x^2 + 3y^2] = 26y \, e^{13x+y^2} + 4x.$

Smíšené derivace vyšly stejně, to ale bohužel obecně neplatí.

Příklad. Uvažujme
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) - y^2 \operatorname{arctg}(\frac{x}{y}), & x,y \neq 0; \\ 0, & x = 0 \lor y = 0. \end{cases}$$
Pro $x,y \neq 0$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) - x^2 \frac{y}{x^2 + y^2} - y^3 \frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \frac{1}{x^2 + y^2} - 2y \operatorname{arctg}(\frac{x}{y}) - y^2 \frac{x}{x^2 + y^2}.$
Pokud $y \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x,y) - f(0,y)}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})}{x^{-2}}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3 y/2}{x^2 + y^2}\right) = 0$, podobně pro $x \neq 0$ je $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, také parciální derivace v $(0,0)$ dávají nulu.

Jak vypadají smíšené derivace v $(x_0,0)$, kde $x_0 \neq 0$?
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)}{y}\right) = \lim_{y \to 0} \left(2x_0 \frac{\operatorname{arctg}(\frac{y}{x_0})}{y} - \frac{x_0^2}{x_0^2 + y^2} - y^2 \frac{1}{x_0^2 + y^2}\right) = 2 - 1 = 1$$
, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)}{x}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{0-0}{x}\right) = 0$.
Smíšené se nerovnají.

Tato situace je nepříjemná, tak si řekneme, kdy se toho nemusíme bát.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Předpokládejme, že pro $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ existují $D_{\vec{u}}(D_{\vec{v}}f)$ a $D_{\vec{v}}(D_{\vec{u}}f)$ na nějakém okolí \vec{a} a jsou spojité v \vec{a} . Pak $D_{\vec{u}}(D_{\vec{v}}f)(\vec{a}) = D_{\vec{v}}(D_{\vec{u}}f)(\vec{a}).$

Definice.

Nechť G je oblast v \mathbb{R}^n .

Definujeme $C^k(G)$ jako množinu všech funkcí $f: G \mapsto \mathbb{R}$, které mají všechny parciální derivace až po řád k a ty jsou spojité na G.

Důsledek.

Nechť
$$G$$
 je oblast v \mathbb{R}^n . Jestliže $f \in C^2(G)$, pak pro $\vec{a} \in G$ platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})$.

Praktický pohled: Pokud děláme u funkce $f \in C^k(G)$ parciální derivace vyšších řádů až po k, tak nás nemusí zajímat pořadí derivování. To je ohromná úspora. Pokud máme funkci o dvou proměnných, tak obecně existují 4 derivace druhého řádu, 8 derivací třetího, 16 čtvrtého, 32 pátého atd. Pro funkce z C^5 ale stačí spočítat jen 3 derivace druhého řádu, 4 třetího $(f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy})$, 5 čtvrtého, 6 pátého atd.

2.b Diferenciál

Tím správným zobecněním derivace je diferenciál. Obyčejná funkce se dá aproximovat tečnou:

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h = f(a) + L[h],$$

zde L je lineární zobrazení $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dané číslem f'(a).

Pro funkci f(x,y) budeme aproximovat tečnou rovinou, pokud bude f rozumná na okolí (a,b). Pak budeme mít pro nějaké konstanty A, B aproximaci

$$f(a+h,b+k) \sim f(a,b) + Ah + Bk = f(a,b) + L[(h,k)],$$

kde L je lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dané vektorem (A, B).

Obecně budeme chtít $f(\vec{a} + \vec{h}) \sim f(\vec{a}) + L[\vec{h}]$, přičemž lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dáno určitým vektorem (A_1, \ldots, A_n) , tedy $L[\vec{h}] = \sum A_i h_i$.

Co to znamená, že máme aproximaci? Označme si chybu aproximace $\omega(\vec{h}) = f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - L[\vec{h}]$. Pokud je f spojitá v \vec{a} , pak určitě $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\omega(\vec{h}) \right) = 0$, ať zvolíme lineární L jakkoliv. Musíme tedy chtít víc, pro inspiraci se podíváme na případ jedné proměnné. Tam $\omega(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ a definice říká, že

$$0 = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\omega(h)}{h} \right).$$

Ten správný požadavek je tedy obecně $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \left(\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\right) = 0$, jinými slovy, $\omega(\vec{h})$ se má zmenšovat řádově rychleji než \vec{h} .

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Řekneme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je (totální) diferenciál $f \vee \vec{a}$, jestliže

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - L[\vec{h}]}{\|\vec{h}\|} \right) = 0.$$

Pokud takovéto lineární zobrazení existuje, pak jej značíme $df(\vec{a})$, popř. $Df(\vec{a})$ a řekneme, že f je diferencovatelná v \vec{a} .

Diferenciál je to pravé zobecnění derivace. Platí například následující.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existuje d $f(\vec{a})$, pak je f spojitá v \vec{a} .

Věta.

Nechť G je oblast v \mathbb{R}^n , $f \colon G \mapsto \mathbb{R}$. Jestliže je f diferencovatelná na G a df=0 na G, pak je f konstantní na G.

Už jsme viděli, že pro funkci $f \colon I\!\!R \mapsto I\!\!R$ dostáváme $\mathrm{d} f(a)[h] = f'(a) \cdot h$. Vlastně to není nic tak překvapivého. Pokud si označíme $h = \mathrm{d} x$ a $\mathrm{d} f = f(a + \mathrm{d} x) - f(a)$, pak $\mathrm{d} f = f'(a) \mathrm{d} x$ neboli $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = f'(a)$. Ve více proměnných můžeme podobně psát $\mathrm{d} f = A \mathrm{d} x + B \mathrm{d} y + \cdots$, co jsou ty koeficienty? Podívejme se na

Ve vice proměnných můžeme podobně psát d $f = Adx + Bdy + \cdots$, co jsou ty koeficienty? Podívejme se na to blíže.

Diferenciálem dobře aproximujeme f na okolí \vec{a} , ale to jsme již předtím dělali pomocí směrových derivací. Když se tedy posuneme o (malý) vektor \vec{h} a zkusíme aproximovat totálním diferenciálem i směrovou derivací, dostaneme

$$L[\vec{h}] \sim f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \sim D_{\vec{h}}f(\vec{a}).$$

Mělo by tedy platit $df(\vec{a})[\vec{h}] = D_{\vec{h}}f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i}}(\vec{a}) \cdot h_{i}$. Potvrdíme si to oficiálně. Nejprve ukážeme obecněji, že pomocí totálního diferenciálu již získáme všechny směrové derivace, z toho hned vyjde to nejdůležitější.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existuje $\mathrm{d}f(\vec{a})$, pak pro každé $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ existuje $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ a platí $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \mathrm{d}f(\vec{a})[\vec{u}]$.

Co dostaneme, když to aplikujeme na $\vec{u} = \vec{e_i}$? Jestliže $L[\vec{h}] = \sum A_i h_i$, pak

$$A_i = L[\vec{e}_i] = D_{\vec{e}_i} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

Důsledek.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existuje $\mathrm{d}f(\vec{a})$, pak pro všechny $i=1,\ldots,n$ existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ a platí

$$df(\vec{a})[\vec{h}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot h_i = \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{h}.$$

Takže ∇f je ten správný vektor pro diferenciál, je to jediný možný kandidát.

Příklad.

Pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ by mělo být $\mathrm{d}f(1,2)[h,k] = (2,4) \bullet (h,k) = 2h + 4k$. Důkaz dle definice:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - L[\vec{h}]}{\|\vec{h}\|} \right) = \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\frac{[(1+h)^2 + (2+k)^2] - (1+4) - (2h+4k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right)$$
$$= \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) = \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right) = 0.$$

Grafem lineárního zobrazení je nadrovina, která prochází počátkem. Máme tedy jasnou souvislost. Dříve jsme odvodili, že tečná nadrovina v bodě \vec{a} je dána vzorcem $y = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot (x_i - a_i)$ a coby tečná rovina nejlépe aproximuje f okolo \vec{a} . Rozdíl $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$ by měl tedy být nejlépe aproximovatelný výrazem $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot (x_i - a_i), \text{ což přesně odpovídá totálnímu diferenciálu neboli nejlépe aproximujícímu lineárnímu zobrazení. Všechno nám to krásně hraje.$

Poznámka: V jedné dimenzi hned vidíme, že tečna k přímce je tatáž přímka, popřípadě že derivace k y = yx je k a tudíž diferenciálem je kx, zase tatáž funkce. Ve více dimenzích tomu odpovídá fakt, že tečná nadrovina ke grafu ve tvaru nadroviny je zase tatáž nadrovina, popřípadě to, že diferenciál k lineárnímu f je zase toto f.

Víme už, že když máme diferenciál, tak máme i gradient. Funguje to i naopak? Obecně ne, ukázali jsme, že funkce $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ má gradient, ale nemá všechny směrové derivace, tudíž ani nemůže mít totální diferenciál. Ještě jeden takový případ:

Příklad.

Uvažujme $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. Pak $\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)y,\frac{1}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)x\right)$ pro $x,y\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale f není diferencovatelná v (0,0) (je tam jen spojitá). To je vidět například tak, že se omezíme na přímku y=x, tam je funkce rovna f(x,x)=|x| a nemá směrovou derivaci.

Když ale k předpokladu parciálních derivací přidáme spojitost, tak již totální diferenciál dostaneme.

Věta.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Jestliže existuje nějaké okolí $U = U(\vec{a})$ takové, že $f \in C^1(U)$, pak je f diferencovatelná v \vec{a} a

$$df(\vec{a})[\vec{h}] = \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{h}.$$

Důsledek.

Nechť G je otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak je f diferencovatelná na G a pro $\vec{a} \in G$ platí

$$df(\vec{a})[\vec{h}] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})h_i.$$

Opět to neplatí naopak, existence diferenciálu sice dává existenci parciálních derivací, ale ne nutně jejich spojitost. Máme tedy hierarchii: Mnohé funkce mají gradient. Některé znich mají i diferenciál, z nich zase některé mají dokonce spojitý gradient. Vlastnost spojitého gradientu je tedy nejsilnější, ze zatím zkoumaných funkcí jsou to ty nejlepší.

Protože je diferenciál daný gradientem, je to lineární operace, tedy platí, že d(af + g) = adf + dg. U ostatních operací se pravidla příliš nepoužívají a proto to přeskočíme. Naopak skládání je velice důležitá situace, podíváme se tedy na transformace souřadnic.

Věta.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^m , mějme funkci $f(y_1,\ldots,y_m)$ $G\mapsto \mathbb{R}$ diferencovatelnou na G. Uvažujme násedující transformaci souřadnic: Nechť M je otevřená množina v \mathbb{R}^n , pro $j=1,\ldots,m$ nechť $y_j=y_j(x_1,\ldots,x_n)\in C^1(M)$ a platí $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)$: $M\mapsto G$. Pak je $f\circ\vec{y}=f(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_m(x_1,\ldots,x_n))$ diferencovatelná na M a platí

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} (\vec{y}(\vec{x})) dy_j.$$

Ukážeme si ještě jedno značení, užitečné pro inženýry a občas docela populární. Když máme prostor vektorů, tak máme automaticky také funkce, které z vektoru izolují určitou souřadnici, například $(h_1, h_2, \dots) \mapsto h_1$. Říká se tomu projekce, označme si je $x_i(\vec{h}) = h_i$. Protože je to lineární zobrazení, máme také $\mathrm{d}x_i[\vec{h}] = h_i$ a diferenciál pak můžeme napsat takto:

$$df(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) dx_i$$

(popřípadě $Df(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})Dx_i$).

Například výše jsme dostali výsledek df(1,2) = 2dx + 4dy. Má to přirozenou interpretaci. Když se z bodu (1,2) posuneme o nekonečně malý vektor (dx,dy), pak se hodnota funkce změní o df = 2dx + 4dy.

Zkusme se ještě podívat na různé způsoby klasického zápisu diferenciálu, každý má své místo podle toho, co zrovna chceme s diferenciálem dělat.

$$df(\vec{a})[\vec{h}] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})h_i = \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{h} = \nabla f(\vec{a})\vec{h}^T.$$

Jak vypadá vyšší řád u diferenciálu neboli zobecnění vyšších derivací? Je to komplikovanější, podíváme se nejprve na zobecnění druhé derivace.

Definice.

Zobrazení $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ se nazývá **bilineární**, jestliže $L(\alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha L(\vec{x}_1, \vec{y}) + L(\vec{x}_2, \vec{y})$ a $L(\vec{x}, \alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha L(\vec{x}, \vec{y}_1) + L(\vec{x}, \vec{y}_2)$ pro všechny vektory z \mathbb{R}^n .

Teď si mezi bilineárními zobrazeními jedno vybereme.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f). Řekneme, že bilineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je d $^2f(\vec{a})$, jestliže pro všechna $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\Bigl(\frac{\mathrm{d}f(\vec{a}+\vec{h})[\vec{k}]-\mathrm{d}f(\vec{a})[\vec{k}]-L[\vec{h},\vec{k}]}{||\vec{h}||}\Bigr)=0.$$

Pravý význam je vidět z následujícího faktu.

Fakt.

$$d^2 f(\vec{a})[\vec{h}, \vec{k}] = d(df[\vec{k}])[\vec{h}].$$

Co se myslí diferenciálem z diferenciálu? Ten vnější diferenciál se dělá z funkce $\vec{x} \mapsto df(\vec{x})[\vec{k}]$. Je to tedy opravdu jakoby derivace z derivace, v případě jedné proměnné dostáváme f''(a). Jak se ale taková věc skutečně spočítá ve více proměnných?

Lineární algebra říká, že každé bilineární zobrazení lze vyjádřit pomocí jisté matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ tak, že $L[\vec{h}, \vec{k}] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i k_j$. Nás samozřejmě zajímá, jaká matice A nám dá d² f. V tom nám pomůže onen fakt výše. My vlastně pro pevně zvolené \vec{k} hledáme totální diferenciál funkce $\vec{x} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{j}}(\vec{x})k_{j}$, díky linearitě se stačí zamyslet, že

$$d\left(k_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})\right) = k_j d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})\right) = k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

a pak to posčítat.

Věta.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n . Jestliže $f \in C^2(G)$, pak

$$d^{2}f(\vec{a})[\vec{h}, \vec{k}] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}} h_{i}k_{j}.$$

Vidíme, že matice, která udává naše bilineární zobrazení d^2f , je matice $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$. Je to tzv. Hessova matice neboli hessián a je dost důležitá. Je snadné si rozmyslet, že pomocí této matice zapíšeme druhý diferenciál elegantně jako $d^2 f(\vec{a})[\vec{h}, \vec{k}] = \vec{h} H(\vec{a}) \vec{k}^T$.

Jak by fungovaly diferenciály vyšších řádů? Používali bychom n-lineární zobrazení, která lze vyjádřit pomocí "mnoharozměrných matic". Například $d^3f[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk}u_iv_jw_k$, přičemž se dá dokázat, že $a_{ijk} = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk}u_iv_jw_k$

 $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},$ čtenář si už sám představí vyšší diferenciály.

Takovéto sumy jsou v praxi dosti nepříjemné, jak záhy uvidíme. Je tam také docela dost parciálních derivací. Tady pomůže, když pracujeme s funkcemi se spojitými parciálními derivacemi, kde na pořadí derivování nezáleží a počet nutných výpočtů se revolučně zmenší (viz výše).

Příklad.

Najdeme diferenciály prvních tří řádů pro $f(x,y)=x^2y+y^3$ v bodě $\vec{a}=(1,2)$. Protože má tato funkce spojité parciální derivace všech řádů, ušetříme spoustu výpočtů díky symetrii smíšených derivací. Nejprve diferenciál prvního řádu: Potřebujeme $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$. Pak $\nabla f(1,2) = (4,13)$ a $\mathrm{d}f(1,2)[(u_1,u_2)] = 4u_1 + 13u_2$.

Diferenciál druhého řádu: Potřebujeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$, a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$. Pak $H(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$ a

$$d^{2}f(1,2)[(u_{1},u_{2}),(v_{1},v_{2})] = 4u_{1}v_{1} + 2u_{1}v_{2} + 2u_{2}v_{1} + 12u_{2}v_{2}.$$

Diferenciál třetího řádu: Potřebujeme $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2$, a $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$. a $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$. Dosadíme bod (1,2) (to je snadné) a počítáme, musíme si v tom udělat pořádek, ať nezapomeneme na žádný

z z^3 členů trojité sumy. Musí se tam objevit kombinace indexů 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, u každého takového součinu $u_iv_jw_k$ bude jistá parciální derivace, přičemž index 1 signalizuje derivaci podle xa index 2 podle y.

$$d^{3}f(1,2)[(u_{1},u_{2}),(v_{1},v_{2}),(w_{1},w_{2})]$$

$$= 0u_{1}v_{1}w_{1} + 2u_{1}v_{1}w_{2} + 2u_{1}v_{2}w_{1} + 0u_{1}v_{2}w_{2} + 2u_{2}v_{1}w_{1} + 0u_{2}v_{1}w_{2} + 0u_{2}v_{2}w_{1} + 6u_{2}v_{2}w_{2}$$

$$= 2u_{1}v_{1}w_{2} + 2u_{1}v_{2}w_{1} + 2u_{2}v_{1}w_{1} + 6u_{2}v_{2}w_{2}.$$

Docela maso.

Tento příklad nabízí otázku, jestli by výpočet diferenciálů vyšších řádů nešel nějak zjednodušit. Odpověď zní, že obecně ne. Nicméně diferenciály se často používají pro stejný směr, tedy $d^2f(\vec{a})[\vec{h},\vec{h}]$, $d^3f(\vec{a})[\vec{h},\vec{h},\vec{h}]$ atd. Jak by pak dopadly diferenciály v předchozím příkladě? Mnohem lépe, protože pak se pořadí stává irelevantní nejen u parciáních derivací, ale i u součinů typu u_1v_2 či $u_1v_2w_3$. Lze tedy spojovat a dostáváme

$$df(1,2)[(h_1,h_2)] = 4h_1 + 13h_2,$$

$$d^2f(1,2)[(h_1,h_2),(h_1,h_2)] = 4h_1^2 + 4h_1h_2 + 12h_2^2.$$

$$d^3f(1,2)[(h_1,h_2),(h_1,h_2),(h_1,h_2)] = 6h_1^2h_2 + 6h_2^3.$$

Uměli bychom se k takto efektivnímu vyjádření dostat jinak a možná pohodlněji? Jedno efektivní vyjádření jsme již viděli, máme $\mathrm{d}f[\vec{h}] = \nabla f \vec{h}^T$ a $\mathrm{d}^2 f[\vec{h}, \vec{h}] = \vec{h} H \vec{h}^T$. Bohužel to není příliš perspektivní, protože není jasné, jak podobným způsobem dělat vyšší dimenze. Zkusíme na to jít jinak, začneme prvním diferenciálem:

$$\mathrm{d}f[\vec{h}] = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

Co se tam stalo? Začneme tím, že se na parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial x_i}$ podíváme abstraktně jako na jakýsi operátor na funkcích neboli zobrazení, které dělá z funkcí jiné. Operátory (zobrazení) umíme přirozeným způsobem násobit čísly a sčítat, takže $\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ je prostě jen operátor, který působí na funkce, konkrétní akci pak vypočítáme zpětným rozdělením na jednotlivé složky jako v původním součtu. Ta pravá finta ale teprve přijde. Zkusme si symbolicky vyrobit vektor ∇ jako operátor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Dostáváme pak elegantní vyjádření $\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{h} \bullet \nabla$ a proto

$$\mathrm{d}f[\vec{h}] = (\vec{h} \bullet \nabla)f.$$

Teď se podíváme, zda nám to nějak pomůže u druhého diferenciálu. Tam máme

$$d^{2}f(\vec{a})[\vec{h}, \vec{h}] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}} h_{i}h_{j} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{i}h_{j} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\right) f = \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{i}h_{j} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \frac{\partial}{\partial x_{i}}\right) f$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} h_{i} \frac{\partial}{\partial x_{i}}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} h_{j} \frac{\partial}{\partial x_{j}}\right) f = (\vec{h} \cdot \nabla)(\vec{h} \cdot \nabla) f = (\vec{h} \cdot \nabla)^{2} f.$$

Takže druhý diferenciál je prostě jen dvakrát aplikovaný operátor $(\vec{h} \bullet \nabla)$. Pro vyšší diferenciály to funguje zcela analogicky. Nejlepší na tom je, že není třeba opakovaně aplikovat tento operátor, jako když vyšší derivaci hledáme opakovaným derivováním, ale můžeme si nejprve zjisti, jak vlastně celý operátor funguje, roznásobením mocniny pomocí obvyklých vzorců. Zkusme si to ukázat na třetím diferenciálu v předchozím příkladě.

$$(\vec{h} \bullet \nabla)^3 = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^3 + 3\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3$$
$$= h_1^3 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + h_2^3 \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}.$$

Teď tento operátor aplikujeme na f a dostaneme

$$d^{3}f[(h_{1}, h_{2}), (h_{1}, h_{2}), (h_{1}, h_{2})] = \frac{\partial^{3}f}{\partial x_{1}^{3}}h_{1}^{3} + \frac{\partial^{3}f}{\partial x_{1}^{2}\partial x_{2}}3h_{1}^{2}h_{2} + \frac{\partial^{3}f}{\partial x_{1}\partial x_{2}^{2}}3h_{1}h_{2}^{2} + \frac{\partial^{3}f}{\partial x_{2}^{3}}h_{2}^{3}.$$

Dosazením bodu (1,2) do parciálních derivací dostáváme stejný výsledek jako výše. Tento postup je vysoce efektivní, bude se nám velice hodit níže.

2.c Taylorův polynom

Taylorův polynom v jedné proměnné vychází z aproximace tečnou, kterou zpřesňuje pomocí vyšších derivací a vyšších mocnin. Vychází známý vzorec

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + \dots$$

Na chvíli si jej přepíšeme pomocí substituce x = a + h:

$$T(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \dots$$

Jak by mohlo vypadat zobecnění pro více proměnných? U prvního členu už správný výraz uhodnout umíme, víme totiž, že nejlepší aproximace f na okolí \vec{a} je pomocí tečné nadroviny neboli

$$T(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \mathrm{d}f(\vec{a})[\vec{h}].$$

První opravný člen tedy odpovídá, z první derivace jsme přešli k prvnímu diferenciálu. Ukážeme, že odpovídají i další členy, uděláme to postupem, který jsme již s úspěchem použili, jmenovitě se zaměříme na jednorozměrný řez grafem funkce. Vezměme si tedy pevně zvolený bod \vec{a} v D(f) a předpokládejme, že funkce f má spojité parciální derivace vysokého řádu na okolí \vec{a} . Zvolíme si pevně také určitý směr \vec{u} (z technických důvodů bude dobré vyžadovat $\|\vec{u}\|=1$) a zeptejme se, jak to vypadá s aproximací funkce f, pokud se z bodu \vec{a} pohybujeme ve směru \vec{u} . To znamená, že vlastně zkoumáme funkci jedné proměnné $\varphi(t)=f(\vec{a}+t\vec{u})$ okolo t=0, tudíž víme, že nejlepší aproximace chování dostáváme právě Taylorovým polynomem:

$$\varphi(h) \sim \varphi(0) + \varphi'(0)h + \frac{1}{2!}\varphi''(0)h^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(0)h^3 + \dots$$

Teď bychom potřebovali tento odhad vyjádřit pomocí původní funkce f. Funkce φ i její derivace se dají snadno převést, dostáváme $\varphi(0) = f(\vec{a}), \ \varphi'(0) = D_{\vec{u}}f(\vec{a}), \ \varphi''(0) = D_{\vec{u}}(D_{\vec{u}}f(\vec{a})) = D_{\vec{u}}^2f(\vec{a})$ atd. Dostáváme tedy

$$f(\vec{a} + h\vec{u}) \sim f(\vec{a}) + D_{\vec{u}}f(\vec{a})h + \frac{1}{2!}D_{\vec{u}}^2f(\vec{a})h^2 + \frac{1}{3!}D_{\vec{u}}^3f(\vec{a})h^3 + \dots$$

Teď to potřebujeme přepsat do běžného značení. Jsme tedy v bodě \vec{a} a posunuli jsme se do bodu \vec{x} , jak to vyjádříme pomocí \vec{u} a h? Jednoduše, posunuli jsme se ve směru $\vec{u} = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}$, a když ještě zvolíme $h = \|\vec{x} - \vec{a}\|$, tak máme $\vec{a} + h\vec{u} = \vec{x}$ a $\|\vec{u}\| = 1$. Pak

$$f(\vec{a}) \sim f(\vec{a}) + D_{\vec{u}}f(\vec{a}) \|\vec{x} - \vec{a}\| + \frac{1}{2!} D_{\vec{u}}^2 f(\vec{a}) \|\vec{x} - \vec{a}\|^2 + \frac{1}{3!} D_{\vec{u}}^3 f(\vec{a}) \|\vec{x} - \vec{a}\|^3 + \dots$$

Když si ještě uvědomíme, že $\|\vec{x} - \vec{a}\|^k D_{\vec{u}}^k f(\vec{a}) = D_{\vec{u}\|\vec{x} - \vec{a}\|}^k f(\vec{a}) = D_{\vec{x} - \vec{a}}^k f(\vec{a})$, tak už nás následující definice nepřekvapí.

Definice.

Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce spojitě diferencovatelná v \vec{a} až do řádu $N \in \mathbb{N}$. Pak definujeme její **Taylorův polynom** v \vec{a} stupně N jako

$$T_{N}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + D_{\vec{x}-\vec{a}}f(\vec{a}) + \frac{1}{2}D_{\vec{x}-\vec{a}}^{2}f(\vec{a}) + \frac{1}{3!}D_{\vec{x}-\vec{a}}^{3}f(\vec{a}) + \dots + \frac{1}{N!}D_{\vec{x}-\vec{a}}^{N}f(\vec{a})$$

$$= f(\vec{a}) + D_{\vec{u}}f(\vec{a})||\vec{x} - \vec{a}|| + \frac{1}{2}D_{\vec{u}}^{2}f(\vec{a})||\vec{x} - \vec{a}||^{2} + \frac{1}{3!}D_{\vec{u}}^{3}f(\vec{a})||\vec{x} - \vec{a}||^{3} + \dots + \frac{1}{N!}D_{\vec{u}}^{N}f(\vec{a})||\vec{x} - \vec{a}||^{N},$$

kde jsme označili $\vec{u} = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}$.

Ta první verze je lepší z hlediska praktického počítání, tu druhou jsme uvedli spíš pro zajímavost, aby byla vidět spojitost s Taylorovým polynomem jedné proměnné. Protože jsme se k tomuto tvaru dostali přechodem k jedné dimenzi, není překvapující, že se přenášejí vlastnosti Taylorova polynomu jedné proměnné, platí třeba věta o Lagrangeově tvaru zbytku.

Věta.

Nechť G je oblast v \mathbb{R}^n a $f \in C^{n+1}(G)$. Nechť $\vec{a} \in G$. Pak pro každé $\vec{x} \in G$ existuje $\vec{c} \in \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$ takové, že

$$f(\vec{x}) - T_N(\vec{x}) = \frac{1}{(N+1)!} D_{\vec{x}-\vec{a}}^{N+1} f(\vec{c}) = \frac{1}{(N+1)!} D_{\vec{u}}^{N+1} f(\vec{c}) ||\vec{x} - \vec{a}||^{N+1},$$

kde jsme označili $\vec{u} = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}$.

Ukážeme si ještě jeden tvar Taylorova polynomu, ze kterého již vyplyne nejvýhodnější způsob výpočtu. Nejprve si připomeneme větu, která říká, jak se dají směrové derivace počítat pomocí totálního diferenciálu. Zde to otočíme a přejdeme od směrových derivací k diferenciálu. Pak použijeme přechod k praktickému způsobu zápisu diskutovanému na konci předchozí sekce.

Fakt.

Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce spojitě diferencovatelná v \vec{a} až do řádu $N \in \mathbb{N}$. Pak má její Taylorův polynom stupně N tvar

$$T_{N}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \mathrm{d}f(\vec{a})[\vec{x} - \vec{a}] + \frac{1}{2}\mathrm{d}^{2}f(\vec{a})[\vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a}] + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^{3}f(\vec{a})[\vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a}] + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{N!}\mathrm{d}^{N}f(\vec{a})[\vec{x} - \vec{a}, \dots, \vec{x} - \vec{a}]$$

$$= f(\vec{a}) + ((\vec{x} - \vec{a}) \bullet \nabla)f(\vec{a}) + \frac{1}{2}((\vec{x} - \vec{a}) \bullet \nabla)^{2}f(\vec{a}) + \frac{1}{3!}((\vec{x} - \vec{a}) \bullet \nabla)^{3}f(\vec{a}) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{N!}((\vec{x} - \vec{a}) \bullet \nabla)^{N}f(\vec{a}).$$

S těmito výrazy již umíme pracovat.

Příklad.

Uvažujme funkci $f(x,y) = \cos(xy) + xy$ v bodě $(0,\pi)$. Najdeme tam T_2 . Nejprve parciální derivace, pro úsporu použijeme oblíbené fyzikální značení:

$$\begin{split} f_x &= -\sin(xy) \cdot y + y, \ f_y = -\sin(xy) \cdot x + x; \\ f_{xx} &= -\cos(xy) \cdot y^2, \ f_{yx} = f_{xy} = -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) + 1, \ f_{yy} = -\cos(xy) \cdot x^2. \end{split}$$

Ukážeme dva způsoby tvoření polynomu. Ten první je možná přímočařejší a vychází z geometrie, ale bude rozumně fungovat je pro polynomu do druhého stupně. Je založen na tvaru

$$T(x,y) = f(0,\pi) + \nabla f(0,\pi) \bullet ((x,y) - (0,\pi)) + \frac{1}{2}((x,y) - (0,\pi))H(0,\pi)((x,y) - (0,\pi))^{T}$$

Zde $f(0,\pi)=1$, gradient je $\nabla f(0,\pi)=(\pi,0)$ a hessián v bodě $(0,\pi)$ vychází $\begin{pmatrix} -\pi^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Proto

$$T_2(x,y) = 1 + \pi \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-\pi) + \frac{1}{2} \left((-\pi^2) \cdot (x-0)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (x-0)(y-\pi) + 0 \cdot (y-\pi)^2 \right)$$

= $1 + \pi x - \frac{1}{2} \pi^2 x^2 + x(y-\pi)$.

Druhý přístup je obecnější, nejprve si zjistíme, jak vypadají ty diferenciály:

$$(((x,y) - (0,\pi)) \bullet \nabla) f = x \frac{\partial f}{\partial x} + (y - \pi) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(((x,y) - (0,\pi)) \bullet \nabla)^2 f = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + (y - \pi) \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x(y - \pi) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y - \pi)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Po dosazením parciálních derivací v bodě $(0, \pi)$ již snadno vytvoříme stejný polynom jako předtím.

2.d Extrémy funkcí více proměnných

Lokální extrémy.

Zde půjde o přímou analogii lokálních extrémů funkcí jedné proměnné, hlavní myšlenky zůstanou stejné, jen technicky bude třeba občas něco změnit.

Definice.

Nechť $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(f).

Řekneme, že f má v \vec{a} lokální maximum nebo že $f(\vec{a})$ je lokální maximum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \ge f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.

Řekneme, že f má v \vec{a} lokální minimum nebo že $f(\vec{a})$ je lokální minimum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.

Pokud jsou v definici maxima/minima ostré nerovnosti pro $\vec{x} \neq \vec{a}$, pak se dotyčný extrém nazývá **ostrý**.

Klasický problém: Jak je najít a klasifikovat.

Věta.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n a $f: G \mapsto \mathbb{R}$. Nechť $\vec{a} \in G$.

Jestliže má f v \vec{a} lokální extrém, pak pro všechny $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ platí $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = 0$, pokud tato derivace existuje.

Důsledek.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n a $f \in C^1(G)$. Nechť $\vec{a} \in G$. Jestliže má f v \vec{a} lokální extrém, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$ neboli $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Definice.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n a $f \in C^1(G)$. Body $\vec{a} \in G$, pro které platí $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, se nazývají **stacionární body**.

Příklad.

a) Uvažujme $f(x,y) = x^2 + y^2$.

 $f_x=2x=0 \implies x=0, f_y=2y=0 \implies y=0.$ Stacionární bod (0,0). Protože evidentně $f(x,y)\geq 0=f(0,0)$, je v (0,0) lokální (i globální) minium.

b) Uvažujme f(x,y) = |x| + |y|.

Protože evidentně $f(x,y) \ge 0 = f(0,0)$, je v bodě (0,0) lokální (i globální) minium. Snadno se ale nahlédne, že tam neexistují parciální derivace.

Body bez derivace jsou ve více dimenzích trochu problematičtější, dále se tedy zaměříme na pěkné funkce.

Jako obvykle Věta výše neplatí naopak, viz např. funkce $f(x,y)=x^2-y^2$. Má evidentně stacionární bod f(0,0)=0, ale není to ani lokální maximum, ani lokální minimum. Proč? Pro libovolně malé h>0 je $f(h,0)=h^2>0$ a $f(0,h)=-h^2<0$, takže v libovolném okolí bodu (0,0) jsou body, kde je f větší i menší než f(0,0).

Jak poznáme, co se ve stacionárních bodech děje? Připomeňme si situaci v jedné proměnné. Tam se to dá poznat například podle druhé derivace. V kritických bodech totiž v Taylorově polynomu bude f'(a) = 0 a máme aproximaci

$$f(x) \sim f(a) + \frac{1}{2}f''(a)|x - a|^2$$
.

Jestliže f''(a) > 0, pak blízko a platí f(x) > f(a) a máme tedy minimum, podobně hned vidíme případ f''(a) < 0.

Jak to funguje ve více dimenzích? Pro stacionární bod máme aproximaci

$$f(\vec{a} + \vec{h}) \sim f(\vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{h}H\vec{h}^T,$$

kde $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ je Hessova matice. Klíčová je otázka, jak se chová ten člen sH. Odvodíme si teď pro to kritérium. Bude to náročnější, ale rozumět pozadí zase pomůže si to kritérium zapamatovat. Pokud na to nemáte sílu, skočte rovnou na Důsledek za Sylvesterovým kritériem.

Jdeme na to. Chování onoho součinu $\vec{h}H\vec{h}^T$ závisí na tom, co je to vlastně za matici, čili je to otázka, která nepatří do analýzy, ale do lineární algebry, přesněji do teorie matic. Začneme definicí.

Definice.

Nechť A je symetrická matice $n \times n$.

Řekneme, že A je **positivně definitní**, jestliže $\vec{x}A\vec{x}^T > 0$ pro všechny $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

Řekneme, že A je **negativně definitní**, jestliže $\vec{x}A\vec{x}^T < 0$ pro všechny $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

Řekneme, že A je **indefinitní**, jestliže existují $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\vec{x} A \vec{x}^T > 0$ a $\vec{y} A \vec{y}^T < 0$.

Tato vlastnost je velice užitečná v některých aplikacích, zde je dokonce evidentně klíčová. Jak se to u matice

Podívejme se pořádně na výraz $\vec{h}A\vec{h}^T$, sumu si rozdělíme na dvě části podle toho, jestli se index ve členech opakuje nebo ne.

$$\vec{h}A\vec{h}^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}h_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^n a_{ij}h_ih_j.$$

Co by se stalo, kdyby byla matice A diagonální? Pak

$$\vec{h}A\vec{h}^T = \sum_{i=1}^n a_{ii}h_i^2$$

a znaménka výsledku vidíme hned podle toho, jaká jsou znaménka a_{ii} . Pokud jsou všechna kladná, pak $\vec{h}A\vec{h}^T>0$ pro libovolný vektor. Pokud jsou všechna záporná, pak vždy $\vec{h}A\vec{h}^T<0$. Pokud by byla mezi a_{ii} znaménka kladná i záporná, tak máme problém a dostáváme indefinitní matici. Když se na chvíli vrátíme k problému tvaru funkce, tak to znamená, že pak podle volby \vec{h} funkce někdy roste a někdy klesá, takže se v různých směrech chová v bodě \vec{a} různě. Tomu se říká sedlový bod, někteří autoři si tento pojem rezervují jen pro případ dvou proměnných, kde je to pěkně názorné (sedlo na horách či pro koně).

Drobný zádrhel je v tom, že Hessova matice bývá málokdy diagonální. Teorie lineární algebry nicméně říká, že pokud je matice A symetrická (což pro pěkné funkce f Hessovy matice jsou), tak se součin hAh^T chová stejně, jako kdybychom tam namísto A dali matici diagonální vytvořenou z vlastních čísel. Jinými slovy, znaménka vlastních čísel začnou hrát stejnou roli, jako hrála čísla a_{ii} u diagonální matice. Dostáváme tak následující tvrzení.

Věta.

Nechť A je symetrická matice $n \times n$ s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Jestliže $\lambda_i > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, pak je A positivně definitní.

Jestliže $\lambda_i < 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, pak je A negativně definitní.

Hledání vlastních čísel je ale obtížné. Mnohem snadnější je následující kritérium.

(Sylvestrovo kritérium)

Nechť $A=(a_{ij})$ je symetrická matice $n\times n$. Uvažujme její subdeterminanty $\Delta_1=a_{11},$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
, atd. až $\Delta_n = \det(A)$.

Jestliže $\Delta_i > 0$ pro všechna i, pak je A positivně definitní.

Jestliže $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ atd. až $(-1)^n \Delta_n > 0$, pak je A negativně definitní. Jestliže $\Delta_2 < 0$, pak existují $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\vec{x} A \vec{x}^T > 0$ a $\vec{y} A \vec{y}^T < 0$.

Toto kritérium se dobře pamatuje, když si představíte, že jej aplikujete na dotyčnou diagonální matici

roto kriterium se dobře pamatuje, když si představite, že jej aplikujete na dotychou diagonalní matici
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
 Teď je pěkně vidět, že pro kladná vlastní čísla musí být ony subdeterminanty kladné, zatímco pokud jsou všechna λ_i záporná, tak se musí znaménka determinantů střídat tak, jak je to

kladné, zatímco pokud jsou všechna λ_i záporná, tak se musí znaménka determinantů střídat tak, jak je to ve větě.

Důsledek.

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n a $f \in C^2(G)$.

Nechť $\vec{a} \in G$ je stacionární bod f a H je Hessova matice f v \vec{a} . Nechť Δ_i jsou levé horní subdeterminanty

Jestliže $\Delta_i > 0$ pro všechna i, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální minimum.

Jestliže $\Delta_1 < 0, \, \Delta_2 > 0, \, \Delta_3 < 0$ atd. až $(-1)^n \Delta_n > 0$, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální maximum.

Jestliže $\Delta_2 < 0$, pak je $f(\vec{a})$ sedlový bod.

Možností pro znaménka je samozřejmě víc, například některé subdeterminanty mohou být nulové či se znaménka mohou střídat jinak než u minima, a pak se často nedá říct nic či je bylo třeba udělat pokročilejší rozbor. Na to zde ale nemáme nástroje, tak prostě prohlásíme, že o dotyčném bodě nic nevíme.

Příklad.

Uvažujme $f(x,y)=x^3-3x+y^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3, \frac{\partial f}{\partial y}=2y$. řešením soustavy $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$ dostáváme $x=\pm 1$ a y=0. Máme stacionární body (-1,0), (1,0).

Klasifikace: Nejprve si připravíme Hessovu matici. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, proto $H = \begin{pmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bod
$$(-1,1)$$
: $H = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tedy $\Delta_2 = -6 < 0$ a $f(-1,1) = 3$ je sedlo.

Bod (1,0):
$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
, tedy $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 6 > 0$ a $f(1,0) = -1$ je lok. min.

Příklad.

Uvažujme $f(x,y) = xy e^{x-y^2/2}$.

 $\frac{\partial f}{\partial x} = (y + xy)e^{x-y^2/2}, \frac{\partial f}{\partial y} = (x - xy^2)e^{x-y^2/2}$. Exponenciála je vždy kladná, je tedy třeba řešit rovnice (1+x)y=0 a $x(1-y^2)=0$. První dává dvě možnosti. Jestliže y=0, pak z druhé rovnice x=0. Jestliže x=-1, pak z druhé rovnice $y=\pm 1$. Máme stacionární body (0,0), (-1,-1), (-1,1).

obecnou Hessovu matici vynecháme.

Bod
$$(0,0)$$
: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tedy $\Delta_2 = -1 < 0$ a $f(0,0) = 0$ je sedlo.

Bod
$$(-1,1)$$
: $H = \begin{pmatrix} e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 2e^{-3/2} \end{pmatrix}$, tedy $\Delta_1 = e^{-3/2} > 0$, $\Delta_2 = 2e^{-3} > 0$ a $f(-1,1) = -e^{-3/2}$ je lok. min.

Bod
$$(-1,-1)$$
: $H = \begin{pmatrix} -e^{-3/2} & 0 \\ 0 & -2e^{-3/2} \end{pmatrix}$, tedy $\Delta_1 = -e^{-3/2} < 0$, $\Delta_2 = 2e^{-3} > 0$ a $f(-1,-1) = e^{-3/2}$ je lok. max.

Extrémy na množině.

Pořád platí, že jestliže f nabývá globální extrém na množině M v bodě \vec{a} , pak má f v \vec{a} lokální extrém vzhledem kM nebo je \vec{a} na hranici M. Ve více rozměrech je to ovšem značně komplikované, například se klidně může stát, že M samotná je hranicí, stačí si představit hledání extrémů f(x,y) na nějaké úsečce v \mathbb{R}^2 . Proto se podíváme na některé obvyklejší speciální případy.

1) Množiny dané vazebnou podmínkou:

Uvažujme funkce $g_1: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, g_2: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ až $g_p: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, definujme

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n; \ \forall i: \ g_i(\vec{x}) = 0 \}.$$

V typickém případě každá podmínka odebere stupeň volnosti, takže M je objekt o rozměru n-p, ale není to pravidlem.

Příklad.

- a) Dvě různoběžné nadroviny v \mathbb{R}^3 dají opravdu jednorozměrný objekt (přímku).
- b) Koule a válec v \mathbb{R}^3 mohou dát jednu až dvě kružnice (vznikne de facto jednorozměrný objekt) nebo také prázdnou množinu.
- c) Dvě přímky v \mathbb{R}^2 mohou dát nula i jednorozměrný objekt.
- d) Zajímavá situace:

 $g_1(x,y) = |x| + |y| - 1 = 0$ dává |x| + |y| = 1 neboli kosočtverec, $g_2(x,y) = x + y - 1 = 0$ neboli x + y = 1dává přímku, průsečíkem je úsečka neboli jednorozměrný objekt.

Toto jsou patologické situace, bude tedy k vynucení správné dimenze M třeba použít nějakou podmínku nezávislosti q_i .

Cílem je najít globální extrémy dané spojité funkce f na M.

Selským rozumem: použít podmínky k eliminaci proměnných. To ale nejde vždy.

Věta. (Lagrangeova o multiplikátorech)

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^n , nechť $f, g_1, \ldots, g_p \in C^1(G)$.

Předpokládejme, že hodnost matice $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ je na G vždy rovna p.

Nechť $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ g_1(\vec{x}) = \cdots = g_p(\vec{x}) = 0\}$.

Jestliže f nabývé v bodě $\vec{x} \in M$ lektlička ovtrácem vahladom la M statutí statutí sportrácem vahladom la M statutí sportrácem vahladom M statutí sportrácem value M statutí sportrácem vahladom M statutí sportrácem value M statutí sportrác

Jestliže f nabývá v bodě $\vec{a} \in M$ lokálního extrému vzhledem k M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in I\!\!R$ takové, že $\nabla f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\vec{a}).$

Těm λ_i se říká **Lagrangeovy multiplikátory**.

Z praktického pohledu vzniká soustava n+p rovnic o n+p neznámých $a_1,\ldots,a_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) + \dots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n)
\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_n) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_n) + \dots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_2}(a_1, \dots, a_n)
\vdots
\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) + \dots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n)
0 = g_1(a_1, \dots, a_n)
\vdots
0 = g_p(a_1, \dots, a_n)$$

Příklad.

Najdeme vzdálenost bodu P = (1, -1, 0) od roviny q: x + y + z = 3.

Tato vzdálenost se najde jako vzdálenost mezi P a bodem Q z roviny q, který je k P nejblíže. Hledáme tedy minimum funkce $d(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2}$ pro (x,y,z) z dané roviny, evidentně stačí hledat minimum funkce $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y+1)^2+z^2$, a to na množině dané podmínkou q(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0. Podle věty se takový bod skrývá mezi řešeními soustavy

$$2(x-1) = \lambda \cdot 1$$
$$2(y+1) = \lambda \cdot 1$$
$$2z = \lambda \cdot 1$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

Z prvních tří rovnic si vyjádříme x, y, z, dosadíme do poslední a dostaneme

$$\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)+\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)+\frac{\lambda}{2}=3 \implies \lambda=2 \implies x=2,\ y=0,\ z=1.$$

Našli jsme podezřelý bod, je to bod minima či maxima? Stačí dosadit jiný bod z přímky do f a dostáváme

Na dané přímce je tedy bod (2,0,1) nejblíže k danému bodu P, jejich vzdálenost (a vzdálenost bodu od přímky) je tedy $d(2,0,1) = \sqrt{3}$.

2) Množiny s neprázdným vnitřkem a hranicí popsatelnou parametricky či vazební podmínkou. Zde se nejprve podíváme na vnitřek, kandidáty hledáme pomocí stacionárních bodů. Pak se podíváme na hranici (často zvlášť na její jednotlivé kousky), nakonec všechny kandidáty dosadíme a porovnáme.

Příklad.

Najdeme extrémy $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$ na trojúhelníku daném přímkami x=0, y=0, x+y=4. a) Co se děje uvnitř? Stacionární body: $f_x = 2(x-3) = 0 \implies x = 3, f_y = 2(y-3) = 0 \implies y = 3$, ale bod (3,3) není v dané množině M. Uvnitř tedy kandidáti nebudou. Podíváme se na hranici, má tři části.

b) Úsečka (0,4) na ose x: Zkoumáme tedy funkci $\varphi(x) = f(x,0) = (x-3)^2$ na množině (0,4), což je standardní problém. Máme jako kandidáty krajní body, tedy body (0,0) a (4,0), a pak možná nějaký kritický bod uprostřed. $\varphi' = 0 \implies x = 3$, tedy další kandidát (3,0).

- c) Úsečka (0,4) na ose y: Zkoumáme tedy funkci $\varphi(y)=f(0,y)=(y-3)^2$ na množině (0,4), což je standardní problém a navíc stejný jako v b). Dostáváme další kandidáty (0,4) a (0,3).
- d) Část přímky x+y=4 pro $x\in (0,4)$. Krajní body už máme v seznamu kandidátů z částí b) a c), zbývá hledat případné kandidáty uprostřed. Dvě možnosti:
- A) Pomocí podmínky eliminujeme jednu proměnnou, pak vlastně zkoumáme

$$\varphi(x) = f(x, 4 - x) = (x - 3)^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 10,$$

kritický bod najdeme jako obvykle, $\varphi'(x) = 0 \implies x = 2$, pak i y = 2, zajímá nás tedy bod (2,2).

B) Je také možné použít Lagrangeovy multiplikátory, vazba je g(x,y) = x + y - 4, dostáváme rovnice

$$2(x-3) = \lambda$$

$$2(y-3) = \lambda$$

$$x + y = 4$$

$$\implies \lambda = -2 \implies x = y = 2.$$

Každopádně máme šest kandidátů:

 $f(0,0)=18,\,f(3,0)=9,\,f(4,0)=10,\,f(0,3)=9,\,f(0,4)=10,\,f(2,2)=2.$ Porovnání dá závěr: $\min_M(f)=f(2,2)=2$ a $\max_M(f)=f(0,0)=18.$

2.e Extrémy numericky

Hledat lokální extrémy numericky je ve více proměnných stejně nepříjemné jako v jedné a používají se podobné metody. Jedna velice užitečná se jmenuje **gradient descent method**. Ukážeme si, jak funguje při hledání maxima dané funkce f. Kritickou částí algoritmu je nalezení stacionárního bodu.

Začne se nějakým iniciačním bodem \vec{x}_n . Spočítáme si gradient v tomto bodě, pokud vyjde nulový, pak máme hledaný stacionární bod

Pokud gradient nulový není, pak je to určitý vektor \vec{h} a my víme, že tímto směrem graf funkce roste nejvíce, jak je možné. Pokud tedy hledáme vrchol (lokální maximum), má smysl se tímto směrem kousek vydat. Hned na začátku metody jsme si zvolili určitou délku kroku ε a nyní ji využijeme, další zkoumaný bod bude $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \varepsilon \vec{h}$.

Dosadíme do funkce f. Jestliže $f(\vec{x}_{n+1}) > f(\vec{x}_n)$, pak byl dobrý nápad takto jít a s bodem \vec{x}_{n+1} se vrátíme na začátek algoritmu (koukneme v něm na gradient atd).

Pokud v novém bodě hodnota funkce nevzrostla, pak nastává fáze řešení problému. Častou příčinou je, že jsme ten kopeček přeběhli. Proto často pomáhá zmenšit zmenšit délku kroku a vyzkoušet $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{x}_n$, a když to nevyjde, tak $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{4}\varepsilon\vec{x}_n$, popřípadě $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{8}\varepsilon\vec{x}_n$ atd. Když se konečně dostaneme k hodnotě větší než $f(\vec{x}_n)$, vracíme se na začátek algoritmu a je otázka, zda pracovat s původním ε , nebo převzít hodnotu velikosti kroku, která nám právě zabrala.

Právě volba velikosti kroku $\varepsilon > 0$ je jednou ze zásadních složek algoritmu. Pokud zvolíme krok příliš velký, budeme po funkci divoce skákat a s vysokou pravděpodobností ta zajímavá místa míjet. Pokud zvolíme krok příliš malý, bude dlouho trvat, než někam dojedeme. Dá se čekat, že se vymýšlejí i adaptivní algoritmy, kde se délka kroku průběžne opravuje například v závislosti na velikosti skoku v hodnotě funkce, který byl v poslední iteraci dosažen.

Je to samozřejmě látka pro speciální kurs numerické matematiky, ale je dobré vědět alespoň trochu, jak tyto záležitosti fungují v mnohých praktických výpočtech.

3. Vektorové funkce, implicitní funkce

3.a Vektorové funkce

Definice.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(F). Řekneme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ je **(totální) diferenciál** F v \vec{a} , jestliže

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\Bigl(\frac{\|F(\vec{a}+\vec{h})-F(\vec{a})-L[\vec{h}]\|}{\|\vec{h}\|}\Bigr)=0.$$

Pokud takovéto lineární zobrazení existuje, pak jej značíme d $F(\vec{a})$, popř. $DF(\vec{a})$, a řekneme, že F je diferencovatelná v \vec{a} .

Obecně, pro vektorové funkce máme $dF(\vec{a})[\vec{h}] = A\vec{h}^T$, kde A je matice $m \times n$.

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(F). Jestliže existuje d $F(\vec{a})$, pak je F spojitá v \vec{a} .

Obdobně definujeme pro otevřenou množinu $G\subseteq \mathbb{R}^n$ množinu $[C^1(G)]^m$ všech vektorových funkcí, které mají na G spojité všechny parciální derivace $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

Pak dostáváme
$$dF(\vec{a}) = A\vec{h}^T$$
, kde $A = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$, nazývá se **Jacobiho**

matice a značí $J_F(\vec{a})$.

Determinant Jacobiho matice se nazývá **jakobián** a značí $\Delta_F(\vec{a})$.

Mají velký význam při studiu parametrických povrchů nebo třeba při substituci v integrálu.

Diferenciál splňuje obvyklá pravidla pro F + G, $F \cdot G$. Zajímavé je skládání.

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť $G: D(G) \mapsto \mathbb{R}^k$ je vektorová funkce, kde $D(G) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(F) takový, že $\vec{b} = F(\vec{a})$ je vnitřní bod D(G). Předpokládejme, že pro $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ existuje $D_{\vec{u}}F(\vec{a})$ a že G je diferencovatelná v \vec{a} . Pak má $G \circ F$ derivaci v \vec{a} ve směru \vec{u} a platí

$$D_{\vec{u}}(G \circ F)(\vec{a}) = dG(F(\vec{a}))[D_{\vec{u}}F(\vec{a})].$$

Věta.

Nechť $F: D(F) \mapsto \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, kde $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť $G: D(G) \mapsto \mathbb{R}^k$ je vektorová funkce, kde $D(G) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Nechť \vec{a} je vnitřní bod D(F) takový, že $\vec{b} = F(\vec{a})$ je vnitřní bod D(G). Předpokládejme, že F je diferencovatelná v \vec{a} a G je diferencovatelná v \vec{a} a Pak $G \circ F$ je diferencovatelná v \vec{a} a platí

$$d(G \circ F)(\vec{a}) = dG(F(\vec{a})) \circ dF(\vec{a}).$$

Při maticové reprezentaci lineárních zobrazení se násobí příslušné Jacobiho matice, $J_{G \circ F} = J_G J_F$.

Speciální verze:

Vezmeme-li v předchozí větě $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, které jsou spojitě diferencovatelné, a derivaci ve směru $\vec{e_i}$, pak dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ F) = \nabla g \bullet \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Dostáváme tak větu o transformaci souřadnic, kterou jsme již viděli dříve.

Speciální případ: **parametrické křivky**, například $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m$. Příklady:

 $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ je křivka, která obíhá stále dokola po jednotkové kružnici.

 $F(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$ je křivka, která obíhá stále dokola po jednotkové kružnici, přičemž se rychlost obíhání zvětšuje (geometricky je to stejná křivka jako u předchozího příkladu, ale z fyzikálního hlediska je to velice rozdílný jev).

 $F(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$ pro $t \in (1, \infty)$ dává spirálu, obíhá se dokola, přičemž se zvětšuje i poloměr.

 $F(t) = (\frac{1}{t}\cos(t), \frac{1}{t}\sin(t))$ pro $t \in (1, \infty)$ je pro změnu spirála zavinutá směrem k počátku.

Funkce více proměnných © pHabala 2010

F(t)=(2t,3t) je vlastně přímka o rovnici $y=\frac{3}{2}x,$ což se snadno získá eliminací t z rovnic x=2t, y=3t.

 $F(t) = (2t^3, 3t^3)$ je tatáž přímka, ale jede se po ní jiným způsobem, nikoliv konstantní rychlostí.

 $F(t)=(2t^3,3t^3,2)$ je tatáž přímka, ale jede se po ní jiným způsobem, nikoliv konstantní rychlostí, a navíc je ve 3D, jmenovitě leží v rovině, která je rovnoběžná se základní rovinou xy, ale zvednutá o 2 nahoru.

 $F(t)=(t^2,2t,\sin(t))$ je zajímavý příklad. První dvě souřadnice nám dávají průmět dráhy brouka do roviny xy. Z $x=t^2,\,y=2t$ eliminujeme t a dostaneme $x=\frac{1}{4}y^2$. Brouk se tedy pohybuje nad parabolou otevřenou směrem podle osy x. Výška brouka nad rovinou xy je dána třetí souřadnicí, což je $\sin(t)$. Brouk tedy letí střídavě nad a pod onou parabolou.

Klasické parametrické křivky:

Přímka v \mathbb{R}^n procházející bodem \vec{a} ve směru \vec{d} je dána rovnicí $F(t) = \vec{a} + t\vec{d}$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Kružnice: $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$ pro $t \in (0, 2\pi)$ či nějaký jiný interval dostatečné délky, klidně i pro $t \in \mathbb{R}$, kružnici je možné oběhnout vícekrát.

Elipsa: $x = A\cos(t)$, $y = B\sin(t)$ pro $t \in (0, 2\pi)$ či nějaký jiný interval dostatečné délky, klidně i pro $t \in \mathbb{R}$.

Parametrická křivka je spojitá, pokud jsou jednotlivé složky F spojité funkce v t. Jde o užitečný pojem, třeba při zkoumání souvislosti množin.

Vícerozměrné plochy se dostanou při zavedení více parametrů. Například graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je paraboloid v 3D, který se dá parametricky vyjádřit předpisem $F(s,t) = (s,t,s^2 + t^2)$.

Parametrické křivky a analýza:

Uvažujme křivku x = x(t), y = y(t), která tvoří zároveň graf funkce y = y(x). Pak $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, užitečné také je, že (x'(t), y'(t)) je tečný vektor ke křivce.

3.b Implicitní křivky a funkce.

Mnohé útvary jsou dány rovnicemi, například kružnice v rovině je dána rovnicí $x^2 + y^2 = 5$. Rozmyslíme si, jak bychom se o takových útvarech něco dozvěděli. Jsou v zásadě dva přístupy.

a) Přístup přes hladiny konstantnosti

Pokud je útvar dán rovnicí f(x, y, ...) = c, tak jej lze interpretovat jako hladinu konstantnosti funkce f. Pak je užitečné vědět, že když si vezmeme libovolný bod na této křivce, tak získáme vektor kolmý k dané křivce v tomto bodě jednoduše jako ∇f . Pomocí tohoto vektoru se pak dají snadno napsat tečná přímka, rovina atd. (podle počtu dimenzí).

b) Přístup přes implicitní funkce

Často se stává, že určité části takové křivky lze interpretovat i jako grafy jistých funkcí. Například pokud uvažujeme tu kružnici $x^2 + y^2 = 5$, tak okolo bodu (2,1) odpovídá ona kružnice funkci $y = \sqrt{5 - x^2}$, prostě jsme danou rovnici vyřešili pro y. Takové funkci říkáme **implicitní funkce**. Výhodou je, že pak můžeme aplikovat standardní metody analýzy, např. hledání lokálních extrémů, konvexita atd.

Málokdy tak dostáváme celou křivku, například na okolí bodu (2,-1) je už kružnice totožná s grafem funkce $y=-\sqrt{5-x^2}$, což je jiná funkce. Implicitní křivky proto lze převádět na grafy funkcí většinou pouze lokálně, na okolí zkoumaného bodu.

Navíc ani na to se nelze spolehnout. Například neexistuje okolí bodu $(\sqrt{5},0)$, na kterém by šlo část dotyčné kružnice vyjádřit jako graf funkce. Na libovolném okolí jsou totiž pro jedno x dvě hodnoty kružnice, což u funkce není možné.

Uvažujme tedy rovnici f(x,y)=0 (obecněji f(x,y,...)=0) a zamysleme se nad příslušnou **implicitní křivkou**, tedy množinou bodů splňujících tuto rovnici. Hned na začátku je třeba se vzdát představy, že to vždy musí být křivka ve smyslu čáry.

Příklad.

Implicitní rovnice $xy - \sqrt{x^2y^2} = 0$ dává množinu všech bodů prvního a třetího kvadrantu. Implicitní rovnice $(x^2 - 4)^2 + (y - 1)^2 = 0$ dává množinu dvou bodů, jmenovitě (2,1) a (-2,1). Implicitní rovnice $(|x| - 1)^2 + y^2 = 1$ dává "osmičku", dvě kružnice dotýkající se v jednom bodě.

Jen někdy tedy máme šanci hledat v křivce grafy funkcí. Naším cílem je proto identifikovat situace, kdy to lze, a budeme to dělat lokálně, na okolí bodu, kde je křivka rozumná. Hlavním problémem je, když v tomto bodě křivka prochází jakoby svisle, to je třeba vyloučit podmínkou.

(c) pHabala 2010

Věta. (o implicitní funkci)

Nechť G je otevřená množina v \mathbb{R}^2 , $f \in C^1(G)$. Nechť $\vec{a} = (x_0, y_0) \in G$ splňuje $f(\vec{a}) = 0$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \neq 0$, pak existuje $U = U(x_0)$ a funkce y = y(x) na U taková, že $y(x_0) = y_0$ a f(x, y(x)) = 0 pro $x \in U$. Navíc má y spojitou derivaci a $y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}$.

Implicitní derivování. Vzorec z věty nabízí možnost, jak najít derivaci y(x), aniž bychom tuto funkci měli přesně odvozenu. Většinou si lidé vzorec nepamatují, místo toho používají metodu, kterou byl odvozen, a to je implicitní derivování. Obecně funguje takto. Uvažujme rovnici dávající implicitní funkci. Když začneme brát y jako funkci y = y(x), pak jde vlastně o rovnost dvou funkcí s proměnnou x a je tedy možné obě strany derivovat pomocí běžných pravidel:

$$f(x,y) = 0$$
$$[f(x,y(x))]' = [0]'$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Když tuto rovnici vyřešíme pro y'(x), dostáváme vzorec z věty.

Příklad.

Uvažujme implicitní křivku danou rovnicí $x^4-4xy+y^4=1$ (je to mimochodem šišoid s dlouhou osou na hlavní diagonále, ale většinou tvar křivky neznáme, tak se bez této informace zkusíme i zde obejít). Protože bod $x=0,\ y=1$ vyhovuje dané implicitní rovnici, leží na této křivce. Teď použijeme větu. Máme $F(x,y)=x^4-4xy+y^4$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)=(-4x+4y^3)\Big|_{x=0,y=1}=4\neq 0$, takže její podmínky jsou splněny a

tudíž na nějakém okolí bodu (0,1) křivka odpovídá grafu jisté neznámé funkce y, jejíž vzorec mimochodem nejsme z dané rovnice schopni odvodit. Jak najdeme rovnici tečny v tomto bodě?

V dané rovnici si představíme y jako funkci x a derivujeme:

$$[x^{4} - 4xy + y^{4}]' = [1]'$$

$$4x^{3} - 4y - 4xy' + 4y^{3}y' = 0$$

$$y' = \frac{4y - 4x^{3}}{4y^{3} - 4x}.$$

Správně bychom vlastně měli všude psát y(x), ale lidé šetří čas. Alespoň odpověď si přepišme pořádně: Na nějakém okolí bodu (0,1) máme $y'(x)=\frac{4y(x)-4x^3}{4[y(x)]^3-4x}$. Nás tento vztah zajímá v bodě (0,1), tedy pro x=0 a y=1, po dosazení $y'(0)=\frac{4}{4}=1$. Známe tedy bod i směrnici, tečna v daném bodě je $y-1=1\cdot(x-0)$ neboli y=x+1.

Alternativa: Jde o hladinu konstantnosti funkce $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$, máme

$$\nabla f = (4x^3 - 4y, -4x + 4y^3) \implies \nabla f(0, 1) = (-4, 4).$$

Víme, že $\vec{u} = \nabla f(0,1) = (-4,4)$ je vektor kolmý na tuto hladinu, proto je kolmý i na tečnu. Přímka, která prochází bodem (0,1) a je kolmá na vektor \vec{u} je dána rovnicí

$$\vec{u} \bullet ((x,y) - (0,1)) = 0 \implies (-4,4) \bullet (x,y-1) = 0 \implies -4x + 4(y-1) = 0 \implies y = x+1.$$

Implicitní derivování pomůže často i v případě, kdy bychom byli schopni funkci y z podmínky vyjádřit, ale byla by komplikovaná.

Věta o implicitní funkci se dá zobecnit, například z podmínky f(x,y,z) = 0 lze zkoušet vyjádřit z = z(x,y). Je dokonce možné mít dvě podmínky $f_1(x,y,z) = 0$ a $f_2(x,y,z) = 0$ a zkoušet z nich vyjádřit y = y(x) a z = z(x). Obecně u vyšších dimenzí pracujeme s m podmínkami danými funkcemi s N proměnnými, my chceme považovat určitých n = N - m z nich za nezávislé a využit implicitního vztahu k vytvoření m funkcí o n proměnných. Zvědavého čtenáře odkážeme na knihy o funkcích více proměnných.

4. Funkce více proměnných: Integrál

4.a Obecná definice

Přesná definice integrálu ve více rozměrech je komplikovanější, proto ji zde nebudeme dělat. Namísto toho jen naznačíme, jak by se dala zobecnit definice Riemannova integrálu z jedné proměnné.

Nástin, část 1.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Připomeňme, že n-rozměrné intervaly jsou množiny typu $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde I_k jsou intervaly. Pro takovýto interval definujeme jeho objem jako $|I| = |I_1| \cdot |I_2| \cdots |I_n|$, kde $|I_k|$ jsou délky příslušných intervalů.

Podle počtu dimenzí tedy vlastně mluvíme o obdélnících, hranolech, ve vyšších dimenzích už chybí jména, nicméně myšlenka zůstává, objem je pak prostě součin velikostí stran.

Pokud jsou všechny I_k uzavřené, pak mluvíme o uzavřeném intervalu.

Nástin, část 2.

Uvažujme libovolnou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Aproximujeme ji pomocí intervalů takto:

 Vyplněním Dmnožiny Ω rozumíme libovolnou konečnou množinu n-rozměrnýchuzavřených intervalů Vyplnenim D mnoziny M rozumime noovomou nemocine D in D in D is D in D

Pokrytím D množiny Ω rozumíme libovolnou konečnou množinu n-rozměrných uzavřených intervalů $D = \{I\}$ takových, že pro všechna $I \neq J$ je $I^O \cap J^O = \emptyset$ a $\Omega \subseteq \bigcup_{I \in D} I$.

Komentář: Podmínka s prázdným průnikem umožňuje, aby některé intervaly sdílely hrany či stěny, ale ne více (nezasahují jeden druhému dovnitř). Na rozdíl od jednorozměrného integrálu nelze obecně čekat, že by se sjednocení přímo rovnalo Ω , například kružnici určitě neposkládáme ze čtverců. Proto ji jen aproximujeme. Následující definice zajistí, že na jednu stranu zkoušíme množinu co nejvíce vyplnit zevnitř a na druhé straně ji zkoušíme pokrýt s co nejmenším přesahem.

Nástin, část 3.

Uvažujme libovolnou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkci $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

Pro vyplnění $D = \{I\}$ množiny Ω definujeme dolní součet f jako $\underline{S}(f,D) = \sum_{I \in D} \min_{I} (f) \cdot |I|$. Pro pokrytí $D = \{I\}$ množiny Ω definujeme horní součet f jako $\overline{S}(f,D) = \sum_{I \in D} \max_{I} (f) \cdot |I|$.

Dále definujeme

$$\underline{S}(f,\Omega) = \sup\{\underline{S}(f,D); D \text{ je vyplnění } \Omega\},\ \overline{S}(f,\Omega) = \inf\{\overline{S}(f,D); D \text{ je pokrytí } \Omega\}.$$

Komentář: Definice motivují následovně. Pokud jeden interval rozdělíme na menší, pak se minima funkce mohou zvětšit či zůstat stejná, ale nikdy se nezmenší. Případným rozdělením existujících intervalů ve vyplnění se tak příslušné S(f,D) zvětší, což je přesně to, co po nás supremum v $S(f,\Omega)$ chce. Jsme tedy motivování k co nejmenším intervalům, zároveň nás supremum motivuje k jejich co největšímu počtu, tedy snažíme se Ω vyplnit co nejvíce, malinkými intervaly se to dělá lépe.

U horního součtu to funguje podobně. Rozdělením intervalu na dva menší se maxima nikdy nezvětší, ale mohou klesnout, takže infimum v definici $S(f,\Omega)$ motivuje k co nejmenším intervalům. Zároveň to motivuje k tomu, abychom jich měli co nejméně, ale jsme zdola omezeni nutností pokrýt Ω . Tlačí nás to tedy k velice mnoha malým intervalům, které množinu Ω přečuhují co nejméně.

Nástin, část 4.

Rekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω , jestliže $\underline{S}(f,\Omega) = \overline{S}(f,\Omega)$. Pak definujeme

$$(R)\int_{\Omega} f = \underline{S}(f,\Omega) = \overline{S}(f,\Omega).$$

Speciální případy: Pro
$$n=2$$
 značíme integrál jako $\iint\limits_{\Omega}f\,\mathrm{d}A.$ Pro $n=3$ značíme integrál jako $\iint\limits_{\Omega}f\,\mathrm{d}V.$

Někdy píšeme jen
$$\iint_{\Omega} f$$
 a $\iiint_{\Omega} f$.

Komentář: Můžeme si (v rozumných případech) představovat, že pokrytí a vyplnění děláme po dvou, vždy vezmeme určité vyplnění a uděláme z něj pokrytí přidáním pár intervalů, které zahrnou i nepokryté okraje Ω s malým přesahem vně. Když se pak podíváme na příslušný horní a dolní součet, dostáváme horní a dolní mez pro integrál, které se mimo jiné liší právě tím, co se děje na intervalech, které jsou v pokrytí navíc. U integrovatelných funkcí se pak tento rozdíl dá libovolně zmenšit, jinými slovy, množina Ω se dá libovolně dobře (s libovolně malými ztrátami) aproximovat.

Integrovatelnost tedy vlastně závisí na dvou věcech. Jednak musí být množina Ω natolik pěkná, aby ji šlo rozumně aproximovat pomocí intervalů. Jsou množiny, u kterých se vyplnění a pokrytí nedokáží rozumně přiblížit. Pak je ještě třeba, aby funkce f nebyla moc divoká, jinak se zase maxima a minima nepotkají.

To je dost rozdílná situace oproti jednorozměrnému Riemannovu integrálu, ale rozdíl není v dimenzi, nýbrž v přístupu. Tam jsme se od počátku věnovali jen integrálům přes intervaly. To bychom mohli i tady a situace by se velmi zjednodušila, ale ve více dimenzích máme přirozenou potřebu integrovat přes jiné útvary, třeba přes kruhy, kužely a podobně. Jak se dá čekat, takovéto pravidelné útvary se dobře pokrývají a tudíž máme silnou motivaci pro tuto obecnější definici.

Je tu ještě jedno důležité zobecnění. Na rozdíl od jednorozměrného případu totiž také ve více dimenzích máme více způsobů, jak kódovat pozici (souřadnice kartézské, polární, válcové atd.) Všimněte si, že definice výše na souřadnicích vůbec nezáležela. Je ji tedy možné považovat za definici univerzální. Drobný problém je v tom, že použité intervaly jsou ideální pro souřadnice kartézské, pak totiž vlastně vychází $dA = dx \cdot dy$, $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, zatímco pro souřadnice sférické by bylo lepší aproximovat malými kuličkami a podobně, ale ve skutečnosti je to jen technická komplikace, která se dá zvládnout, principiálně zde problém není a dá se ukázat, že definice používající kuličky či válečky místo krychliček vede na stejnou věc. I proto jsme zde netvořili formální matematické definice a spíš jen naznačovali, správně teoretický úvod by totiž v tomto okamžiku vyžadoval poněkud delší zkoumání plné vět, které by potvrdilo, že naše intuitivní představy fungují. Protože zde jde o pouhý přehled, tuto teorii vynecháme, důležité je mít správnou představu.

Teď se zaměříme na nejčastější případy.

4.b Rovinné integrály

Zde se tedy podíváme na případ n=2. Nejprve si zjednodušíme situaci tím, že se omezíme jen na rozumné tvary množiny Ω .

Definice.

Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina **základního tvaru**, jestliže existují interval I v \mathbb{R} a funkce p_1, p_2 : $I \mapsto \mathbb{R}$ splňující $p_1 < p_2$ na I takové, že

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in I \text{ a } p_1(x) \le y \le p_2(x) \text{ pro všechna } x \in I\}$$

nebo

$$\Omega = \{(x,y) \in I \mathbb{R}^2; \ y \in I \ \text{ a } \ p_1(y) \le x \le p_2(y) \text{ pro všechna } y \in I\}.$$

Jde tedy o klasickou oblast mezi dvěma grafy.

Všimněte si: Pokud uděláme řez základním tělesem prvního typu ve směru svislém (pro pevně zvolené x), dostaneme vždy úsečku s okraji danými funkcemi p_1 a p_2 . Podél takové úsečky již integrovat umíme, protože je to v zásadě jednorozměrný problém. Následně dáme dohromady tyto integrály "sečtením" neboli další integrací. Tím nám vzniká postup pro praktický výpočet integrálu, viz níže.

U druhého typu to funguje naopak, nejprve se dělají vodorovné řezy (y jako konstanta), pak se výsledky sečtou přes y.

Věta.

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je základní množina prvního typu a f je funkce spojitá na Ω . Pak je funkce

$$\varphi(x) = \int_{p_1(x)}^{p_2(x)} f(x, y) \, dy$$

spojitá na I a $\int_{I} \varphi(x) dx = \iint_{\Omega} f dA$.

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je základní množina druhého typu a f je funkce spojitá na Ω . Pak je funkce

$$\psi(y) = \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) \, dx$$

spojitá na I a $\int\limits_I \psi(y)\,dy=\iint\limits_\Omega f\,\mathrm{d}A.$

Je-li I interval od a do b, pak první integrál značíme jako

$$\iint\limits_{\Omega} f \, \mathrm{d}A = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

a druhý jako

$$\iint\limits_{\Omega} f \, dA = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y) \, dx \, dy.$$

Říkáme jim dvojné integrály a vyhodnocují se zevnitř, což se dá vyjádřit závorkami,

$$\int_{a}^{b} \left(\int_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} f(x,y) \, dy \right) dx \text{ pro první a } \int_{a}^{b} \left(\int_{p_{1}(y)}^{p_{2}(y)} f(x,y) \, dx \right) dy \text{ pro druhý typ.}$$

Všimněte si, že vnitřní diferenciál patří k vnitřnímu integrálu a vnější k vnějšímu, jsou tedy vnořeny. Tuto myšlenku pak lze snadno zobecnit na více dimenzí, což učiníme níže.

Symbolicky je v tomto případě možno psát, že dA = dx dy.

Integrování podle jedné proměnné se dělá podobně jako při derivování, prostě předstíráme, že ostatní proměnné jsou konstanty.

Nejjednodušší situace je obdélník, což je základní množina obou typů.

Příklad.

Budeme integrovat funkci $f(x,y) = y e^x$ přes 2D interval $(0,1) \times (1,3)$ neboli množinu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ 0 \le x \le 1 \ \text{a} \ 1 \le y \le 3\}.$$

Máme na výběr, pomocí které proměnné integrovat nejdříve. Pokud budeme chtít nejprve integrovat sy, tak se mění mezi 1 a 3, dostáváme $\int\limits_1^3 f\,dy$, kdy bereme x jako konstantu. Tyto integrály pak "posčítáme" pomocí x, dostáváme

$$\int_{0}^{1} \int_{1}^{3} y \, e^{x} \, dy \, dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2} y^{2} \, e^{x} \right]_{1}^{3} dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{9}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{x} \right] dx = \int_{0}^{1} 4 e^{x} \, dx = \left[4 e^{x} \right]_{0}^{1} = 4 e - 4.$$

V situaci s více proměnnými je někdy dobré si připomenout, za co se dosazuje, takto: $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2} y^{2} e^{x} \right]_{y=1}^{y=3} dx.$

Pokud budeme chtít nejprve integrovat sx, tak se mění mezi 0 a 1, dostáváme $\int_0^1 f dx$, kde bereme jako kostantu y. Tyto integrály pak "posčítáme" pomocí y, dostáváme

$$\int_{1}^{3} \int_{0}^{1} y \, e^x \, dx \, dy = \int_{1}^{3} \left[y \, e^x \right]_{0}^{1} dy = \int_{1}^{3} e \, y - y \, dy = \int_{1}^{3} (e - 1) y \, dy = \left[(e - 1) \frac{1}{2} y^2 \right]_{1}^{3} = 4(e - 1).$$

Příklad.

Nechť Ω je oblast mezi $y=x^2+1$ a osou x na $\langle 0,1\rangle$. Chceme najít $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}A,$

kde $f(x,y) = 12xy + 12(x+y-1)^2$.

Tvar oblasti vyzývá ke svislým řezům, kdy nejprve integrujeme podle y. Dostáváme

$$\iint_{\Omega} 12xy + 12(x+y-1)^2 dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x^2+1} 12xy + 12(x+y-1)^2 dy dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left[6xy^2 + 4(x+y-1)^3 \right]_{0}^{x^2+1} dx = \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)^2 + 4(x+x^2)^3 dx$$

$$= \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)^2 + 4(x^3+3x^4+3x^5+x^6) dx$$

$$= \left[(x^2+1)^3 + x^4 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^6 + \frac{4}{7}x^7 \right]_{0}^{1} = 13 + \frac{34}{35}.$$

Co by se stalo, kdybychom chtěli začít vodorovnými řezy, tedy integrováním podle x? Tak by se meze pro x měnily podle toho, pro jaké y ten řez děláme. Pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ se x mění od 0 po 1, zatímco pro $y \in \langle 1, 2 \rangle$ začíná x na křivce $y = x^2 + 1$, tedy x jde od $\sqrt{y-1}$ do 1. Je tedy třeba dělat dva integrály.

$$\iint_{\Omega} 12xy + 12(x+y-1)^2 dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} 12xy + 12(x+y-1)^2 dx dy + \int_{1}^{2} \int_{\sqrt{y-1}}^{1} 12xy + 12(x+y-1)^2 dx dy$$

$$= \int_{0}^{1} \left[6xy^2 + 4(x+y-1)^3 \right]_{0}^{1} dy + \int_{1}^{2} \left[6xy^2 + 4(x+y-1)^3 \right]_{\sqrt{y-1}}^{1} dy$$

$$= \int_{0}^{1} 6y^2 + 4y^3 - 4(y-1)^3 dy + \int_{1}^{2} 6x + 4x^3 - 6\sqrt{y-1}y^2 - 4(\sqrt{y-1} + y - 1)^3 dy.$$

Tento integrál jedné proměnné už se dopočítá substitucí $y-1=t^2$ a vyjde to přesně jako předtím.

Interpretace: $\iint_{\Omega} f dA$ je objem tělesa, jehož základna je Ω a výška je dána funkcí f. Integrál $\iint_{\Omega} 1 dA$ proto dává obsah oblasti Ω . Pro základní oblast prvého typu vyjde

$$\iint_{\Omega} 1 \, dA = \int_{a}^{b} \left(\int_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_{a}^{b} \left[y \right]_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} dx = \int_{a}^{b} p_{2}(x) - p_{1}(x) \, dx,$$

Funkce více proměnných © pHabala 2010

což jsme měli u funkcí jedné proměnné jako výraz pro obsah oblasti mezi dvěma grafy.

4.c Prostorové a další integrály

Případ z roviny se snadno zobecní. Máme-li základní těleso, třeba prvního typu

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in I \text{ a } p_1(x) \le y \le p_2(x) \text{ pro všechna } x \in I\},$$

pak pro konkrétní bod (x,y) této množiny můžeme ještě uvažovat rozmezí pro třetí proměnnou dané rovnicemi $q_1(x,y) \le z \le q_2(x,y)$. Získáme tím množinu

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x \in I \ \text{a} \ p_1(x) \le y \le p_2(x) \text{ pro všechna } x \in I \\ \text{a} \ q_1(x, y) \le z \le q_2(x, y) \text{ pro všechna } x, y \in \Omega_1\}.$$

Lze samozřejmě pokračovat tímto způsobem do vyšších dimezí. V případě n=3 dostáváme **trojný integrál**

$$\iiint_{\Omega} f \, dV = \int_{a}^{b} \int_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} \int_{q_{1}(x,y)}^{q_{2}(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx.$$

I tento integrál se počítá zevnitř:

$$\int_{a}^{b} \int_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} \int_{q_{1}(x,y)}^{q_{2}(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx = \int_{a}^{b} \left(\int_{p_{1}(x)}^{p_{2}(x)} \left(\int_{q_{1}(x,y)}^{q_{2}(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx.$$

V integrálu se vždy berou proměnné, které nejsou zrovna pracovní, jako konstanty, jde o vnější parametry, mohou se tudíž objevit i v mezích. Správnost myšlenky je zase ověřena větou. Její podstata je, že pro

spojitou funkci f na množině základního typu Ω je funkce $\psi(x,y)=\int\limits_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$ spojitá na Ω_1 a

funkce
$$\varphi(x) = \int_{p_1(x)}^{p_2(x)} \int_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy$$
 spojitá na I . Symbolicky zase máme $dV = dx dy dz$.

4.d Substituce, povrchové a jiné integrály

Přechod k jiným souřadnicím lze formálně vidět takto. Proměnné x_1, \ldots, x_n závisí na jiných proměnných y_1, \ldots, y_n přes funkce g_i , jmenovitě $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_n)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Vzniká tak zobrazení či také vektorová funkce $\Phi: \vec{y} \mapsto (g_1(\vec{y}), \ldots, g_n(\vec{y}))$.

Věta. (o substituci)

Nechť Ω je množina, na které je definována spojitá funkce f. Nechť $\Phi \in C^1(G)$, $\Phi(\vec{y}) = (g_i(\vec{y}))$ je prostá transformace z nějaké množiny G na Ω . Pak

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{G} f(\Phi(\vec{y})) |\Delta_{\Phi}(\vec{y})| d\vec{y},$$

kde jakobián $\Delta_{\Phi} = \det(J_{\Phi})$ je determinant Jacobiho matice $J_{\Phi} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$ transformace Φ .

Poznámka: Pro diferenciál symbolicky dostáváme $d\vec{x} = |\Delta_{\Phi}| d\vec{y}$ či také $d\Phi(\vec{x}) = |\Delta_{\Phi}| d\vec{y}$. Někteří autoři dávají absolutní hodnotu již do definice jakobiánu.

Tento výsledek dává přímý návod na změnu souřadnic v integrálu neboli algoritmus pro substituci.

Příklad.

Uvažujme funkci $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^3$ na množině Ω , kde Ω je kruh v \mathbb{R}^2 se středem v počátku a poloměrem 3. Chceme integrál, přímý výpočet vede na dvojný integrál

$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2 + 1)^3 dy \, dx.$$

Kruh ale vyzývá k přechodu na polární souřadnice (r,φ) . Ty jsou dány vzorci $x=r\cos(\varphi),\ y=r\sin(\varphi)$ a vidíme, že označíme-li $G=\{(r,\varphi);\ r\in\langle 0,3\rangle\ \text{a}\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\}$, pak je tato transformace prostá a na jako zobrazení $G\mapsto\Omega$.

zobrazení $G \mapsto \Omega$.

Jakobián: $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r$, proto je podle věty $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Dostáváme

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2 + 1)^3 dx dy = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{3} (r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + 1)^3 r dr d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{3} (r^2 + 1)^3 r dr \right) d\varphi$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \left[\frac{1}{4} (r^2 + 1)^4 \frac{1}{2} \right]_{0}^{3} d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{8} 10^4 - \frac{1}{8} d\varphi = \left[\left(\frac{1}{8} 10^4 - \frac{1}{8} \right) \varphi \right]_{0}^{2\pi} = \frac{\pi}{4} \cdot 9999.$$

Zajímavá interpretace: Například dvojrozměrný povrch nemusí být plochý, ale může se vznášet ve třírozměrném prostoru, při troše štěstí je vyjádřitelný jako parametrický povrch, $\vec{x} = \Phi(\vec{y})$, kde \vec{y} je dvourozměrný vektor parametrů. Podobně jednorozměrná křivka se může vznášet ve vícerozměrném prostoru. Způsob, kterým funguje substituce, inspiruje následující definici, která není úplně matematicky v pořádku (takže je to vlastně skoro definice), ale vystihuje podstatu:

Definice.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, nechť I je interval v \mathbb{R} . Uvažujme parametrickou křivku C v \mathbb{R}^n danou funkcí $\Phi: I \mapsto \mathbb{R}^n$, tedy $C = \{\Phi(t); t \in I\}$, a nechť $\Phi \in C^1(I)$. Pak pro spojitou funkci f na C definujeme **křivkový integrál** f na C jako

$$\int_{C} f \, \mathrm{d}s = \int_{L} f(\Phi(t)) \|\Phi'(t)\| \, dt.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, nechť $I \times J$ je interval v \mathbb{R}^2 . Uvažujme parametrickou plochu S v \mathbb{R}^n danou funkcí Φ : $I \times J \mapsto \mathbb{R}^n$, tedy $S = \{\Phi(u, v); u \in I, v \in J\}$, a nechť $\Phi \in C^1(I \times J)$. Pak pro spojitou funkci f na S definujeme **povrchový integrál** f na S jako

$$\iint\limits_{C} f \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{L} f(\Phi(u,v)) \Big\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big\| \, dv \, du.$$

Tato definice ovšem není z matematického pohledu uspokojivá. Na to bychom ještě potřebovali větu, která říká, že pokud bychom pro danou křivku či plochu zvolili jinou parametrizaci, tedy jinou transformaci Φ s pravděpodobně jinými intervaly, pak by integrály v definici na pravé straně vyšly stejně. Takovéto věty platí a jsou dokázané na příslušných místech v knihách o funkcích více proměnných. Obsahují ale předpoklad, že křivka je rozumná ve smyslu, že se nestává, že by měla nekonečně mnoho míst, na která se vrací vícekrát. Pokud se tedy omezíme jen na křivky, které toto nedělají, a přečteme si dotyčné věty o nezávislosti na konkrétní parametrizaci, pak už je tato definice v pořádku.

Matematika by ovšem uspokojila mnohem více, kdyby byla méně náročná ve svých předpokladech. Často se křivka či povrch skládá z několika úseků, z nichž každý je tak pěkný, jak je v definici výše. To ale není problém, pak prostě integrujeme na každé části zvlášť a výsledky sečteme, aditivita je základní vlastnost libovolného typu integrálu.

Co se tam vlastně děje? V křivkovém integrálu máme diferenciál délky křivky ds, což si představíme jako elementární (nekonečně malý) kousek křivky, reprezentuje tedy její délku. Parametrizace se dá interpretovat

Funkce více proměnných © pHabala 2010

tak, že t je čas a $\Phi(t)$ je pozice, pak $\Phi'(t)$ je vektor rychlosti, takže $\|\Phi'(t)\| dt$ udává, kolik ujedeme, když se čas posune o svůj diferenciál, dává to tedy právě ten elementární posun po křivce.

Mimochodem příslušný vztah pro diferenciály by neměl překvapit, protože přesně odpovídá substituci v jedné proměnné: Ze vztahu $s = \Phi(t)$ dostáváme d $s = \|\Phi'(t)\| dt$.

Podobně dv du je elementární obdélníček v definičním oboru transformace. Když se transformací přesuneme do povrchu S, tak se z něj stane rovnoběžník, jehož strany jsou dány vektory $\frac{\partial \Phi}{\partial u} du$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial v} dv$. Standardní výsledek z lineární algebry pak říká, že obsah takového rovnoběžníka je dán vektorovým součinem. Vzorec je tedy komplikovanější, ale smysl má.

Křivkové a plošné integrály hrají vyznamnou roli v přírodních vědách. Pokud například integrujeme konstantní funkci 1 po křivce C, získáme délku křivky. Podobně integrováním funkce 1 na ploše S získáme její plošnou výměru. Praktická situace: Funkce f popisuje teplotu v určité oblasti. My touto oblastí projedeme po křivce C. Pak integrál po C dělený její délkou dává průměrnou teplotu, kterou jsme zaznamenali.