9. Funkce více proměnných. Mocninné řady. Dvojný a trojný integrál.

Integraly a derivace + priklad: http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/veci-ma2.htm
Souhrn Integraly + derivace: http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/veci-ma2/ma2kniha.pdf
Mocninne rady: http://math.feld.cvut.cz/tiser/kkap4.pdf
Integralni pocet vice promennych: http://math.feld.cvut.cz/tiser/intpocet.htm

---

Funkce více proměnných

zdroj - skripta Tišer: https://math.feld.cvut.cz/tiser/vyuka.htm (Habalův souhrn bude asi užitečnější)

Na množině $\mathbb{R}^n$ jsou definovány operace sčítání a násobení skalárem (tj. reálným číslem) následujícím způsobem: Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dva prvky $\mathbb{R}^n$, pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \boldsymbol{x} &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jde o běžné sčítání a násobky vektorů, které známe z fyziky.

Kromě těchto operací máme ještě skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, který je definován vztahem

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 1.3. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Každou množinu*

$$U_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme (kruhovým) **okolím bodu $\boldsymbol{x}$**. *Každou množinu*

$$P_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme **prstencovým okolím** *bodu $\boldsymbol{x}$.*

Definice 1.4. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod a M je množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}$ je*

(i) **vnitřním bodem** *množiny M, jestliže existuje okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ tak, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \subset M;$$

(ii) **hraničním bodem** *množiny M, jestliže pro každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí současně*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset \quad a \quad U(\boldsymbol{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset;$$

(iii) **vnějším bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \emptyset;$$

(iv) **hromadným bodem** *množiny M, jestliže pro každé prstencové okolí $P(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí*

$$P(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset;$$

(v) **izolovaným bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Definice 1.6. *Nechť M je množina v euklidovském prostoru.* **Vnitřek** *M^o množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M.* **Hranice** *∂M množiny M je množina všech hraničních bodů.* **Uzávěr** *$\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.*

Funkce n-proměnných je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ zobrazující jistou množinu M v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ do množiny reálných čísel. Množina M se přitom nazývá *definiční obor* funkce f, který se často označuje symbolem $D(f)$. Pokud nebude definiční obor funkce specifikován, budeme jím rozumět maximální množinu, na které může být daná funkce definována.

Definice 3.1. *Nechť f je funkce definovaná na podmnožině N euklidovského prostoru. Předpokládejme, že bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodem množiny N. Řekneme, že* **funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu** $b \in \mathbb{R}$ *(vzhledem k množině N), píšeme*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in N}} f(\boldsymbol{x}) = b,$$

jestliže pro každé okolí $U(b)$ bodu b existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že $f(P\cap N) \subset U$. Vyjádřeno pomocí nerovností to znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí následující implikace

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta,\ \boldsymbol{x} \in N \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon.$$

Definice 3.6. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce daná na množině M euklidovského prostoru. Řekneme, že funkce f je* **spojitá v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in M$**, *jestliže je bod $\boldsymbol{x}_0$ buďto izolovaný bod množiny M nebo platí, že*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá**, *je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Derivace

Definice 5.1. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru.* **Derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in X$ ve směru $\boldsymbol{h} \in X$** *(krátce* **směrovou derivací***) nazýváme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

K označení této limity budeme používat symbol $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}_0)$.

Je vidět, že derivace ve směru $\boldsymbol{h} = 0$ je vždy nulová.

Základní způsob výpočtu (později pak s využitím gradientu):

Příklad 5.3. Nalezněme směrové derivace funkce

$$f(x,y) = e^{x-y^2}$$

v bodě $(0,0)$ ve směru vektorů $(1,0), (-1,0)$ a $(1,1)$.

Nejdříve nalezneme „průřezové funkce“ $\varphi(t)$. Pro $\boldsymbol{h} = (1,0)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,0)) = f(t,0) = e^t,$$

a proto $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = e^0 = 1$.

Bude-li $\boldsymbol{h} = (-1,0)$ víme již podle Poznámky 5.2 (i), že derivace musí změnit znaménko. Pro ilustraci se však stejně podívejme na průřez funkce

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(-1,0)) = f(-t,0) = e^{-t}.$$

Skutečně tedy $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = -e^0 = -1$. Konečně pro $\boldsymbol{h} = (1,1)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = e^{t-t^2}.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (1-2t)e^{t-t^2}$, je $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = 1$.

Definice 5.5. *Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$ je funkce definovan8 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$.* **Parciální derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ podle k proměnné** x_i $(i = 1, \dots, n)$ *nazýváme směrovou derivaci $\partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x})$. Pro její označení používáme zápis*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

se nazývá **gradient** *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.*

Příklad 5.6. (i) Určíme parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = e^{x-y^2}$. Podle postupu naznačeného výše je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-y^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{x-y^2}(-2y).
\end{aligned}$$

Definice 5.9. *Nechť $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce na otevřené podmnožině $G \subset \mathbb{R}^n$ v euklidovského prostoru. Řekněme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je* **(totální) diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$**, *jestliže*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.7}$$

Zobrazení, které má v daném bodě diferenciál budeme nazývat diferencovatelné. Pro označení diferenciálu zobrazení f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ používáme symbol $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$. (Pozor tento symbol reprezentuje zobrazení!) Hodnotu tohoto zobrazení v bodě $\boldsymbol{h}$ značíme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]$.

Tvrzení 5.11. *Je-li funkce f diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{x}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a platí*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in X. \tag{5.10}$$

Druhý způsob výpočtu směrové derivace:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}). \tag{5.12}$$

Příklad 5.12. Pro funkci $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ vypočtěte derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (-1, 1, 1)$ v bodě $\boldsymbol{x} = (1, 2 - 1)$.

Podle (5.12) stačí skalárně vynásobit směr $\boldsymbol{h}$ a $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (2, 4, 2)$:

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = (-1, 1, 1) \cdot (2, 4, 2) = 4.$$

Věta 5.14. *Nechť f je funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak f má v bodě $\boldsymbol{x}$ diferenciál.*

Příklad 5.15. Nechť $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Budeme vyšetřovat diferenciál v obecném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pro $(x,y) \neq (0,0)$ můžeme určit parciální derivace mechanickým derivováním složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x. \end{aligned}$$

Tyto derivace jsou spojité a na základě Věty 5.14 můžeme konstatovat, že f je diferencovatelná v každém bodě množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pro tyto body máme

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x \ \mathrm{d}y.$$

Zvláštním případem je bod $(0,0)$. Protože je f je identicky rovna nule na souřadnicových osách je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Jediný možný kandidát na diferenciál je tedy nulová funkce. Zabývejme se proto výrazem

$$\frac{f(\boldsymbol{h}) - f(\mathbf{0}) - 0}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Tento výraz nemá limitu pro $\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}$, neboť vzhledem k souřadnicovým osám je limita nulová, zatímco vzhledem přímce o rovnici $h_1 = h_2$ je rovna $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v počátku.

Geometrický a fyzikální význam diferenciálu

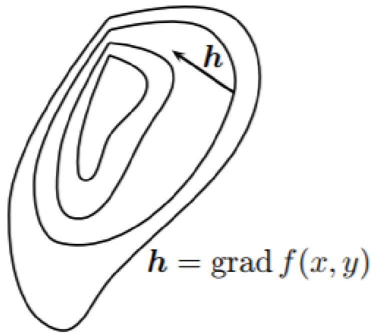
- Tečná rovina a normála ke grafu funkce

Předpokládejme, že funkce $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Geometricky tento fakt znamená, že existuje tečná rovina T ke grafu funkce f v bodě $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$. Je popsána pomocí diferenciálu jako graf funkce

$$z = f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0]. \tag{5.16}$$

- Gradient jako směr největšího spádu

Vydáme-li se tedy ve směru gradientu budeme maximálně stoupat. Půjdeme-li ve směru opačném budeme maximálně klesat (vertikální rychlost bude záporná). V případě pohybu ve směru kolmém na gradient budeme mít vertikální rychlost nulovou. V tomto případě se nadmořská výška měnit nebude a my se budeme pohybovat po vrstevnici viz. obr 5.4.



Derivace vyšších řádů

Definice 6.13. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Funkce $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazve* **třídy C^k na množině** *G (nebo krátce C^k-funkce), jestliže všechny parciální derivace řádu k jsou spojité na G.*

Definice 6.14. *Nechť X je euklidovský prostor. Zobrazení $\psi\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá* **bilineární forma** *na X, jestliže platí*

$$\psi(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1) = s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1), \quad \psi(\boldsymbol{h}_1, s\boldsymbol{k}_1 + t\boldsymbol{k}_2) = s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_2)$$

pro každé $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in X$ a $s, t \in \mathbb{R}$.

Podmínky v definici lze jednoduše vyjádřit slovy tak, že ψ je bilineární forma, je-li lineární v obou proměnných. Nejběžnější bilineární forma je skalární součin, $\psi(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{k}$. Pro něj opravdu platí

$$(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2)\cdot\boldsymbol{k} = s(\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{k}) + t(\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{k}).$$

A nyní přistoupíme k definici druhého diferenciálu.

Definice 6.15. *Nechť $G \subset X$, $G \neq \emptyset$ je otevřená podmnožina euklidovského prostoru X, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{x} \in G$.* **Druhý (totální) diferenciál** $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ je bilineární forma splňující*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{6.16}$$

Tato definice není tak nepřirozená, jak by se na první pohled zdálo. Jestliže diferenciál přibližně nahrazoval rozdíl funkčních hodnot $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a $f(\boldsymbol{x})$, tak druhý diferenciál aproximuje rozdíl prvních diferenciálů $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$. V této logické linii jsou definovány i všechny další vyšší diferenciály.

Příklad 6.16. Spočtěte druhý diferenciál funkce $z = x^y$ v následujících bodech $(1,1)$, $(1,2)$ a $(2,2)$.

Řešení: Podle (6.18) je pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ a $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 z(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} h_1 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} h_1 k_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} h_2 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} h_2 k_2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} h_1 k_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(h_2 k_1 + h_1 k_2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} h_2 k_2. \end{aligned} \tag{6.19}$$

V poslední rovnosti jsme použili záměnnost smíšených derivací. Zbývá vyčíslit všechny derivace druhého řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y x^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y x^{y-1}\ln x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = x^y \ln^2 x. \end{aligned}$$

Pro bod $(1,1)$ máme

$$\mathrm{d}^2 z(1,1)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = h_1 k_2 + h_2 k_1.$$

Dále, v bodě $(1,2)$ je

$$\mathrm{d}^2 z(1,2)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = 2h_1 k_1 + h_1 k_2 + h_2 k_1.$$

A konečně

$$d^2 z(2,2)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = 2h_1 k_1 + 2(1+\ln 4)(h_1 k_2 + h_2 k_1) + 4\ln^2 2\ k_1 k_2.$$

Povšimneme si ještě jedné věci. Výraz (6.19) lze ekvivalentně napsat pomocí matice

$$\mathrm{d}^2 z[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Prostřední čtvercová matice, která určuje $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$, se někdy nazývá *Hessova matice* nebo krátce *hessián* funkce f. Vypočítat druhý diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ znamená zjistit hessián funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.

Mocninné řady

http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=774 ← doporucuji vytisknout a ucit se z toho
http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=770 ← priklady na procviceni

Definice 2.3. *Řekneme, že komplexní funkce f má v bodě $z \in \mathbb{C}$* ***derivaci****, jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

V tom případě se hodnota limity označuje $f'(z)$.

Definice 4.2. *Řekneme, že mocninná řada (4.1) konverguje bodově na množině M, jestliže pro každé $z \in M$ existuje vlastní limita $S(z)$ částečných součtů*

$$S(z) = \lim_{m \to \infty} S_m(z).$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{m \to \infty} S_m(z)$, říkáme, že řada ***diverguje*** *v bodě z.*

Definice 4.3. *Řekneme, že mocninná řada (4.1) konverguje* ***stejnoměrně*** *na množině M, jestliže existuje funkce $S(z)$ taková, že*

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{z \in M} |S_m(z) - S(z)| = 0,$$

kde $S_m(z)$ jsou částečné součty řady (4.1).

Tvrzení 4.1. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pokud existuje*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{4.16}$$

je rovna poloměru konvergence R.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.18}$$

Věta 4.3. *Nechť f je dána mocninnou řadou (4.18) s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak f je holomorfní na $U(z_0; R)$ a její derivace f' je dána řadou*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \tag{4.19}$$

mající stejný poloměr konvergence R.

Důsledek 4.1. *Nechť f je dána mocninnou řadou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ na kruhu konvergence $U(z_0; R)$. Pak funkce*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \tag{4.22}$$

je primitivní funkce k f na $U(z_0; R)$.

Vzorec pro geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

Derivace a integrace [editovat | editovat zdroj]

Pokud je funkce zadaná jako mocninná řada, je derivovatelná uvnitř oboru konvergence. Řadu lze snadno derivovat a integrovat člen po členu:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-c)^n$$

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1} + k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} (x-c)^n}{n} + k.$$

Dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta - hodnota dvojné integrace nezáleží na pořadí

Úloha. Zjistěte těžiště základní oblasti M omezené shora parabolou $y = \sqrt{2px}$, $x \in \langle 0, 2p\rangle$ a osou x. Plošná hustota je $\rho = 1$.

Řešení. Základní oblast M je popsána

$$M = \left\{(x, y) \mid x \in \langle 0, 2p\rangle,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2px}\right\}.$$

Pro souřadnice těžiště (x_t, y_t) platí

$$x_t = \frac{\iint_M x\rho}{\iint_M \rho}, \qquad y_t = \frac{\iint_M y\rho}{\iint_M \rho}.$$

Vztah mezi (x, y) a (ϱ, φ) je dán následovně

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi \\ y &= \varrho \sin\varphi, \quad \varrho \geq 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \end{aligned}$$

Definice 3.8. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť $\Phi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení,*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Jestli všechny složky $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ mají spojité první parciální derivace podle všech proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, říkáme, že zobrazení Φ je třídy C^1 na G.

Je-li Φ třídy C^1 (na G), pak matice

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jacobiho matice** *zobrazení Φ.*

Funkce

$$\Delta_\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |\det J_\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$$

se nazývá **jakobián** *zobrazení Φ.*

Je-li T základní oblast, řekneme, že Φ je třídy C^1 na T, když existuje otevřená množina G obsahující T, na níž je Φ třídy C^1.

Vztah mezi souřadnicemi (x, y, z) a $(\varrho, \varphi, \vartheta)$ bodu A je dán následovně:

$$
(4.4) \qquad \begin{aligned} x &= \varrho \sin\vartheta \,\cos\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \,\sin\varphi \qquad \varrho \geq 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle \\ z &= \varrho \cos\vartheta. \end{aligned}
$$

Význam Φ je snadno zjistitelný: je-li bod v prostoru určen parametry ϱ, φ a ϑ, pak $\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ jsou jeho kartézské souřadnice. Z (4.5) můžeme vypočítat příslušnou Jacobiho matici.

$$
J_\Phi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -\varrho\sin\vartheta\sin\varphi & \varrho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \varrho\sin\vartheta\cos\varphi & \varrho\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}.
$$

Odtud ihned plyne, že příslušný jakobián je roven

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Phi = |-\varrho^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \varrho^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta| = \\
= \varrho^2[\sin^3\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta\sin\vartheta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] = \\
= \varrho^2(\sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta\sin\vartheta) = \varrho^2\sin\vartheta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = \varrho^2\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

Podívejme se nyní na cylindrické souřadnice. Způsob určení polohy bodu je vidět na obr. 4.3(b). Matematický vztah mezi kartézskými souřadnicemi bodu a cylindrickými souřadnicemi ϱ, φ a z je následující:

$$
(4.6) \qquad \begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \qquad \varrho \geq 0,\ z \in \mathbb{R},\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle. \\ z &= z. \end{aligned}
$$

Tento souřadný systém vznikl vlastně tak, že jsme do roviny xy zavedli souřadnice polární a ve směru osy z zůstala souřadnice kartézská. Přechod k cylindrickým souřadnicím popisuje zobrazení

$$
(4.7) \qquad \Phi(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.
$$

Příslušná Jacobiho matice a jakobián je pak

$$
J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_\Phi = |\det J_\Phi| = \varrho.
$$

Věta 4.6. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je základní těleso a nechť $\Phi\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy C^1 prosté na P. Nechť $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá na $\Phi(P)$. Pak*

$$
\iiint\limits_{\Phi(P)} f = \iiint\limits_{P} f(\Phi)\,\Delta_\Phi.
$$

Definice 5.1. *Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá* **oblouk**, *jestliže existuje spojité zobrazení*

$$\varphi \colon \langle a, b \rangle \longrightarrow C$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ na množinu C, splňující následující podmínky:

(i) *zobrazení φ je prosté na $\langle a, b \rangle$, s jedinou možnou vyjímkou koncových bodů tj. lze připustit $\varphi(a) = \varphi(b)$.*

(ii) *derivace φ' je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde v krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace, a $\varphi'(t) \neq 0$ na (a, b).*

Definice 5.2. *Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá* **křivka**, *jestliže existuje spojité zobrazení*

$$\varphi \colon \langle a, b \rangle \longrightarrow C$$

takové, že existuje dělění $\mathscr{D}$ intervalu $\langle a, b \rangle$, že na každém podintervalu $I \in \mathscr{D}$ jsou splněny požadavky (i) a (ii) z Definice 5.1