Velmi jemný pokus o zkoušku z Matematické analýzy

Matematická analýza 1, zimní semestr

(osnova ke zkoušce)

1. Reálná čísla. Řešení rovnic a nerovnic (zejména lineární a kvadratické); nevlastní čísla $\pm\infty$, operace s nimi; intervaly, (prstencová) okolí; maximum, minimum, supremum a infimum množiny reálných čísel, jejich existence; princip vnořených intervalů (důkaz); posloupnost, vybraná posloupnost, hromadná hodnota a její existence.

2. Funkce. Funkce, operace s funkcemi; prostá, vzájemně jednoznačná, inverzní funkce; definiční obor, obor hodnot, graf; omezenost, sudost, lichost, perioda; monotonie, lokální extrémy, extrémy; konvexita, konkavita, inflexní body; elementární funkce: x^a ($a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a k nim inverzní, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, hodnoty goniometrických funkcí v $k\,\frac{\pi}{4}$, $k\,\frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$) a cyklometrických funkcí v odpovídajících bodech.

3. Limity a spojitost. Limita a spojitost funkce; asymptoty; jednoznačnost (důkaz) a monotonie limity, vztah k omezenosti, limita monotónní funkce, limita a spojitost součtu (důkaz), rozdílu, součinu a podílu, složené funkce; jednostranné limity; obor hodnot spojité funkce na intervalu: nabývá mezihodnot, na uzavřeném intervalu nabývá minima i maxima. Asymptotické chování funkcí ($O(g)$, $\Theta(g)$).

4. Derivace. Derivace v bodě, na intervalu, vyšších řádů; linearita derivace, derivace součinu a podílu, složené a inverzní funkce; funkce s vlastní derivací je spojitá (důkaz); Rolleova (důkaz) a Lagrangeova věta, l'Hospitalovo pravidlo, Taylorův polynom, Taylorova věta, tečna a normála grafu funkce; použití derivace při vyšetřování průběhu funkce: monotonie (důkaz), lokálních extrémů, konvexity, inflexních bodů; derivace elementárních funkcí (mocniny, exp, ln, sin, cos), arctg.

5. Integrály. Primitivní funkce, neurčitý integrál, určitý integrál (Riemannův, Newtonův) a jejich vztahy (důkaz Newtonovy–Leibnizovy formule bez existence limit); nevlastní integrál, kritéria jeho konvergence; linearita, aditivita na definičním oboru, integrace per partes, substituce; integrace mocnin, exp, sin, cos, racionálních funkcí, funkcí typu $R(\mathrm{e}^{ax})$, $R(\ln x)/x$, $R(\sin x, \cos x)$ (jen substituce za $\sin x$ a $\cos x$), kde R je racionální funkce; primitivní funkce jako integrál s proměnnou mezí, integrovatelnost monotonní (důkaz) a spojité funkce; aplikace určitého integrálu: střední hodnota, délka křivky, obsah plochy, objem a obsah pláště rotačního tělesa.

6. Posloupnosti a řady. Posloupnost, její limita, vybraná posloupnost, hromadná hodnota a její existence, limes inferior, limes superior. Součet řady, (absolutně) konvergentní, divergentní a oscilující řada; geometrická řada a její součet (důkaz); absolutně konvergentní řada konverguje, lze ji (beze změny součtu) přerovnat a rozdělit; nutná podmínka konvergence (důkaz), kritéria konvergence: srovnávací, podílové (důkaz), odmocninové (důkaz), integrální (důkaz), Leibnizovo.

Reálná čísla

Definice. *Rozšířená množina reálných čísel* je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají *nevlastní* čísla.
Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pokládáme:
1) $-\infty < x < +\infty$
2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$
3)
$$x + \infty = \infty\,, \qquad \infty + \infty = \infty\,,$$
$$x - \infty = -\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty\,,$$
$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty\,, & x > 0\,, \\ -\infty\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad \infty \cdot \infty = \infty\,,$$
$$\tfrac{x}{\infty} = 0\,.$$
Nedefinujeme: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Definice. Pro každé $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy *intervalů* s *krajními body* a, b:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ a < x < b\}$ (*otevřený*);
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \colon\ a \le x \le b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (*uzavřený*);
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \colon\ a < x \le b\}$ pro $b \in \mathbb{R}$ (*zleva otevřený, zprava uzavřený*);
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ a \le x < b\}$ pro $a \in \mathbb{R}$ (*zleva uzavřený, zprava otevřený*).
Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní*.

Definice. *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$
Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$
Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):
$$U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x < r\} = (-\infty, r),$$
$$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x > r\} = (r, +\infty).$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Maximum M ($\max M$) je největší prvek M.
Minimum M ($\min M$) je nejmenší prvek M.
Supremum M ($\sup M$) je nejmenší horní závora M.
Infimum M ($\inf M$) je největší dolní závora M.

Věta. *Každá množina reálných čísel má supremum i infimum (jediné).*

Věta (princip vnořených intervalů). *Jsou-li I_n $(n \in \mathbb{N})$ uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Funkce

Definice. (*Reálná*) *funkce* (*reálné proměnné*) f je zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.
Množina A je *definiční obor* funkce f ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x)\colon\ x \in A\}$ je *obor hodnot* funkce f ($R(f)$).
Graf funkce f je množina $\{[x, f(x)]\colon\ x \in D(f)\}$.

Definice. Funkce $f\colon\ A \to B$ je:
prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;
na B, pokud její obor hodnot je B ($f\colon\ A \xrightarrow{\text{na}} B$);
vzájemně jednoznačná (*bijekce*), pokud je prostá na B.

Definice. *Složení* funkcí $f\colon\ A \to B$ a $g\colon\ B \to C$ je funkce $g \circ f\colon\ A \to C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Definice. Funkce $g\colon\ R(f) \to A$ je *inverzní* k funkci $f\colon A \to B$, pokud $(g \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in A$. Značíme $g = f_{-1}$.

Věta. *Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak $D(f_{-1}) = R(f)$, $R(f_{-1}) = D(f)$, f je inverzní funkce k f_{-1} a graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici $y = x$).*

Definice. Funkce f je (*zdola*, *shora*) *omezená na* $A \subset\subset D(f)$, pokud je (zdola, shora) omezená množina $f(A)$.

Poznámka. Pokud neurčujeme A, myslíme $D(f)$.

Definice. Funkce f je:
sudá, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$;
lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Definice. Funkce f je *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Věta (o monotonii). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*
1) *Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí v I.*
2) *Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I, pak f je klesající v I.*
3) *Je-li $f'(x) \geq 0$ uvnitř I, pak f je neklesající v I.*
4) *Je-li $f'(x) \leq 0$ uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.*

Definice. Funkce f má v bodě a *lokální minimum* (*lokální maximum*), jestliže $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) na některém prstencovém okolí bodu a.

Věta. *Je-li f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I druhou derivaci, pak:*
1) *Je-li $f''(x) \geq 0$ uvnitř I, pak f je konvexní.*
2) *Je-li $f''(x) \leq 0$ uvnitř I, pak f je konkávní.*

Důkaz: 1) $x < y < z$: f' je neklesající, Lagrange … existují $c \in (x,y)$, $d \in (y,z)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Poznámka. Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

Definice. Bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje $f'(a)$ a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.

Věta.
1) *Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, pak f má v a inflexi.*

Elementární funkce

Mocniny x^a

$a \in \mathbb{N}$: $x^a = x \cdot \ldots \cdot x$ ($a\times$); inverzní $\sqrt[a]{x}$ ($\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$);

$x^0 = 1$ i pro $x = 0$; $x^{-a} = 1/x^a$;

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělná:

$D(x^{p/q})$	q liché	q sudé ($x \geq 0$)
$p \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty)$
$p < 0$ ($x \neq 0$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro $a \notin \mathbb{Q}$ pokládáme $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$, tedy $D(f) = (0, +\infty)$.

Exponenciální o základu $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$: a^x (impl. e^x);
inverzní: *logaritmus o základu* a: $\log_a x$;
($\log x = \log_{10} x$ *dekadický*, $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ *přirozený*).
Pro $x \in \mathbb{Q}$ je a^x definováno (viz mocniny),
pro $x \notin \mathbb{Q}$ dodefinujeme monotónně, tj. např. pro $a > 1$:
$a^x = \sup\{a^q :\ q \in \mathbb{Q},\ q < x\} = \inf\{a^q :\ q \in \mathbb{Q},\ q > x\}$.
Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y\,, \qquad\qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Pro každé $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad x, y > 0\,,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x\,, \qquad x > 0\,.$$

Exponenciální funkce i logaritmy lze převést na základ e:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}\,, \qquad\qquad \log_a x = \tfrac{\ln x}{\ln a}\,.$$

goniometrické: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
inverzní: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

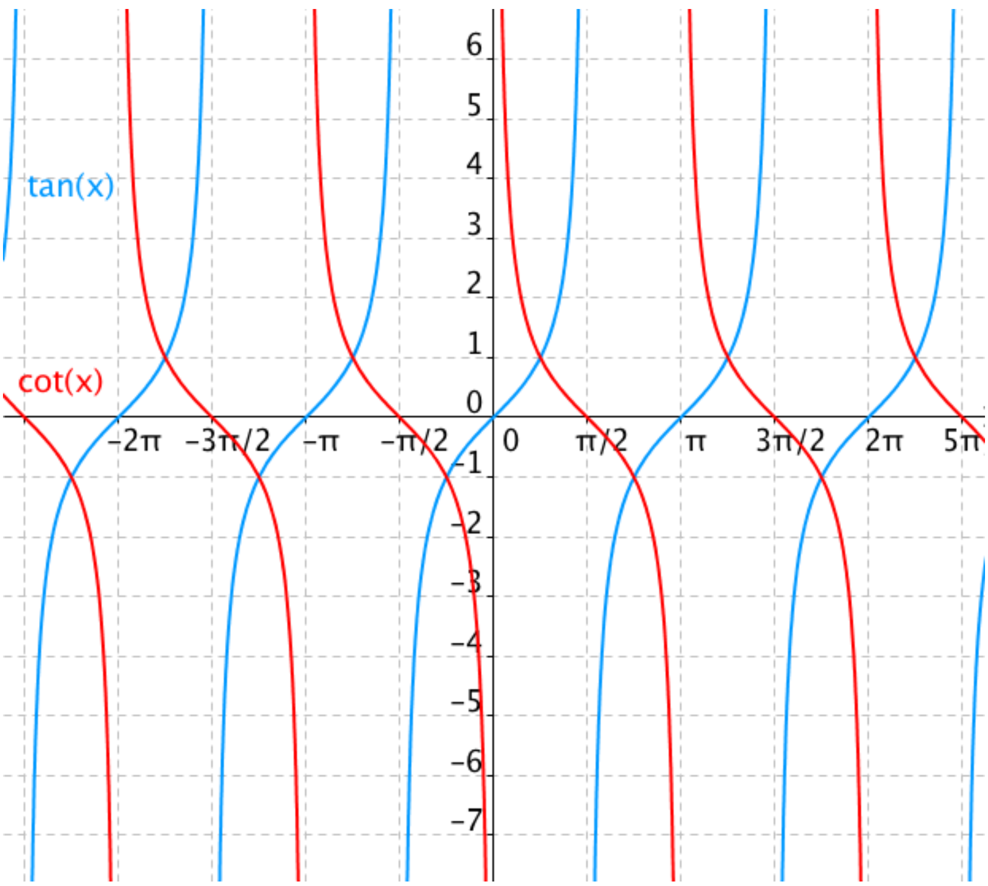
hyperbolické:

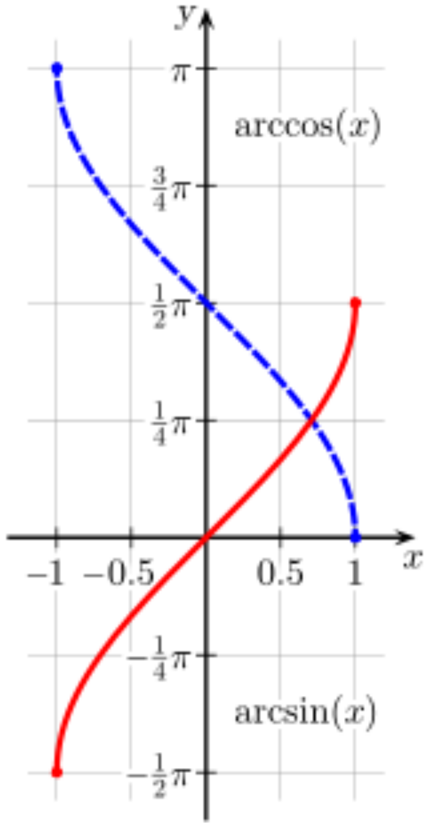
$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

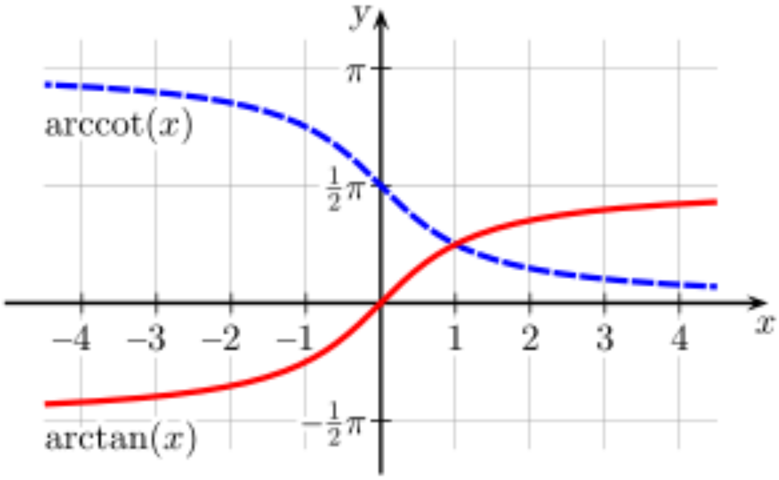
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

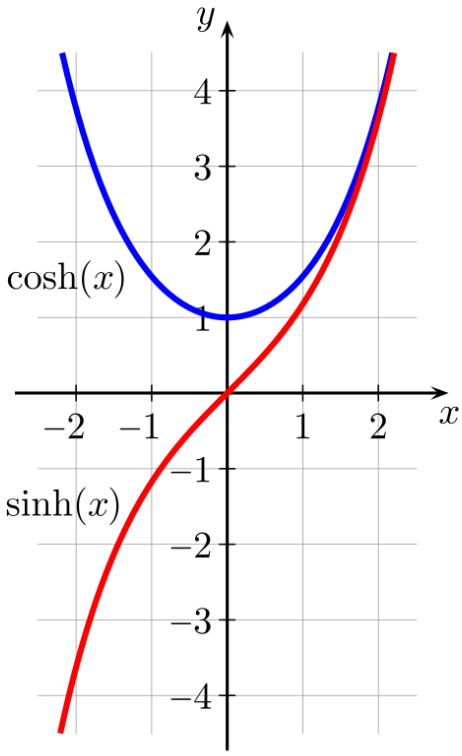
inverzní: $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$.

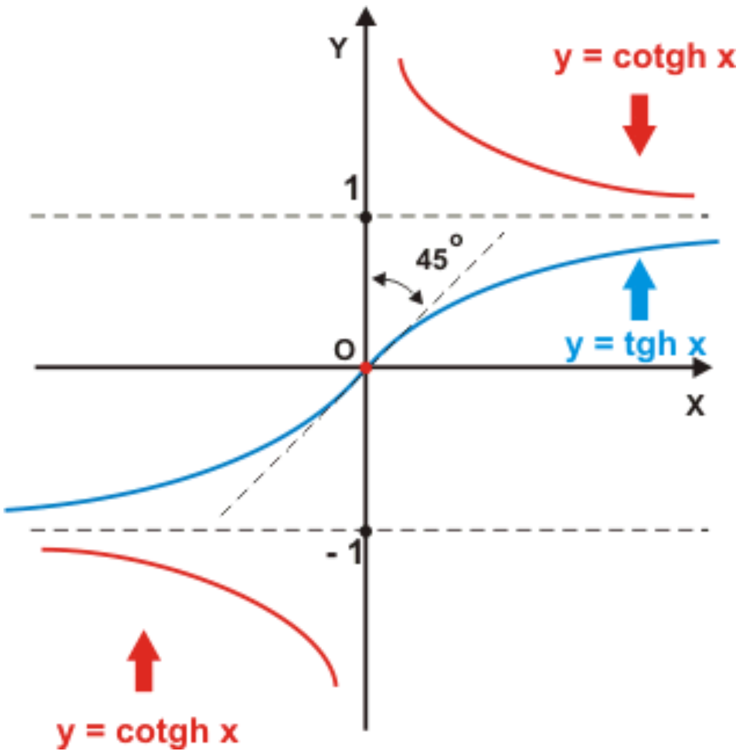
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$




y
π
arccos(x)
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{4}\pi$
−1 −0.5 0.5 1 x
$-\frac{1}{4}\pi$
arcsin(x)
$-\frac{1}{2}\pi$


y
π
arccot(x)
$\frac{1}{2}\pi$
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 x
arctan(x)
$-\frac{1}{2}\pi$


y
4
3
2
cosh(x)
1
−2 −1 1 2 x
−1
sinh(x)
−2
−3
−4


Y
y = cotgh x
1
45°
O
y = tgh x
X
- 1
y = cotgh x

Limity a spojitost

Definice. Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a *limitu* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$), jestliže platí: Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f\big(V \cap D(f)\big) \subset U$. Funkce je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Věta. *Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Věta (o jednoznačnosti). *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta (o jednoznačnosti). *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta (o monotonii). *Je-li $f \leq g$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $b \leq c$.*

Věta. *Funkce s vlastní limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je omezená na prstencovém okolí a.*

Věta. *Funkce s kladnou (zápornou) limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je na prstencovém okolí a kladná (záporná).*

Věta. *Monotonní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).*

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). *Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly).*

Věta (o sevření). *Je-li* $f \leq h \leq g$ *na prst. okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, *pak* $\lim_{x\to a} h(x) = b$.

Věta (limita složené funkce). *Nechť pro* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí:*
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,
(2) $\lim_{y\to b} g(y) = c$,
(3) $g(b) = c$ *nebo* $f(x) \neq b$ *na prstencovém okolí* a.
Pak $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

Věta (Weierstrass). *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.*

Věta (o mezihodnotě). *Je-li funkce* f *spojitá na intervalu* I *a nabývá-li v něm hodnot* m *a* M, $m < M$, *pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu* $\langle m, M\rangle$.

Věta. *Inverzní funkce k ryze monotonní funkci na intervalu je spojitá.*

Posloupnosti a řady

Definice. (Nekonečná) *posloupnost* (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n je *n-tý člen.*

nekonečněrozměrný aritmetický vektor
obecněji $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$

Věta. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$), pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.*

Definice. *Vybraná posloupnost* (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Definice. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je *hromadná hodnota posloupnosti*, pokud v každém okolí a leží nekonečně mnoho jejích členů.

Věta. *Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

Věta. *Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.*

Důkaz: Okolí U obsahuje hrom. hodnotu a její okolí $U' \subset U$.

limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$)
limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$)

Definice. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$, kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je *k-tý člen*, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ je *n-tý částečný součet* (s_n), limita posloupnosti částečných součtů je *součet*.

Řekneme, že řada *konverguje*, má-li konečný součet; *diverguje*, má-li nekonečný součet; *osciluje*, nemá-li součet.

Definice. *Geometrická řada s kvocientem q* je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$.

Věta. $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$ *pro* $|q| < 1$, *pro* $|q| \geq 1$ *a* $a_1 \neq 0$ *řada nekonverguje.*

Definice. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje (absolutně) a má stejný součet.*

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, pak* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz: $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) =$
$= \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta (srovnávací kr.). *Nechť* $0 \leq a_k \leq b_k$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$.
1) *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak i* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje.*
2) *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje, pak i* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverguje.*

Věta (limitní tvar podílového kritéria).
1) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konv. (abs.).*
2) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria).
1) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konv. (abs.).*
2) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Věta (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na* $\langle 1, +\infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *konverguje právě tehdy, když konverguje* $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta (Leibnizovo kr.). *Je-li* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *konverguje.*

Důkaz: $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \nearrow s'' \leq s'$, $s' - s'' = \lim_{k\to\infty} a_k$.

Derivace

Definice. *Derivace funkce f v bodě a* je

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

4) Funkce f má *derivaci na intervalu* I, pokud f' existuje na I (v případných krajních bodech I příslušná jednostranná).

Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Mají-li funkce f, g vlastní derivace v bodě a, pak:*
1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$;
3) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Věta (o derivaci složené funkce). *Má-li f vlastní derivaci v a, g vlastní derivaci v $f(a)=b$, pak $g \circ f$ má v a derivaci*

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)\cdot f'(a)\,.$$

Věta (o derivaci inverzní funkce). *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v $a \in I$, pak*

$$f'_{-1}\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f platí*
(1) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$;
(2) *má derivaci v každém bodě intervalu* (a, b);
(3) $f(a) = f(b)$.
Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a,b)$.

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)\,.$$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro funkce f, g platí:*
(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$,
(2) *existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Jinak řečeno, musí být buď obě limity nulové, nebo spodní limita nevlastní. Tyto případy jsou nazývány "limita typu $\frac{0}{0}$" resp. "limita tvaru $\frac{cokoliv}{\pm\infty}$".

Taylorův polynom

Věta (Taylor). *Nechť funkce f má spojité derivace do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x\rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a, x). Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

f	f'	$\mathcal{D}(f)$	$\mathcal{D}(f')$	Pozn.
const.	$\mathbf{0}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$ (tj. jako $\mathcal{D}(f)$)	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$	$\bullet$	$n \in \mathbf{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	$a \in \mathbf{R}$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	$a > \mathbf{0}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	$a \in (\mathbf{0}, 1) \cup (1, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\bullet$	
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	$\bullet$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{tgh}\, x$	$1 - \mathrm{tgh}^2 x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{cotgh}\, x$	$1 - \mathrm{cotgh}^2 x$	$x \neq \mathbf{0}$	$\bullet$	
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$	$\bullet$	
$\arg\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$-1 < x < 1$	$\bullet$	
$\arg\mathrm{cotgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert > 1$	$\bullet$	

Integrály

Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I, jestliže $F' = f$ na I.

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* f na I (pokud je neprázdná).

$$\int f = \int f(x)\, \mathrm{d}x = \{F + c\colon\, c \in \mathbb{R}\} = F + c\,.$$

Definice. Je-li pro omezenou funkci f na $\langle a, b\rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu *určitý* (*Riemannův*) *integrál* funkce f na $\langle a, b\rangle$. Čísla a, b se nazývají *dolní* a *horní* mez integrálu.

Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+)\,.$$

Definice. Nechť $f\colon\, (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ není omezená nebo (a, b) není omezený, $\int_c^d f$ existuje pro každý $\langle c, d\rangle \subset$ $\subset (a, b)$. Definujeme *nevlastní integrál*:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{c\to a+} \int_c^e f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{d\to b-} \int_e^d f(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

pokud je výraz vpravo definován pro některé $e \in (a, b)$. Je-li konečný, řekneme, že integrál *konverguje*.

Věta. 1) *Jestliže* $|f| \le g$ *na* (a,b), $\int_a^b g$ *konverguje a* f *je po částech spojitá, pak* $\int_a^b f$ *konverguje.*
2) *Jestliže* $f \le g$ *na* (a,b), $\int_a^b f = +\infty$ *a* g *je po částech spojitá, pak* $\int_a^b g = +\infty$.

$$\int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty\,, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty\,, & a < -1 \\ \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1}\,, & a > -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a \, \mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty\,, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty - \frac{1}{a+1} = \infty\,, & a > -1 \\ 0 - \frac{1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}\,, & a < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť* P, Q *jsou nenulové polynomy,* Q *nemá v* $\langle a, +\infty)$ *kořeny. Pak* $\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}$ *konverguje právě tehdy, když* $\operatorname{st} Q \ge \operatorname{st} P + 2$.

Tvrzení. *Nechť* P, Q *jsou nenulové polynomy,* $c \in \langle a, b\rangle$ *je jediný kořen polynomu* Q *v* $\langle a,b\rangle$ *násobnosti* n, *není kořen polynomu* P. *Pak* $\int_a^b \frac{P}{Q} \in \{\pm\infty\}$ *pro* n *sudé nebo* $c \in \{a, b\}$, *jinak neexistuje.*

Věta. *Nechť funkce* f *je omezená na* $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f$ *existuje,* $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ *pro* $x \in \langle a,b\rangle$. *Pak*
1) F *je spojitá.*
2) $F'(x) = f(x)$ *v bodech spojitosti funkce* f.

Věta (integrace per partes)**.** *Nechť na intervalu* I *existují* u', v', $\int u'v$. *Pak*

$$\int uv' = uv - \int u'v \text{ na } I\,.$$

Věta (substituce)**.** *Nechť* $(\alpha,\beta) \xrightarrow{\varphi} (a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' *existuje na* (α,β), $F(x)$ *je primitivní funkce k* $f(x)$ *na* (a,b).
1)
$$\int f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) + c \text{ na } (\alpha,\beta).$$

2) *Je-li* $\varphi\colon (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ *prostá a* G *je primitivní funkce k* $f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)$ *na* (α,β), *pak*

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c \text{ na } (a,b).$$

Definice 6.12 (integrál s proměnnou mezí)
Nechť $a, x \in I$ a $f \in \mathcal{N}(I)$. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem

$$F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$$

nazýváme integrálem s proměnnou mezí.

Věta. *Nechť $a < b < c$ a funkce f je omezená na $\langle a, c\rangle$. Pak $\int_a^c f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. V takovém případě $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Důkaz: D' dělení $\langle a, b\rangle$, D'' dělení $\langle b, c\rangle$,
$D = D' \cup D''$ je dělení $\langle a, c\rangle$ obsahující b,
$\underline{S}(f, D') + \underline{S}(f, D'') = \underline{S}(f, D)$,
$\bar{S}(f, D') + \bar{S}(f, D'') = \bar{S}(f, D)$,
přechodem k supremu a infimu:

$$\begin{array}{ccccc}
\sup_{D'} \underline{S}(f, D') & + & \sup_{D''} \underline{S}(f, D'') & = & \sup_{D} \underline{S}(f, D)\,, \\
\leq & & \leq & & \leq \\
\inf_{D'} \bar{S}(f, D') & + & \inf_{D''} \bar{S}(f, D'') & = & \inf_{D} \bar{S}(f, D)\,,
\end{array}$$

stejné sčítance pod sebou právě tehdy, když stejné součty.

Věta. *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pak*
1) *F je spojitá.*
2) *$F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti funkce f.*

Definice. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrál konverguje.

Věta. *Nechť funkce $f \leq g$ jsou po částech spojité na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Obsah $\{[x, y] : a < x < b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ je*

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b). Délka grafu funkce f je*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Věta. *Nechť funkce f je po částech spojitá na (a, b), $a, b \in \in \overline{\mathbb{R}}$. Objem $\{[x, y, z] \colon \ a < b < a, \ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ je*

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b). Obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem osy x je*

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Důkazy

Věta (princip vnořených intervalů). *Jsou-li I_n $(n \in \mathbb{N})$ uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

Věta (o jednoznačnosti). *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ není limitou: existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c, $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a.

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). *Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly).*

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro $U(b+c, \varepsilon)$ uvažujme $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset$ $\subset U(b+c, \varepsilon)$.

Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f platí*
(1) *je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;*
(2) *má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);*
(3) $f(a) = f(b)$.
Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a, b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f' = 0$ na (a, b);
nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a, b\rangle$;
například pro maximum v bodě $c \in (a, b)$:
$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$
$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$

Věta (o monotonii). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*
1) *Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí v I.*
2) *Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I, pak f je klesající v I.*
3) *Je-li $f'(x) \geq 0$ uvnitř I, pak f je neklesající v I.*
4) *Je-li $f'(x) \leq 0$ uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.*

Důkaz: $x, y \in I$, $x < y$
Lagrange: $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x - y)$, $c \in (x, y)$
1) $f(x) - f(y) < 0 \ldots\ f(x) < f(y) \ldots$ rostoucí
2)–4) podobně

Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+)\,.$$

Důkaz: $|f| \le M$ na $\langle a,b\rangle$, $a_n = a + \frac{1}{n} \in \langle a,b\rangle$ pro $n \ge n_0$,
pro $x \in (a, a_n)$ (Lagrange):
$|F(x) - F(a_n)| = |f(c_{x,n}) \cdot (x - a_n)| \le \frac{M}{n}$,
$F\big((a,a_n)\big) \subset \langle F(a_n) - \frac{M}{n}, F(a_n) + \frac{M}{n}\rangle = I_n$,
$(I_n)_{n=n_0}^{\infty}$ uzavřené vnořené intervaly délek $\frac{2M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} I_n = \{F(a+)\}$, $F(a+)$ existuje (podobně $F(b-)$);
$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$,
$F(b-) - F(a+) = \sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) =$ (Lagrange)
$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\underline{S}(f,D) \le F(b-) - F(a+) \le \bar{S}(f,D)$$
$$\sup_D \underline{S}(f,D) \le F(b-) - F(a+) \le \inf_D \bar{S}(f,D)$$

Věta. *Monotonní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.*

Důkaz: $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ (ekvidistantní na n částí),
$\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \big|f(b) - f(a)\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Věta. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$ pro $|q| < 1$, pro $|q| \ge 1$ a $a_1 \neq 0$ řada nekonverguje.*

Důkaz:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1(1 + q + \dots + q^{n-1}) \\ q s_n &= a_1(\quad\ q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q)s_n &= a_1(1 - q^n) \\ s_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\,, \quad (q \neq 1) \end{aligned}$$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, pak* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz: $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) =$
$= \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0.$

Věta (podílové kritérium). *Nechť* $a_k \neq 0$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$.
1) *Je-li* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (absolutně).*
2) *Je-li* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonv.*

Důkaz:
1) $|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq \cdots \leq |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.
2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_1|$, $a_k \not\to 0$

Věta (odmocninové kritérium).
1) *Je-li* $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (absolutně).*
2) *Je-li* $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonv.*

Věta (integrální kritérium). *Nechť* f *je nezáporná nerostoucí funkce na* $\langle 1, +\infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *konverguje právě tehdy, když konverguje* $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1)$,
$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$