

Numerická integrace

středa 4. prosince 2019 11:40



int_print

Numerická integrace

Mirko Navara

Centrum strojového vnímání

katedra kybernetiky FEL ČVUT

Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/nm>

2. ledna 2019

Úloha: Odhadnout

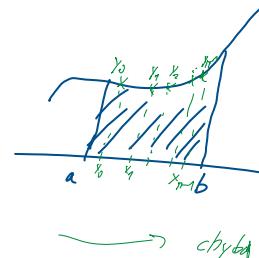
$$I = \int_a^b f(t) dt$$

na základě hodnot funkce f v konečně mnoha uzlových bodech x_0, \dots, x_{n-1} .

Aproximace: Pokud se approximace φ na intervalu (a, b) liší od f nejvýše o ε , pak

$$\left| I - \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f(t) - \varphi(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \leq (b-a)\varepsilon.$$

approximace
čára
čára



Příklad:

$$\int_a^b \sin^{100} t dt$$

je náročnou úlohou pro počítacové algebraické systémy, ale z numerického hlediska není nijak zvlášť obtížný.

Linearita: Integrál závisí na integrandu lineárně, proto odhad integrálu závisí lineárně na $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$.

$$A = \sum_{i < n} w_i f(x_i),$$

→ Nezáleží na integrandu.

Můžeme volit pouze uzlové body x_0, \dots, x_{n-1} a jejich váhy w_0, \dots, w_{n-1} .

Zjednodušení: Funkci f approximujeme interpolacním polynomem.

(a, b) rozdělíme na k intervalů

$$(a_j, a_{j+1}), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

kde $a_0 = a$, $a_k = b$. V dílčích intervalech používame nahradu polynomem nízkého stupně, vedoucí na tzv. jednoduchý vzorec, tj. odhad A_j integrálu

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) dt.$$

Sečtením dostaneme složený vzorec, tj. odhad

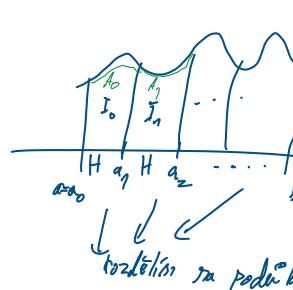
$$A = \sum_{j < k} A_j$$

integrálu

$$I = \sum_{j < k} I_j = \int_a^b f(t) dt.$$

Zjednodušení: Všechny dílčí intervaly mají stejnou délku

$$H = \frac{b-a}{k} = a_{j+1} - a_j.$$



úvod.

Každý dilčí interval lze lineární substitucí převést na jednotkový interval $(0, 1)$. Obecný případ dostaneme

$$\begin{aligned} u &= \frac{t - a_j}{H}, & t &= a_j + H u, \\ I_j &= \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) dt = \int_0^1 H f(a_j + H u) du = \int_0^1 g_j(u) du, \\ g_j(u) &= H f(a_j + H u), \\ g_j^{(m)}(u) &= H^{m+1} f^{(m)}(a_j + H u). \end{aligned}$$

1 Newtonovy-Cotesovy vzorce

Uzlové body ekvidistantní \rightarrow rovnoforně stejně velký H .

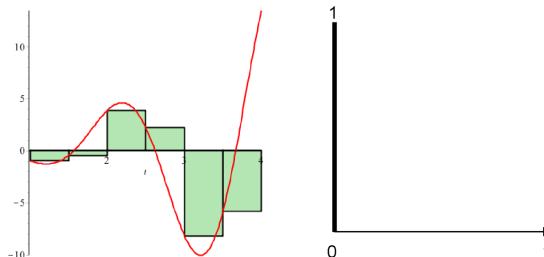
1.1 Metoda levého odhadu

Jediný uzlový bod v krajním bodě intervalu, $u_0 = 0$; g_j nahradíme konstantou $g_j(u_0) = g_j(0)$. Jednoduchý vzorec:

$$L_j = \int_0^1 g_j(0) dt = g_j(0) = H f(a_j)$$

Složený vzorec:

$$L = \sum_{j < k} L_j = H \sum_{j < k} f(a_j) = H \sum_{j < k} f(a + j H).$$



Rovnocenný je odhad pro volbu $u_0 = 1$, metoda pravého odhadu

1.2 Obdélníková metoda

Uzlový bod ve středu intervalu, $u_0 = 1/2$

Proložíme konstantu $g_j(u_0) = g_j(1/2)$. Jednoduchý vzorec:

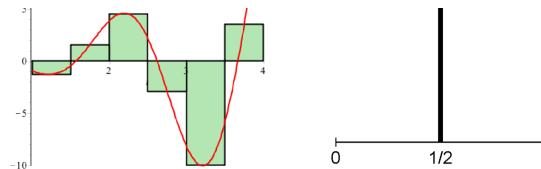
$$R_j = \int_0^1 g_j(1/2) dt = g_j(1/2) = H f(a_j + H/2)$$

Složený vzorec:

$$R = \sum_{j < k} R_j = H \sum_{j < k} f(a_j + H/2) = H \sum_{j < k} f(a_{1/2} + j H),$$

kde $a_{1/2} = a + H/2$.





1.3 Lichoběžníková metoda

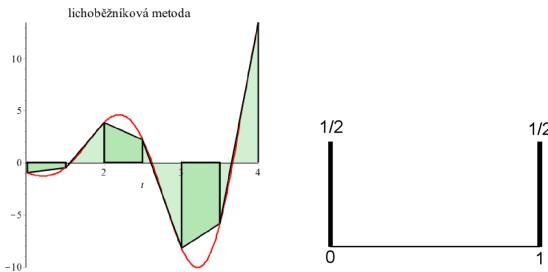
Dva uzlové body na krajích intervalu, $u_0 = 0, u_1 = 1$

Proložíme lineární funkci, výsledkem bude plocha pod průmkou, neboli obsah lichoběžníka. Jednoduchý vzorec:

$$T_j = \frac{g_j(u_0) + g_j(u_1)}{2} = \frac{g_j(0) + g_j(1)}{2} = H \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2}$$

Složený vzorec:

$$T = \sum_{j < k} T_j = H \sum_{j < k} \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2} = H \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a + j H) \right).$$



1.4 Simpsonova metoda

Tři uzlové body, dva na krajích intervalu, jeden uprostřed, $u_0 = 0, u_1 = 1/2, u_2 = 1$. Proložíme kvadratický polynom a zintegrujeme. Jednoduchý vzorec:

$$\begin{aligned} S_j &= w_0 g_j(u_0) + w_1 g_j(u_1) + w_2 g_j(u_2) \\ &= w_0 g_j(0) + w_1 g_j(1/2) + w_2 g_j(1). \end{aligned}$$

Vzorec bude přesný, bude-li g_j libovolný kvadratický polynom. Speciálně pro $g_j(u) \in \{1, u, u^2\}$:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= \int_0^1 1 \, du = 1, \\ \frac{1}{2} w_1 + w_2 &= \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} w_1 + w_2 &= \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

To je soustava 3 lineárních rovnic pro 3 neznámé w_0, w_1, w_2 , řešení:

$$w_0 = \frac{1}{6}, \quad w_1 = \frac{2}{3}, \quad w_2 = \frac{1}{6}.$$

Jednoduchý vzorec:

$$\begin{aligned} S_j &= \int_0^1 g_j(1/2) \, dt = \frac{1}{6} g_j(0) + \frac{2}{3} g_j(1/2) + \frac{1}{6} g_j(1) \\ &= \frac{H}{6} (f(a_j) + 4 f(a_j + H/2) + f(a_{j+1})) \end{aligned}$$

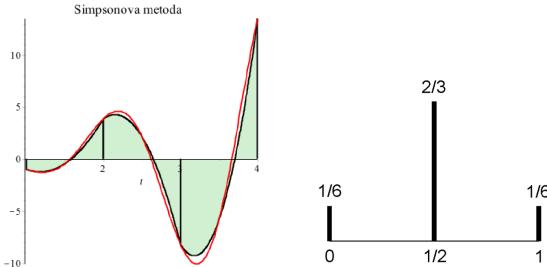
Složený vzorec:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{j < k} S_j \\
 &= \frac{H}{6} \left(f(a_0) + f(a_k) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(a_j) + 4 \sum_{j=0}^{k-1} f(a_j + H/2) \right) \\
 &= \frac{H}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(a + jH) + 4 \sum_{j=0}^{k-1} f(a_{1/2} + jH) \right),
 \end{aligned}$$

kde $a_{1/2} = a + H/2$ (pozor na meze sum!).

$$S = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})),$$

kde $x_i = a + ih$ jsou uzlové body (pro funkci f , nikoli g_j) a $h = H/2$ je vzdálenost mezi sousedními uzlovými body. Počet intervalů délky h musí být sudý!



1.5 Obecné Newtonovy-Cotesovy vzorce

- otevřené (obdélníková metoda)
- uzavřené (lichoběžníková a Simpsonova metoda)
- polootevřené (metoda levého odhadu)

4

2 Odhad chyby numerické integrace

Zjednodušení: pro lichoběžníkovou metodu

Předpokládajme, že g_j má na intervalu $(0, 1)$ spojitou druhou derivaci. Funkci g_j nahrazujeme lineárním polynomem φ_j ; chyba interpolace v bodě u je

$$|g_j(u) - \varphi_j(u)| \leq \frac{\max_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} |(u-0)(u-1)|,$$

$$\begin{aligned}
 |T_j - I_j| &= \left| \int_0^1 \varphi_j(u) du - \int_0^1 g_j(u) du \right| \leq \int_0^1 |\varphi_j(u) - g_j(u)| du \\
 &\leq \frac{\max_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} \int_0^1 (u-u^2) du = \frac{\max_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{12} \max_{v \in (0,1)} |g_j''(v)| = \frac{1}{12} H^3 \max_{t \in (a_j, a_{j+1})} |f''(t)|.
 \end{aligned}$$

Vyjádříme pomocí

$$M_2 \geq \max_{t \in (a,b)} |f''(t)|,$$

$$|T_j - I_j| \leq \frac{1}{12} H^3 M_2,$$

složený vzorec

$$|T - I| \leq \frac{k}{12} H^3 M_2,$$

po náhradě konstantního součinu $k H = b - a$

$$|T - I| \leq \frac{(b-a) M_2}{12} H^2.$$

2.1 Řád metod integrace

Definice. Nechť funkce A vyjadřuje výsledek integrační metody v závislosti na délce kroku, I je správný výsledek. Pokud existuje

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\ln |A(H) - I|}{\ln H},$$

nazývá se řád metody.

logaritmické souřadnice

Poznámka. V logaritmických souřadnicích má řád metody význam směrnice asymptoty $v = -\infty$.

Poznámka. Často se řád metody integrace zavádí jako exponent p u H v nejnižším obecně nenulovém členu Taylorova rozvoje chyby metody podle H v okolí bodu 0.

Věta. Nechť funkce A vyjadřuje výsledek integrační metody v závislosti na délce kroku, I je správný výsledek. Nechť p je exponent u H v nejnižším nenulovém členu Taylorova rozvoje chyby metody podle H v okolí bodu 0. Pokud má A spojituou p -tou derivaci v 0, pak p je řád metody ve smyslu Definice 2.1.

Důkaz. Taylorův rozvoj se zbytkem v Lagrangeově tvaru lze psát

$$A(H) = I + \frac{H^p}{p!} A^{(p)}(\xi_H),$$

kde $\xi_H \in (0, H)$, takže

$$\lim_{H \rightarrow 0} \xi_H = A^{(p)}(0).$$

5

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\ln |A(H) - I|}{\ln H} &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{H^p}{p!} |A^{(p)}(\xi_H)|}{\ln H} = \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{p \ln H - \ln p! + \ln |A^{(p)}(\xi_H)|}{\ln H} = \\ &= p + \lim_{H \rightarrow 0} \frac{-\ln p! + \ln |A^{(p)}(\xi_H)|}{\ln H}. \end{aligned}$$

Citatel posledního zlomku konverguje k $-\ln p! + \ln |A^{(p)}(0)|$, jmenovatek k $-\infty$, celý zlomek k 0.

□

metoda	horní odhad chyby	řád
levého odhadu	$\frac{(b-a)M_1}{2} H$	1
lichoběžníková	$\frac{(b-a)M_2}{12} H^2$	2
obdélníková	$\frac{(b-a)M_2}{12} H^2$	2
Simpsonova	$\frac{(b-a)M_4}{2880} H^4 = \frac{(b-a)M_4}{180} h^4$	4

Simpsonova metoda dává chybu nikoli třetího, ale čtvrtého řádu. Je-li f , a tedy i g_j , polynom stupně nejvyšše 3, pak chyba interpolace kvadratickým polynomem je uměrná

$$W(u) = (u-0)(u-1/2)(u-1).$$

Na hodnotě integrálu se to neprojeví, neboť

$$\int_0^1 W(u) du = 0.$$

Příklad 1:

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. Stanovte postačující počet kroků pro jednotlivé metody.

met.	M_p	horní odhad H	počet kroků
L	$\sqrt{\frac{2}{e}} \doteq 0.86$	$\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0.86} \doteq 1.16 \cdot 10^{-6}$	1 720 000
T	2	$\sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6}}{2}} \doteq 1.7 \cdot 10^{-3}$	1155
R	2	$\sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-6}}{2}} \doteq 2.45 \cdot 10^{-3}$	817
S	12	$\sqrt{\frac{2880 \cdot 10^{-6}}{2^{12}}} \doteq 0.1$	20

Pro $k = 20$

$$\begin{aligned} L &\doteq 0.9311046, \\ R &\doteq 0.8821118, \\ T &\doteq 0.8820204, \\ S &\doteq 0.8820813 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \exp(-t^2) dt \doteq 0.882\,081\,390.$$

3 Gaussova metoda integrace

Na intervalu $(-1, 1)$ volíme za uzlové body kořeny $z_0, \dots, z_{s-1} \in (-1, 1)$ tzv. Legendreových polynomů. Lineární transformaci

$$u = \frac{z+1}{2}, \quad z = 2u - 1$$

dostaneme uzlové body $u_0, \dots, u_{s-1} \in (0, 1)$. Uzlové body a jejich váhy w_0, \dots, w_{s-1} jsou tabelovány nebo raději počítány algoritmem. Volíme pouze jejich počet s tím i řád metody.

upozornit
→ obecná/obecná metoda

s	uzlové body	váhy
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq \pm 0.577350$	1
3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \doteq \pm 0.774597$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{30+4\sqrt{30}}{70}} \doteq \pm 0.861136$	0.347855
	$\pm \sqrt{\frac{30-4\sqrt{30}}{70}} \doteq \pm 0.339981$	0.652145
5	$\pm \sqrt{\frac{70+4\sqrt{70}}{126}} \doteq \pm 0.906180$	0.236927
	$\pm \sqrt{\frac{70-4\sqrt{70}}{126}} \doteq \pm 0.538469$	0.478629
	0	0.568889

jednoduchý vzorec:

$$G_{s,j} = \sum_{i < s} w_i g_j(u_i) = H \sum_{i < s} w_i f(a_j + H u_i)$$

složený vzorec:

$$G_s = \sum_{j < k} G_{s,j} = H \sum_{j < k} \sum_{i < s} w_i f(a_j + H u_i) = H \sum_{i < s} \left(w_i \sum_{j < k} f(d_i + j H) \right),$$

kde $d_i = a + H u_i \in (a_0, a_1)$. Horní odhad chyby

$$|G_s - I| \leq \frac{(b-a)(sl)^4 M_{2s}}{(2s+1)((2s)!)^3} H^{2s},$$

kde

$$M_{2s} \geq \max_{v \in (a,b)} |f^{(2s)}(v)|.$$

Chyba metody je rádu $2s$, díky volbě s uzlových bodů a s vah, tj. $2s$ parametrů. V Newtonových-Cotesových vzorcích jsme volbou s vah (při daných uzlových bodech) dostali metody rádu s nebo $s+1$.

počet uzlových bodů	horní odhad chyby	řád
1	$\frac{(b-a)}{24} M_8 H^2$	2
2	$\frac{(b-a)}{1320} M_4 H^4$	4
3	$\frac{(b-a)}{2016000} M_6 H^6$	6
4	$\frac{(b-a)}{172800000} M_8 H^8$	8
5	$\frac{(b-a)}{2334876467200} M_{10} H^{10}$	10

Příklad 1 (pokračování):

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

A	M_p	horní odhad H	p. kroků
L	$\sqrt{\frac{2}{e}} \doteq 0.86$	$\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0.86} \doteq 1.16 \cdot 10^{-6}$	1 720 000
T	2	$\sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 1.7 \cdot 10^{-3}$	1155
R	2	$\sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 2.45 \cdot 10^{-3}$	817
S	12	$\sqrt{\frac{4 \cdot 2880 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 12}} \doteq 0.1$	20
G_2	12	$\sqrt{\frac{4 \cdot 4320 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 12}} \doteq 0.115$	18
G_4	1680	$\sqrt{\frac{8 \cdot 1778112000 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1680}} \doteq 0.92$	3

4 Richardsonova extrapolace

Úloha: Správný výsledek nějakého výpočtu je $A(0) = \lim_{H \rightarrow 0} A(H)$. Předpokládáme, že A má v okolí bodu 0 Taylorův rozvoj

$$A(H) = A(0) + \frac{H^p}{p!} A^{(p)}(0) + \frac{H^r}{r!} A^{(r)}(0) + \dots,$$

kde p (rád metody) známe a $r > p$. Z hodnot funkce A v konečně mnoha nenulových bodech máme odhadnout $A(0)$.

Řešení: Zanedbáme členy řádu vyšších než p a approximujeme A polynomem $\varphi(H) = s + c H^p$, $s, c \in \mathbb{R}$. Ke stanovení s, c zvolíme 2 uzlové body $H, H/q$, kde $q \neq 1$:

$$\begin{aligned}\varphi(H) &= s + c H^p &= A(H), \\ \varphi\left(\frac{H}{q}\right) &= s + c \frac{H^p}{q^p} &= A\left(\frac{H}{q}\right).\end{aligned}$$

To je regulérní soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé s, c , z nichž nás zajímá pouze $s = \varphi(0)$:

$$\begin{aligned}(q^p - 1)s &= q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H), \\ s &= \frac{q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1}.\end{aligned}$$

Odhad s hodnoty $A(0)$ je zatížen pouze chybami vyšších řádů než p (zde řádu r).

Casto $q = 2$, pak

$$s = \frac{2^p A\left(\frac{H}{2}\right) - A(H)}{2^p - 1}.$$

5 Richardsonova extrapolace při integraci

Richardsonovou extrapolací dostaneme nový odhad

$$B(H) = \frac{q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1} = A\left(\frac{H}{q}\right) + \frac{A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1}.$$

Výraz

$$\frac{A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1} \doteq I - A\left(\frac{H}{q}\right)$$

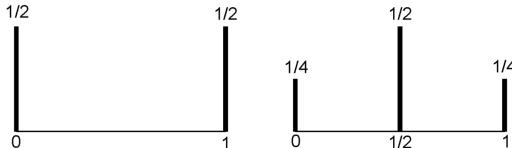
můžeme rovněž považovat za odhad chyby výsledku $A\left(\frac{H}{q}\right)$.

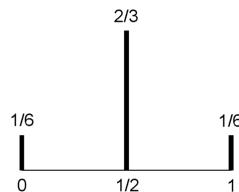
Speciálně pro $q = 2$ (metoda polovičního kroku):

$$B(H) = \frac{2^p A\left(\frac{H}{2}\right) - A(H)}{2^p - 1} = A\left(\frac{H}{2}\right) + \frac{A\left(\frac{H}{2}\right) - A(H)}{2^p - 1}$$

$$I - A\left(\frac{H}{2}\right) \doteq \frac{A\left(\frac{H}{2}\right) - A(H)}{2^p - 1}$$

Pro lichoběžníkovou metodu lze doporučit $q = 2$





Polovina nových uzlových bodů (pro krok $H/2$) se kryje se starými (pro krok H); dostaneme odhad

$$T\left(\frac{H}{2}\right) + \frac{T\left(\frac{H}{2}\right) - T(H)}{3} = \frac{2R(H) + T(H)}{3},$$

shodný se Simpsonovou metodou.

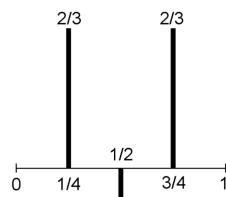
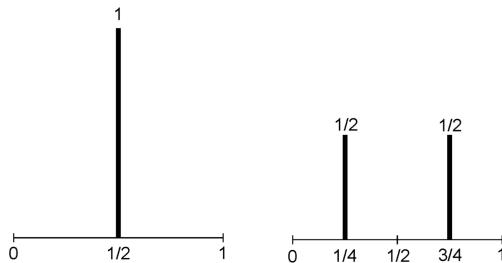
Richardsonovou extrapolací lze zprášnit i Simpsonovu metodu, dostaneme odhad 6. řádu

$$S\left(\frac{H}{2}\right) + \frac{S\left(\frac{H}{2}\right) - S(H)}{15}$$

Richardsonovou extrapolací pro obdélníkovou metodu s polovičním krokem dostaneme odhad

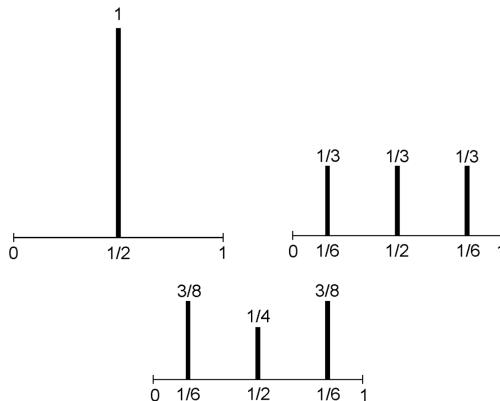
$$R\left(\frac{H}{2}\right) + \frac{R\left(\frac{H}{2}\right) - R(H)}{3},$$

který se však nehodí:



-1/3

Vhodnější je třetinový krok, $q = 3$, $R\left(\frac{H}{3}\right) + \frac{R\left(\frac{H}{9}\right) - R(H)}{8}$.



6 Rombergova metoda

Vychází z více odhadů získaných lichoběžníkovou metodou pro kroky $H, H/2, H/4, \dots$.

Taylorův rozvoj chyby lichoběžníkové metody má nenulovou pouze členy sudého rádu. Proto se každou Richardsonovou extrapolací zvýší rád o dveře.

10

řád	2	4	6	8
k	$T\left(\frac{H}{k}\right)$	$S\left(\frac{2H}{k}\right)$		
k_0	$T(H) = T_{0,0}$			
$2k_0$	$T\left(\frac{H}{2}\right) = T_{1,0} \rightarrow T_{1,1}$			
$4k_0$	$T\left(\frac{H}{4}\right) = T_{2,0} \rightarrow T_{2,1} \rightarrow T_{2,2}$			
$8k_0$	$T\left(\frac{H}{8}\right) = T_{3,0} \rightarrow T_{3,1} \rightarrow T_{3,2} \rightarrow T_{3,3}$			
...

Obecně ve sloupci $j+1$:

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}.$$

Za výsledek bereme $T_{i,i}$, chyba je rádu $2i$ a odhadujeme ji zhruba výrazem $|T_{i,i-1} - T_{i-1,i-1}|$ nebo $|T_{i,i} - T_{i-1,i-1}|$.

Příklad 1 (pokračování): Výsledky Rombergovy metody pro $\int_0^2 e^{-t^2} dt$ s počáteční volbou 4 intervalů dělení:

řád	2	4	6	8
k	$T\left(\frac{H}{k}\right)$	$S\left(\frac{2H}{k}\right)$		
4	0.88061			
8	0.88170	0.8820655		
16	0.88170	0.8820803	0.88208139	

32	0.88205	0.8820813	0.88208138	0.88208138
----	---------	-----------	------------	------------

S platnými číframi 0.882081 se shodují výsledky vyznačené kurzívou.

Příklad 2: Výsledky Rombergovy metody pro $\int_0^{\pi} \sin^4 t dt$, s počáteční volbou 1 intervalu dělen:

rád	2	4	6	8	10
k	$T(\frac{H}{k})$	$S(\frac{2^k H}{k})$			
1	0				
2	1.57080	2.09440			
4	1.17810	1.0472	0.97738		
8	1.17810	1.17810	1.18683	1.19015	
16	1.17809	1.17809	1.17809	1.17795	1.17790

S platnými číframi 1.178 se shodují výsledky vyznačené kurzívou.

→ špatná vstupní data, neobsahuje společné

7 Praktické stanovení počtu intervalů

- z horního odhadu chyby
- metoda dvojího (nejčastěji polovičního) kroku

Příklad 1 (pokračování):

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. Simpsonova metoda s krokem 2 a 1:

$$\begin{aligned} S(2) &\doteq 0.8299444, \\ S(1) &\doteq 0.8818124. \end{aligned}$$

Odhad chyby medotou polovičního kroku je

$$\frac{|S(1) - S(2)|}{15} \doteq 0.0034578,$$

11

požadovaná chyba je zhruba $3458 \times$ menší, což vyžaduje zvýšit počet kroků v poměru alespoň $\sqrt[3]{3458} \doteq 7.7$.
Pro 4×8 menší krok, tj. pro 8 a 16 intervalů dělení:

$$\begin{aligned} S(\frac{2}{8}) &\doteq 0.882080396576, \\ S(\frac{2}{16}) &\doteq 0.882081328646. \end{aligned}$$

Odhad chyby posledního výsledku je

$$\frac{|S(\frac{2}{16}) - S(\frac{2}{8})|}{15} \doteq 6.3 \cdot 10^{-8}.$$

(Již víme, že postačuje 20 intervalů dělení.) Richardsonova extrapolace:

$$S(\frac{2}{16}) + \frac{S(\frac{2}{16}) - S(\frac{2}{8})}{15} \doteq 0.882081390784,$$

Přesnější výsledek je

$$0.8820813907624216800.$$

Příklad 3: ~~probíhající volba~~

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-8}$. Zkusíme 5-bodovou Gaussovou metodu (10. rádu) s krokem 1 a $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} G_5(1) &\doteq 0.621166517, \\ G_5(\frac{1}{2}) &\doteq 0.620759367. \end{aligned}$$

Odhad chyby medotou polovičního kroku je

$$\frac{|G_5(\frac{1}{2}) - G_5(1)|}{2^{10} - 1} \doteq 4 \cdot 10^{-7},$$

požadovaná chyba je zhruba $40 \times$ menší, což vyžaduje zvýšit počet kroků v poměru alespoň $\sqrt[4]{40} \doteq 1.5$. Měl by tedy stačit 2x menší krok, tj. 4 intervaly dělení:

$$\begin{aligned} G_5(\frac{1}{2}) &\doteq 0.620759367 \\ G_5(\frac{1}{4}) &\doteq 0.620615367. \end{aligned}$$

Odhad chyby posledního výsledku je

$$\frac{|G_5(\frac{1}{4}) - G_5(\frac{1}{2})|}{2^{10} - 1} \doteq 1.4 \cdot 10^{-7},$$

tedy jen asi třikrát menší, ač se měl změnit v poměru $2^{10} = 1024$.

Přesnější výsledek je

0.62053660344676220362.



8 Řešení obtížnějších úloh úpravou zadání

8.1 Integrace přes nekonečný interval

Příklad 4:

$$I = \int_2^\infty e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

I nekonečný obor integrace lze (nelineární) substitucí převést na konečný $(0, 1)$, zde např. $t = 1/u$:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{u^2}}}{u^2} du.$$

12

Můžeme využít známé určité integrály, např.

$$I = \int_2^\infty e^{-t^2} dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}/2} - \int_0^2 e^{-t^2} dt,$$

Můžeme se omezit na konečný interval a zbytek zanedbat. V našem případě lze použít odhad (se substitucí $t = x = u$)

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2xu-u^2} du \\ &\leq e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2xu} du = \frac{e^{-x^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Pro $x \geq 3.85$ je tento výraz menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, takže stačí vypočítat

$$\int_2^{3.85} e^{-t^2} dt$$

s přesností $\frac{\varepsilon}{2}$.

8.2 Omezení intervalu

se může hodit, i když obor integrace je konečný:

Příklad 5:

$$\int_2^{1000} e^{-t^2} dt$$

Simpsonovou metodou s 1000 kroky:

0.0043821,

4-bodovou Gaussovou metodou se 100 kroky:

0.0012304,

Dopustíme se chybou menší než $\frac{\varepsilon}{2} = 5 \cdot 10^{-7}$, snížíme-li horní mez na 3.85. Pak stačí Simpsonova metoda s 23 kroky

0.00414549.

Přesnější výsledek je

0.00414553469.

8.3 Pomalu konvergentní integrály

Přičtení známého určitého integrálu může zásadně změnit obtížnost numerického výpočtu:

Příklad 3 (pokračování):

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Integrand má v okolí nuly neomezenou derivaci. V okolí nuly je $\sin t \approx t$, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \approx \sqrt{t}$. Derivace je sice nadále neomezená, ale známa

$$\int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}.$$

Rozdíl $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}$ má derivace omezená a jeho integrace nečiní zvláštní potíže. Výpočet 5-bodovou Gaussovou

metodu $\overset{\vee}{\wedge}$ (10. rádu) se dvěma a čtyřmi intervaly dělení dává

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt &\doteq \\ G_5(\frac{1}{2}) &\doteq -0.046130081752, \\ G_5(\frac{1}{4}) &\doteq -0.046130064858. \end{aligned}$$

Odhad chyby metodou polovičního kroku:

$$\frac{|G_5(\frac{1}{4}) - G_5(\frac{1}{2})|}{2^{10} - 1} \doteq 1.7 \cdot 10^{-11}.$$

Přesnější výsledek je

$$-0.04613006321990446305$$

Výsledek původního zadání je

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_0^1 \sqrt{t} dt + \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt \\ &\doteq \frac{2}{3} - 0.04613006486 \\ &\doteq 0.62053660181 \end{aligned}$$

(přesněji 0.6205366034467622036).

Substituce funkci, která má v odpovídajícím bodě c nulové derivace dostatečně mnoha řádů, např. $t = c + u^s$, kde exponent s volime raději vyšší než nižší.

Příklad 3 (pokračování):

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Substitucí $t = u^2$ dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 2 \sin u^2 du.$$

5-bodová Gaussova metoda (10. rádu) s jedním a dvěma intervaly dělení:

$$\begin{aligned} G_5(1) &\doteq 0.620536620796, \\ G_5(\frac{1}{2}) &\doteq 0.620536603496, \end{aligned}$$

odhad chyby metodou polovičního kroku

$$\frac{|G_5(\frac{1}{2}) - G_5(1)|}{2^{10} - 1} \doteq 1.7 \cdot 10^{-11}.$$

Chtěli bychom, aby se integrand v okolí problémového bodu blížil konstantě; mohli jsme použít též substituci $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = u$ s dobrým výsledkem.

Příklad 6:

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

s přesností 10^{-8} . Omezení na konečný obor nepomůže, neboť např.

$$\int_{999997}^{1000000} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \doteq 0.0019.$$

Hledaný integrál není absolutně konvergentní.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Potřebujeme

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \\ &\doteq \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 0.620536601808 \doteq 0.632777535507, \end{aligned}$$

kde ovšem integrál $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ byl rovněž problémový; využili jsme řešení příkladu 3. Přesnější výsledek je

$$0.6327775338746013102.$$

