Predikátová logika

7. a 8. přednáška z LGR

Obsah

Predikátová logika

Slang: Predikátová logika studuje kromě logických spojek i kvantifikátory a vnitřní strukturu jednoduchých výroků.

Proměnné už neoznačují atomické formule, ale zastupují objekty. Budeme se zabývat predikátovou logikou 1. řádu, která má proměnné jen pro individua, nikoli pro množiny individuí. Aneb proměnné budou jednoho typu.

Predikátová logika

Aristotelovy sylogismy

Každý člověk je smrtelný.
Sokrates je člověk.

Sokrates je smrtelný.

Toto je správný úsudek, ale jeho správnost nelze ověřit pomocí výrokové logiky, potřebujeme podchytit vnitřní strukturu výroků.

Poznámka

Aristotelových sylogismů je celkem 37 a dohromady tvoří úplný odvozovací systém predikátové logiky (což dokázali Lešniewski, kolem 1930, Tarského škola, Polsko).

Predikátová logika

Aristotelovy sylogismy

Zatím neformální pokus o formalizaci:

x .... jsoucno
C(-) .... být člověk
S(-) .... být smrtelný
a .... Sokrates

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(C(x) \Rightarrow S(x))\\ \quad C(a)\end{array}}{S(a)}$$

Formule pod čarou je sémantickým důsledkem formulí nad čarou.

Syntaxe predikátové logiky

Jazyk

Jazyk predikátové logiky obsahuje tyto symboly:

1. logické symboly
   - proměnné; Var je množina všech proměnných
   - logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, popř. též $\mathtt{tt}, \mathtt{ff}, |, \downarrow, \oplus$
   - kvantifikátory $\forall$ (obecný) a $\exists$ (existenční)
   - symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly
   - predikátové, kde každý má svou aritu $n \geq 0$;
     Pred je množina predikátových symbolů
   - funkční, kde každý má svou aritu $n > 0$;
     Func je množina funkčních symbolů
   - konstantní; Kons je množina konstantních symbolů
3. pomocné symboly, jako jsou závorky (,) a čárka ,

Syntaxe predikátové logiky

Poznámky

- Běžně se pracuje se spočetnou množinou proměnných Var $= \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Potom je jazyk predikátové logiky zadán svými speciálními symboly.
- Např. základní jazyk teorie přirozených čísel obsahuje symboly Pred $= \{<\}$, Func $= \{+, \cdot\}$, Kons $= \{0, 1\}$.
- Běžně se také místo konstantních symbolů mluví o funkčních symbolech arity 0.
- Budeme se zabývat *predikátovou logikou s rovností*. Bez rovnosti bychom museli předpokládat, že množina predikátových symbolů je neprázdná.

Syntaxe predikátové logiky

Termy

Množina termů je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Každý term vznikl konečným použitím pravidel 1 a 2.

Poznámka

Termy popisují objekty, včetně toho, jak objekty vznikly.
Pravidlo 3 zaručuje, že termy jsou konečně dlouhé.

Syntaxe predikátové logiky

Formule

Množina formulí je definována těmito pravidly:

1. Je-li P je predikátový symbol arity n a $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou termy, pak řetězec $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je formule, tzv. *atomická formule*. Také $t_1 = t_2$, kde t_1, t_2 jsou termy, je atomická formule.
2. Jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule, popř. také $\mathbb{ff}$, $\mathbb{tt}$, $(\varphi \mid \psi)$, $(\varphi \downarrow \psi)$, $(\varphi \oplus \psi)$ jsou formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x\, \varphi)$ a $(\exists x\, \varphi)$ jsou opět formule.
4. Každá formule vznikla konečným použitím pravidel 1, 2 a 3.

Syntaxe predikátové logiky

Relaxace z definice

- Nebudeme psát vnější závorky kolem formule.
- Nebudeme psát závorky kolem negované podformule ("negace váže silněji než ostatní spojky").
- Nebudeme psát závorky kolem kvantifikované podformule ("kvantifikátory váží silněji než spojky").
- Nebudeme psát závorky, pokud formule obsahuje pouze opakující se spojku $\wedge$ (resp. pouze $\vee$).

U atomické formule $t_1 = t_2$ jsme použili infixní zápis místo prefixního zápisu $=(t_1, t_2)$.
Běžnou relaxací je povolení infixního zápisu u symbolů pro binární relace a operace, např. $x + y$ je relaxovaný tvar termu $+(x, y)$.

Syntaxe predikátové logiky

Příklad

Jazyk:
Var $= \{x, y, z\}$
Pred $= \{P, S, L\}$, $\mathrm{ar}(P) = 2, \mathrm{ar}(S) = \mathrm{ar}(L) = 1$
Func $= \{f, g\}$, $\mathrm{ar}(f) = 1, \mathrm{ar}(g) = 2$
Kons $= \{a\}$

Termy: x, a, $f(a)$, $g(x, f(f(a)))$

Formule: $S(a)$, $P(x, f(a))$, $a = f(a)$,
$\exists x\, P(x, f(a))$, $\forall x\, S(a)$,
$\forall x\, P(x, f(x)) \vee S(x)$, což je $(\forall x\, P(x, f(x))) \vee S(x)$

Syntaxe predikátové logiky

Syntaktický strom formule

Syntaktický strom formule je definován analogicky jako ve výrokové logice, navíc je zde třeba říci:

- Je-li formule tvaru $\forall x\, \alpha$ (resp. $\exists x\, \alpha$), pak její syntaktický strom má v kořeni $\forall x$ (resp. $\exists x$) a jeho jediným následníkem je kořen podstromu pro α.
- Na místě listů pro atomické formule jsou stromy vystihující jejich strukturu a obsahující stromy pro termy.

Podformule

Podformule formule φ odpovídají podstromům syntaktického stromu pro φ, jež mají v kořeni nějaký vrchol, který není v podstromě termů, a obsahují všechny potomky tohoto vrcholu.

Syntaxe predikátové logiky

Volný a vázaný výskyt proměnné

Výskyt proměnné x ve formuli φ je *vázaný výskyt*, jestliže v syntaktickém stromě při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. V opačném případě mluvíme o *volném výskytu* proměnné x.

Proměnná je *volná* ve formuli φ, pokud v ní má alespoň jeden volný výskyt, a je *vázaná* ve formuli φ, pokud v ní má alespoň jeden vázaný výskyt.

Příklad

Proměnná x je ve formuli $\forall x\, P(x, f(x)) \vee S(x)$ volná i vázaná.

Syntaxe predikátové logiky

Legální přejmenování vázaných proměnných

O *legálním přejmenování vázané proměnné* x v podformuli $\forall x\, \alpha$, resp. $\exists x\, \alpha$ mluvíme, pokud

- přejmenujeme všechny výskyty proměnné x v podformuli α na jinou proměnnou (např. na y)
- žádná volná proměnná se tím nestala vázanou (tj. zde y neměla v α žádný volný výskyt)

Díky legálnímu přejmenování vázaných proměnných můžeme získat formule s "čistými proměnnými", tj. žádná proměnná v nich není volná i vázaná.

Syntaxe predikátové logiky

Rovnost formulí

Formule φ a ψ predikátové logiky jsou si rovny, pokud se coby řetězce znaků liší pouze legálním přejmenováním vázaných proměnných.

Příklad

Formule $\varphi = \forall x\, P(x, f(z)) \vee S(x)$ lze zapsat ve tvaru $\varphi = \forall y\, P(y, f(z)) \vee S(x)$, přičemž druhý zápis má čisté proměnné. Avšak formule $\psi = \forall z\, P(z, f(z)) \vee S(x)$ je jiná než φ, tj. $\varphi \neq \psi$, neboť toto přejmenování proměnných není legální.

Syntaxe predikátové logiky

Definice

Sentence (uzavřená formule), je formule, která nemá volné proměnné, tj. každá proměnná má všechny své výskyty ve formuli vázané. *Otevřená formule* je formule, která nemá vázané proměnné, tj. každá proměnná má všechny své výskyty ve formuli volné.

Příklad

Formule $\forall x\, S(x)$, $S(a)$ jsou sentence (v našem jazyce, kde a je konstantní symbol). Formule $S(x)$, $S(a)$ jsou otevřené formule. Formule $\forall x\, S(x) \vee S(y)$ není ani uzavřená, ani otevřená formule.

Sémantika predikátové logiky

Dříve než budeme moci mluvit o pravdivosti či nepravdivosti formulí v predikátové logice, musíme vědět, jak formule "přečíst". Musíme znát význam speciálních symbolů a vědět, jaké objekty dosazujeme za proměnné.
Navíc význam speciálních symbolů musí být pro naše objekty smysluplný, vše se musí odehrávat "ve stejném světě"(v jednom universu).

Sémantika predikátové logiky

Interpretace

Interpretace jazyka predikátové logiky s predikátovými symboly Pred, konstantními symboly Kons a funkčními symboly Func je dvojice $(U, [\![-]\!])$, kde

- U je neprázdná množina nazývaná universum
- $[\![-]\!]$ je přiřazení, které
  1. každému predikátovému symbolu $P \in \text{Pred}$ arity $n > 0$ přiřazuje podmnožinu U^n (tedy n–ární relaci), každému $P \in \text{Pred}$ arity 0 přiřazuje 0 nebo 1; značíme $[\![P]\!]$
  2. každému konstantnímu symbolu $a \in \text{Kons}$ přiřazuje prvek z U, značíme jej $[\![a]\!]$
  3. každému funkčnímu symbolu $f \in \text{Func}$ arity $n > 0$ přiřazuje zobrazení množiny U^n do U, značíme je $[\![f]\!]$

Sémantika predikátové logiky

Poznámky

- Predikáty arity jedna odpovídají vlastnostem, interpretovány jsou přesněji množinou prvků majících danou vlastnost. Predikáty arity dvě odpovídají vztahům, interpretovány jsou množinou všech dvojic jsoucích v daném vztahu.
- Na predikáty arity nula se můžeme dívat jako na nedělitelné výroky, kterým přiřazujeme v interpretaci pravdu (aneb 1) či nepravdu (aneb 0). Hrají tedy roli logických proměnných z výrokové logiky a jejich interpretace je pravdivostním ohodnocením logických proměnných. Výroková logika je takto částí predikátové logiky.

Sémantika predikátové logiky

Poznámky

- Je-li universum množina čísel, pak funkční symbol arity n interpretujeme funkce o n proměnných. Tato funkce ale musí být definována pro všechny n–tice z universa a její výsledek musí opět ležet v universu!
- Binární operace na číselných množinách jsou funkce dvou proměnných, budou se nám hodit k interpretování funkčních symbolů arity $n = 2$. Ovšem jako výše, operace musí být definována pro všechny dvojice z universa a její výsledek musí opět ležet v universu!

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Jazyk :	*Interpretace* :
$\mathrm{Var} = \{x, y, z\}$	$U = \mathbb{N}$
$\mathrm{Pred} = \{P, S, L\}$	
$\mathrm{ar}(P) = 2$	$[\![P]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m < n\}$
$\mathrm{ar}(S) = 1$	$[\![S]\!] = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ je sudé}\}$
$\mathrm{ar}(L) = 1$	$[\![L]\!] = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ je liché}\}$
$\mathrm{Func} = \{f, g\}$	
$\mathrm{ar}(f) = 1$	$[\![f]\!] : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$
$\mathrm{ar}(g) = 2$	$[\![g]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$
$\mathrm{Kons} = \{a\}$	$[\![a]\!] = 2$

Sémantika predikátové logiky

Příklad - pokračování

Zformalizujte v daném jazyce věty:

1. Následník dvojky není sudé číslo.
   $\neg S(f(a))$
2. Každé číslo je menší než jeho následník.
   $\forall x\, P(x, f(x))$
3. Každé liché číslo je menší než nějaké sudé číslo.
   $\forall x\, (L(x) \Rightarrow \exists y\, (S(y) \wedge P(x, y)))$

Sémantika predikátové logiky

Kontext proměnných

Je dána interpretace $(U, [\![-]\!])$ jazyka predikátové logiky. Kontext proměnných je zobrazení $\rho\colon \mathrm{Var} \to U$, které každé proměnné přiřadí objekt z universa.

Je-li ρ kontext proměnných, $x \in \mathrm{Var}$ a $d \in U$, pak update kontextu ρ o hodnotu d v proměnné x je kontext $\rho_{[x:=d]}\colon \mathrm{Var} \to U$, který se liší od kontextu ρ pouze tím, že proměnné x přiřazuje prvek d (výsledky na všech ostatních proměnných se shodují).

Sémantika predikátové logiky

Interpretace termů při daném kontextu proměnných

Pro danou interpretaci $(U, [\![-]\!])$ a daný kontext proměnných ρ *interpretujeme term* t jako prvek $[\![t]\!]_\rho \in U$ takto:

- Je-li term proměnná x, pak jeho hodnota je $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$.
- Je-li term konstantní symbol a, pak jeho hodnota je $[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$.
- Je-li term $f(t_1, \ldots, t_n)$, kde f je funkční symbol arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak jeho hodnota je $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho)$.

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Použijeme opět náš jazyk a interpretaci z předchozího příkladu (viz str. 21). Kontext proměnných ρ zvolíme $x := 0, y := 1, z := 2$.

Term	Interpretace termu při kontextu ρ
a	$[\![a]\!]_\rho = 2$
x	$[\![x]\!]_\rho = 0$
$g(a, x)$	$[\![g(a, x)]\!]_\rho = 2 + 0 = 2$
$f(f(a))$	$[\![f(f(a))]\!]_\rho = (2 + 1) + 1 = 4$

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v interpretaci při daném kontextu

Pojem *formule pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při kontextu ρ* definujeme induktivně podle struktury formule takto:

1) Pravdivost atomické formule (slovo *pravdivá* v následujícím textu znamená *pravdivá v interpretaci* $(U, [\![-]\!])$ *při kontextu* ρ):

- Formule $P(t_1, \dots, t_n)$, kde P je predikátový symbol arity $n > 0$ a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, je pravdivá, pokud $([\![t_1]\!]_\rho, \dots, [\![t_n]\!]_\rho) \in [\![P]\!]$.
- Formule P, kde P je predikátový symbol arity 0, je pravdivá, pokud $[\![P]\!] = 1$.
- Formule $t_1 = t_2$ je pravdivá, pokud $[\![t_1]\!]_\rho = [\![t_2]\!]_\rho$, aneb oba termy jsou interpretovány totožným prvkem z universa.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v interpretaci při daném kontextu

2) Pravdivost formule, která má v kořeni syntaktického stomu logickou spojku, je dána pravdivostí jejích podformulí v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při kontextu ρ a sémantikou logických spojek:

- $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
- $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
- $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
- $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.

Analogicky pro ostatní logické spojky.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v interpretaci při daném kontextu

3) Pravdivost formule, která má v kořeni syntaktického stromu kvantifikátor s proměnnou x je dána pravdivostí její podformule v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při updatech kontextu ρ v proměnné x a typem kvantifikátoru takto:

- Formule $\forall x\, \varphi$ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při kontextu ρ, pokud je (pod)formule φ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při *v každém* kontextu $\rho_{[x:=d]}$, kde d je prvek U.
- Formule $\exists x\, \varphi$ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při kontextu ρ, pokud je (pod)formule φ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při *v aspoň jednom* kontextu $\rho_{[x:=d]}$, kde d je prvek U.

Sémantika predikátové logiky

Příklad

V interpretaci v interpretaci $(U, [\![-]\!])$ při kontextu ρ z předchozího příkladu (kde $U = \mathbb{N}$, $[\![S]\!] = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ je sudé}\}$), $[\![a]\!] = 2$, $[\![f]\!](n) = n + 1$, a $\rho(x) = 0$) je pravdivost formulí následující:

- Formule $S(x)$ je pravdivá, neboť 0 je sudé číslo (přesněji 0 je v množině sudých čísel).
- Formule $S(f(a))$ není pravdivá, neboť term $f(a)$ je interpretován číslem $2 + 1 = 3$ a to není sudé.
- Formule $\forall x\, S(x)$ je nepravdivá, neboť všechna přirozená čísla nejsou sudá (přesněji podformule $S(x)$ je v naší interpretaci nepravdivá např. při kontextu $\rho_{[x:=7]}$, neboť 7 není sudé číslo).

Sémantika predikátové logiky

Poznámka

Všimněme si, že pravdivost formule φ v interpretaci závisí pouze na kontextu proměnných, které jsou ve formuli φ volné. Kontext ostatních proměnných můžeme měnit, aniž by to ovlivnilo pravdivost formule φ.

Speciálně pravdivost sentence nezávisí na kontextu proměnných vůbec, je určena pouze danou interpretací. Sentence je v dané interpretaci buď pravdivá v každém kontextu proměnných, anebo není pravdivá v žádném kontextu proměnných.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost sentence v interpretaci

Sentence φ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$, jestliže je pravdivá při každém kontextu proměnných ρ.

Poznámka

Mohli jsme také definovat takto: Sentence φ je pravdivá v interpretaci $(U, [\![-]\!])$, jestliže je pravdivá při aspoň jednom kontextu proměnných ρ. Definovali bychom tentýž pojem.

Definice

Interpretace $(U, [\![-]\!])$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá model sentence φ.

Sémantika predikátové logiky

Příklad

Formule $\varphi = \forall x\; x < x + 1$ je sentencí v jazyce s predikátovým symbolem $<$ arity 2, funkčním symbolem $+$ arity 2 a konstatním symbolem 1. Přitom x je proměnná a používáme infixní zápis.

1. Interpretace $U = \mathbb{N}$, $[\![<]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m < n\}$, $[\![1]\!] = 1$, $[\![+]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$ je modelem sentence φ.
2. Interpretace $U = \{0, 1\}$, $[\![<]\!] = \{(0, 1)\}$, $[\![1]\!] = 1$, $[\![+]\!] : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\} : (n, m) \mapsto \max(m, n)$ logický součet není modelem sentence φ.
3. Interpretace $U = \mathbb{N}$, $[\![<]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n\}$, $[\![1]\!] = 23$, $[\![+]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m \cdot n$ není modelem sentence φ (přirozená čísla uvažujeme včetně nuly).

Sémantika predikátové logiky

Poznámka

Interpretace č. 3 je sice podivná, ale je dovolená. Definice nám nepřikazuje, jak máme interpretovat speciální symboly. Pouze symbol rovnítka "="musíme interpretovat jako rovnost, protože to není speciální predikátový symbol, ale logický predikátový symbol.

Syntaxe a sémantika predikátové logiky

Literatura

- J. Velebil: Velmi jemný úvod do matematické logiky. Kapitola 3.1. ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01mlo/logika.pdf
- M. Demlová, B. Pondělíček: Matematická logika, ČVUT Praha, 1997. Kapitoly 11 a 12.