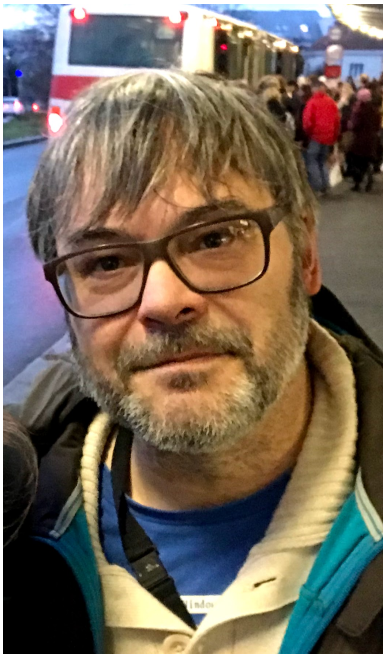
Témata

Podrobně, víc Velebilovsky

Motivace předmětu:




Lineární zobrazení

- zachovává přímky
- tedy F(x + y) = F(x) + F(y);
- F(a*x) = a*F(x);

Některá zajímavá zobrazení:

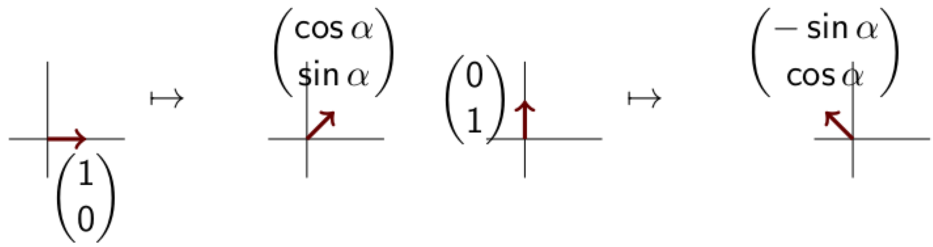
Projekce na osu x / y:

1 0	0 0
0 0	0 1

Zkosení:	Změna měřítka:
1 a	a 0
b 1	0 b

Rotace (o úhel α) je ztotožněna s maticí

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



atd :D

Vlastnosti lineárních zobrazení:

Monomorfismus: zobrazení je prosté (injektivní)

if F(x) = F(y) => x = y

- def(f)=0
- f respektuje lineární nezávislost (obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina)
- soustava Ax=o má pouze triviální řešení

Epimorfismus: zobrazení je na (surjektivní)

pro každé y existuje x takové, že y = F(x)

Isomorfismus: zobrazení je bijektivní (na + prosté)

Ker (jádro)

- množina vektorů, které dané zobrazení pošle na nulový vektor
- řešení: GEM, pak řešíme parametry a z nich nám vyjde ker (viz sešit) -- viz počítání soustav
- defekt : def = dim(ker)

Image (obrazy), im

- množina obrazů, tedy všech vektorů cílové množiny, jenž jsou fční hodnotou vektorů původní množiny zobrazení
- hodnost : rank = dim(im)

def + rank = dim(původní množiny)

Matice

- popisují lineární zobrazení
- každý sloupec říká, kam se zobrazí bázový vektor
- matice zobrazení z prostoru dim. s do prostoru dimenze r (r x s)
  - tedy počet sloupců = dimenze výchozího prostoru
  - počet řádků = dimenze cílového prostoru
- podobnost matic:
  - podobné, pokud jsou v jiné bázi
- diagonalisovatelnost matic

Operace:

- **sčítání** dvou matic: triviální : sčítáme po prvcích (musí mít stejné rozměry)
- **násobení matic skalárem** : triviální : násobíme každý prvek
- **násobení matic vektorem** = aplikování zobrazení
- **násobení dvou matic** = F.L = *"F, poté co jsem udělal L"*
  - **řetězení zobrazení**
  - počet sloupců první matice musí být stejný jako počet řádků druhé matice
    - protože dimenze prostoru cílového druhé matice musí být stejná jako dimenze prostoru výchozího matice první, jinak by jejich spojení nedávalo smysl
    - pozn. F.L je F(L) - jdeme zprava doleva
  - obecně nekomutují

Speciální druhy matic:

Čtvercová

- nXn
- nemění dimenzi prostoru

Regulární (invertibilní)

- čtvercová
- **det != 0**
- matice isomorfismu
- řádky i sloupce jsou lineárně nezávislé
- hodnost nXn = n => defekt = 0
- existuje inverze

- vlastní čísla jsou nenulová

Singulární

- **det == 0**
- sloupce, řádky jsou lin. záv.
- hodnost (rank) matice nXn je < n
- neexistuje k ní inverze

Inverzní

- nechť A je **regulární** matice
- pak **A^{-1} .A = jednotková matice**
- K čemu je?
    - řešení mnoha úloh, rovnic atd.
    - Jak ji najít?
    - **Gauss-Jordan eliminací**
        - na jedné straně máme původní matici, na druhé jednotkovou
        - postupně upravujeme tak, abychom z původní matice vyrobili jednotkovou
        - když se nám to podaří, na straně původní jednotkové matice bude matice inverzní
    - pomocí adjungované matice
        - **$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \mathrm{adj}(A)$**

Transponovaná matice

- má přehozené sloupce a řádky
- rank transponované = rank původní
- matice A r x s pak transponovaná má rozměry s x r

Symetrická matice

- nXn, regulární
- taková, že transponovaná matice == matici původní (je osově souměrná podél diagonály)
- v R^n má pouze reálné vlastní hodnoty a je diagonalisovatelná - viz Věta o hlavních osách
- její vlastní vektory tvoří “hezkou” bázi
- **důležité:** vynásobením jakékoliv reálné matice svou transpozicí zaručeně získáme matici symetrickou
- pro n ze Z je symetrická matice na ntou stále symetrická
- součet a rozdíl dvou libovolných symetrických matic je také symetrická matice
- A,B, jsou sym. pak AB je sym iff A,B komutují

Adjungovaná matice

- Pro matici A typu n × n je její adjungovaná matice adj(A) **transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici A**.
    - $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot E_n = adj(A) \cdot A \rightarrow$ $\mathbf{A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot adj(A)}$. - viz inverzní matice

Diagonální matice

- kromě diagonály všude musí být nuly
- viz [diagonalisace]

Ortogonální matice

- Matice nXn, jejíž sloupce i řádky jsou **ortonormální vektory** (navzájem kolmé a jednotkové)
- její **transpozice == její inversi**
- její determinant == buď +1 nebo -1
- **zachovává úhly**

Idempotentní matice

- byla na nějakém termínu zkoušky :D
- musí být nXn
- matice, pro kterou platí: A.A = A
- aby mohla být idempotentní, tak buď musí být diagonální, nebo musí mít součet prvků na hlavní diagonále == 1
- **HLAVNĚ:** matice je idempotentní právě tehdy, když je **podobná diagonální matici**, která má na **diagonále pouze jedničky a nuly**
- kromě identity jsou všechny **singulární**

Kdy matice komutují? (AB = BA)

Obecně (postačující, nikoliv nutná podmínka):

Obě matice mají stejné rozměry nXn a jsou diagonalisovatelné (viz [diagonalisace])

Dále:

Jednotková matice komutuje s každou maticí.

Báze

Lineárně nezávislá množina generátorů. Můžeme pomocí lineárních kombinací vektorů báze popsat libovolný bod v tělese, které je bází určeno.

Základní báze: **kanonická -** její vektory jsou sloupce jednotkové matice

Převod mezi bázemi

Hledáme matici B v koordinantách nové báze *B* zobrazení M, které je v kanonické bázi

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$$

Pozn. sousled operací:

- jede se zprava doleva - jak jinak :D
- co požadujeme po matici B?
    - vezme vektor zadaný pomocí báze *B* a převede jej na jiný vektor v bázi *B*
- chceme napasovat na zobrazení M v kanonické = >
    - nejprve převedeme vektor do kanonické báze
    - pak jej proženeme M
    - nakonec jej musíme vrátit v pořádku v bázi *B*
- tento sousled operací stvoří matici B

Pozn. inverze:

- T z *B* do K2 je triviální - vezmeme vektory báze *B*
- pro opačný směr nám stačí určit inverzi této matice

Obecně:

chceme transformaci z báze B do báze C
= T B->C . M . T C->B
Můžeme převést přes kanonickou bázi:
T C->B = T K->B . T C->K

Každá regulární matice může být maticí změny souřadnic.

Soustavy rovnic

GEM - no comment - pivoti a tak
Horní blokový tvar

1. každý nenulový řádek matice je nad řádky samých nul
2. pivot každého řádku je napravo od pivota řádku vyššího

Frobeniova věta

Soustava má řešení právě tehdy, když hodnost rozšířené matice soustavy == hodnosti matice levé strany.
Tzn.: někde nám nalevo vyjdou samé nuly a napravo nenulové číslo => pomocí nul se do něj nikdy nedostaneme

Možné výsledky:

1. počet pivotů == počtu sloupců
   -> výsledek je jeden konkrétní bod
2. homogenní + partikulární řešení

   Homogenní řešení:
   - span vektorů jádra, tedy místo pravé strany máme nuly
   - kolik vektorů?
     - tolik, kolik chybí pivotů
   - podíváme se, ve kterých sloupcích jsou pivoti - tyto jsou pevně určené
   - kde nejsou: volíme - musí být lineárně nezávislé
     - pokud jeden - volíme 1
     - pokud víc - v prvním vektoru 1 na prvním místě, v druhém na druhém atp. => dosazujeme jednotkovou matici
   - pak dopočítáváme zbytek

   Partikulární řešení:
   - posun homogenního řešení => [afinní podprostor]
   - za proměnné bez pivotů zvolíme 0, zbytek dopočítáme

Po skončení GEM $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ jsou pivoty na čtvrté, druhé a první posici. Tyto položky v řešení budeme dopočítávat, třetí položku řešení budeme volit.

Řešení je: $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Zkrácený zápis: $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Řešením soustavy je přímka v $\mathbb{R}^4$.

Počítání naopak

(máme výsledek, a potřebujeme na něj naroubovat soustavu)

- řešení ve tvaru: partik. + span(vektorů)

Hledání **matice soustavy A:**

- vezmeme vektory spanu a dáme je do jedné matice, kterou transponujeme
- s touto maticí řešíme homogenní soustavu
- => vektory, které jsou jejím řešením, jsou řádky naší hledané matice soustavy

Pravá strana soustavy **b**:

- víme: A.partik. = b

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\\2\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

1. Označme $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, potom $\mathbf{X}^T=\begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\1&2&0&1&0\\-1&2&0&0&1\end{pmatrix}$. Platí $3=\operatorname{rank}(\mathbf{X})=\operatorname{rank}(\mathbf{X}^T)$.

2. Matice $\mathbf{A}$ má jako řádky fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{a}=\mathbf{o}$. Protože $\operatorname{rank}(\mathbf{X}^T)=3$, bude mít matice $\mathbf{A}$ dva lineárně nezávislé řádky.

3. Fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{a}=\mathbf{o}$, neboli homogenní soustavy $\left(\begin{array}{rrrrr|r}2&1&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\-1&2&0&0&1&0\end{array}\right)$, je například $\begin{pmatrix}-1/2\\-1/4\\5/4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/4\\-3/4\\0\\1\end{pmatrix}$.

Užitečný trik:[a] proto je i $4\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\-1/4\\5/4\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\\4\\0\end{pmatrix}$, $4\cdot\begin{pmatrix}1/2\\-1/4\\-3/4\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\0\\4\end{pmatrix}$ fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{a}=\mathbf{o}$.

Můžeme tedy psát: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&5&4&0\\2&-1&-3&0&4\end{pmatrix}$.

4. Dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Tudíž $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Odpověď: 3-dimensionální afinní podprostor v $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

je řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$ nad $\mathbb{R}$.

Použití: převod parametrického vyjádření afinního prostoru do vyj. rovnicového

Soustavy s parametrem

Máme-li **čtvercovou matici:**

- spočítáme determinant
- určíme, kdy se determinant **rovná nule**
    - **singulární** => řešení bude ve formě part. + hom
    - řešíme pro každou hodnotu
    - !!! může se klidně stát, že řešení nebude existovat
- když se determinant **nerovná nule** (ostatní případy)
    - **regulární** => jediné řešení
    - počítáme pomocí [Cramerovy věty]
    - položky vektoru řešení budou mnohočleny s parametrem

Determinanty

DEF:

*Pro matici A typu **n × n** nad F definujeme determinant jako skalár*

$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$

- sign π - znaménko permutace
    - šachová interpretace: vybíráme políčka z determinantu, aby se na nich umístěné věže neohrožovaly a vezmeme součet těch rozestavění
- determinant určuje orientovaný n-dimensionální objem rovnoběžnostěnu určeného danými vektory
- **orientovaný**:
    - má znaménko
    - - značí prohození os (každé prohození dvou os změní znaménko)
        - pozn. prohodíme-li osy n-krát, pak:
            - n je sudé => kladné znaménko
            - n je liché => záporné
- **další vlastnosti:**
    - $\det(A)=\det(A^T)$
    - $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$
    - pro regulární A je $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
    - $\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det(A)$, kde a je libovolný skalár

Výpočet determinantu

GEM

Snažíme se dostat matici do **horního trojúhelníkovitého tvaru** = pod diagonálou samé nuly.

Důvod?

Determinant pak vypočítáme součinem prvků na diagonále

Pozor na:

Záměny řádků či sloupců - mění znaménko, viz výše

Násobení řádků skalárem a - determinant změníme **a-krát** (korekce: 1/a . det)

Naopak **přičítání násobků řádků nic nemění.**

Výpočet z definice

Nepěkné zvířátko. Rychle rostoucí náročnost (říkal ten pán v modrém županu).

Pro 2x2 v poho!

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc$$

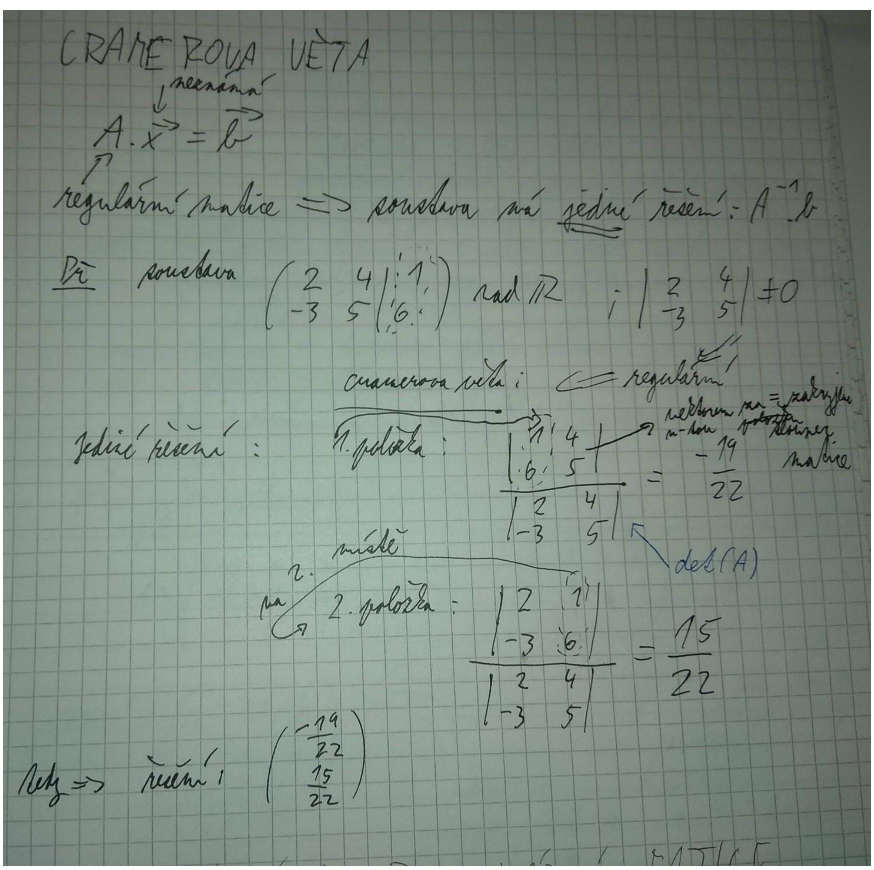
Determinant of 2x2 matrix

Pomocí rozvoje podle sloupce (řádku)

Vyplatí se u řídkých matic - mají hodně nul

1. Vybereme řádek, nebo sloupec se spoustou nul (S)
2. for s in S:
    a. vyškrtáme řádek a sloupec, v kterém je
    b. vynásobíme determinant vzniklé matice s
    c. vynásobíme znaménkem: (-1)^(i + j) -- i, j jsou pozice s v matici

Cramerova věta



Vlastní vektory, čísla, prostory

Vlastní vektor

eng: eigenvector (eigen - z německého vlastní)
Takový vektor, který zobrazení s **regulární maticí** zobrazí na span sebe sama.
f(u) = λ.u tedy **Au = λ.u**
λ -- **vlastní číslo**

Vlastní podprostor

Množina všech vlastních vektorů příslušných **stejnému vlastnímu číslu λ.**
Tzn. všechny vektory, které zobrazení zobrazí na stejný násobek vlastního čísla.
Značení: eigen(λ, f)

Charakteristická rovnice: **det(A - λE) = 0**
E - jednotková matice
Nalezneme přes ni vlastní vektory.
př:
Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice má tvar:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Tedy:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

Vlastní vektor u1 příslušný vlastní hodnotě λ získáme řešením soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ 2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & -1 \\ 2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podobnost matic

DEF:

Matice A, B typu **n×n** jsou si podobné (**A≈B**), pokud B=T^(-1)·A·T pro nějakou regulární matici T

=> jedná se o matice **stejného zobrazení, ale v jiné bázi**

Musí platit:

1. stejný determinant
2. stejný char. polynom ⇔ stejné vlast. čísla stejných násobností
3. vlastní prostory vlastních čísel musí mít stejnou dimenzi

Jestliže **A ≈ B,** potom **charA(x) = charB(x)** (pozor - naopak to neplatí)

Diagonalisovatelnost matic

Diagonální tvar matice

= na diagonále libovolná čísla, všude jinde nuly

Problém diagonalisovatelnosti:
Pro matici A typu n × n nad F chceme rozhodnout, zda A ≈ D,
kde D je **diagonální** matice

Motivace:
V diagonálním tvaru se s maticí lépe pracuje.

A je diagonalisovatelná, iff:

- charA(x) lze v $\mathbb{F}$ rozložit na součin a platí: **násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu je rovna dimensi eigenprostoru**
  - algebraická násobnost = geometrická násobnost
  - *jde to, když umím najít dost kořenů a vystačí mi to na bázi*
  - *také by se dalo říct, že součet násobností musí být roven stupni matice (stupeň je n z nXn)*

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ splňují:

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.
2. Protože $\dim(\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2$ a $\dim(\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A})) = 1$, platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
3. Protože $\dim(\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})) = 1$ a $\dim(\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$, neplatí $\mathbf{B} \approx \mathbf{D}$ pro žádnou diagonální matici $\mathbf{D}$.

Ukázali jsme (mimo jiné): $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$, přestože $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x)$.

Pozn:

- *regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou pouze dvou typů:*
  - *změny měřítka*
  - *rotace následované změnou měřítka stejnou na obou souřadnicových osách*

Proces diagonalisace

Matice A je v kanonické bázi.

1. Zjistíme vlastní čísla a příslušné vlastní vektory
2. vlastní vektory zapíšeme do sloupců matice P
3. pomocí této matice můžeme diagonalisovat
4. P^(-1).A.P (viz Převod mezi bázemi)

Mocniny diagonální a diagonalisovatelné matice

Mocnění **diagonální matice -** pouze děláme **mocniny čísel na diagonále.**
Pro diagonalisovatelnou matici: **A^k** = P^(-1).**D^(k)**.P -- D je diagonální matice

Jordanův tvar

Pozn.
Odsuď: žádné důkazy, neumíme hledat Jordanovu bázi. Pouze návody, jak hledat Jordanův tvar.

-- Ach jo...

Direktní rozklad

Mějme matici. Pokud rozdělíme vektory ze sloupců do dvou skupin tak,
že span(skupina1) V span(skupina2) = původní zobrazení
a span(skupina1) ∩ span(skupina2) = {nul.vektor} pak se jedná o direktní rozklad.
Neboli:
prostor se dá rozsekat na invariantní podprostory na dané zobrazení, značíme: $\oplus$

- *diagonální matice už rozsekaná je po eigenprostorech*

Příklad (direktní rozklad rotace v rovině xy)

Pro

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

je

1. $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \vee \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cap \mathrm{span}(\mathbf{e}_3) = \{\mathbf{o}\}$. Tento fakt budeme značit $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \oplus \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a budeme mluvit o direktním rozkladu $\mathbb{R}^3$ na $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$.
2. Direktně rozložit lze i celé lineární zobrazení:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \oplus (1)$$

protože podprostory $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ jsou invariantní na dané zobrazení.

Invariantní podprostor

Nechť A : L → L je lineární transformace. Podprostor P ⊂ L, pro který platí **A(P) = P** nazýváme invariantní podprostor vzhledem k A.

Příkladem invariantních podprostorů jsou právě vlastní podprostory

Příklad (diagonalisovatelná matice a direktní rozklad)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je diagonalisovatelná matice:
$D(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$.
Potom pro $W_i = \mathrm{span}(\mathbf{t}_i)$ platí:

1.
   1. $\mathbb{F}^n = W_1 \vee \ldots \vee W_n$,
   2. $W_i \cap \bigvee_{j \neq i} W_j = \{\mathbf{o}\}$ pro všechna i.

   Tato dvě fakta budeme značit $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ a budeme říkat, že $W_1, \ldots, W_n$ tvoří direktní rozklad prostoru $\mathbb{F}^n$.
2. Pro každé $\mathbf{x}$ z W_i je $\mathbf{Ax}$ opět z W_i. To jest: každé W_i je $\mathbf{A}$-invariantní podprostor prostoru $\mathbb{F}^n$.
   Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_n$.

Nilpotentní zobrazení (alias prcek)
Lineárnímu zobrazení f : L → L, pro které existuje **k** tak, že f^k = o, říkáme **nilpotentní**. **Nejmenšímu** takovému k říkáme **index nilpotence** a značíme jej **nil(f)**.

“Fyzik by v tomto momentě prohlásil: ‘Zanedbáme!’ ” -- Matěj Dostál

Pozn.

Pro M≈N: M nilpotentní iff N nilpotentní, nil(N)=nil(M).

Příklad (řetězce nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, platí $\mathrm{nil}(\mathbf{N}) = 3$.
Pojďme „stopovat" cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{o}$$

Všechny čtyři bázové vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice $\mathbf{N}$ je nilpotentní. Navíc $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj. $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

Jordanova buňka

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme Jordanova buňka.[a]

[a] Buňka v této definici má rozměry $n \times n$.

- každá Jordanova buňka je nilpotentní matice
- index nilpotence k == n

Jordanova báze

Ať f: L→L je lineární zobrazení. Seznamu $f^{k-1}(v), f^{k-2}(v), \dots, f^1(v), f^0(v))$, kde $f^k(v) = o$, říkáme f-řetězec délky k vytvořený vektorem v.

DEF:

Ať n: L→L je nilpotentní linární zobrazení, dim(L)=n. Potom existuje báze $B=(b_1,\dots,b_n)$ prostoru L, která vznikla zřetězením n-řetězců. Počet a délka n-řetězců v bázi B jsou určeny jednoznačně. Bázi B říkáme Jordanova báze.

Nalezení Jordanova tvaru nilpotentní matice $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

1. Označíme jako $k = \operatorname{nil}(\mathbf{N})$.
2. Označíme
$$d_i = \operatorname{def}(\mathbf{N}^i)$$
pro $i = 0, \ldots, k+1$. Poznamenejme, že $d_{k+1} = d_k$.
3. Počet Jordanových buněk rozměrů $i \times i$ je roven číslu
$$2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$$
pro $i = 1, \ldots, k$.
4. Jordanův tvar napíšeme jako blokově diagonální matici, která má na hlavní diagonále Jordanovy buňky.

Příklad

Matice
$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
nad $\mathbb{R}$ je nilpotentní.[a] Najdeme její Jordanův tvar.
Protože $\operatorname{def}(\mathbf{N}) = 3$, bude Jordanův tvar obsahovat tři Jordanovy buňky. Utvoříme si tabulku

i	$d_i = \operatorname{def}(\mathbf{N}^i)$	počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$
0	0	—
1	3	2
2	4	0
3	5	1
4	5	—

[a]Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{N}^3 = \mathbf{O}_{5,5}$.

Tudíž Jordanův tvar matice **N** má jednu buňku rozměrů 3×3 a dvě buňky rozměrů 1×1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hledání Jordanova tvaru matice

Nalezení Jordanova tvaru matice M : $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

1. Spočteme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice **M**.
   1. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ nelze v $\mathbb{F}[x]$ rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice **M** neexistuje.
   2. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice **M** existuje a my postupujeme podle dalších bodů.
2. Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Segment $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
3. Nalezení i-tého segmentu $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$:
   1. Utvoříme nilpotentní matici $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$. a nalezneme její Jordanův tvar $\mathbf{N}_i$ metodami minulé přednášky.
   2. Platí $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$.
4. Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice **M** jakožto blokově diagonální matici.

Skalární součin

DEF

Ať L je lineární skalární prostor nad ℝ. Funkci <--|--> : L x L → ℝ říkáme skalární součin, pokud platí následující, pro libovolné x, y:

- komutativita: <x | y> = <y | x>
- linearita v druhé souřadnici: zobrazení <x | **--**>: L→ ℝ je lineární
- positivní definitnost: <x | x> ≥ 0, <x | x>=0 iff x=**o** (určité zobecnění positivity)

Slogan: skalární součin je míra odchylky dvou vektorů.

Standartní skalární součin: $\langle x \mid y \rangle = (x_1, x_2, ..x_n).\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$

Kolmost

Pokud **<x | y> = 0**, mluvíme o ortogonálních (kolmých) vektorech.

Pozn.

- **nulový vektor** je kolmý na všechny vektory, protože sk. součin je lineární v druhé souřadnici a musí poslat nulu na nulu
    - naopak: když je x kolmý na každý vektor, musí jít o nulový vektor

Norma (velikost) vektoru:

||x||=sqrt(<x | x>)

Vlastnosti:

- ||**x**||>=0, ||**x**||=0 iff **x**=**o**
- ||a·**x**||=|a|·||**x**||
- IIx+y||<= ||x||+||y|| (trojúhelníková nerovnost)

Další vzorec pro skal. součin:

<x | y> = ||x||·||y||·cosϕ

Nerovnost **Cauchy-Schwarz-Bunyakovski** (C-S-B) (TA nerovnost)

<x | y> ≤ ||x||·||y||

Metrika, distance (Vzdálenost dvou vektorů)

d: L×L→ ℝ: d(x,y)=||x-y||

- d(x,y)>=0, rovnost nastává, když x=y
- d(x,y)=d(y,x)
- d(x,y)<=d(x,z)+d(z,y)

Pro lineární prostory platí: **skalární součin => norma => metrika**.

Nestandartní skalární součiny

Dívají se na svět očima "jiné matice".

1. Standardní skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2. „Nezvyklý“ skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Tyto matice musejí být **positivně definitní.**

Positivně definitní matice

Řekneme, že matice **G** typu **n×n** nad $\mathbb{R}$ je positivně definitní, když existuje matice **R** s **lineárně nezávislými** sloupci tak, že $\mathbf{G = R^T \cdot R}$

- každá positivně definitní matice G je **symetrická**
- *matice R je v určitém smyslu druhá odmocnina z G*
- G je symetrická a determinanty všech podmatic jsou kladné
- G je symetrická a nerovnost $x^T \cdot G \cdot x >= 0$ platí pro všechna x z $\mathbb{R}^n$ (rovnost platí pouze pro x=o)
- G je symetrická a $char_G(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné

Ať G je positivně definitní matice typu n×n nad $\mathbb{R}$ Potom maticový součin $x^T \cdot G \cdot y$ definuje skalární součin v $\mathbb{R}^n$

- Každý skalární součin v $\mathbb{R}^n$ definuje positivně definitní matici $G = (g_{ij})_{i=1,\dots,n,=“1,\dots,n}$, kde $g_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle$
- matici G říkáme **metrický tensor** skalárního součinu (také **Gramova matice**)

Ortogonalisace, ortonormalisace

Ortogonální množina vektorů

Množina vektorů, které jsou **na sebe navzájem kolmé**, tedy < x | y > = 0 pro jakékoli různé vektory x , y z M.

- je vždy **lineárně nezávislá**
- jestliže dim(L) = n, pak největší ortogonální množina v L bude mít právě n vektorů
- => ortogonální báze - ortogonální množina tvořící bázi L
- každou bázi lze normalizovat

Ortonormální báze

DEF:

Báze, jejíž prvky jsou **normované** (tedy **jednotkové**) a navzájem na sebe **kolmé.**

Pro každou uspořádanou bázi R^n existuje právě jeden skalární součin takový, že je z jeho pohledu báze ortonormální.

Metrický tensor G = $(B^{-1})^T B^{-1}$

-- takto jsme schopni nalézt onen skalární součin

Kanonická báze (e1 , . . . , en) prostoru R n je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Pěkné vlastnosti ortonormálních bází

Počítání souřadnic:
B je ortonormální báze.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i, \text{ čili } \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n \mid \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$$

Další důsledek:
Skalární součin v ortonormálních bázích se **počítá stejně jako standartní skalární součin.**
Tzn. metrický tensor je jednotková matice v coordB.

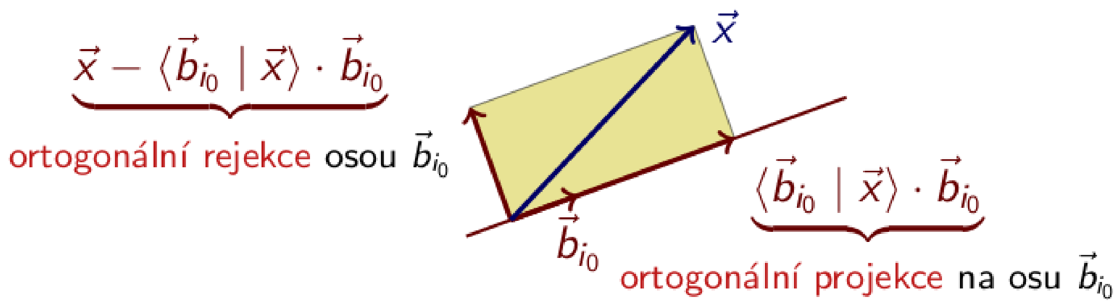
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle$$

Počítání úhlu vektoru k souřadnicím:

$$\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}$$

Rejekce a projekce

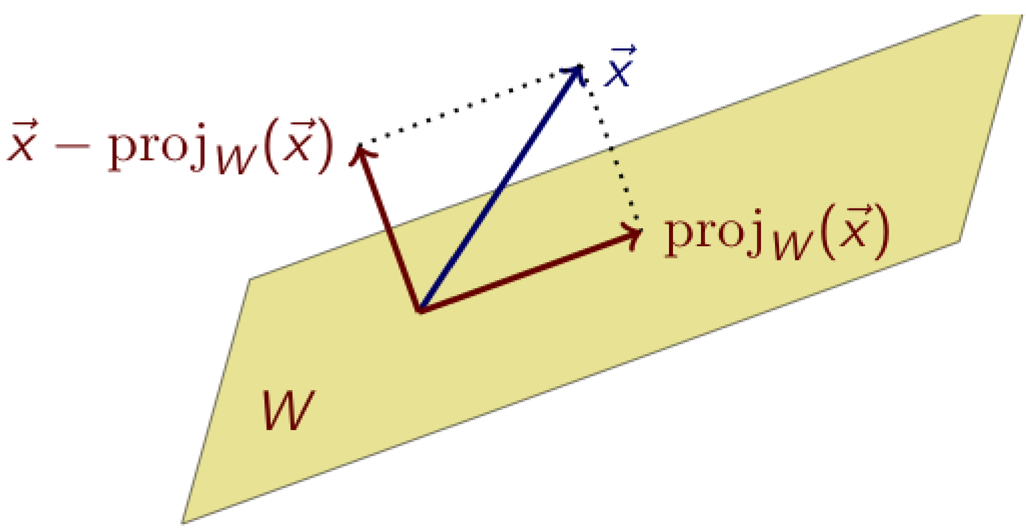
Projekce = promítnutí na osu
Rejekce = odmítnutí osou (kolmice na osu)
Dohromady **ortogonální rozklad vektoru**.
Pro ortonormální bázi:



Ortogonální rejekce je “nejkratší” ze všech rejekcí (dk. z Pythagorovy věty)

Zobecnění pro podprostor:
Projekce na podprostor s **ortogonální bází**, kde M={u1,...,un} a W=span(M)

$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{u}_i \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i \mid \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$



Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt)

Každou bázi B prostoru se skalárním součinem lze převést na ortogonální bázi C.

Proces definujeme rekursivně:
(0) c1 = b1
(1)

Tedy první vektor vezmeme z původní báze, a pak postupně počítáme rejekce dalších vektorů z původní báze od vektorů, které již máme.

Pozn.: Skalární násobek samozřejmě nemění ortogonalitu, můžeme se tedy ve výpočtech

zbavovat zlomků.

Ortonormalisační proces:
Znormujeme vektory ortogonální báze tak, že je podělíme svou **normou**.

Projekce v R^n aneb *šílený vzoreček*

Pozn. dá se udělat i Gram-Schmidtem - ortogonalisovat a pak spočítat projekci.

Máme prostor R^n se skalárním součinem zadaným metrickým tensorem G. Vektory a1 až an tvoří jeho bázi, která má příslušnou matici A. Pak:

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

Pokud G je jednotková matice pak je jednodušší :D :

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x},$$

SVD rozklad a pseudoinverse

Pozn. **Zkouška** -- výpočty prý náročné (časově), u zkoušky se může objevit **jen teorie**

Věta o hlavních osách pro standartní skalární součin

Pro každou **symetrickou reálnou matici A**: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existuje **ortonormální báze** $\mathbb{R}^n$ složená z **vlastních vektorů** matice A. Navíc matice A má **pouze reálné vlastní hodnoty**.

- **A** vlastně zobrazuje jednotkovou kouli na (degenerovaný) elipsoid

Důsledek — SVD rozklad matice pro stand. skalární součin

Libovolnou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{USV}^T$, kde

1. $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ a $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ jsou ortogonální, tj. $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ a $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$.
2. $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ má na hlavní diagonále kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h$ (tzv. singulární hodnoty matice $\mathbf{M}$), kde $h = \operatorname{rank}(\mathbf{M})$. Všude jinde má matice $\mathbf{S}$ nuly.

Myšlenka důkazu.

1. Matice $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ je symetrická. Její vlastní hodnoty jsou nezáporné. Seřaďte je: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_s \geq 0$. Označte příslušnou ortonormální bázi jako $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$.
2. Definujte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_s = \sqrt{\lambda_s}$. Vyberte nenulová σ_i: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h > 0$ a definujte $\mathbf{u}_i = \mathbf{M}\mathbf{v}_i / \sigma_i$ pro $i = 1, \ldots, h$ a doplňte na ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$. ■

Asi se spíš vyplatí říct, k čemu to je a víc se tím nezabývat :D

- dá se jeho pomocí aproximovat matice
- používá se např. ke kompresi obrázků (obrázek je vlastně matice)
  - vynechají se některá spektra pro lidské oko málo rozpoznatelná => úspora dat při relativním uchování kvality

Pseudoinverse

Zobecnění pojmu inversní matice pro matice, kde čistá inverse neexistuje.

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ je matice. Potom existuje nanejvýš jedna matice $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, která splňuje následující čtyři podmínky[a]

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}, \quad (\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+$$

Dá se najít pomocí SVD rozkladu.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Afinní podprostor

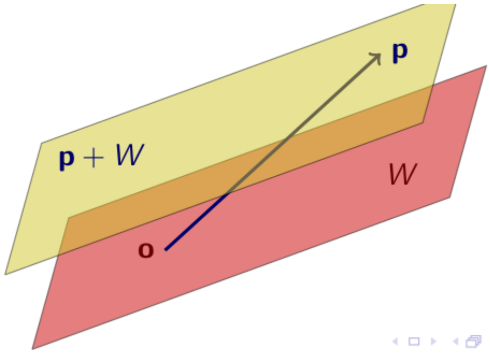
Množina **p + W**

W je podprostor prostoru R^n, také **směr afinního podprostoru**

p je bod R^n - značí posunutí podprostoru

Dimenze af. podpr. == dim(W)

Pozn.: dim0 - body, dim1 - přímky, dim2 - roviny



Mějme afinní podprostory π=p+W a π'=p'+W' v ℝ^n. Řekneme, že:

- π a π' jsou **rovnoběžné**, pokud W ⊆ W' nebo W' ⊆ W
- π a π' jsou **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň **jeden společný bod**
- π a π' jsou **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a nemají **žádný společný bod**
- dimensi W∩W' říkáme **stupeň rovnoběžnosti** π a π'
    - tedy čím větší dimense, tím větší stupeň
    - když stupeň == dim π i dim π' pak jsou jejich směry stejné

Charakterisace **rovnoběžných disjunktních** afinních podprostorů

- π a π' jsou **disjunktní**
- pro jakýkoliv vektor x v π a x' v π' vektor x-x' neleží ve W
- **vektor p-p' neleží ve W**
- existuje vektor x v π a vektor x' v π' tak, že vektor x-x' neleží ve W

Charakterisace **různoběžných** afinních podprostorů

- π a π' jsou různoběžné
- pro jakýkoliv vektor x v π a x' v π' vektor x-x' leží ve W v W'
- **vektor p-p' leží ve W v W'**
- existuje vektor x v π a vektor x' v π' tak, že vektor x-x' leží ve W v W'

Charakterisace **mimoběžných** afinních podprostorů

- π a π' jsou **mimoběžné**
- **vektor p-p' neleží ve W v W'**

Dvě možnosti zápisu afinních podprostorů

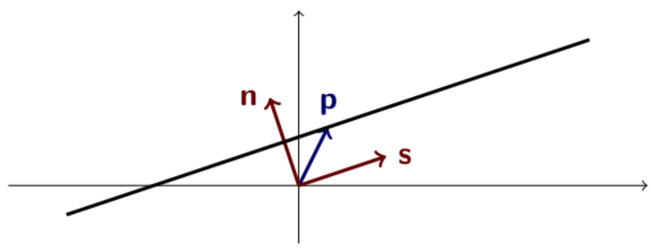
Příklad (dva různé zápisy jedné přímky)

Dva zápisy téže přímky v $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}_{\text{parametrický zápis}} \qquad \underbrace{-x + 3y = 5}_{\text{rovnicový zápis}}$$

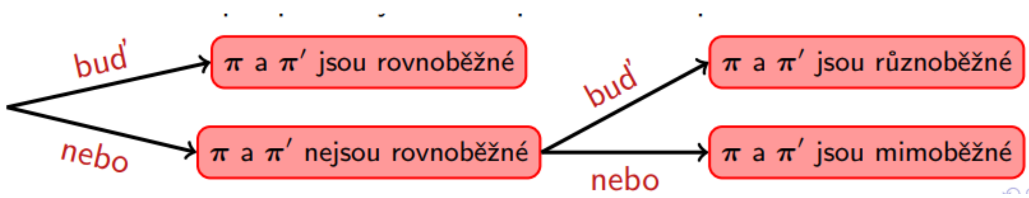
Oba typy zápisu jsme již potkali při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (-1\ 3 \mid 5)$$



Získáváme informace o směrovém vektoru a normálovém vektoru.

Řešení polohy dvou afinních prostorů - kuchařka



Postupujeme podle tohoto diagramu.

Uvažujme dva afinní podprostory: **π=p+W** a **π'=p'+W'** v ℝ**^n**

- **rozhodování o rovnoběžnosti**
  - řešíme **dvě simultánní soustavy:**
    - (**W|W'**)
    - (**W'|W**)
    - *pozn. W a W' nalevo jsou matice sestavené z vektorů směrů*
  - pokud **ani jedna** z nich **nemá řešení** -> podprostory **nejsou rovnoběžné** a postupujeme dále (jinak jsou a máme padla)
- **rozhodování o různoběžnosti / mimoběžnosti**
  - řešíme **soustavu:**
    - **(WW' | p-p')** (tedy na levé straně je matice sestavená z vektorů směrů obou podprostorů)
    - pozn. touto soustavou můžeme vyřešit i **disjunktnost rovnoběžek**

            (nemá řešení => disjunktní)
        - pokud bychom soustavu řešili dále (pro **různoběžné** případy), získali bychom **průsečík**
    - řešení **existuje => různoběžné**
    - řešení **neexistuje => mimoběžné**

Gramova matice a Gramův determinant

Matice A: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(a_1,...,a_k)$, kde **k<=n**

Pak:

Gramova matice

$A^T \cdot A$: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

Je v určitém smyslu druhou mocninou A

Gramova matice **seznamu vektorů** $(a_1,...,a_k)$

V j-tém sloupci a i-tém řádku je hodnota standardního skalárního součinu $\langle a_i \mid a_j \rangle = a_i^T a_j$

Gramův determinant Gram($a_1,...,a_k$)

Je to determinant příslušné Gramovy matice

Vlastnosti:

- $Gram(a_1,...,a_k) >= 0$
- $Gram(a_1,...,a_k) >= 0$ iff $(a_1,...,a_k)$ je lin. nez.

Určování neorientovaného objemu k-dimensionálního rovnoběžnostěnu

Jsme v prostoru F^n, rovnoběžnostěn je určen seznamem $(a_1,...,a_k)$:

- pokud **k == n**:
    - pak můžeme použít **determinantu** $(a_1,...,a_k)$
- **k < n**:
    - matice ze seznamu vektorů by nebyla čtvercová -> determinant není definován
    - **V = sqrt(Gram($a_1,...,a_k$))**

Vektorový součin ×

DEF:

$\langle \times(x_1,..., x_{n-1}) \mid x \rangle = \det(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ pro všechna x z $\mathbb{R}^n$

$\times(x_1,..., x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \times(x_1,..., x_{n-1}) \mid e_j \rangle e_j = \sum_{i=1}^{n} \det((x_1,..., x_{n-1}, e_i) \cdot e_i$

neboli, mnemotechnická pomůcka:

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

rozvineme podle sloupce s vektory jednotkové matice

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & 4 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_3 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot \mathbf{e}_1$$
$$-2 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 - (-1) \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_3 - 4 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 3$$
$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^4$)

$$\times\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti vektorového součinu (plynou z vlastností determinantu a definice vektorového součinu)

- funkce $(x_1,\dots, x_{n-1}) \to \times(x_1,\dots, x_{n-1})$ je **lineární v každé položce**
- $\times(x_{\pi(1)},\dots, x_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi)\cdot\times(x_1,\dots, x_{n-1})$ pro $\pi \in S_{n-1}$
- $\times(e_{\pi(1)},\dots, e_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi)\cdot e_{\pi(n)}$ pro $\pi \in S_n$
- $||\times(x_1,\dots, x_{n-1})||^2 = \det(x_1,\dots, x_{n-1},\times(x_1,\dots, x_{n-1}))$
- $\times(x_1,\dots, x_{n-1}) =$ **o**, když je seznam **lineárně závislý**
- $||\times(x_1,\dots, x_{n-1})|| = \mathrm{sqrt}(\mathrm{Gram}(x_1,\dots, x_{n-1}))$
    - **norma** je rovna **(n-1)-dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu** určeného vektory $(x_1,\dots, x_{n-1})$

Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů

DEF:

π a π' jsou **dva afinní podprostory** prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu $\omega(\pi,\pi') = \inf\{||x - x'|| \mid x \in \pi, x' \in \pi'\}$ říkáme **vzájemná vzdálenost** π a π'.

- *definice bere všechny body z podprostorů, odečítá je a hledá nejkratší*
- ta množina je **neprázdná a zdola omezená** - **infimum** (inf) existuje
- pro n=0: $\mathbb{R}^0=\{o\}$, tedy $\omega(\pi,\pi')=0$
- pro n=1: $\mathbb{R}^1$ má afinní prostory body nebo celé $\mathbb{R}^1$, takže $\omega(\pi,\pi')=||p-p'||$, nebo

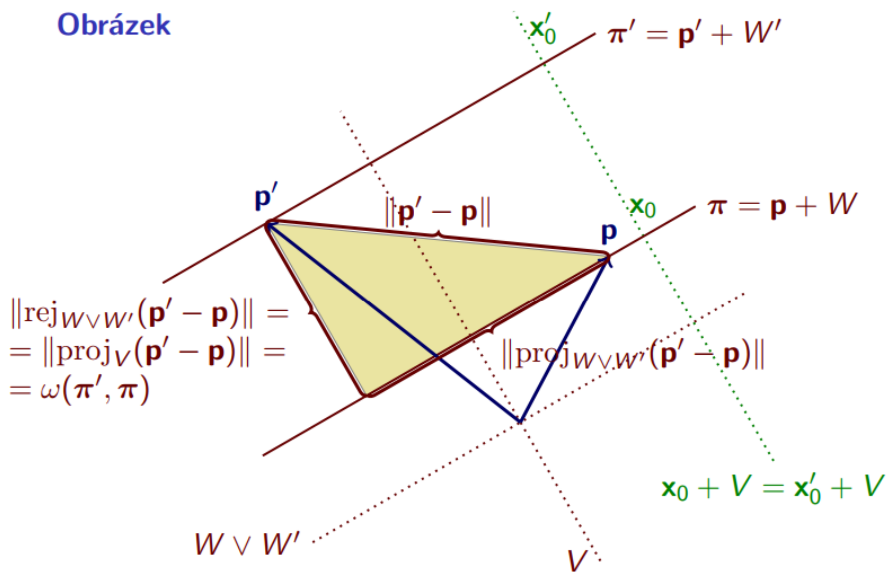
$\omega(p,\mathbb{R})=\omega(\mathbb{R},\mathbb{R})=0$

Počítání vzdáleností

Ať $\pi=p+W$ a $\pi'=p'+W'$ jsou dva afinní podprostory v $\mathbb{R}^n$. Potom platí:

- $\boldsymbol{\omega(\pi,\pi') = \|\mathrm{rej}_{W\vee W'}(p - p')\|}$

Obrázek



Bude vyžadováno:

1. Znát obecný vzorec $\omega(\pi,\pi') = \|\mathrm{rej}_{W\vee W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\|$ pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ a znát hlavní myšlenky jeho odvození z předchozích stran.
2. Z přednášky o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích znát vzorec
$$\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v}\rangle} \cdot \mathbf{v}$$
pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^n$. Viz následující stranu.
3. Tvůrčí uplatnění výše uvedeného vzorce pro ortogonální projekci k nalezení vzájemných vzdáleností v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

Příklady: viz Velebilovy slajdy

TOŤ JEST VŠE