-Matice

Vlastnosti soucinu:

- (AB)C = A(BC)
- (A+B)C = AC+BC
- AI = A = IA
- (aA)B = A(aB) = a(AB)
- $A^{m*n} B^{k*p}$ AB n==k, m*p
- $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

Transpozice:

- $(aA)^T = aA^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

Hodnost (rank):

rank A = rank(A^T)
rank(AA^T)= rank A
rank A ≤ min(m, n)
rank(AB) ≤ min(rank A, rank B)

Inverze:

$AA^{-1}= I = A^{-1}A$
$(A^{-1})^{-1}=A$
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
$(aA)^{-1}=a^{-1}A^{-1}$
$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

Determinant:

Det I = 1
Det(AB) = det(A)*det(B)
Det(A^{-1}) = det(A)$^{-1}$
Det A^T=det A
Det A = 0 if A singularni
Prohozeni sloupcu → - det

Vlastni cisla:

Determinant s -λ na diagonale
Matice* vlastní vektor = nulovy vektor

Linearita

Span(x,y)(linearni obal)==mnozina vsech linearnich kombinaci vektoru x,y.
Baze lin. pod. X je lin. nezavisla mnozina Vektoru, jejiz span je X

Pro podprostory X, Y ⊆ R^n plati:

X⊆Y → dim X ≤ dim Y
X⊆Y a dim X = dim Y → X = Y

Prostor obrazu:

Rng A^{m*n} = {Ax | x ∈ R^n} ⊆ R^m

Ekvivalentni tvrzeni pro A^{m*n}:

Rng A = R^m
soustava Ax = y ma reseni pro kazde y
Rank A = m
Zobrazeni f(x) = Ax je surjektivni
Radky matice A jsou lin. nezavisle
Matice A ma pravou inverzi (AA^{-1} = I)
Matice AA^T je regularni

Pro libovolne matice A,B plati:

Rng(AB) ⊆ rng A
rng(AB) = rng A if radky B jsou lin. nezavisle

nulovy prostor:

null A^{m*n} = {x ∈ R^n | Ax = 0 } ⊆ R^n

Ekvivalentni tvrzeni:

Null A = {0}
Soustava Ax = 0
Rank A = n
Zobrazeni f(x) = Ax je injektivni
Sloupce matice A jsou lin. nezavisle
Matice A ma levou inverzi (A^{-1} A = I)
Matice A^TA je regularni

Pro libovolne A,B plati:

null(AB) ⊇ null B
null(AB) = null B if sloupce A jsou lin. nezavisle

Vety:

rank A = dim rng A = dim rng(A^T) = rank(A^T).
dim rng A + dim null A = n

Affini podprostor

If X lin. podprostor, pak X + y aff. Podportor
If X aff. Podprosotr, pak X – y lin. podprostor
If X aff. Podporostor, x,y ∈ X, pak A-x = A-y

Ortogonalita

||x+y|| ≤ ||x|| + ||y|| trojuh. nerovnost
Cos a = x^Ty/(||x||*||y||) uhel 2 vektoru
$X^⊥$ = {y ∈ R^n | y ⊥ X } ortogonalni doplnek
Vektor ⊥ na podprostor if ⊥ na vekt. Baze
Podprostory jsou ⊥ if každý vekt. x ⊥ y

Vety:

dim X + dim $X^⊥$ = n
X ⊥ Y a dim X + dim Y = n → Y = $X^⊥$
$(X^⊥)^⊥$ = X
(rng A)$^⊥$ = null(A^T)
(null A)$^⊥$= rng(A^T)
Rng(A^TA)=rng(A^T)
null(A^TA)=null A

Ortogonalni matice U^{m*n}

Je ctvercova, ortonormalni sloupce
If det U = 1, pak rotacni
If det U = -1, pak rotacni a reflexni
U^TU = I ←→ U^T=U^{-1} ←→ UU^T= I

QR rozklad matice A^{m*n}

A = QR, Q^{m*m} ortogonalni, R^{m*n} hor. Trojuhelnikova

Ortogonalni projekce vekt. z

x = UU^Tz
P = UU^T projektor na X, I – P je na $X^⊥$

Nejmensi ctverce

A^+= $(A^TA)^{-1}A^T$ preur. Pseudoinverze
A^+= $A^T(AA^T)^{-1}$ nedour. pseudoinverze
Orto projekce na obecnou bazy: P = AA^+
Reseni Ax = b jako x = A^+b nebo A\x = b, x = A^{-1}b

Spektralni rozklad

rank Λ = rank A
A = $VΛV^{-1}$ if V ortogonalni, pak V^T

Kvadraticka forma! Symet. matice

Definitni

A positivne [negativne] v bode 0 ostre min [max]

Semidefinitni

A positivne [negativne] v bode 0 min [max]

Indefinitni

Nemá ani min ani max

Definitnost minory:

Pos def. If všechny vudci hlavni minory jsou kladne
Pos semidef. Pokud jsou hlavni minory nezaporne
Neg. def/semidef if -A pos def/semidef

Definitnost vl. cisla:

Pos [neg] def. If všechny vl. Cisla kladna [zaporna]
Pos [neg] semidef. If všechny vl. Cisla nezap [nekla]
Indefinitni if jedno zaporne jedno kladne

Doplneni na ctverec

$x^TAx + b^Tx + c = (x − x_0)^TA(x − x_0) + y_0$
$b = −2Ax_0$
$c = x^T_0 Ax^0 + y^0$

Pouziti spektralniho rozkladu VAV

Stopa

Stopa je soucet diagonalnich prvku matice A Tr(A)

Vlastnosti stopy

Tr(A+B) = tr A + tr B
Tr(aA) = a tr A
Tr(A^T) = tr A
Tr(AB) = tr(BA)
Tr(A) = soucet vlastnich cisel

Uloha na nejmensi stopu

min{ x^TAx | x ∈ R n , x^Tx = 1 } = $λ_1$

prolozeni bodu podprostorem

hledame lin. Podprostor dimenze k
$A^TA = VΛV^T$, kde vl. Cisla a vek jsou vzestupne serazeny
Poslednich k sloup. V je baze min. sum ctvercu k bodum
Prvnich n-k sloupcu V je ortonorm. Bazi ortog. Doplnku tohoto podprostoru
u aff podprostoru posuneme body a o jejich -teziste

singularni rozklad SVD

A = USV^T, matice S^{m*n} je diagonalni, U^{m*m} a V^{n*n} ortog.
Rank A = rank S, pokud není ctvercova, pak posled. m – p sloupce U/n – p sloupcu V je nulovych
$A^TA = VS^TU^TUSV^T = VS^TSV^T$
$AA^T = USV^TVS^TU^T = USS^TU^T$

Nelinearni funkce

G(x, y) = f(x) if f je spojina v x, pak g je spojita v x, y
Pokud f, g spojite, pak f+g, f-g,f*g jsou spojite
Pokud f a g spojite, pak slozena funkce je taky spojita
Funkce $f_1..f_m$ spojite, pak f(x)=(f_1(x)..f_m(x)) také spojite

Derivace

Lim(a->0) = (f(x+a)-f(x))/a
Pro f: R → R je f' (x) skalar
Pro f: R → R^m je **f'**(x) sloupcovy vektor
Pro f: R^n → R je f' (**x**) radkovy vektor

g ∘ f: R^n→R^l, f: R^n→ R^m, g: R^m →R^l , (g ∘ f)'(x) = g' (f(x))f'(x)

zobrazení	(totální) derivace
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{g}'(\mathbf{x})$
$f(\mathbf{x}) = \Vert\mathbf{x}\Vert$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T/\Vert\mathbf{x}\Vert$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}(\mathbf{x})$	$f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{h}(\mathbf{x})$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{h}'(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

poznámka
$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times l}$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{g},\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

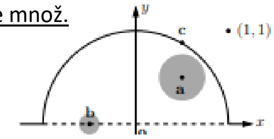
Smerova derivace f(x) ve smeru v je rovna f'(x)*v
Gradient je sloupcovy vektor parc. der. ∇ (f) = $f'(x)^T$
Směr. der. je nejvet. ve smeru ∇ (f)/|| ∇ (f)|| (nej. rust)

Tayloruv polynom

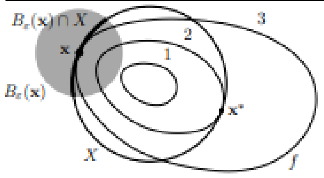
$T_0(y) = f(x)$, $T_1(y) = f(x) + f'(x)(y − x)$
$T_2(y) = f(x) + f'(x)(y − x) + ½*f''(x)(y − x)^2$
$T_2(y) = f(x) + f'(x)(y − x) + ½*(y − x)$ T $f''(x)(y − x)$.

Vnitřek a hranice množ.

a - vnitřní
b – hraniční
c – hranižní
(1,1) – hraniční



Lokální extrémy funkce na množnině



v bodě x* fce f na X ma glob. i lok. min. f(x*) = 2
v bodě x fce f na X ma lok. min.

Extremy

f'(x) = 0, pak x je stac. Bod, if f''(x) <0 [>0] pak max [min]
vice promennych: if hessova matice:
positivne [neg] definitni, pak x je ostre min [max]
semidefinitni, pak x MUZE, ale nemusi byt extrem
indefinitni není extrem (sedlovy bod)

iteracni metody (!SESTUPNY SMĚR V)

obecne $x_{k+1}=x_k+a_kv_k$,
gradientni: $v_k = -∇f(x_k)$ vždy sestupny, pomala konverg.
Newton: (koren) $v_k = f'(x_k)^{-1}f(x_k)$, rychle konv.
Newton: (extr) $v_k = f''(x_k)^{-1}f'(x_k)^T$ nutno presny zacatek
Gauss-N: $v_k= -g'(x_k)^+g(x_k)$, $g'(x_k)^+$ zavorka vlevo
Netreba 2. derivaci

Levengerg-Marquardt:

$V_k= (g'(x_k)^T g'(x_k) + μ_kI)^{-1}g'(x_k)$ T $g(x_k)$
Pokud iterace snizi, $μ_k$ zmensime, jinak zvetsime a znova

Lagrangeova fce

L(x, λ) = f(x) + $λ^T$g(x) = f(x) + λ1g1(x) + · · · + $λ_mg_m$(x)

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(1 - x^2 - y^2).$$
$$\partial L(x, y, \lambda)/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0,$$
$$\partial L(x, y, \lambda)/\partial y = 1 - 2\lambda y = 0,$$
$$\partial L(x, y, \lambda)/\partial \lambda = 1 - x^2 - y^2 = 0.$$

Linearni programovani

Transformace LP

Max fce c^Tx nahradime minimalizaci fce $−c^Tx$
Nerovnost a^Tx ≤ b nahradime nerovnosti $−a^Tx$ ≥ −b
Rovn. a^Tx = b nahradime dvema nerovn. a^Tx ≥ b, $−a^Tx$≥−b
Rovnicovy tvar:
nerovnost a^Tx≥ b na 2 omezeni: a^Tx-u=b, u≥0. u je slackova promenna. x∈R na 2 nezaporne promenne x^+≥0, x^- ≥0

po castech affini fce $\max_i a_i \le b \iff (\forall i)(a_i \le b).$

minimax maximin; min max[max min]{x,y}

minmax: min z → x, y ≤ z; maxmin: max z → x, y ≥ z

vektorove normy $\Vert\mathbf{x}\Vert_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$
manhattska norma $\Vert\mathbf{x}\Vert_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}.$
euklidovska, max-norma $\Vert\mathbf{x}\Vert_\infty$ $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

Relaxovaná vs. původní úloha

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in [0,1]^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}\} \le \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \{0,1\}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}\}$$

konvexni mnoziny a mnohosteny

konvexni komb. Vekt x,y je jejich lin. Komb. Ax+by Takova, ze a+b=1, a,b ≥0, konvexni obal vektoru x, y je mnozina všech konvex. Kombinaci

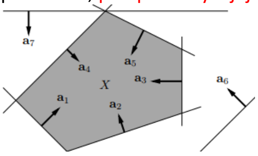
Vážený součet $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ se nazývá jejich

lineární kombinace,	jestliže	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.		
afinní kombinace,	jestliže	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.	
nezáporná kombinace,	jestliže	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,		$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 0$
konvexní kombinace,	jestliže	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$,	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 0$

Množina, která je uzavřená vůči

lineárním kombinacím,	se nazývá	**lineární podprostor**.
afinním kombinacím,	se nazývá	**afinní podprostor**.
nezáporným kombinacím,	se nazývá	**konvexní kužel**.
konvexním kombinacím,	se nazývá	**konvexní množina**.

Priklady konv. Mnohostenu: prazdna mnozina, cely prostor R^n, poloprostory a jejich pruniky



Konv. Mnoziny co nejsou mnohosteny:
Koule v R^n pro n≥2 je prunikem NEkonecne mnoha poloprostoru, otevreny poloprostor $\{ x \in R^n \mid a^T x > b \}$, Interval [0, 1)

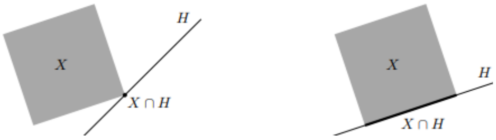
Extremalni body (x)

$x_1, x_2 \in X$, $x = 1/2\,(x^1 + x^2) \Longrightarrow x^1 = x^2$.
Pro každy bod x mnohostěnu jsou ekvivalentní tvrzení:
-Bod x je extremální bod mnohostěnu.
-Existuje $I \subseteq \{1..m\}$ tak, že $A_I x = b_I$ a sloupce A_I jsou LNZ

Ekvivalentni tvrzeni pro neprazdny mnohosten:

Mnohosten ma aspon jeden extremalni bod.
Mnohosten neobsahuje prımku.

Steny mnohostenu



Je-li H opěrná nadrovina konvexní množiny X, pak každý extremální bod množiny X∩H je extremální bod X.
X∩H je stena S mnohostenu, dimS=0 vrchol, dim 1 hrana (Dim X)-1 = faseta (vlevo hrana)
Veta 12.5: Mnohosten neobsahujici primku. If lin. Fce ma min na tomto mnohostenu, pak tato fce nabyva minima aspon v jednom z jeho extremalnich bodu.

Konstrukce dualni ulohy

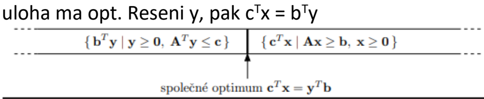
K úloze LP v obecném tvaru (viz §11.1) se duální úloha získá dle tohoto postupu:

min	$\sum_{j\in J} c_j x_j$	max	$\sum_{i\in I} b_i y_i$	
za podm.	$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j = b_i$	za podm.	$y_i \in \mathbb{R}$,	$i \in I_0$
	$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \ge b_i$		$y_i \ge 0$,	$i \in I_+$
	$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \le b_i$		$y_i \le 0$,	$i \in I_-$
	$x_j \in \mathbb{R}$		$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i = c_j$,	$j \in J_0$
	$x_j \ge 0$		$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i \le c_j$,	$j \in J_+$
	$x_j \le 0$		$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i \ge c_j$,	$j \in J_-$

Veta o komplementarite, $c^T x = b^T y$ prave tehdy, když

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j = b_i \quad \textit{nebo} \quad y_i = 0 \qquad \forall i \in I,$$
$$x_j = 0 \quad \textit{nebo} \quad \sum_{i\in I} a_{ij} y_j = c_j \qquad \forall j \in J.$$

O slabe dualite:x reseni, y dualni reseni, pak $c^T x \ge b^T y$
O silne: Prim. Uloha ma opt. Reseni, prave když dualni ma opt. Reseni. Ma-li prim. Uloha opt. Reseni x, a dualni uloha ma opt. Reseni y, pak $c^T x = b^T y$



primární/duální	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	ano	ne	ne
neomezená	ne	ne	ano
nepřípustná	ne	ano	ano

Konvexni funkce

Fce je konvexni na X, if: $\mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in X,\ 0 \le \alpha \le 1 \implies$
$f((1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \le (1-\alpha) f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y})$.
Konkavni if -f je konvexni na mnoz. X
Epigraf funkce je mnozina $\{ (x, y) \in R^{n+1} \mid f(x) \le y \}$
Subkontura vysky y je mnozina $\{ x \in R^n \mid f(x) \le y \}$

Veta 15.1. Funkce je konvexni, prave kdyz jeji epigraf je konvexni mnozina