Série N°1

Exercice 1

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{maximiser} \quad z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s/c} \quad x_1 - x_2 \leq 3 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Résoudre ce problème à l'aide de la méthode des tableaux du simplexe.

2) Résoudre graphiquement.

Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser} \quad z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s/c} \quad -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \quad x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Faire une résolution graphique

2) Résoudre ce problème à l'aide de la méthode des tableaux du simplexe

Exercice 3

Un pays désire accroitre son potentiel d'armement ; il veut acquérir au moins 100000 fusils, 200000 grenades défensives et offensives, une centaine de chars, 400 mitrailleuses lourdes et autant de bazookas. Il s'adresse pour ce faire à des marchands d'armes qui récupèrent les matériels utilisés ou non sur tous les champs de bataille. Ces marchands proposent trois types de lots.

	Lot1	**Lot2**	**Lot3**
Fusils	500	300	800
Grenades	1000	2000	15000
Chars	10	20	15
Mitrailleuses	100	80	150
Bazookas	80	120	200
Coût des lots	10MF	12MF	15MF

Le pays souhaite minimiser le coût d'armement supplémentaire qu'il veut acheter.

1) Ecrire le problème sous forme d'un programme linéaire
2) Ecrire le programme dual
3) Quelle est l'interprétation économique du dual

Exercice 4

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } \; z = x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s/c} \quad 2x_1 - x_2 + 2\,x_3 \leq 4 \\ \qquad -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ \qquad x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) Exprimer le problème auxiliaire.
2) Trouver une solution optimale en utilisant la méthode des deux phases.

Série N°2

Exercice 1

M. Eugène, spécialiste du design du meuble de luxe, compte produire, en courtes séries deux modèles de chaise : la chaise en porte-à-faux et la chaise Barcelone. Les deux modèles sont pourvus d'une armature métallique dont les pièces sont assemblées par brasage puis enduites de laques isolantes, ce qui confère au métal un toucher chaud. Dossiers et sièges sont ensuite recouverts de cuirs de Cordoue capitonnés. Les prototypes ont séduit une clientèle d'amateurs de beaux meubles et d'ensembliers décorateurs : M. Eugène s'est engagé à livrer d'ici trois semaines 42 chaises en porte-à-faux et 53 chaises Barcelone. Il estime à 100 unités le marché potentiel pour chaque type de chaise.
M. Eugène se propose de consacrer à la fabrication de ces chaises toutes les heures de main d'œuvre dont il disposera dans son atelier pendant les 3 prochaines semaines. Le tableau suivant présente les données afférentes à ce problème de production : la chaise en porte-à-faux y est appelée chaise A et la chaise Barcelone, chaise B.
L'objectif que poursuit M. Eugène est de maximiser le profit qu'il pourra tirer, au cours des 3 prochaines semaines, de ces deux types de chaises en utilisant au mieux les ressources de son atelier.

	Durée de Fabrication	**d'une chaise**	
Opération	A	B	capacité disponible
Brasage	1,5heures	2 heures	250
Laquage	30 minutes	45 minutes	100
Capitonnage	2 heures	3 heures	327
Profit par chaise	450	800	

Exercice 2

Le problème est de prévoir la production d'une denrée par n usines dans le but de fournir m clients, pour une période de temps donnée. On considérera qu'il n'y a pas de stock et que les quantités produites sont écoulées pendant la période.
Pour la période de temps donnée, une usine i peut produire pi kg de la denrée et un client j en demande vj kg. Le coût de production (différent pour chaque usine suivant sa modernité) d'un kg par l'usine i est de ci et le coût de livraison d'un kg de l'usine i au client j est de di,j.
Le but est de maximiser le profit. Identifier les variables du problème, puis formuler le problème comme un programme linéaire.

Maintenant, on souhaite instancier le programme générique par des données concrètes :

n = 2, m = 3, p = (400, 300), v = (100, 200, 150), c = (18, 15)

D	**Usine1**	**Usine2**
Client1	8	9
Client2	10	12
Client3	13	7

Ecrire le programme linéaire correspondant.

Exercice 3

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } z = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{s/c} \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) Utiliser la méthode du grand M pour résoudre le problème ci-dessus après élimination de l'inéquation redondante.
2) Donner le problème dual
3) Donner un certificat d'optimalité de la solution trouvée en 1)

Exercice 4

Vérifiez l'optimalité de la solution proposée pour le programme linéaire suivant : (vous devez vérifier l'optimalité sans chercher à résoudre le problème !)

$$\begin{cases} \text{maximiser } z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s/c} \quad x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ \quad 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

solution : $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = 0$

Série N°3

Exercice1

Résoudre le problème linéaire suivant par l'algorithme dual du simplexe :

$$\begin{cases} \text{mininiser } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s/c} \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ \quad 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } z = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s/c} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le dual de ce programme linéaire
2. Rechercher une solution optimale de ce dual en utilisant l'algorithme dual du simplexe
3. En déduire une solution du primal

Exercice 3

Résoudre en utilisant la méthode du grand M le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s/c} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \quad x_1 + x_2 + 5x_3 = 12 \\ \quad x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 13 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre en utilisant la méthode du grand M les deux programmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} \text{minimiser } z = 2x_1+3x_2+3x_3+x_4-2x_5 \\ \text{s/c} \quad x_1+3x_2+4x_4+x_5 = 2 \\ x_1+2x_2-3x_4+x_5 = 2 \\ -x_1-4x_2+3x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{minimiser } z = 2x_1+3x_2+3x_3+x_4-2x_5 \\ \text{s/c} \quad x_1+2x_2+2x_4+x_5 = 2 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 = 2 \\ -x_1-2x_2+3x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5

Une usine fabrique deux produits P1 et P2. Chacun de ces produits demande pour son usinage des heures de fabrication unitaires sur les machines A, B, C, D et E qui sont indiquées dans le tableau ci-dessous. Le tableau présente aussi la disponibilité totale de chaque machine ainsi que le profit escompté par la vente d'une unité de chaque produit.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Profit**
P1	0h	1,5h	2 h	3h	3h	1700
P2	3h	4h	3h	2h	0h	3200
capacité disponible	39h	60h	57h	70h	57h	

1) Ecrire le programme linéaire correspondant. Donner une solution graphique.

Les produits utilisent 3 fournitures F1, F2 et F3 dans les conditions ci-dessous :

	F1	**F2**	**F3**
P1	0	12	8
P2	5	36	0
Unités	Kg	m^3	m^2
Stock disponible	55	432	136

2) Réécrire le nouveau programme linéaire en ajoutant ces nouvelles contraintes. Eliminer les contraintes redondantes. Résoudre graphiquement.

DEVOIR

Exercice 1

On classe en général les modèles de planification de la production en deux types par rapport à l'horizon de leur mise en œuvre. Les premiers, comme celui des chaises de M. Eugène, ne tiennent compte que des ressources disponibles et de l'état du marché au moment de leur mise en œuvre. Dans les seconds, dits modèles mul-tipériodes , les rafales à prévoir s'inscrivent dans un univers de ressources évolutives aux prix changeants, de commandes périodiques fluctuantes, d'héritage des stocks cumulés, etc.

Nous présentons ci-dessous, un problème qui requiert pour sa solution un modèle multi-période. Nous traitons de la production d'un seul produit sur un horizon décisionnel mensuel limité à six mois consécutifs.

De nos jours, on fabrique les spaghettis à partir d'un mélange de semoule et d'eau chaude. La semoule est obtenue du blé dur qui, au pétrissage, se fragmente en semoule. Les grains de blé dur sont, préalablement à leur fragmentation en semoule, épierrés, triés, brossés et dégermés. On procède ensuite au tréfilage en poussant à travers un moule de plusieurs mètres de long le mélange de semoule et d'eau. Un rideau de fils de spaghetti sort de cette machine en bout de course. Tous les 50 centimètres, ces longs fils sont sectionnés. Ils sont ensuite suspendus sur des barres, puis enfournés dans des tunnels de séchage où ils passent en moyenne six heures à une température qui atteint progressivement 80°C. Ils sont ensachés avant d'être proposés à la vente.

Pastissimo, qui fabrique sous son label une large gamme de pâtes alimentaires, a accepté de fournir, en sacs de 1kg, pendant les six prochains mois les spaghettis que la chaine d'alimentation Hyper-Halli vend sous sa marque privée. A chaque fin de mois, Pastissimo mettra 4 tonnes de spaghettis ensachés à la disposition de Hyper-Halli, qui s'est engagée à en prendre livraison au prix de 1,28$ le sac.

Pastissimo s'approvisionne en blé dur, déjà épierré, trié, brossé et dégermé, au prés de Les Grands Moulins du Sud. Les prix mensuels sont indiqués dans le tableau ci-dessous, ainsi que les quantités minimales et les quantités maximales de blé que Pastissimo pourra affecter à son contrat avec Hypar-Halli, compte tenu des ententes préalables avec Les Grands Moulins et des besoins de Pastissimo pour les produits qu'elle met en marché sous son label.

mois	Prix(en $/t)	Minimum (en t)	Maximum (en t)
1	1000	4	6
2	975	3	4
3	1000	5	7
4	980	2	3
5	1020	4	7
6	1025	5	6

Pastissimo possède un entrepôt et un magasin. Dans le premier, elle conserve les matières premières jusqu'à leur utilisation ; dans le second, elle emmagasine les produits finis jusqu'à leur livraison. Elle pratique une politique du « premier entré, premier utilisé ou premier livré ».

au début du premier mois, Pastissimo disposera dans son entrepôt de 2 tonnes de blé prêt pour le pétrissage, et désire y retrouver le même tonnage de ce blé à la fin des 6 mois. Elle peut entreposer à un coût mensuel de 20 la tonne les surplus de blé qu'elle ne peut traiter immédiatement. La capacité maximale de cet entrepôt est de 3 tonnes de blé. Pastissimo dispose également d'une capacité maximale de 1 tonne de sacs de spaghettis dan son magasin. Les coûts mensuels relatifs à cet emmagasinage sont évalués à 25 la tonne.
Pastissimo s'est engagée auprès de Hyper-Halli à libérer une partie de sa capacité de production pour le contrat temporaire de spaghettis. Le tableau suivant indique la capacité maximale qu'elle prévoit consacrer à ce contrat ; il donne également les coûts de production et d'ensachage des spaghettis

Mois	Capacité de production (en t)	Coûts(en$/t)
1	6	160
2	5	150
3	4	150
4	4	160
5	4	175
6	3	165

<u>Exercice 2 problème de transport</u>

L'entreprise Saubeu, spécialiste de la saussisse de bœuf, dispose de trois laboratoires où elle élabore son produit, et de cinq centres de distribution d'où elle ravitaille sa clientèle. Une étude effectuée récemment a montré que les coûts de transport sont plus élevés que ceux des concurrents.
Les laboratoires fonctionnent sept jours sur sept. Les viandes qu'on y conditionne sont livrées aux centres de distribution où s'approvisionnent tous les clients de saubeu, du supermarché à la boucherie de quartier. Une carcasse de bœuf livrée le jour 1 dans un laboratoire réapparait sous forme de saucisses le jour 3 sur les étals du rayon de la charcuterie des clients. Chaque centre de distribution enregistre les commandes de ses clients et les communique à la direction de l'entreprise, qui assure un approvisionnement adéquat. Le transport, au tarif kilométrique de 2 $ la tonne, est confié aux camions réfrigérés de la société Dicam.
Le tableau suivant indique les distances (en km) entre les laboratoires et les centres de distribution.

Centre / Labo	C1	C2	C3	C4	C5
L1	50	400	50	250	200
L2	250	250	150	300	350

L3	100	450	250	450	400

Chaque laboratoire s'approvisionne en carcasses de bœuf désossées auprès de coopératives d'éleveurs de son voisinage, qui lui en fournissent chaque jour une quantité convenue. Les pertes de poids consécutives à la transformation de la chair à saucisses en saucisses sont compensées par le poids des additifs alimentaires et celui des emballages. Le tableau suivant donne les quantités qui sont disponibles (en tonnes de chair à saucisse) dans les laboratoires, et celles qui sont requises (en tonnes de saucisses) dans les centres de distribution.

<table>
<tr><th>Laboratoire</th><th colspan="2">L1</th><th colspan="2">L2</th><th>L3</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Disponibilité Si</td><td colspan="2">240</td><td colspan="2">160</td><td>260</td><td>660</td></tr>
<tr><td>Centre</td><td>C1</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C4</td><td>C5</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Demande Dj</td><td>120</td><td>130</td><td>145</td><td>125</td><td>140</td><td>660</td></tr>
</table>

Saubeu recherche un plan d'acheminement à coût minimal des laboratoires aux centres de distribution.
Les saucisses de Saubeu sont toutes expédiés directement de m origines à n destinations selon des coûts de transport proportionnels aux quantités transportées et sans que leur soient imposées, sur les routes empruntées, des conditions quant à leur poids maximal ou minimal.
Il s'adonne ici que l'offre est égale à la demande : la somme des expéditions doit être égale à celle des réceptions, soit 660 tonnes dans chaque cas. Ces problèmes de transport où l'offre est égale à la demande sont dits équilibrés. Ainsi, de façon à satisfaire la demande des centres, chaque laboratoire devra expédier toutes les saucisses requises pour satisfaire la totalité de la demande.
Les données pertinentes au cas de Saubeu sont présentées sous forme d'un tableau, appelé tableau de transport.

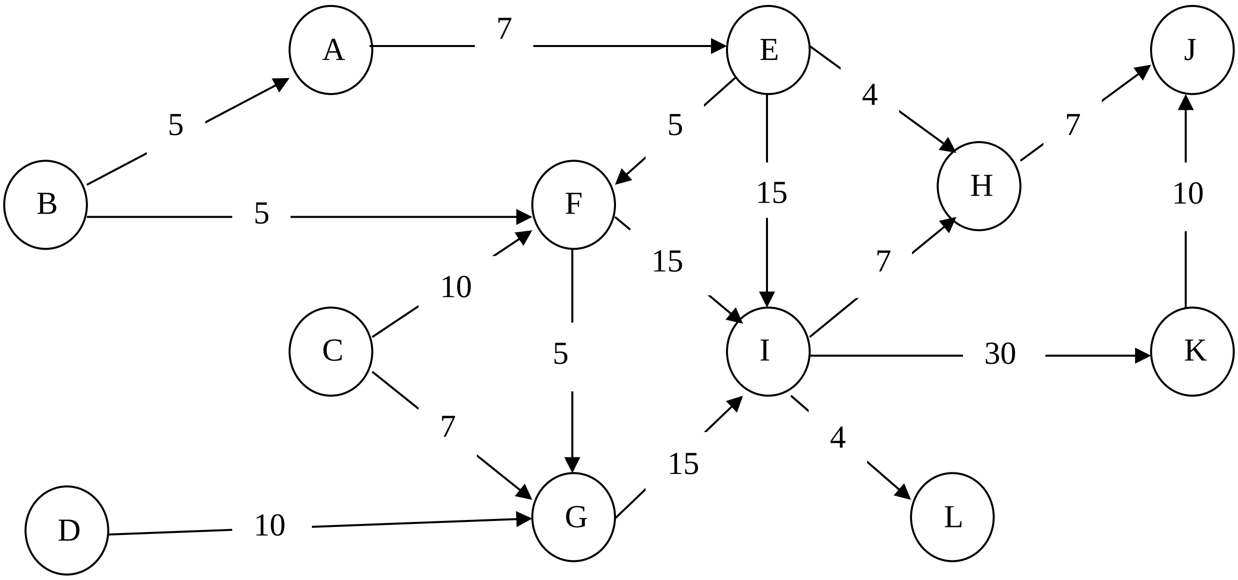
	C1	C2	C3	C4	C5	Si
L1	1	8	1	5	4	240
L2	5	5	3	6	7	160

L3	2	9	5	9	8	260
Dj	120	130	145	125	140	660

Pour chaque couple origine-destination, le coût unitaire de transport (exprimé en centaines de dollars pour alléger l'écriture) occupe le coin supérieur droit de la case appropriée. Chacun de ces coûts unitaires se dénote c_{ij}, où i désigne l'indice de l'origine et j, celui de la destination. Par exemple $c_{23} = 3$ indique qu'il en coûte 300 $ pour transporter, au tarif de 2 $ le km, une tonne de saucisses de L2 à C3, soit sur une distance de 150km.

Problème d'adduction d'eau

Trois villes J, K et L sont alimentés en eau grâce à quatre réserves A, B, C et D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usine de traitement etc.). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, C et D et de 10 milliers de m^3 pour B. le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe ci-dessous (les débits maximaux, en milliers de m^3 par jour, sont indiqués sur chaque arc).



Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir, pour la ville J, 15 milliers de m^3, pour la ville K, 20 milliers de m^3 et 15 milliers de m^3 pour la ville L.

1) Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.
2) Le valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). déterminez les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.
3) Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on

entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseau.

4) Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux ?