Communications Numériques

Chapitre 3
Transmission en bande de base

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Codage en ligne
3. Transmission en absence de bruit
4. Transmission en présence de bruit
5. Transmission sur un canal à bande passante limitée

Introduction

Introduction

Chaîne de transmission idéale : rappel

Introduction

Chaîne de transmission idéale : emetteur

Emetteur : transformer le signal numérique d_n en un signal physique $e(t)$ (onde électromagnétique, signal électrique, etc...) qui puisse être transmis sur le canal de transmission

- Transmettre le maximum de données avec une fiabilité maximale
- S'adapter au canal de transmission utilisé

Introduction

Emetteur : différentes étapes

Emetteur

Conversion bits/symboles (transcodage) :

- Modification de la taille de l'alphabet
- Modification du rythme

Introduction

Emetteur : différentes étapes

Emetteur

Mise en forme :

- Transformation du signal numérique en un signal physique
- Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

Introduction

Emetteur : différentes étapes

Emetteur

Modulation :

- Adaptation au canal de transmission (bande passante)
- Large choix de possibilités : dépend de la puissance, de la probabilité d'erreur acceptable...

Introduction

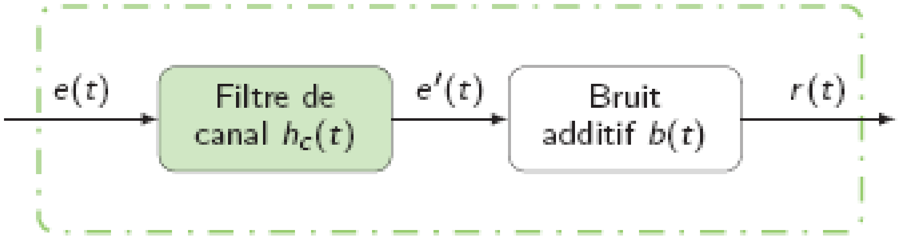
Chaîne de transmission idéale : canal

Canal de transmission : câbles coaxiaux, paires torsadées, réseau hertzien, infrarouge, fibres optiques,....

- Proprietés physiques différentes selon le canal utilisé : bande passante, débit maximal, etc...
- Eventuellement source d'erreurs (bruit, perte de données, etc...)

Introduction

Canal : différentes étapes



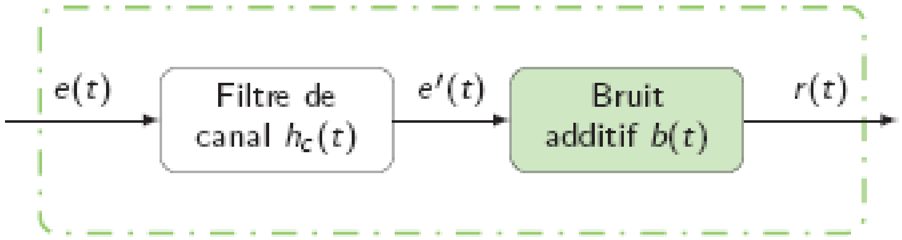
Canal de transmission

Filtre de canal ayant pour fonction de transfert $H_c(f)$

- Dépend à priori de la fréquence : notion de **bande passante** du canal
- Canal idéal : $H_c(f)$ constant dans la bande passante

Introduction

Canal : différentes étapes



Canal de transmission

Bruit additif $b(t)$

- Souvent supposé bruit blanc additif gaussien indépendant du signal $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$

Introduction

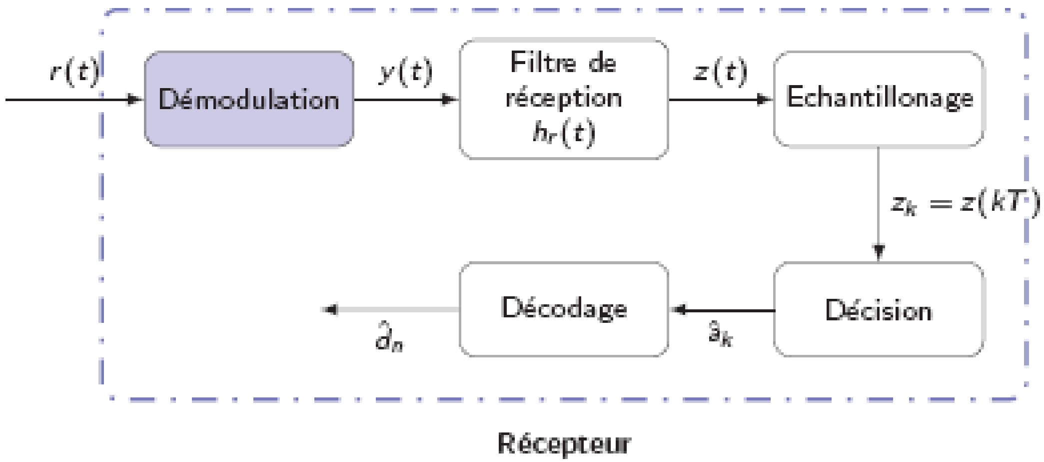
Chaîne de transmission idéale : récepteur

Récepteur : transformer le signal physique reçu $r(t)$ pour retrouver le signal numérique envoyé $\hat{d}_n$

- Echantillonnage, détection, élimination du bruit
- Parfois difficile s'il y a eu des erreurs de transmission

Introduction

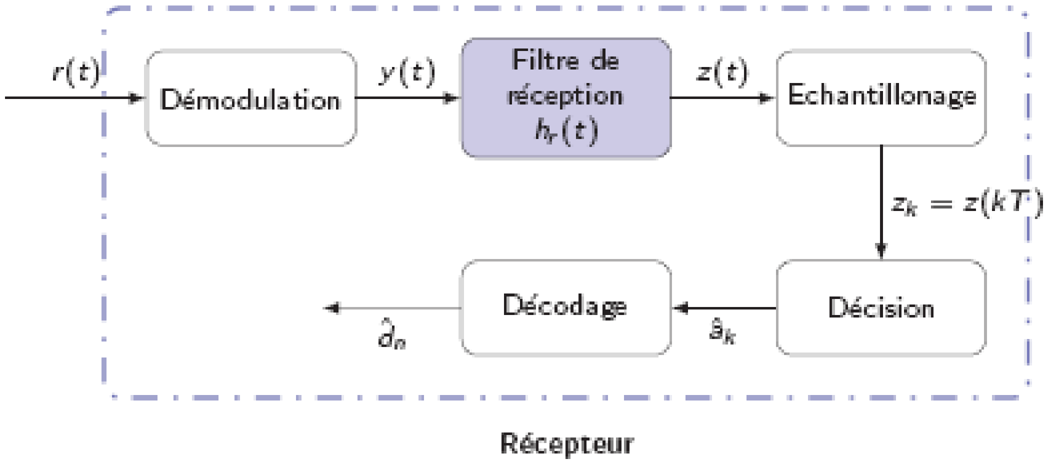
Récepteur : différentes étapes



Démodulation : inverse de l'étape de modulation

Introduction

Récepteur : différentes étapes

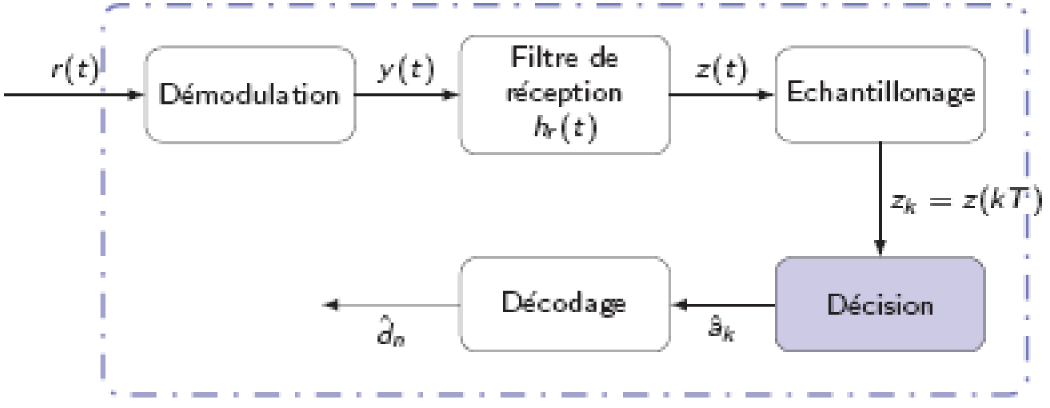


Filtre de réception :

- Adapté au filtre de mise en forme utilisé lors de l'émission
- Vise à minimiser les interactions entre symboles et à maximiser le rapport signal sur bruit

Introduction

Récepteur : différentes étapes



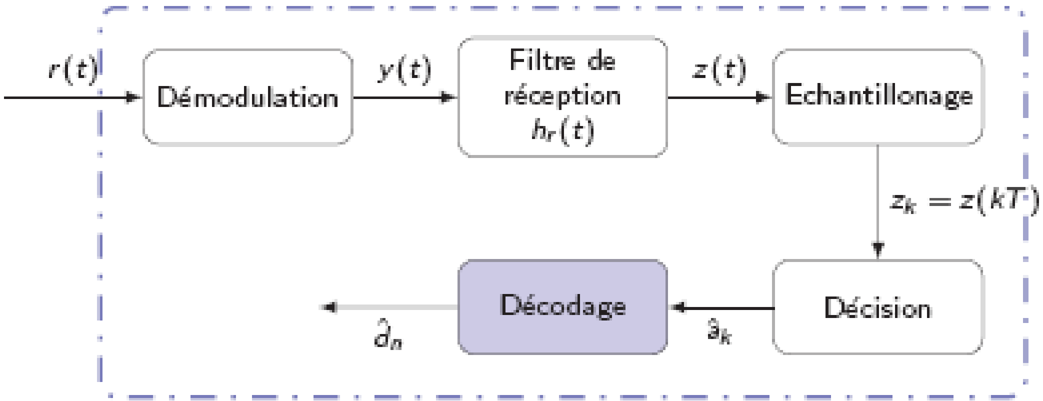
Récepteur

Décision :

- A partir des valeurs échantillonnées, on retrouve les symboles émis
- Sensible au bruit ajouté par le canal

Introduction

Récepteur : différentes étapes

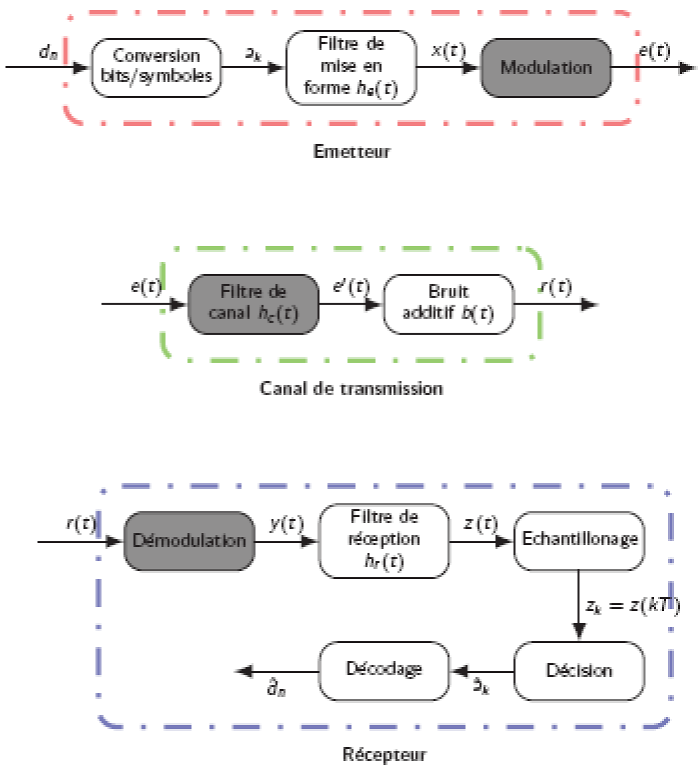


Récepteur

Décodage : on transforme les symboles détectés en bits d'information

Introduction

Hypothèses



On s'interesse ici à la transmission en bande de base :

- Pas d'étape de modulation/démodulation
- Transmission des signaux tels quels, dans la bande de fréquence originale

On supposera aussi que le canal utilisé est idéal, invariant, et de gain unitaire

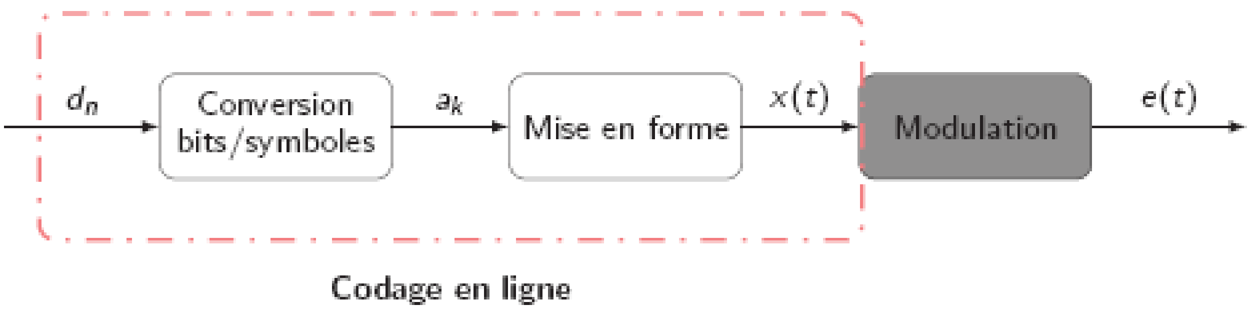
$$H_c(f) = 1$$

Sa bande passante est donc supposée infinie.

Codage en ligne

Codage en ligne

Codage en ligne

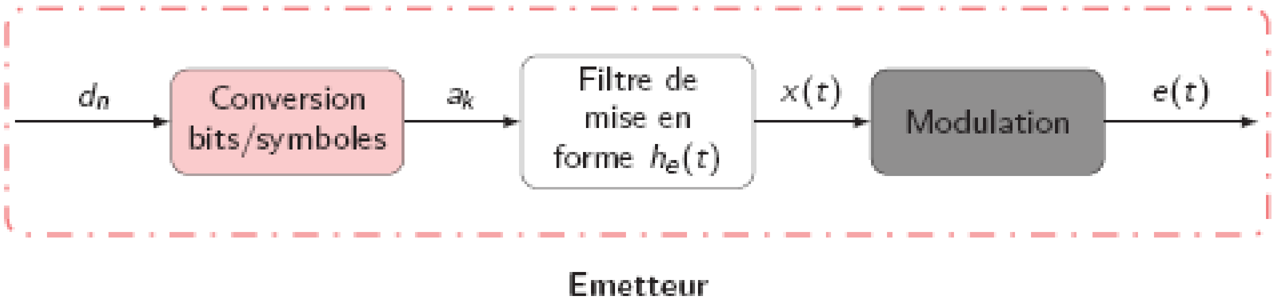


Codage en ligne :

- Toutes les étapes en bande de base, avant l'étape de modulation
- But : donner de bonnes propriétés au signal physique créé (largeur de bande, raies ou annulations du spectre à certaines fréquences, etc...)

Codage en ligne

Emetteur : conversion bits/symboles

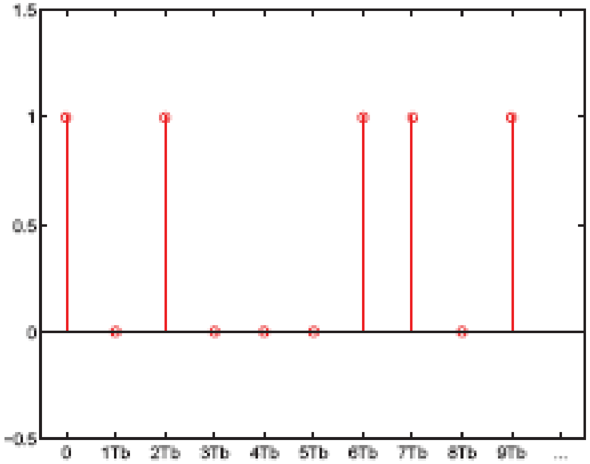


Conversion bits/symboles (transcodage) :

- Modification de la taille de l'alphabet
- Modification du rythme

Codage en ligne

Débit binaire



- Entrée : signal binaire initial d_n

$$d = 1010001101 \cdots$$

- Un bit émis toutes les T_b secondes
- Débit binaire :

$$\boxed{D_b = \frac{1}{T_b} \text{ (bits/seconde)}}$$

$$\boxed{d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \delta(t - nT_b)}$$

Codage en ligne

Transcodage : conversion bits/symboles

- Principe : remplacer les bits ou des groupements de bits par des symboles
- Idée : passer de deux valeurs possibles (0 ou 1) à M valeurs possibles
- Plusieurs façons de procéder :
  - Codage par dictionnaire : regrouper les bits m par m et associer un symbole à chaque groupement
  - Codage par diagramme d'états
  - Codage par équation linéaire

Codage en ligne

Codage par dictionnaire

- Dictionnaire à M symboles (M : valence)
- Regrouper les bits m par m et associer un symbole du dictionnaire à chaque groupement
- Dans ce cas :

$$\boxed{M = 2^m} \qquad \boxed{m = \log_2 M}$$

- Exemple avec $m = 1$:

$$1010001101 \longrightarrow 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \longrightarrow 1\ \text{-}1\ 1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1\ 1\ \text{-}1\ 1$$

- Exemple avec $m = 2$:

$$1010001101 \longrightarrow 10\quad 10\quad 00\quad 11\quad 01 \longrightarrow 2\quad 2\quad 0\quad 3\quad 1$$

Codage en ligne

Codage par dictionnaire

- Plusieurs façons d'attribuer un symbole a_k à chaque groupe de m bits
  - Codage M-aire unipolaire :

$$a_k \in \{0, 1, \cdots, M-1\}$$

  - Codage M-aire antipolaire :

$$a_k \in \{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\} \text{ (uniquement les valeurs impaires)}$$

- Exemple avec $m = 2$:

$$10 \quad 10 \quad 00 \quad 11 \quad 01 \longrightarrow 2 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \text{ (unipolaire)}$$

$$10 \quad 10 \quad 00 \quad 11 \quad 01 \longrightarrow 3 \quad 3 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \text{ (antipolaire)}$$

Codage en ligne

Exemples

- Codage binaire unipolaire

d_n	a_k
0	0
1	1

- Codage binaire antipolaire

d_n	a_k
0	-1
1	1

Codage en ligne

Exemples

- Codage quaternaire antipolaire (ou 2B1Q)

$d_n d_{n+1}$	a_k
00	-3
01	-1
11	1
10	3

codage de Grey : un bit de différence entre chaque état

Codage en ligne

Rapidité de modulation

- Si on regroupe les bits m par m, on transmet m fois moins vite. Un symbole émis toutes les T secondes (période symbole) avec

$$\boxed{T = mT_b = \log_2 M \; T_b = \frac{\log_2 M}{D_b}}$$

- On a un nouveau signal

$$\boxed{a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)}$$

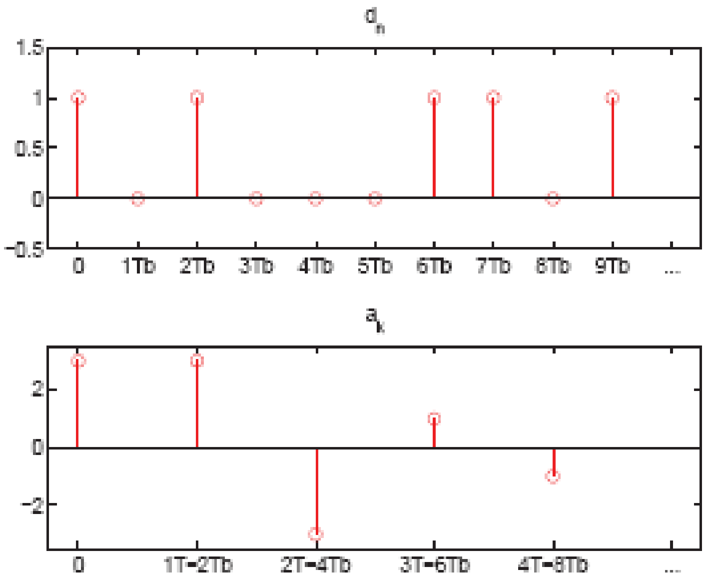
- Rapidité de modulation R (débit symbole)

$$\boxed{R = \frac{1}{T}}$$

$$\boxed{R = \frac{D_b}{\log_2 M} \text{ (bauds)}}$$

Codage en ligne

Exemple : codage 2B1Q



$$10 \;\; 10 \;\; 00 \;\; 11 \;\; 01 \longrightarrow 3 \;\; 3 \;\; -3 \;\; 1 \;\; -1$$

Codage en ligne

Emetteur : mise en forme

Emetteur

Mise en forme :

- Transformation du signal numérique en un signal physique
- Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

Codage en ligne

Mise en forme

- Entrée : suite de symboles M-aires a_k. Un symbole émis toutes les T secondes

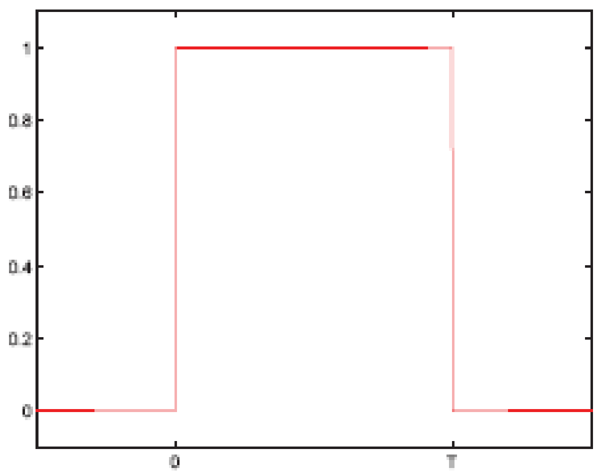
$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$

- Principe : associer un signal physique $x(t)$ à cette suite de symboles en convoluant $a(t)$ par la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ d'un filtre de mise en forme (aussi appelé filtre d'émission).
- Codes à formant : même filtre de mise en forme pour tous les symboles

$$\boxed{x(t) = a(t) * h_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)}$$

Codage en ligne

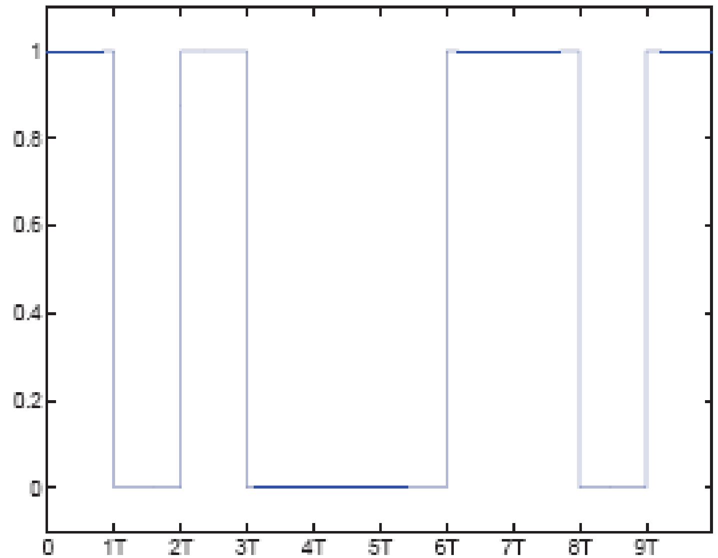
Filtre NRZ (non retour à zéro)



$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Codage en ligne

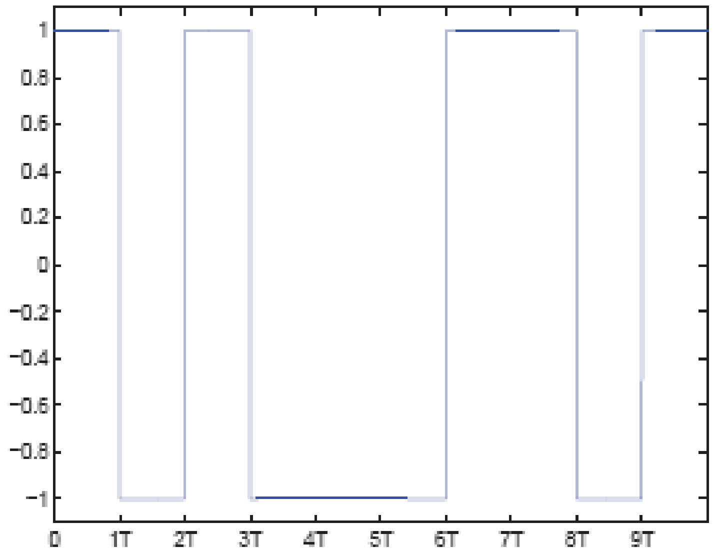
Exemple : Codage binaire unipolaire NRZ



$$1010001101 \longrightarrow 1010001101$$

Codage en ligne

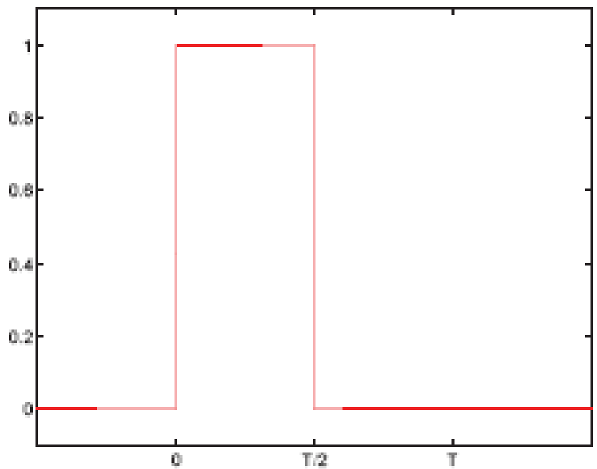
Exemple : Codage binaire antipolaire NRZ



1010001101 $\longrightarrow$ 1-11-1-1-111-11

Codage en ligne

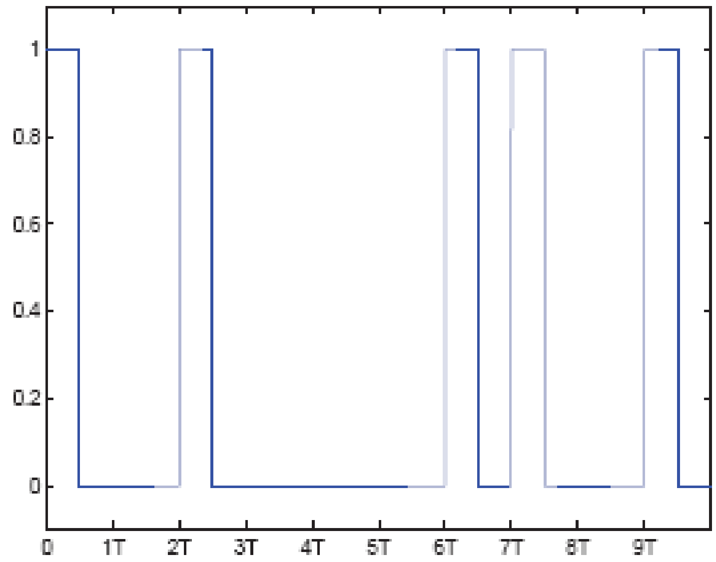
Filtre RZ (retour à zéro)



$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Codage en ligne

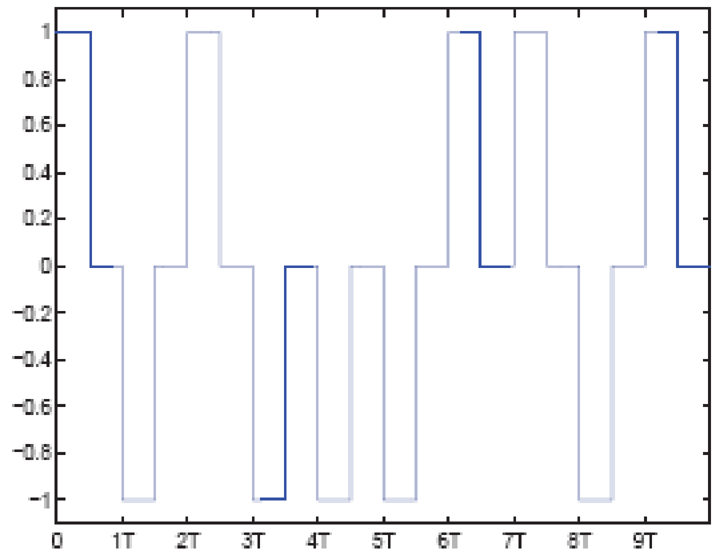
Exemple : Codage binaire unipolaire RZ



1010001101 $\longrightarrow$ 1010001101

Codage en ligne

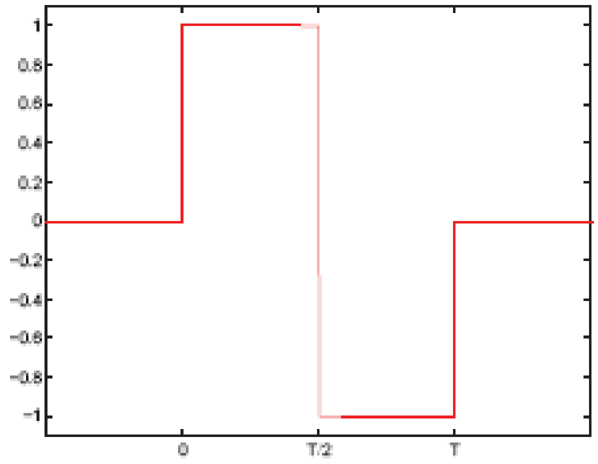
Exemple : Codage binaire antipolaire RZ



1010001101 $\longrightarrow$ 1-11-1-1-111-11

Codage en ligne

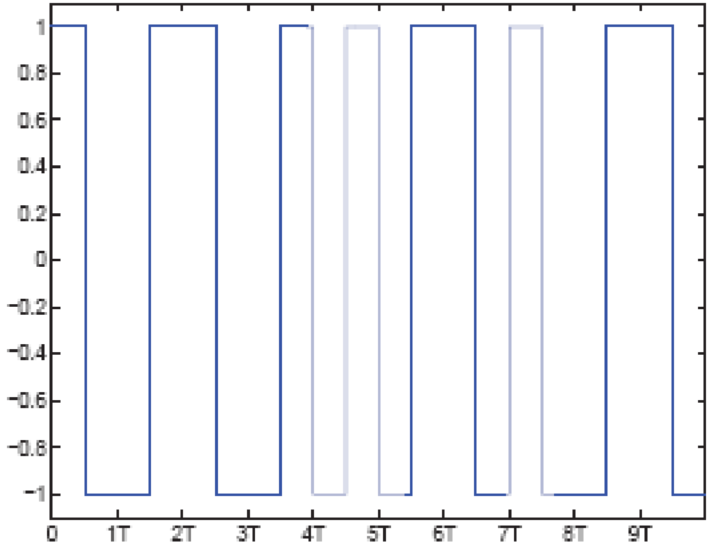
Filtre biphase Manchester



$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Codage en ligne

Exemple : Codage binaire antipolaire Manchester



1010001101 $\longrightarrow$ 1-11-1-1-111-11

Codage en ligne

Notion d'énergie

- Comment évaluer l'énergie totale du signal en bande de base $x(t)$?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) \right|^2 dt$$

- Si le support temporel de $h_e(t)$ est égal à T, on a :

$$E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |h_e(t - kT)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 E_{h_e}$$

- Problème : on ne connait pas les a_k a priori car ils sont aléatoires !
- Solution : au lieu de définir une énergie totale, on va définir une **énergie moyenne**

Codage en ligne

Energie moyenne par symbole

- L'énergie correspondant à l'émission d'un seul symbole a_i est

$$E_{a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} |a_i h_e(t)|^2 dt = |a_i|^2 E_{h_e}$$

- Si l'on suppose que tous les symboles du dictionnaire sont équiprobables, l'énergie moyenne par symbole peut donc être définie comme

$$\boxed{E_{sym} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E_{a_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}}$$

- Comme un symbole correspond à $m = \log_2 M$ bits, on peut aussi définir l'énergie moyenne par bit comme

$$\boxed{E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M\log_2 M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}}$$

Codage en ligne

Energie moyenne par symbole

En notant μ_a et σ_a^2 respectivement la moyenne et la variance des symboles du dictionnaire, on peut remarquer que :

$$
\begin{aligned}
\sigma_a^2 &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|a_i-\mu_a|^2 \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|a_i|^2-\frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M}|a_i||\mu_a|+\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|\mu_a|^2 \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|a_i|^2-|\mu_a|^2
\end{aligned}
$$

Donc on a aussi :

$$\boxed{E_{sym}=(\sigma_a^2+|\mu_a|^2)E_{h_e}}$$

Codage en ligne

Exemples

- Exemple : dictionnaire binaire antipolaire

$$E_{sym} = E_{bit} = \frac{1}{2}((-1)^2 + (1)^2)E_{h_e} = E_{h_e}$$

- Exemple : dictionnaire 2B1Q

$$E_{sym} = \frac{1}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2)E_{h_e} = 5E_{h_e}$$

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 4} = \frac{5}{2}E_{h_e}$$

Codage en ligne

Formules générales

On peut montrer que pour un dictionnaire M-aire

- unipolaire $a_k \in \{0, 1, \cdots, M-1\}$

$$E_{bit} = \frac{(M-1)(2M-1)}{\log_2 M} E_{h_e}$$

- antipolaire $a_k \in \{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\}$

$$E_{bit} = \frac{M^2-1}{3\log_2 M} E_{h_e}$$

Codage en ligne

Notion de puissance

- Chaque symbole est émis durant une période T, donc on peut définir la puissance moyenne totale du signal $x(t)$ comme

$$\boxed{P_x = \frac{E_{sym}}{T}}$$

- De la même façon, on peut définir la puissance moyenne totale du signal $x(t)$ comme

$$\boxed{P_x = \frac{E_{bit}}{T_b} = E_{bit}\ D_b}$$

- Pour simplifier, on appelle souvent P_x la puissance émise moyenne

Codage en ligne

Densité spectrale de puissance

- Le signal $x(t)$ est un signal aléatoire dont l'aspect fréquentiel doit donc être étudié grâce à une densité spectrale de puissance
- Il correspond au filtrage du signal aléatoire $a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$ par un filtre de fonction de transfert $H_e(f)$, sa densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ vérifie donc :

$$\Gamma_x(f) = |H_e(f)|^2 \Gamma_a(f)$$

- Si les symboles sont supposés équiprobables et indépendants, on a :

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Et donc :

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H_e(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|H_e\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

Codage en ligne

Propriétés spectrales des signaux en bande de base

$$\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|H_e(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|H_e\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Le dictionnaire utilisé influence μ_a et σ_a^2 : en particulier, si $\mu_a \neq 0$, on fait apparaître sur la DSP des raies fréquentielles aux fréquences multiples de $\frac{1}{T}$
- Le filtre de mise en forme utilisé conditionne la forme de la DSP : en particulier, lorsque l'on utilise un filtre NRZ, RZ ou biphase Manchester, on obtient un signal en bande de base, où la majorité de la puissance est répartie dans la bande $[-B \ , \ +B]$ où B est la largeur de bande du signal.
- Comme nous le verrons en Travaux Pratiques, à débit binaire constant, le dictionnaire et le filtre utilisés impactent directement la largeur de bande du signal

Codage en ligne

Liens entre les notions de puissance

- Nous avons défini *avec les mains* la puissance moyenne totale P_x du signal $x(t)$ comme étant :

$$P_x = \frac{E_{sym}}{T} = \frac{\sigma_a^2 + |\mu_a|^2}{T} E_{h_a}$$

- D'un autre côté, nous savons que par définition, on a :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$$

- Ces deux expressions sont-elles compatibles ?

Codage en ligne

Liens entre les notions de puissance

- Prenons le cas simple d'un dictionnaire antipolaire
- On a donc $\mu_a = 0$ et dans ce cas, la définition *avec les mains* nous donne :

$$P_x = \frac{E_{sym}}{T} = \frac{\sigma_a^2}{T} E_{h_e}$$

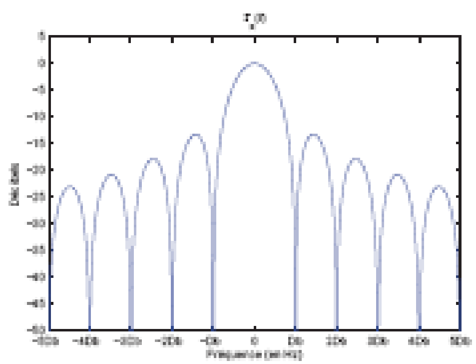
- En faisant le calcul à partir de la DSP, on trouve :

$$\begin{aligned}
P_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a^2}{T} |H_e(f)|^2 df \\
&= \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \\
&= \frac{\sigma_a^2}{T} E_{h_e}
\end{aligned}$$

- Les deux définitions sont donc parfaitement cohérentes !

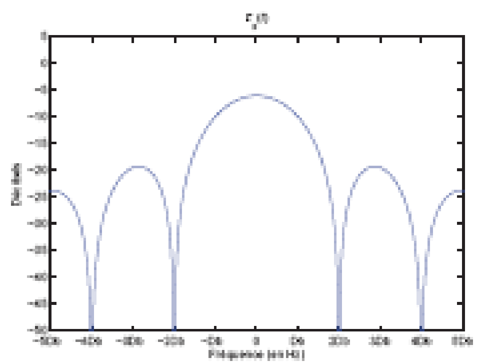
Codage en ligne

Quelques DSP des codes en ligne



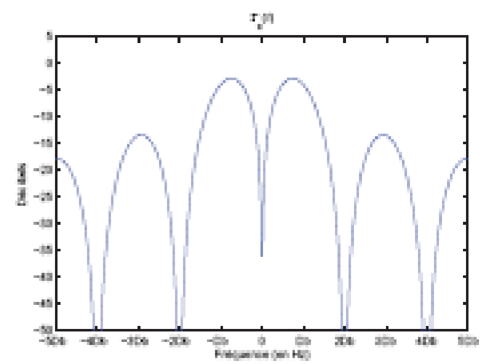
Filtre NRZ

$B \approx D_b \approx \frac{1}{T}$



Filtre RZ

$B \approx 2D_b \approx \frac{2}{T}$



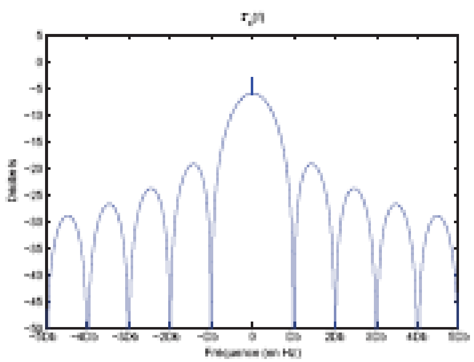
Filtre Manchester

$B \approx 2D_b \approx \frac{2}{T}$

$D_b = 1$ bit/seconde, $M = 2$, dictionnaire antipolaire

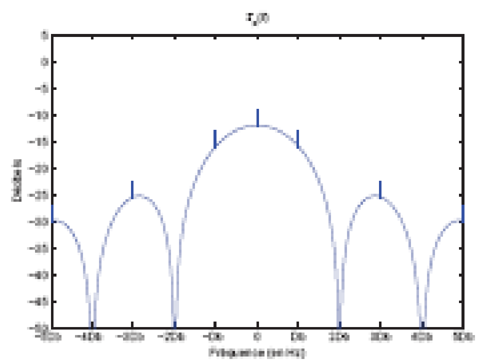
Codage en ligne

Quelques DSP des codes en ligne



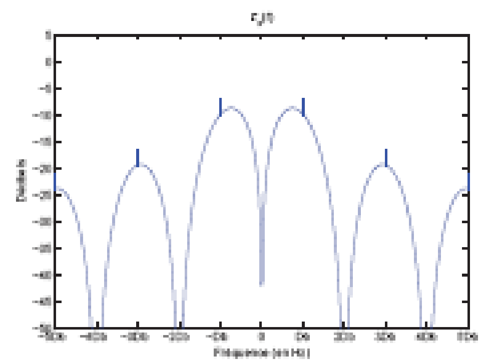
Filtre NRZ

$B \approx D_b \approx \frac{1}{T}$



Filtre RZ

$B \approx 2D_b \approx \frac{2}{T}$



Filtre Manchester

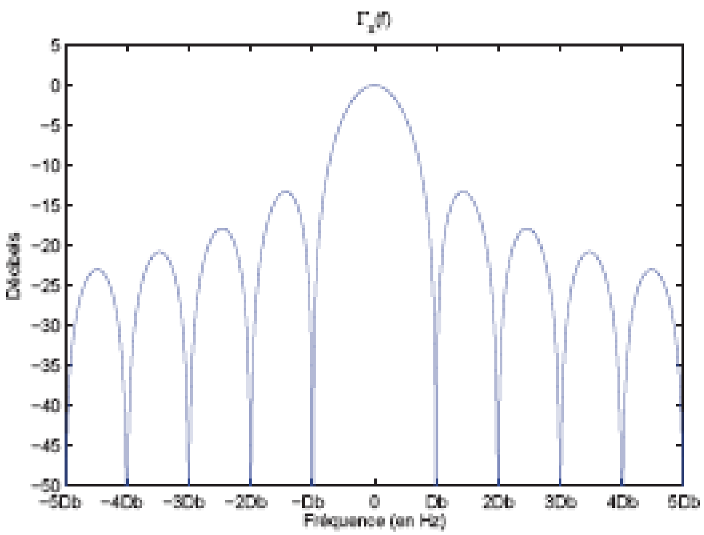
$B \approx 2D_b \approx \frac{2}{T}$

$D_b = 1$ bit/seconde, $M = 2$, dictionnaire unipolaire

Idem au dictionnaire antipolaire, mais apparition de raies fréquentielles pour $f = \frac{k}{T}$

Codage en ligne

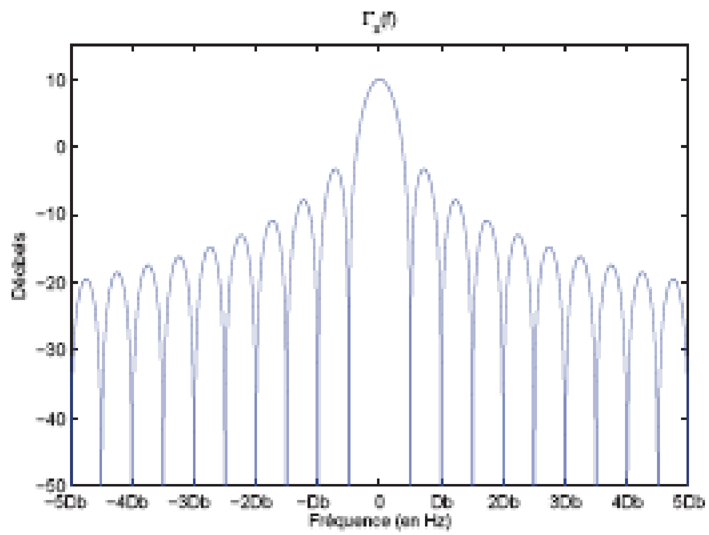
Quelques DSP des codes en ligne



Filtre NRZ

$M = 2$

$B \approx D_b \approx \frac{1}{T}$



Filtre NRZ

$M = 4$

$B \approx \frac{D_b}{2} \approx \frac{1}{2T}$

$D_b = 1$ bit/seconde, dictionnaire antiipolaire

A débit binaire, dictionnaire et filtre constant, lorsque M augmente, la largeur de bande diminue

Codage en ligne

Quelques DSP des codes en ligne : conclusion

- Dictionnaire antipolaire :

$$B_{NRZ} \approx \frac{1}{T}$$

$$B_{RZ} \approx \frac{2}{T}$$

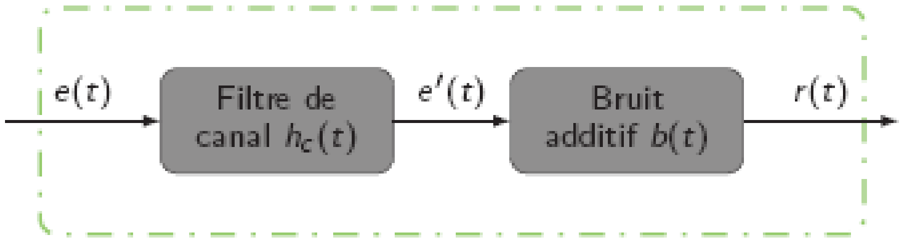
$$B_{Manchester} \approx \frac{2}{T}$$

- Dictionnaire unipolaire : idem + apparition de raies fréquentielles pour $f = \frac{k}{T}$

Transmission en absence de bruit

Transmission en absence de bruit

Transmission en absence de bruit



Canal de transmission

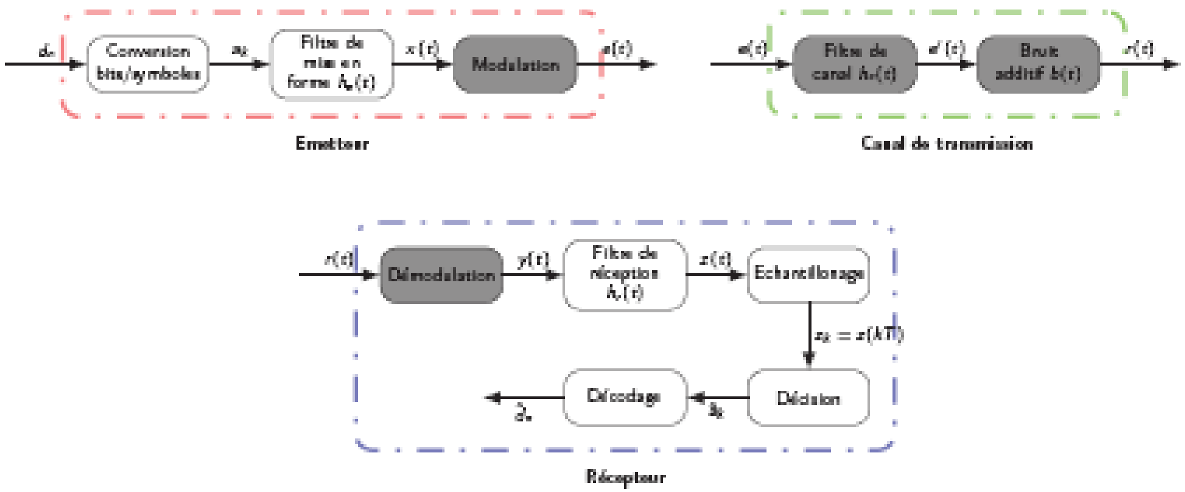
Rappel :

- On travaille en bande de base
- On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire $H_c(f) = 1$ (bande passante du canal infinie)
- Ici, on suppose une absence de bruit $b(t) = 0$

$$r(t) = e(t)$$

Transmission en absence de bruit

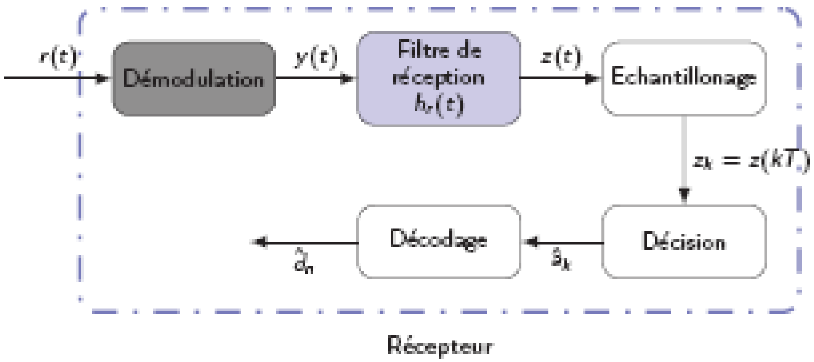
Transmission en absence de bruit



$$y(t) = x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)$$

Transmission en absence de bruit

Récepteur : filtre de réception



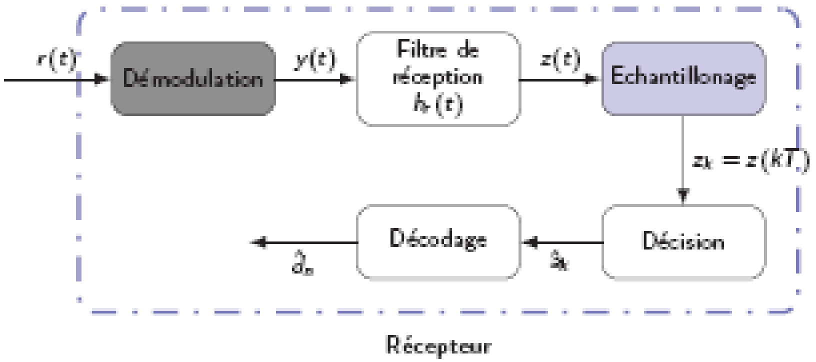
$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\right) * h_r(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) \text{ avec } h = h_e * h_r$$

Transmission en absence de bruit

Récepteur : échantillonnage



Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} h(kT - k'T)$$

$$z_k = a_k h(0) + \sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T)$$

Transmission en absence de bruit

Interférence entre symboles (IES)

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k-k')T)}_{\text{IES}}$$

- Problème : pour retrouver a_k à partir de z_k, il y a un terme parasite qui dépend des symboles émis avant et après : interférence entre symboles
- Si l'on veut que ce terme soit nul, il faut que

$$h(kT) = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$h(kT) = h(0)\delta(k) \text{ : condition de Nyquist}$$

Transmission en absence de bruit

Filtres de Nyquist

Filtres de Nyquist : filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ telle que

$$h(kT) = h(0)\delta(k) \text{ et } h(0) \neq 0$$

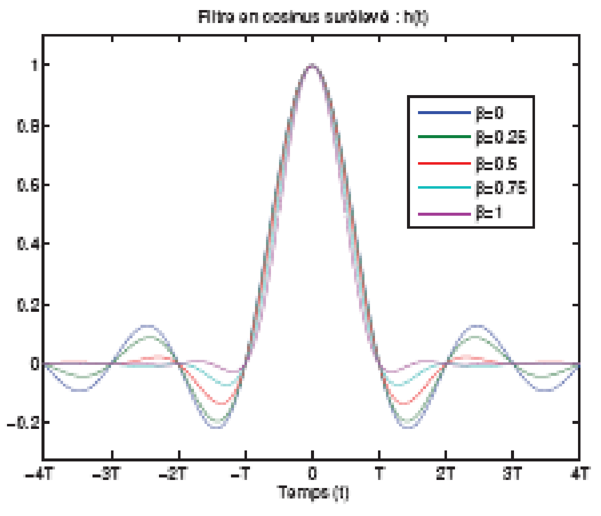
Exemples :

- Filtres à support temporel borné centré et strictement inférieur à $2T$
- Filtres à support temporel non borné mais s'annulant à tous les multiples de T
  - Exemple important : filtre en cosinus surelevé $(0 \leq \beta \leq 1)$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi\beta t/T)}{1-(2\beta t/T)^2}$$

Transmission en absence de bruit

Filtre en cosinus surélevé



$$0 \leq \beta \leq 1$$

- Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - (2\beta t/T)^2}$$

- Support temporel infini

Transmission en absence de bruit

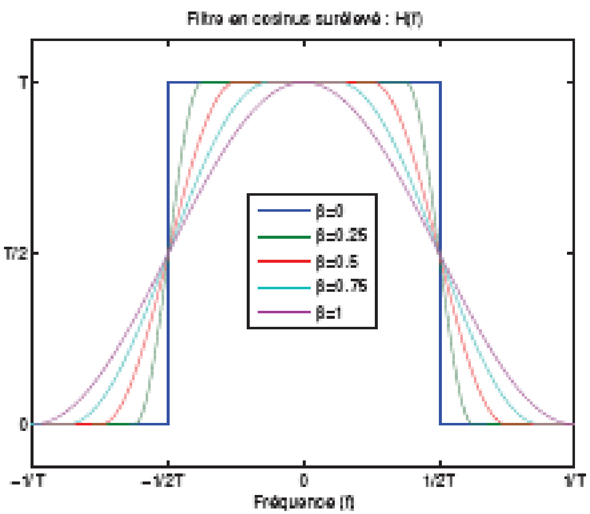
Filtre en cosinus surélevé

Fonction de transfert :

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\beta}(|f| - \frac{1-\beta}{2T})\right)\right] & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Transmission en absence de bruit

Filtre en cosinus surélevé



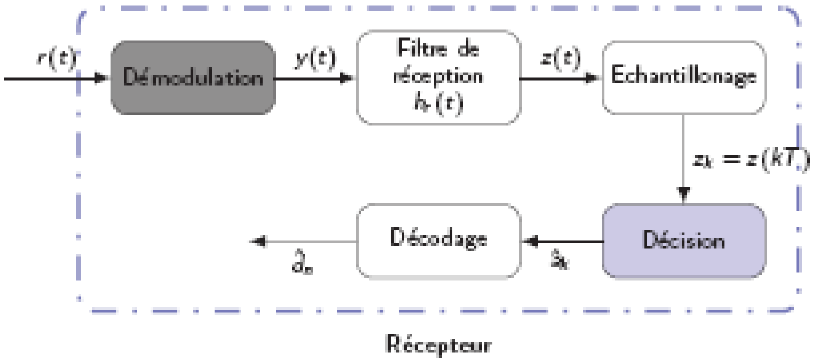
- Bande passante :

$$BP = \frac{1+\beta}{2T}$$

comprise entre $\frac{1}{2T}$ et $\frac{1}{T}$

Transmission en absence de bruit

Décision en absence de bruit



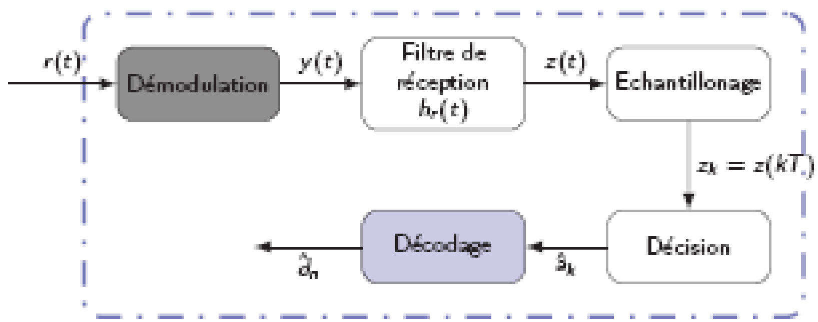
Si l'on suppose que $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist, alors l'IES est nulle et on a donc

$$z_k = a_k h(0)$$

En connaissant $h(0)$ on peut donc estimer $\hat{a}_k = \frac{z_k}{h(0)}$. La probabilité d'erreur symbole est ici nulle car $\hat{a}_k = a_k$

Transmission en absence de bruit

Décodage en absence de bruit



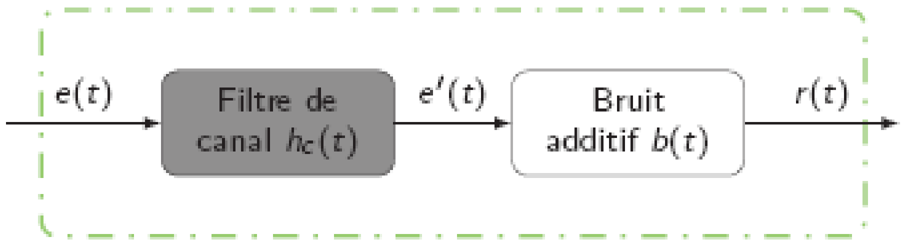
Récepteur

En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver $\hat{d}_n$ à partir de $\hat{a}_k = a_k$ de façon parfaite.
La probabilité d'erreur binaire est nulle car $\hat{d}_n = d_n$.

Transmission en présence de bruit

Transmission en présence de bruit

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien



Canal de transmission

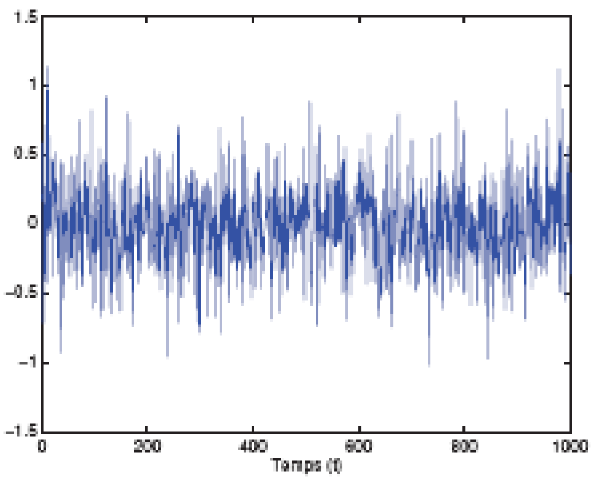
Rappel :

- On travaille en bande de base ($e(t) = x(t)$, $r(t) = y(t)$)
- On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire $H_c(f) = 1$ (bande passante du canal infinie)
- Ici, on suppose que $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

Transmission en présence de bruit

Bruit blanc gaussien



Ici $\sigma^2 = 0.1$

- Signal aléatoire : on ne peut pas savoir quelles valeurs le signal va prendre, donc on utilise des probabilités
- Caractérisation par la moyenne (nulle pour un bruit blanc) et la variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
- A priori, le signal peut prendre n'importe quelle valeur, on sait juste que plus cette valeur est éloignée de la moyenne, moins elle est probable
- Plus la variance est elevée, plus le signal a le droit de prendre des valeurs éloignées de la moyenne

Transmission en présence de bruit

Bruit gaussien

Fonction de Marcum $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

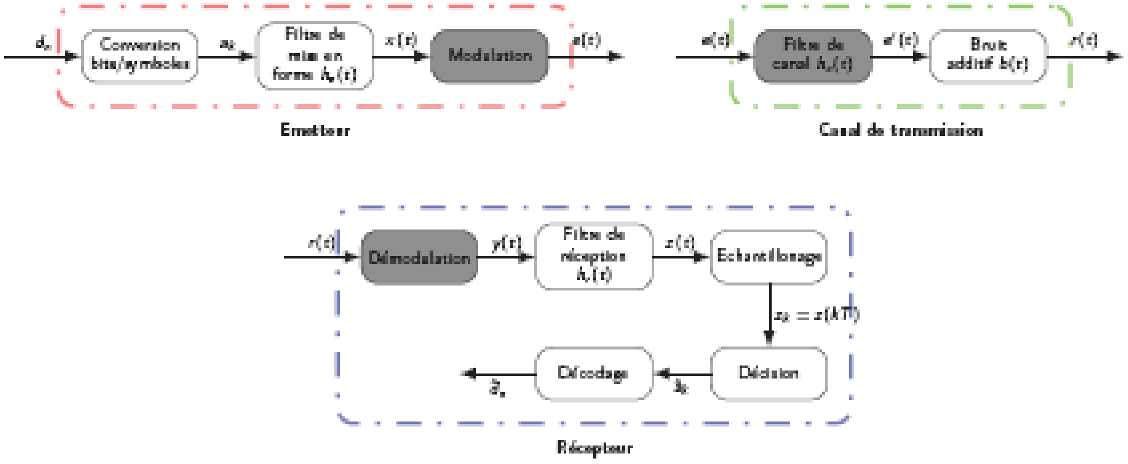
Si $b(t)$ est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2

$$p(b(t) > b_0) = Q\left(\frac{b_0}{\sigma}\right) \qquad p(b(t) < b_1) = Q\left(-\frac{b_1}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)$$

$$p(b_0 < b(t) < b_1) = Q\left(\frac{b_0}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)$$

Transmission en présence de bruit

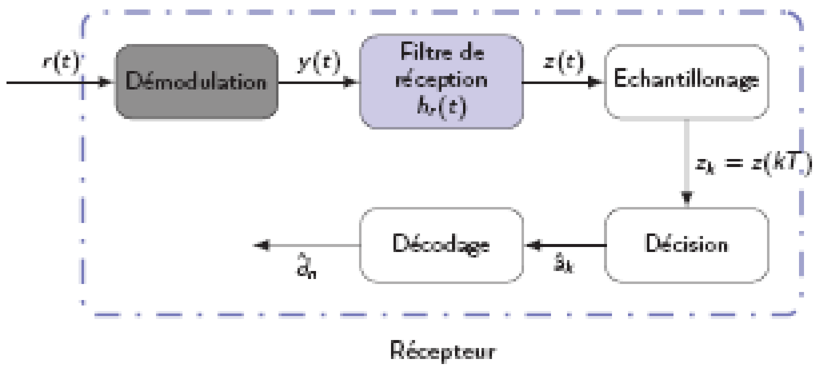
Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien



$$y(t) = x(t) + b(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) + b(t)$$

Transmission en présence de bruit

Récepteur : filtre de réception

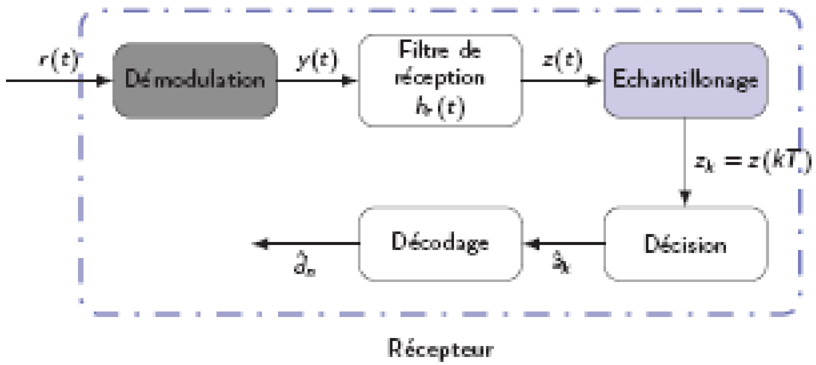


$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) + n(t) \text{ avec } h = h_e * h_r \text{ et } n = b * h_r$$

Transmission en présence de bruit

Récepteur : échantillonnage



Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} h(kT - k'T) + n(kT)$$

$$z_k = a_k h(0) + \sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T) + n(kT)$$

Transmission en présence de bruit

Récepteur optimal

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k-k')T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

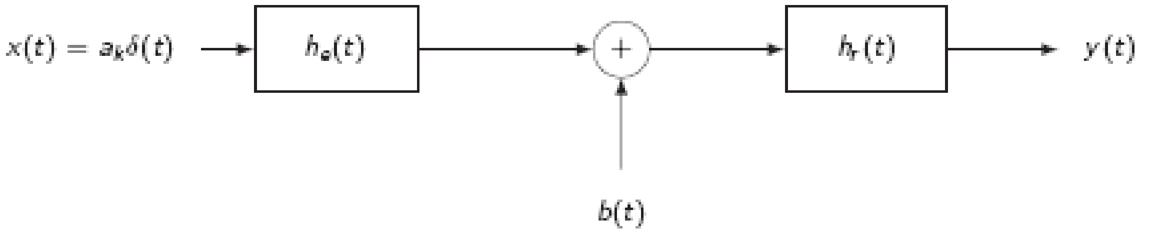
- Si on veut faire le moins d'erreur possible, il faut que l'IES soit nulle et que l'influence du bruit soit la plus faible possible.
- On a déjà vu que pour que l'IES soit nulle : $h = h_e * h_r$ doit être un filtre de Nyquist

$$h(kT) = (h_e * h_r)(kT) = h(0)\delta(k)$$

- Comment choisir le filtre de réception $h_r(t)$ pour que l'influence du bruit soit la plus faible possible ?
  - cf TD 1 : maximisation du rapport signal sur bruit $SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$
  - h_r doit être le filtre adapté à h_e

Transmission en présence de bruit

Rappel : filtrage adapté



- Pour maximiser le rapport signal sur bruit en sortie du récepteur il faut

$$H_r(f) = H_e^*(f) \quad \text{ce qui implique} \quad h_r(t) = h_e^*(-t)$$

- Dans ce cas, le rapport signal sur bruit vaut

$$SNR = \frac{2E_{h_e}}{N_0}$$

Transmission en présence de bruit

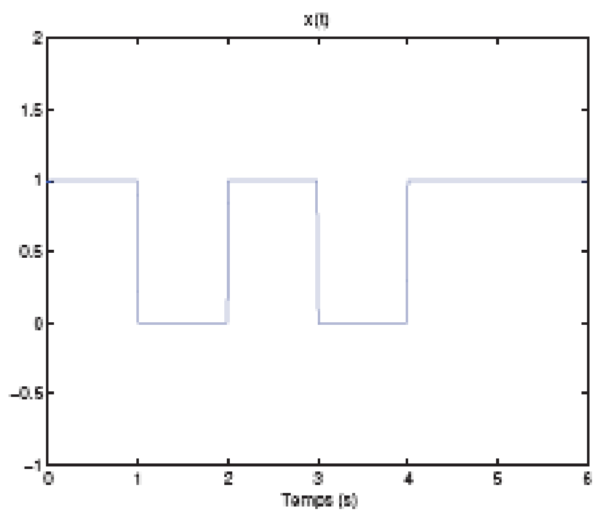
Récepteur optimal : domaine temporel

Dans le domaine temporel :

- Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a $h_r(t) = h_e(-t)$ (on suppose ici que les filtres sont réels)
- On a donc $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$
- On veut que h soit un filtre de Nyquist
- Cas simple : si $h_e(t)$ a un support strictement inférieur à T, alors en prenant $h_r(t) = h_e(-t)$, h est un filtre de Nyquist (ex : filtre NRZ, RZ, biphase Manchester...)

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre NRZ

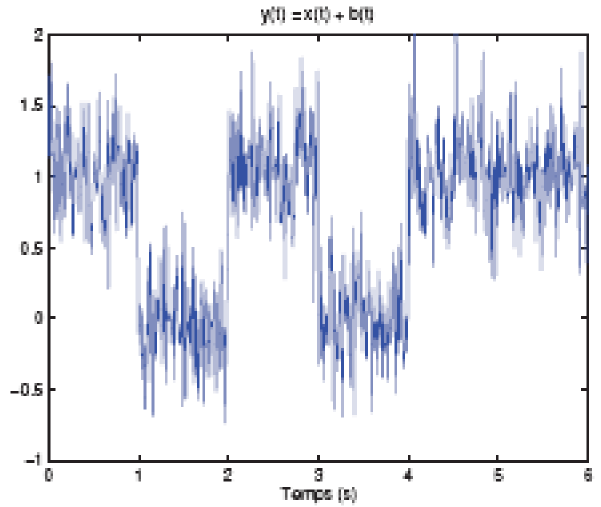


Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre NRZ avec une période symbole T=1s

$x(t)$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre NRZ

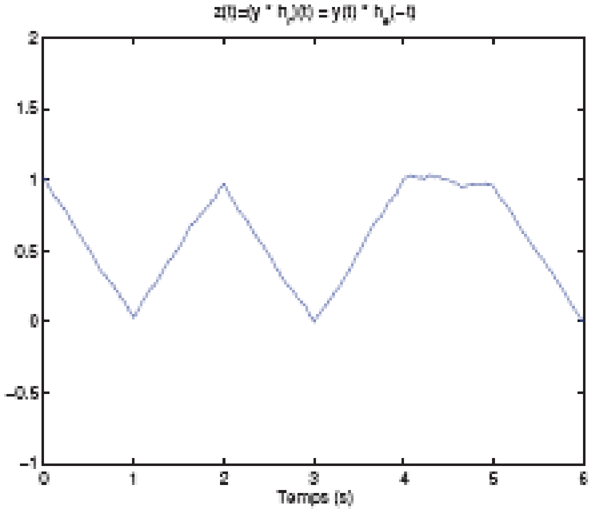


Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien $b(t)$ de variance σ^2=0.1

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre NRZ

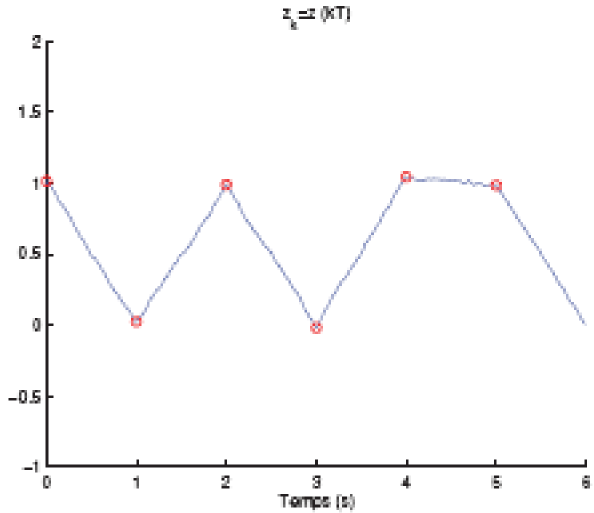


Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre NRZ



Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole T on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

Transmission en présence de bruit

Récepteur optimal : domaine fréquentiel

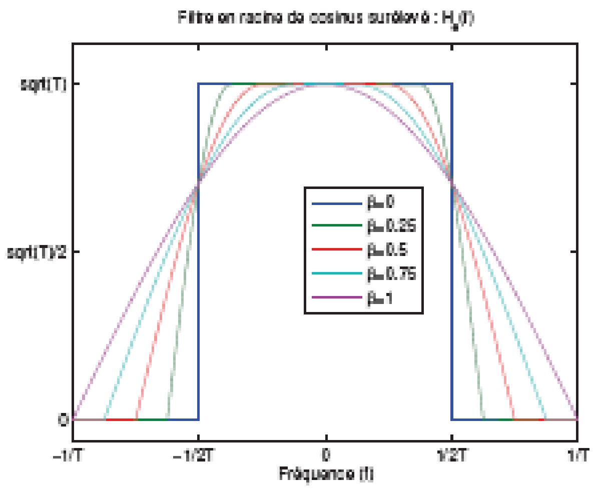
Dans le domaine fréquentiel :

- Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a $H_r(f) = H_e^*(f)$
- On a donc $H(f) = H_e(f)H_r(f) = |H_e(f)|^2$, qui est réel et positif
- Cas simple : partir d'un filtre de Nyquist de réponse fréquentielle $H(f)$ réelle et positive et prendre

$$H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$$

Transmission en présence de bruit

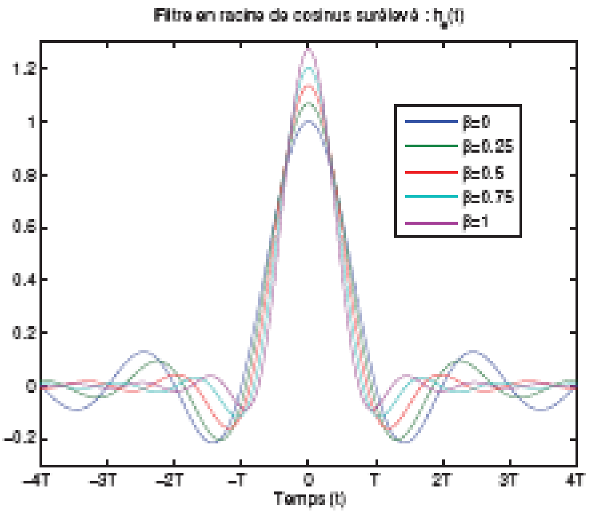
Filtre en racine de cosinus surelevé



- Dans le domaine fréquentiel : racine de la fonction de transfert d'un filtre en cosinus surelevé
- Bande passante $BP = \frac{1+\beta}{2T}$

Transmission en présence de bruit

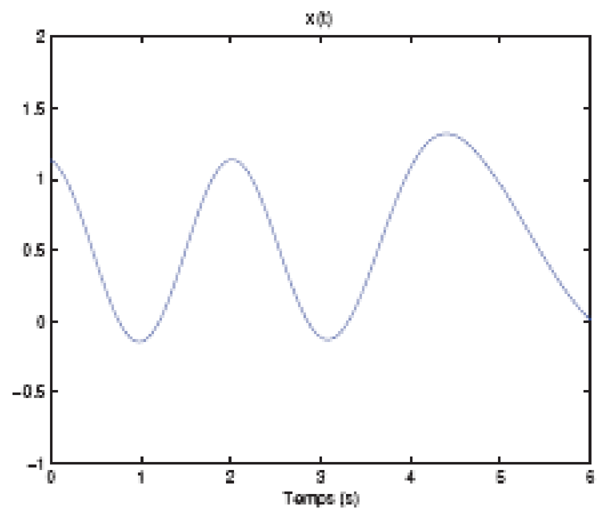
Filtre en racine de cosinus surelevé



- Dans le domaine temporel : ce n'est plus un filtre de Nyquist (pas d'annulation aux multiples de T)
- En revanche, $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$ est un filtre de Nyquist

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre RCS

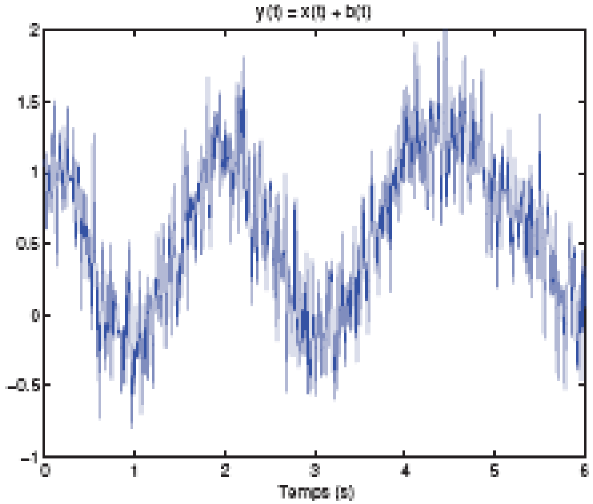


Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre TRC avec une période symbole T=1s

$$x(t)$$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre RCS

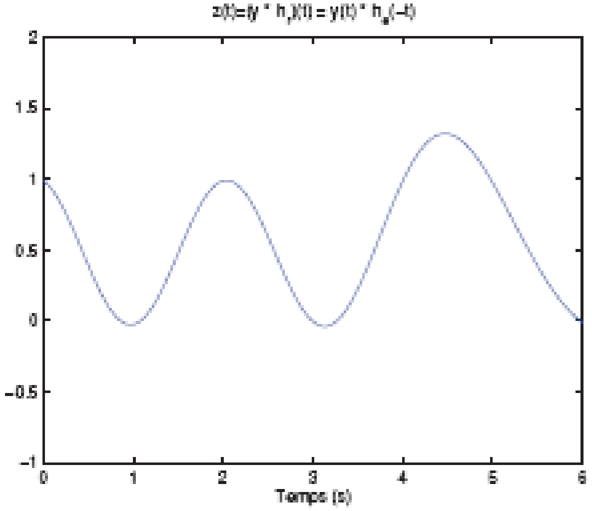


Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien $b(t)$ de variance σ^2=0.1

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre RCS

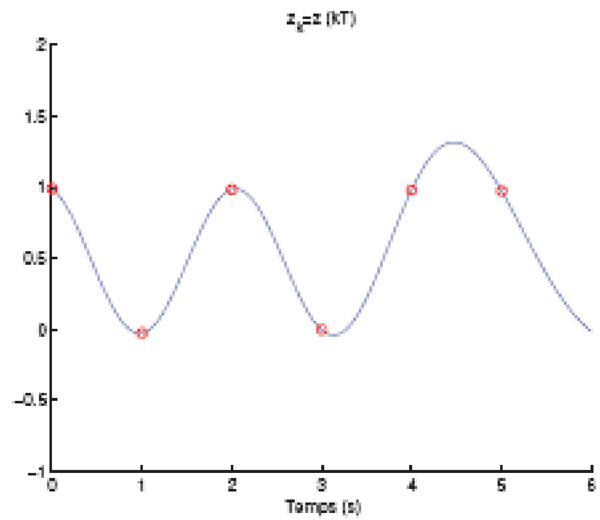


Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

Transmission en présence de bruit

Exemple : filtre RCS



Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole T on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

Transmission en présence de bruit

Récepteur optimal : bilan

Conditions :

- $h_r(t)$ doit être le filtre adapté $h_e(t)$ pour maximiser le SNR en sortie du récepteur
$$h_r(t) = h_e(-t) \qquad H_r(f) = H_e^*(f)$$
- $h = h_e * h_r$ doit être un filtre de Nyquist
$$h(kT) = h(0)\delta(k)$$

Deux cas simples de filtres formant un récepteur optimal

- $h_e(t)$ de support temporel inférieur à T, et $h_r(t) = h_e(-t)$
- OU $H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$ où $H(f)$ est un filtre de Nyquist

Transmission en présence de bruit

Récepteur optimal : conséquences

Rappel :

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{l \neq k} a_l h((k-l)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

Si le récepteur est optimal (ce qui sera le cas dans la suite du cours) :

- IES $= 0$
- $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(f) H_e^*(f) df = E_{h_e}$

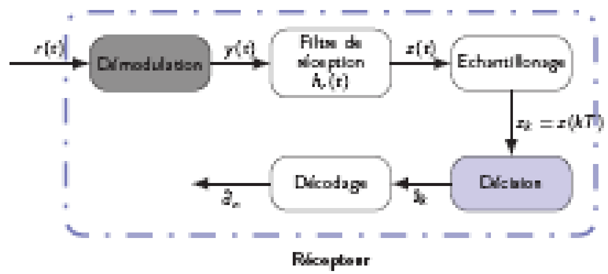
Donc :

$$z_k = E_{h_e} a_k + n(kT)$$

$\longrightarrow$ Il va falloir estimer $\hat{a}_k$ à partir de z_k, malgré le bruit

Transmission en présence de bruit

Décision



Etape supplémentaire à cause de la présence de bruit : il faut affecter une valeur de symbole à chaque z_k

Exemple : $z_k = 1.26E_{h_e} \rightarrow \hat{a}_k = 1$, $z_k = -0.34E_{h_e} \rightarrow \hat{a}_k = 0$, etc...

Transmission en présence de bruit

Décision par seuil : cas binaire

- Idée : utiliser un seuillage pour décider de la valeur de chaque symbole
- Exemple : codage binaire antipolaire $a_k = 1$ ou $a_k = -1$ (qu'on suppose équiprobable)
  - On a donc $z_k = E_{h_e} + n(kT)$ ou $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$
  - $n(kT)$ est aléatoire et gaussien, de moyenne nulle
  - Une idée intuitive est de seuiller :
    - si $z_k > 0$ alors $\hat{a}_k = 1$
    - sinon $\hat{a}_k = -1$

Transmission en présence de bruit

Décision par seuil : cas M-aire

Dans le cas de M symboles, on utilise le même principe

- On calcule $\frac{z_k}{E_{h_e}}$ et on regarde quel symbole du dictionnaire est le plus proche (au sens de la distance euclidienne)
- On décide ensuite que $\hat{a}_k$ est ce symbole

Exemple : $M = 4$ et $\frac{z_k}{E_{h_e}} = 1.56 \quad 3.82 \quad 2.10 \quad -2.10$

$$\longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad -3$$

Transmission en présence de bruit

Probabilité d'erreur

Si le bruit est trop important, on risque de faire des erreurs

Probabilité d'erreur par symbole

$$P_{sym}^{err} = p(\hat{a}_k \neq a_k)$$

Cette erreur sur les symboles se répercute ensuite sur les bits après décodage.

Probabilité d'erreur par bit

$$P_{bit}^{err} = p(\hat{d}_n \neq d_n)$$

Transmission en présence de bruit

Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

Supposons que l'on utilise un dictionnaire binaire antipolaire ($a_k = 1$ ou $a_k = -1$).
Quelle est la probabilité de faire une erreur sur le symbole ?

- On a soit $z_k = E_{h_e} + n(kT)$, soit $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$
- On a déjà vu que $P_n = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0 E_{h_e}}{2}$ (car le récepteur est supposé optimal)
- $n(t)$ est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma_n^2 = P_n$
- Intuitivement on va dire que si $z_k > 0$, alors $\hat{a}_k = 1$, et sinon $\hat{a}_k = -1$

Transmission en présence de bruit

Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

Quand va-t-on faire une erreur ? 2 cas :

- Quand $a_k = -1$ et que $z_k > 0$
- Quand $a_k = 1$ et que $z_k < 0$

Transmission en présence de bruit

Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

- Si $a_k = -1$ alors $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$. Si on a $z_k > 0$, c'est donc que $n(kT) > E_{h_e}$. Or $n(t)$ est gaussien de moyenne nulle et de variance P_n donc

$$p(n(kT) > E_{h_e}) = Q\left(\frac{E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

- Si $a_k = 1$ alors $z_k = E_{h_e} + n(kT)$. Si on a $z_k < 0$, c'est donc que $n(kT) < -E_{h_e}$. Or $n(t)$ est gaussien de moyenne nulle et de variance P_n donc

$$p(n(kT) < -E_{h_e}) = 1 - Q\left(\frac{-E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\frac{E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

Finalement comme les a_k sont équiprobables,

$$P_{sym}^{err} = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

Transmission en présence de bruit

Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)

Généralisation (admise) : on peut montrer qu'avec un dictionnaire antipolaire à M éléments, on a

$$P_{sym}^{err} = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

- Remarque : on retrouve bien notre expression quand $M = 2$!
- La probabilité d'erreur dépend du nombre de symboles du dictionnaire M, de la variance du bruit blanc additif gaussien $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, et de l'énergie du filtre de mise en forme/filtre de réception E_{h_e}.

Transmission en présence de bruit

Energie moyenne par bit

Rappel : Dans le cas d'un dictionnaire antipolaire à M symboles, on peut montrer que

$$E_{bit} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{h_e}$$

où E_{bit} est l'énergie moyenne par bit émis. On a aussi $E_{bit} = P_e D_b$ où P_e est la puissance émise moyenne et D_b le débit binaire.

Transmission en présence de bruit

Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)

Avec cette définition, on peut réécrire pour un dictionnaire M-aire antipolaire

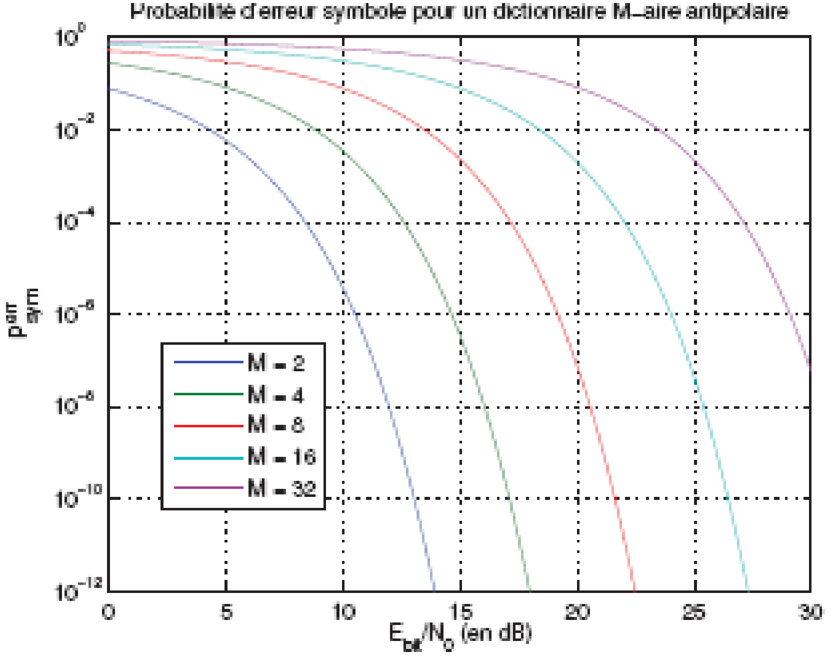
$$P_{sym}^{err} = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

- Pour minimiser P_{sym}^{err}, il faut augmenter E_{bit} donc soit augmenter la puissance émise moyenne P_e, soit diminuer le débit binare D_b
- A $\frac{E_{bit}}{N_0}$ fixé, plus on augmente M, plus la probabilité d'erreur augmente
- Remarque : si on utilise un codage de Grey on a

$$P_{bit}^{err} \approx \frac{P_{sym}^{err}}{\log_2 M}$$

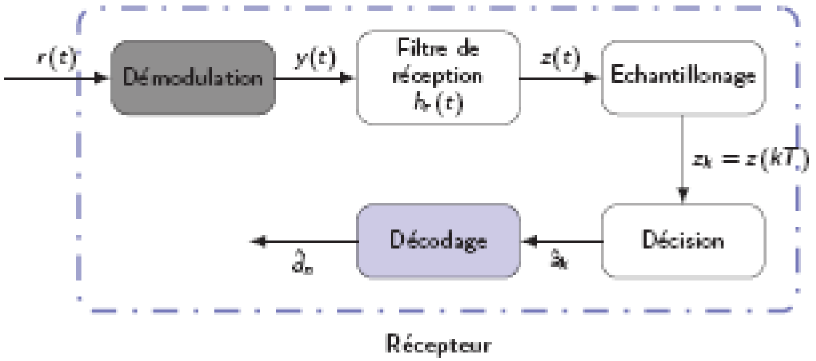
Transmission en présence de bruit

Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)



Transmission en présence de bruit

Décodage



En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver $\hat{d}_n$ à partir de $\hat{a}_k = a_k$. La probabilité d'erreur binaire dépend de la probabilité d'erreur par symbole et du dictionnaire utilisé.

Récapitulatif

Récapitulatif

Bande passante du canal

- Pour le moment, on a considéré que le canal était idéal et avait une bande passante infinie ($H_c(f) = 1$)
- En réalité, la bande passante du canal BP est limitée et le canal est plutot de la forme

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -BP < f < BP \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ceci est du
  - soit à la nature physique du canal (ex : type de câble, atténuation du signal sur de grandes distances, etc...)
  - soit à des réglementations (ex : bande de fréquence achetée par un opérateur téléphonique, etc...)

Récapitulatif

Transmission en bande de base

- Afin de transmettre le plus d'information possible on fait en sorte d'utiliser toutes les capacités du canal, mais sans les dépasser !
- Si l'on connait la bande passante du canal (ce qui est en pratique toujours le cas), on va faire en sorte que la largeur du bande du signal en bande de base soit du même ordre

$$B \approx BP$$

- En effet, si $B > BP$ de l'information sera perdue lors de la transmission, et si $B < BP$ alors on a tendance à être plus sensible au bruit
- Connaissant la bande passante du canal de transmission, la largeur de bande va donc être fixée. Ceci va contraintre les choix de dictionnaire, filtres de mise en forme, etc...

Récapitulatif

Paramètres d'une chaîne de transmission

- D_b : débit binaire (en bits/seconde)
- B : largeur de bande occupée (en Hz) (égale à la bande passante BP du canal).
- $P_x = E_{bit} D_b$: puissance émise moyenne (en W)
- P_{bit}^{err} : probabilité d'erreur par bit

On veut D_b le plus grand possible, P_x et P_{bit}^{err} les plus petits possibles, et $B = BP$ est souvent fixe.

Récapitulatif

Evaluation d'une chaîne de transmission

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{T\ B}$$

η le plus grand possible : D_b maximal et B minimal

Taux d'erreur binaire

$$TEB = \frac{\text{nombre de bits mal détectés}}{\text{nombre total de bits emis}}$$

NB : P_{bit}^{err} est le TEB quand le nombre total de bits est infini

Récapitulatif

Dimensionnement d'une chaîne de transmission

- Principe : on a des contraintes sur D_b, B ($=BP$), P_x et/ou P_{bit}^{err}
- Selon l'application et le type de transmission, on va réaliser des compromis entre ces paramètres
- On va choisir en fonction de ces contraintes le dictionnaire (valence + type de dictionnaire) et les filtres d'émission/réception

Communications Numériques

Chapitre 4
Modulations numériques