1 Produit de convolution et Dirac

On définit :

- Un signal d'entrée $a(t)$ défini par :
$$a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$
avec $T > 0$ et $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$
- Un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \text{ seconde} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de calculer la sortie du filtre $x(t)$ définie par :

$$x(t) = (a * h)(t)$$

1. Tracer $h(t)$.
2. On pose $T = 2$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tracer $a(t)$ et $x(t)$
3. Même question pour $T = 1$ seconde et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. Même question pour $T = 0.5$ secondes et $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Transformée de Fourier

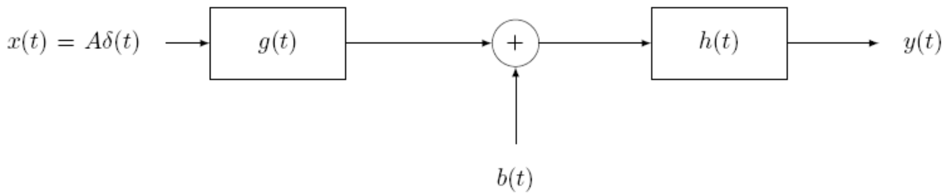
Dans cet exercice on notera $x(t)$ le signal temporel et $X(f)$ sa transformée de Fourier. On rappelle aussi la définition complexe des fonctions trigonométriques :

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

1. Montrer que $X^*(f) = \mathcal{TF}\{x^*(-t)\}$
2. Montrer que $\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
3. Calculer $\mathcal{TF}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$ en fonction de $X(f)$
4. Calculer et tracer la transformée de Fourier de
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 Filtrage adapté

On considère le système suivant :



On suppose que $b(t)$ est un bruit blanc additif gaussien de densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et que $x(t) = A\delta(t)$ où A est un réel.

1. Ecrire $y(t)$ en fonction de A, $b(t)$, $g(t)$ et $h(t)$. Identifier la partie liée au signal et celle liée au bruit.
2. Sans perte de généralité, on se place à l'instant $t = 0$. Notre but est de retrouver la valeur de A à partir de $y(0)$ (malgré le bruit !). Ecrire $y(0)$ sous la forme $y(0) = \alpha A + \beta(0)$ où α est un terme scalaire calculable et $\beta(t)$ un signal aléatoire.
3. On cherche à maximiser nos chances de retrouver A dans le signal bruité $y(0)$. Pour cela, on va tenter de maximiser le rapport signal sur bruit SNR défini par :

$$SNR = \frac{\alpha^2}{P_\beta}$$

   où P_β est la puissance moyenne totale du signal aléatoire $\beta(t)$.

   (a) En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculer α en fonction de $G(f)$ et $H(f)$.
   (b) En utilisant les densités spectrales de puissance, calculer P_β en fonction de N_0 et $H(f)$.
   (c) En déduire l'expression du rapport signal sur bruit en fonction de $G(f)$, $H(f)$ et N_0.

4. Notre but est de trouver le filtre $H(f)$ qui permet de maximiser ce rapport signal sur bruit. Pour cela, on rappelle l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} c(x)d^*(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |d(x)|^2 dx\right)$$

   On rappelle aussi que l'égalité dans cette équation a lieu si et seulement si $c = \lambda d$ où λ est un réel.

   (a) En notant $E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$ l'énergie totale de $g(t)$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, donner une majoration du rapport signal sur bruit.
   (b) Quelle est la condition sur $G(f)$ et $H(f)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal ?
   (c) En déduire la condition sur $g(t)$ et $h(t)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal.
   (d) Quelles sont les valeurs du SNR et de α dans ce cas ? Que vaut $y(0)$ quand $\lambda = 1$?

4 Décibels

1. Calculer en décibels les valeurs suivantes (de façon approximative):

   (a) 3×10^{-3}
   (b) $\frac{1}{6}$
   (c) 2.5×10^{-15}

2. Calculer en linéaire les valeurs suivantes (de façon approximative):

   (a) 3 dB
   (b) -120 dB