Communications Numériques

Chapitre 4
Modulations Numériques

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Modulation par déplacement d’amplitude (ASK)
3. Modulation par déplacement de phase (PSK)
4. Modulations par déplacement d’amplitude et de phase (APSK)
5. Modulation par déplacement de fréquence (FSK)

Introduction

Introduction

Transmission en bande de base

- Pour le moment, tous les signaux physiques générés ont une largeur de bande que l'on peut écrire :
  - filtre NRZ : $B \approx \frac{1}{T}$
  - filtre RZ : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre biphase Manchester : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre en racine de cosinus surelevé : $B = \frac{1+\beta}{2T}$
  - largeur de bande minimale (Nyquist) : $B = \frac{1}{2T}$
- On a vu en TP que B dépendait du filtre de mise en forme $h_e(t)$, du débit binaire D_b, et de la taille M de l'alphabet utilisé
- Les densités spectrales de puissance des signaux en bande de base sont centrées sur la fréquence $f_0 = 0$.
- Si le canal a une bande passante limitée, on cale la largeur de bande occupée du signal sur les caractéristiques du canal : on utilise toute la bande passante disponible.

Introduction

Limites de la bande de base

- Impossible de diviser le canal en sous-canaux pour transmettre plusieurs communications à la fois (multiplexage fréquentiel)
- Impossible de créer une onde électromagnétique pour la transmission sans fil (si on émet une onde à 30 Hz, on a une longueur d'onde de 10000 km !)
- Chaque type de communication correspond à une bande de fréquence répertoriée :
  - TNT terrestre : 470 MHz à 830 MHz
  - GSM (900) : 880 MHz à 960 MHz
- Nécessité de pouvoir créer des signaux dans une bande de fréquence donnée
- Les caractéristiques de cette bande dépendent du canal où l'on veut transmettre et du type de communication

Introduction

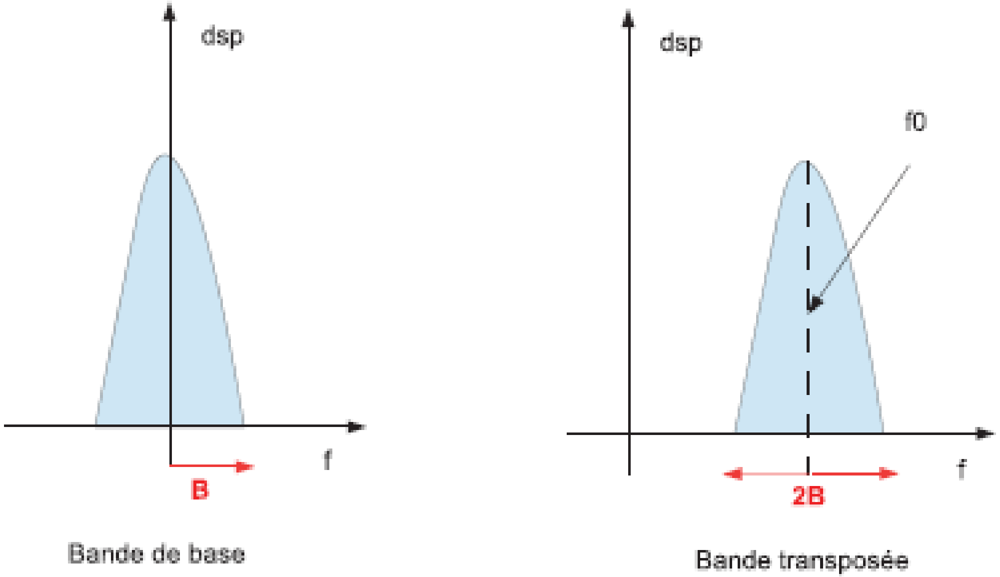
Bande de base vs. Modulation

- Bande de base
  - Transmission des signaux dans leur bande de fréquence originale
  - Utilisation de la totalité de la bande passante du canal BP
  - Signaux électriques et lumineux : câbles USB, Ethernet, fibres optiques, etc...
- Bande transposée (ou large de bande)
  - Transmission des signaux dans une bande de fréquence donnée
  - Eventuellement, division de la bande passante disponible en plusieurs canaux
  - Ondes électromagnétiques, signaux électriques et optiques : réseau hertzien, infra-rouge, laser, câbles ADSL, etc...

Modulation : transformation du signal en bande de base pour l'adapter au canal de transmission

Introduction

Bande de base vs. Modulation



Attention, si la largeur de bande en bande de base est (par exemple) $\frac{1}{T}$, alors en bande modulée, cela correspond à une largeur de bande $\frac{2}{T}$ (et inversement)

$$B_{MOD} = 2B_{BB}$$

Introduction

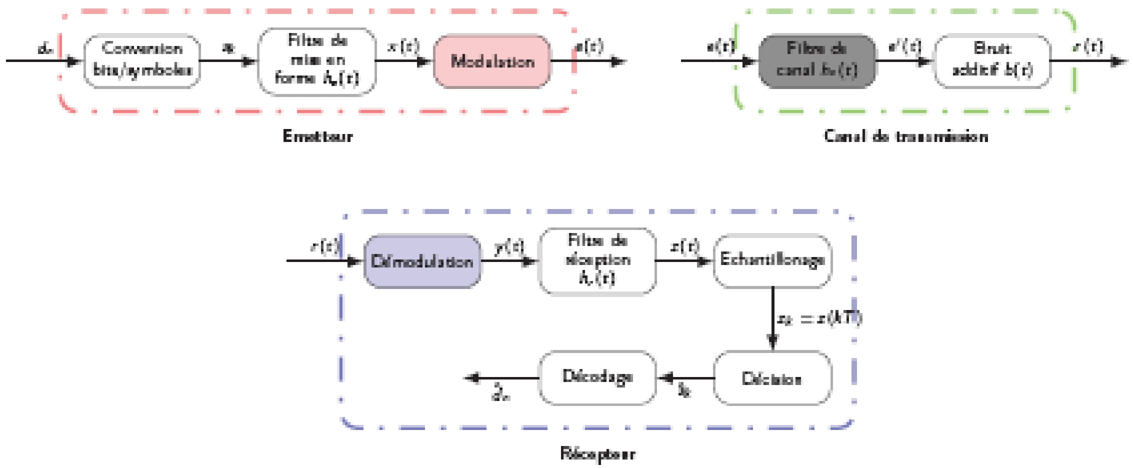
Bande de base vs. Modulation

Imaginons que l'on souhaite envoyer un signal dans une bande de fréquence $[BP_{min} BP_{max}]$:

- On veut créer un signal modulé ayant comme largeur de bande (en bande modulée) $B_{MOD} = BP_{max} - BP_{min}$ et centré sur la fréquence $f_0 = \frac{BP_{min} + BP_{max}}{2}$
- Cela revient à créer un signal en bande de base ayant comme largeur de bande (en bande de base) $B_{MOD} = \frac{BP_{max} - BP_{min}}{2}$ puis translater son spectre de f_0

Introduction

Modulations numériques



- Modulation : partir d'un signal $x(t)$ en bande de base, et le transformer en signal $e(t)$ en bande modulée, donc la largeur de bande sera centrée sur f_0.
- Démodulation : processus inverse

Introduction

Principe de la modulation

Imaginons que l'on ait un signal $x(t)$ avec une densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ centrée en $f = 0$. Comment la translater pour la centrer en $f = f_0$?

- cf TD 1 : $\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
- Proposition : prendre $e(t) = x(t)e^{2\pi j f_0 t}$??
- Problème : dans ce cas, $e(t)$ est complexe, ce qui n'est pas possible (ce doit être un signal physique)

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- $e^{2\pi j f_0 t}$: porteuse
- $x(t)$: signal en bande de base (dans ce cours : filtre d'émission NRZ)

Modulations par déplacement d'amplitude (ASK)

Modulations ASK

Modulation par déplacement d'amplitude : ASK

On modifie l'amplitude de la porteuse : Amplitude Shift Keying

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

Si on suppose que les a_k sont réels, et que $h_e(t)$ est réelle (c'est le cas si on considère un filtre NRZ), alors $x(t)$ est réel et :

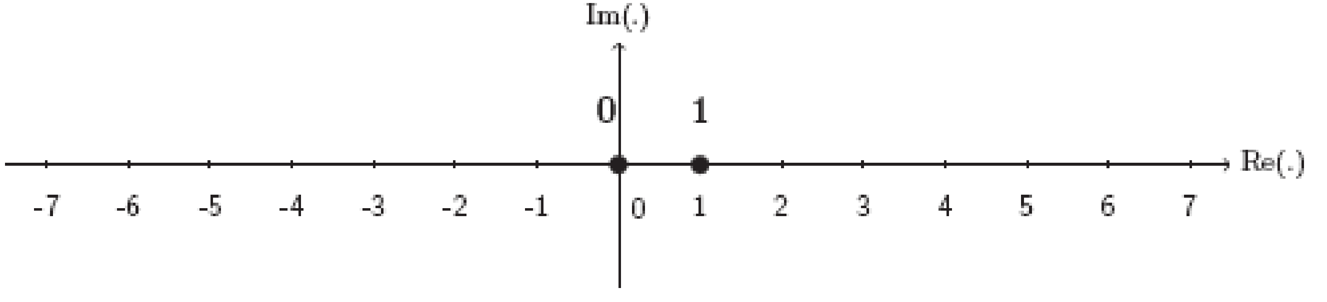
$$e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

- On ne transforme pas notre signal en bande de base, on le multiplie juste par un cosinus
- Chaque symbole a_k modifie l'amplitude de la porteuse durant une durée T : a_k correspond à l'amplitude de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- En fait, tous les codages en ligne que l'on a vu en bande de base étaient des modulations ASK avec $f_0 = 0$!

Modulations ASK

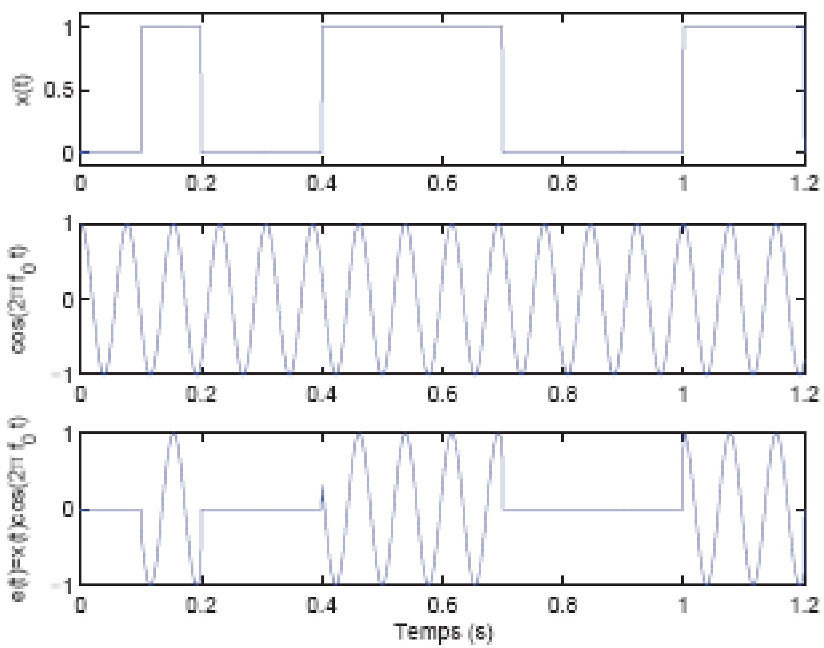
Modulation OOK



- $x(t)$ codé avec un dictionnaire binaire unipolaire
- OOK : On Off Keying (en français : Tout ou Rien)

Modulations ASK

OOK - Filtre NRZ



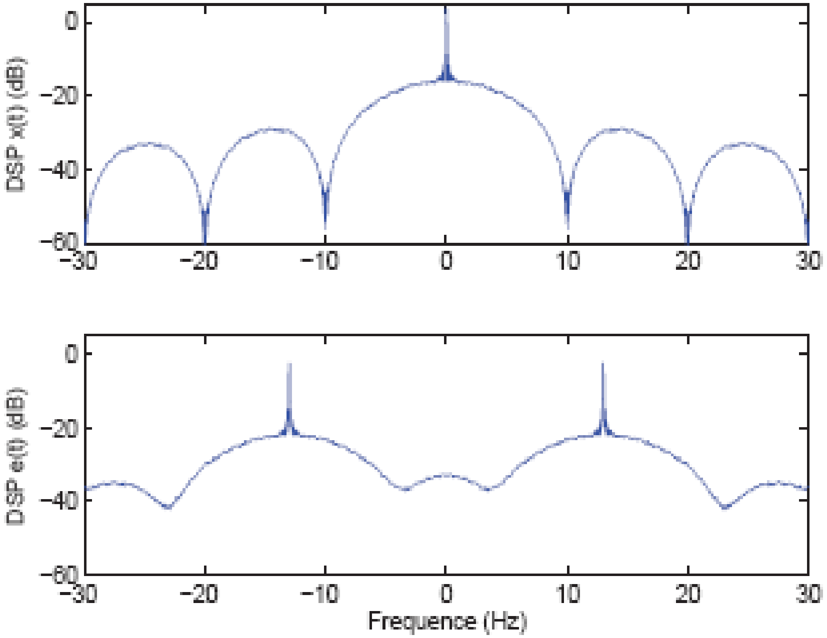
Dictionnaire binaire unipolaire - Filtre NRZ

$d_n = a_k = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations ASK

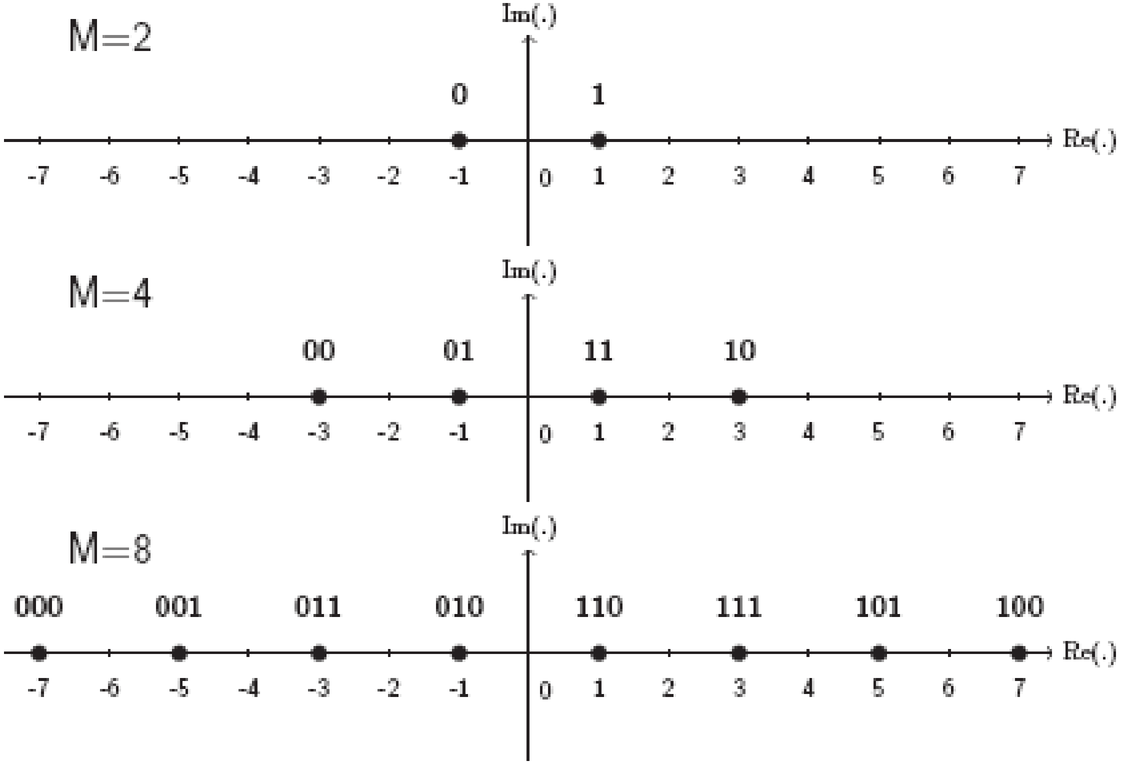
OOK - Filtre NRZ



Dictionnaire binaire unipolaire - Filtre NRZ
f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations ASK

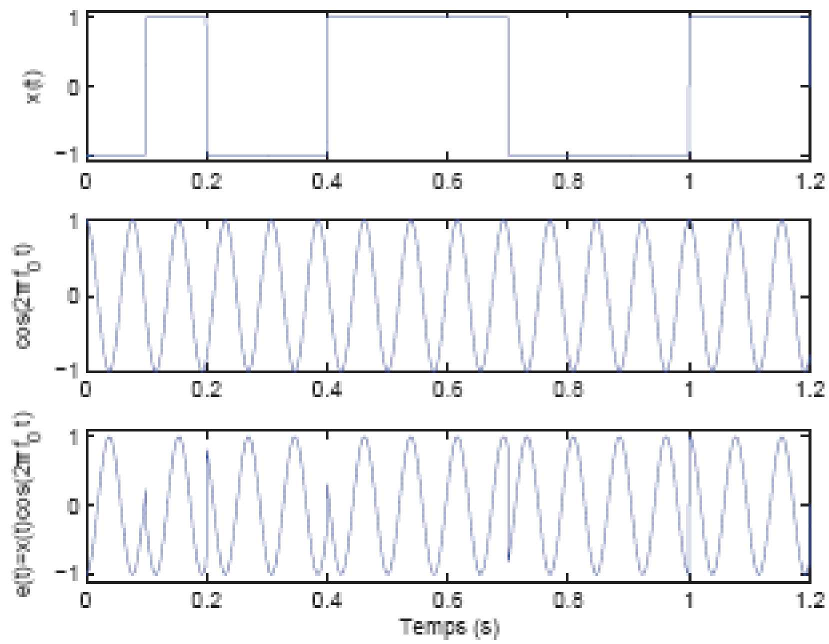
Modulation M-ASK symétriques



$\longrightarrow$ $x(t)$ codé avec un dictionnaire M-aire antipolaire

Modulations ASK

2-ASK symétrique - Filtre NRZ

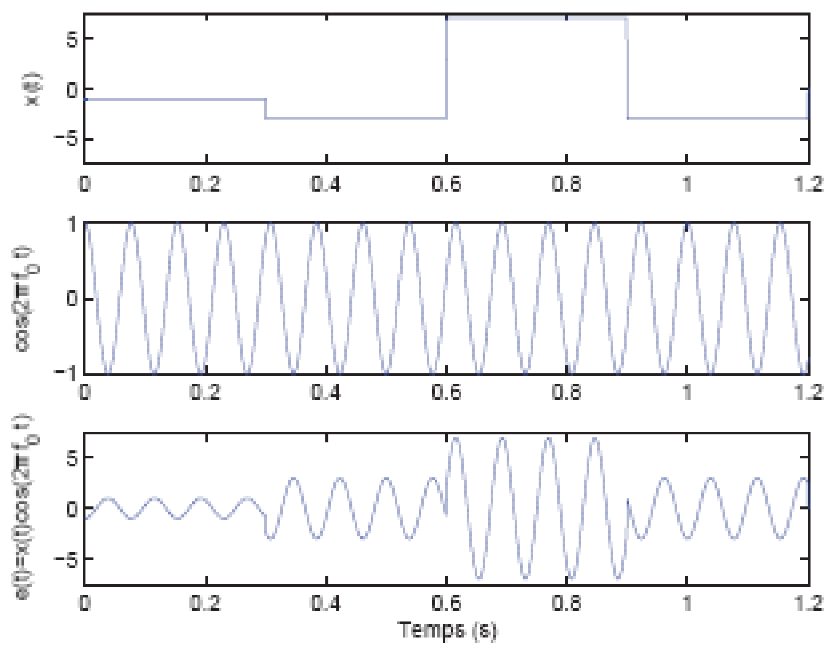


d_n = 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 $\longrightarrow$ a_k = -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1

f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations ASK

8-ASK symétrique - Filtre NRZ

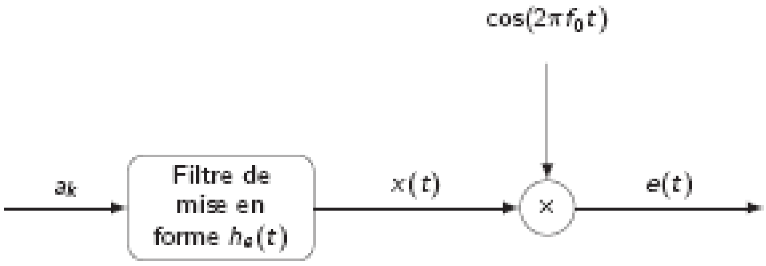


$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \longrightarrow a_k = \text{-}1\ \text{-}3\ 7\ \text{-}3$

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations ASK

Modulateur



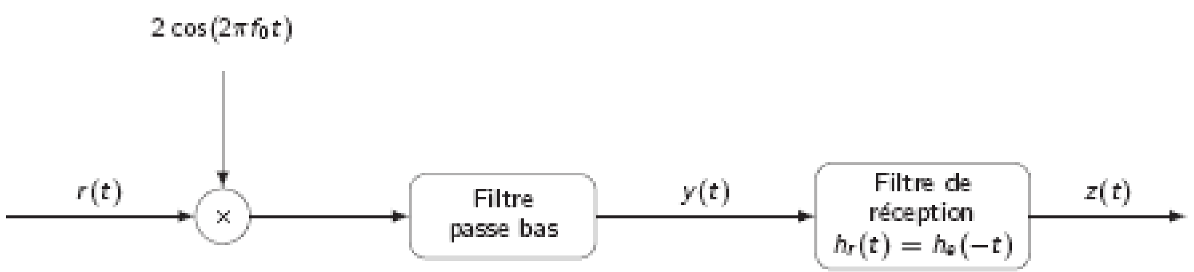
$$e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

Modulations ASK

Démodulateur

- A la sortie du canal (sans bruit), on a $r(t) = e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$
- Comment retrouver $x(t)$ à partir de $r(t)$?
- On utilise $2\cos(2\pi f_0 t) r(t) = 2\cos^2(2\pi f_0 t) x(t) = x(t) + x(t)\cos(4\pi f_0 t)$
- Avec un filtrage passe-bas, on peut récupérer $x(t)$!



Modulations ASK

Energie moyenne par bit

Dictionnaire à M éléments $a_1, \cdots, a_M$
Rappel :

$$E_{sym} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}$$

$$E_{bit} = \frac{1}{M \log_2 M}\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}$$

Pour une modulation M-ASK symétrique on a

$$E_{bit} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{h_e}$$

Modulations ASK

Probabilité d'erreur binaire

Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que

$$TEB \approx 2\frac{M-1}{M\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B_{MOD} = 2B_{BB} = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente. Il y a donc un compromis à réaliser.

Modulations par déplacement de phase (PSK)

Modulations PSK

Modulation par déplacement de phase : PSK

- Pour la modulation ASK on a modifié l'amplitude de la porteuse

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

$$e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

- a_k correspond à l'amplitude de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- Et si on modifiait la phase au lieu de l'amplitude ?
- PSK : Phase Shift Keying
- On fait passer le signal $x(t)$ sur la phase de la porteuse

Modulations PSK

Modulation par déplacement de phase : PSK

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{ e^{2\pi j f_0 t + j x(t)} \right\}$$

- Si on suppose que les a_k sont réels, et que $h_e(t)$ est réelle (c'est le cas si on considère un filtre NRZ), alors $x(t)$ est réel et :

$$e(t) = \cos(2\pi f_0 t + x(t))$$

$$e(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\right)$$

- a_k correspond à la phase de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- L'amplitude de la porteuse reste constante, mais la phase change toutes les T secondes

Modulations PSK

Choix des symboles

Les a_k représentent ici une phase et il est courant de les renormaliser entre 0 et 2π. Au lieu de prendre les dictionnaires unipolaire et antipolaires classiques, on va prendre

- soit

$$a_k \in \frac{2\pi}{M}\{0, 1, \cdots, M-1\} \text{ (unipolaire)}$$

- soit

$$a_k \in \frac{\pi}{M}\{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\} \text{ (antipolaire)}$$

Modulations PSK

Modulation ASK équivalente

Comme $h_e(t)$ est un filtre NRZ, on peut montrer que :

$$e(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\right)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(2\pi f_0 t + a_k) h_e(t-kT)$$

Avec des formules de trigonométrie, cela peut s'écrire

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

Modulations PSK

Modulation ASK équivalente

$$e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t - kT) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t - kT) \sin(2\pi f_0 t)$$

$e(t)$ est la somme de deux signaux ASK :

- Un premier signal
$$I(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t - kT)$$
modulé par une porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ (les symboles sont ici les $\cos(a_k)$)
- Un deuxième signal
$$Q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t - kT)$$
modulé par une porteuse $-\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$ (les symboles sont ici les $\sin(a_k)$)
- $I(t)$: composante en phase (Inphase), $Q(t)$: composante en quadrature de phase (Quadrature)

$$e(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Modulations PSK

Modulation ASK équivalente

- On peut montrer que

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t) = \mathrm{Re}\left\{(I(t) + jQ(t))e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- Or

$$I(t) + jQ(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\cos(a_k) + j\sin(a_k))h_e(t - kT)$$

- Donc

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ja_k} h_e(t - kT)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- Cette modulation PSK avec les symboles a_k est mathématiquement équivalente à une modulation ASK avec les symboles $\alpha_k = e^{ja_k}$
- α_k : symboles équivalents en modulation ASK

Modulations PSK

Constellation

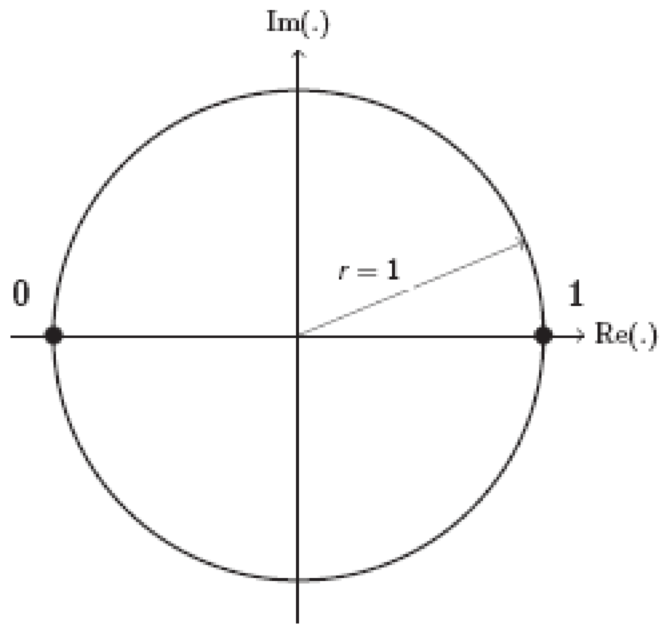
Constellation

Constellation : représentation des symboles α_k équivalents en modulation ASK dans le plan complexe

- Dans le cas ASK, on a $\alpha_k = a_k$ et les α_k sont réels
- Dans le cas PSK, les $\alpha_k = e^{ja_k}$ sont sur le cercle unité

Modulations PSK

2-PSK ou BPSK

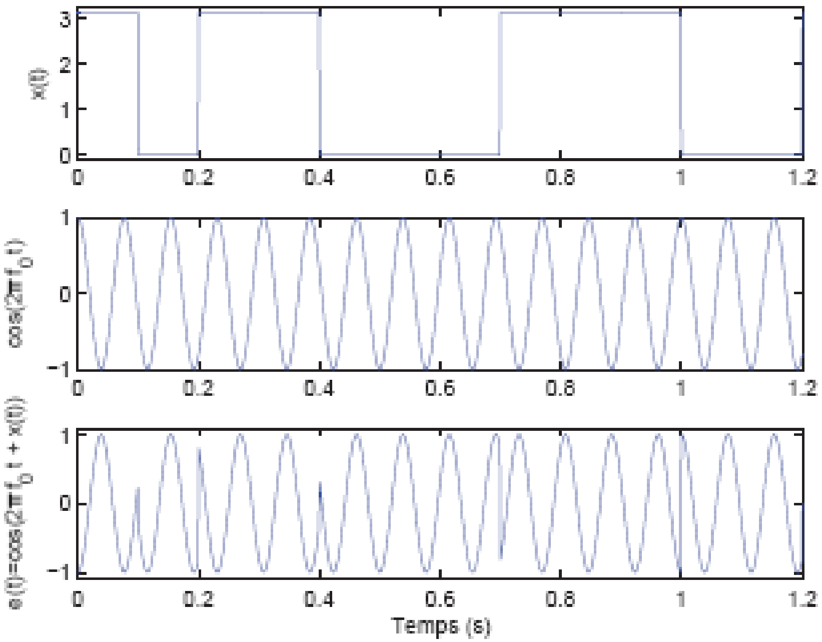


$$a_k \in \{0, \pi\} \longrightarrow \alpha_k = \pm 1$$

Exactement pareil qu'une modulation 2-ASK symétrique !

Modulations PSK

BPSK - Filtre NRZ



$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

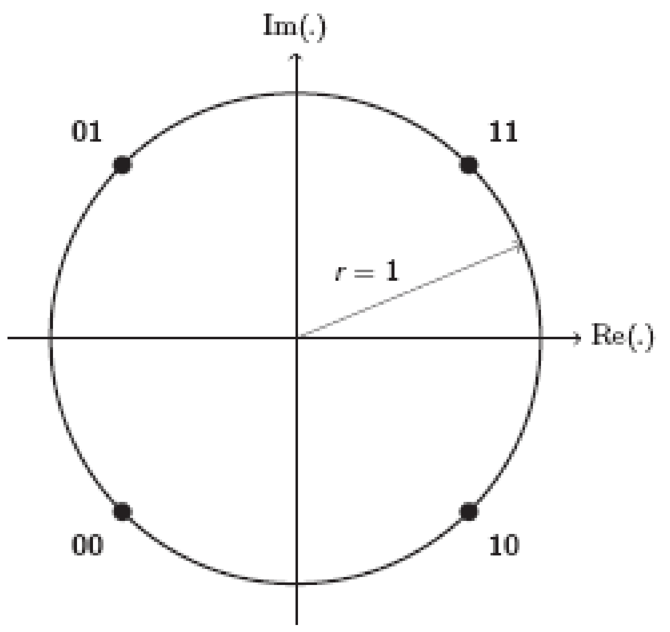
$a_k = \pi\ 0\ \pi\ \pi\ 0\ 0\ 0\ \pi\ \pi\ \pi\ 0\ 0$

$\alpha_k =$ 1-11-1-1-111-11

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations PSK

4-PSK ou QPSK

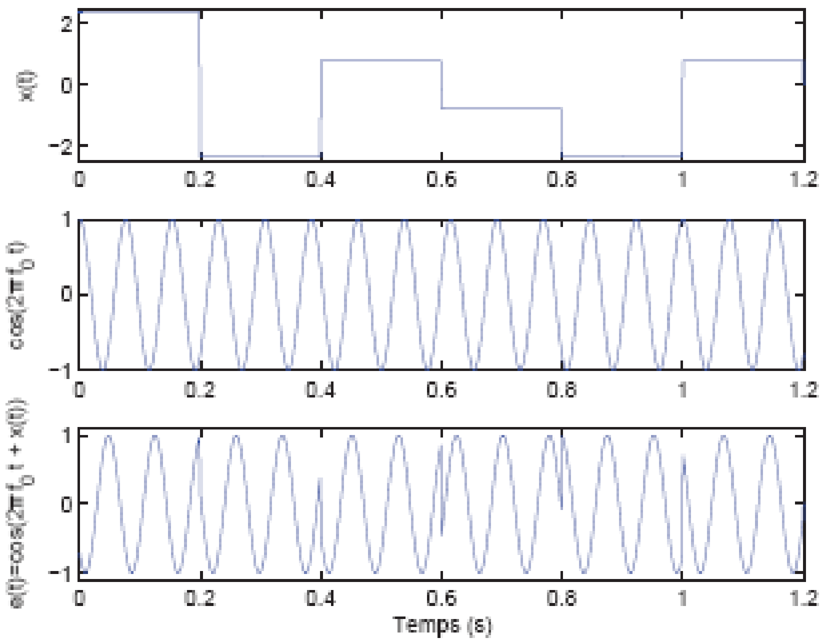


$$a_k \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} \longrightarrow \alpha_k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ici on a utilisé le dictionnaire antipolaire : on obtient le dictionnaire unipolaire en faisant tourner la constellation de $-\frac{\pi}{4}$.

Modulations PSK

QPSK - Filtre NRZ



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

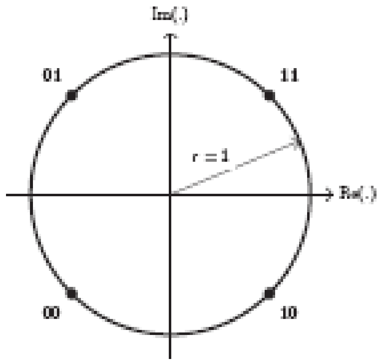
$$a_k = \frac{3\pi}{4}\ \frac{-3\pi}{4}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{-\pi}{4}\ \frac{-3\pi}{4}\ \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_k = \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\ \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}$$

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations PSK

4-PSK ou QPSK : interprétation

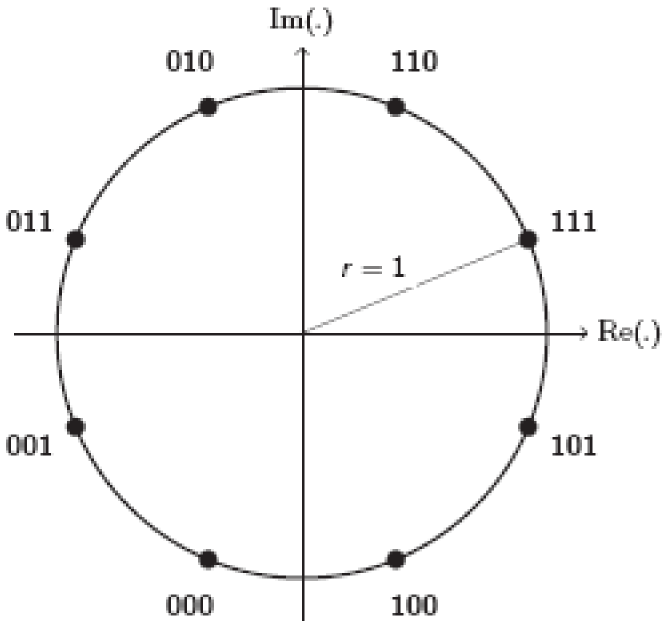


d_n	d_{n+1}	α_k	$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha_k)$	$\sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\alpha_k)$
0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1
1	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1
1	1	$+\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1

Comme si les bits pairs avaient servi à coder la partie réelle, et les bits impairs la partie imaginaire

Modulations PSK

8-PSK

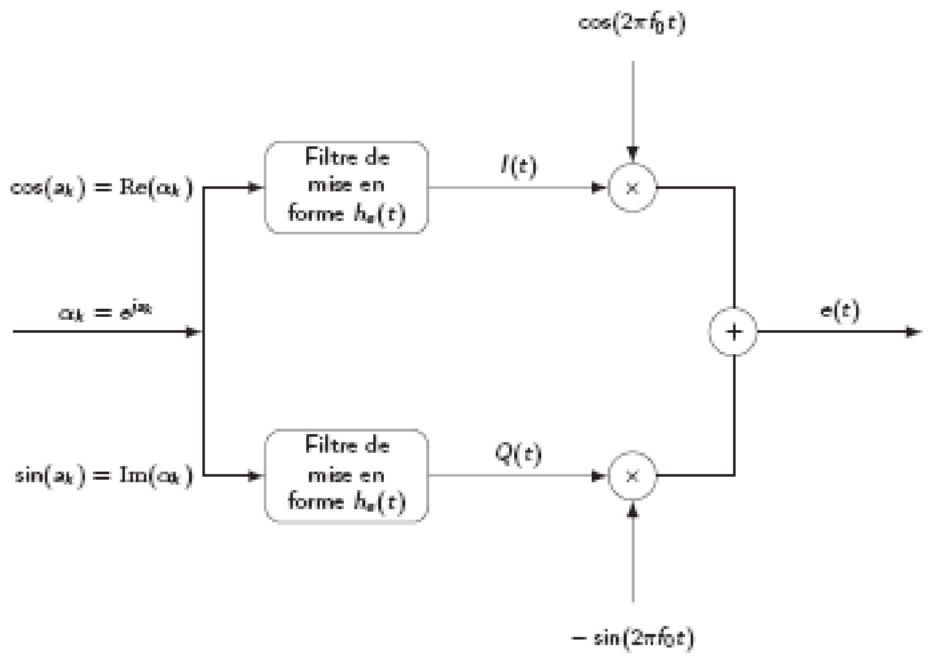


$$a_k \in \left\{-\frac{7\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$$

Ici on a utilisé le dictionnaire antipolaire : on obtient le dictionnaire unipolaire en faisant tourner la constellation de $-\frac{\pi}{8}$.

Modulations PSK

Modulateur

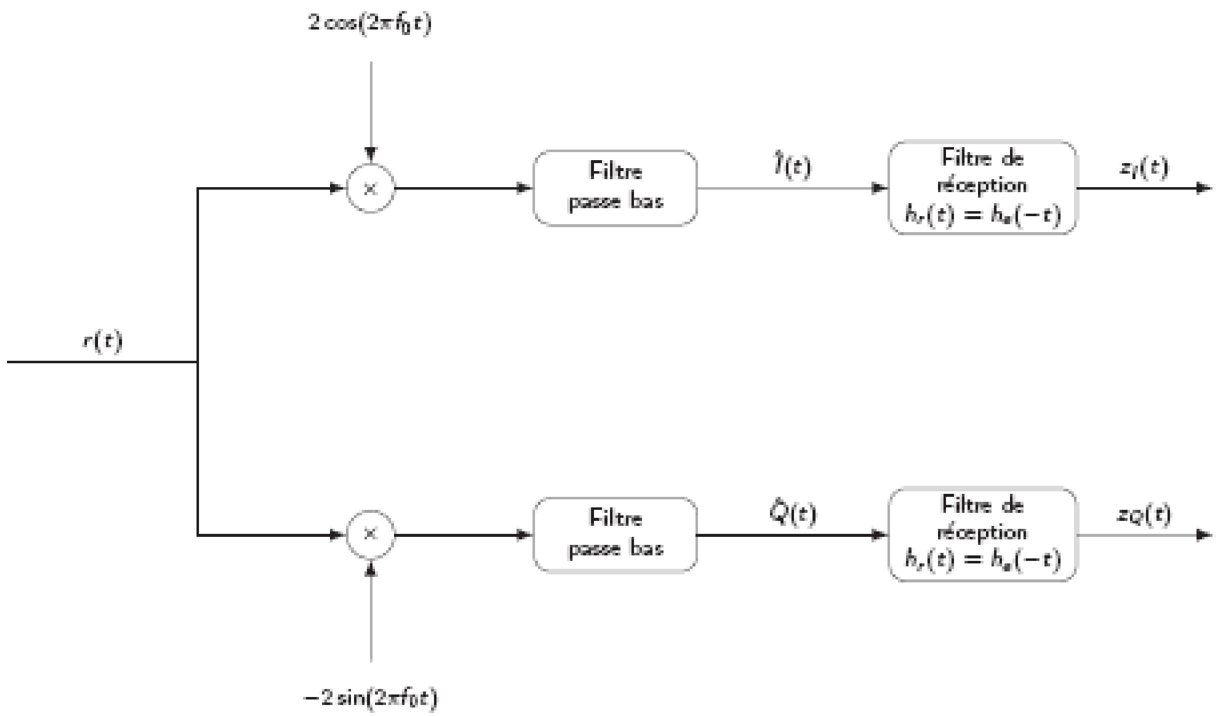


$$I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT) \qquad Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)$$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Modulations PSK

Démodulateur



$$2\cos(2\pi f_0 t) r(t) = I(t) + I(t)\cos(4\pi f_0 t) - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$
$$-2\sin(2\pi f_0 t) r(t) = Q(t) - I(t)\sin(4\pi f_0 t) - Q(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

Après un filtrage passe-bas, on retrouve $I(t)$ et $Q(t)$, puis en échantillonant $\cos(a_k)$ et $\sin(a_k)$, et enfin a_k

Modulations PSK

Energie moyenne par bit

On la calcule non pas avec les symboles a_i, mais avec les symboles α_i équivalents en modulation ASK.
Pour une modulation M-PSK on a $|\alpha_i|^2 = 1$ pour tous les symboles donc

$$E_{bit} = \frac{1}{\log_2 M} E_{h_e}$$

Modulations PSK

Probabilité d'erreur binaire

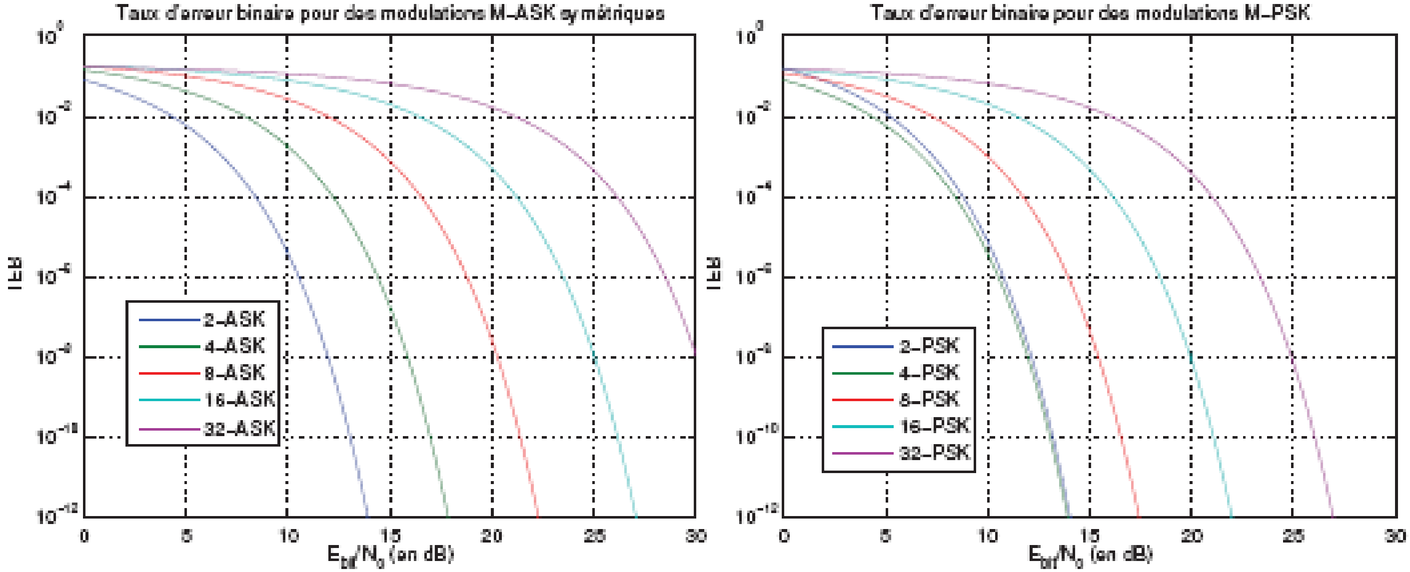
Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que

$$TEB \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M E_{bit}}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente.

Modulations PSK

Comparaison ASK / PSK



- A *TEB* fixé, on peut transmettre avec *M* plus grand avec une M-PSK qu'avec une M-ASK
- En revanche, les modulateurs et démodulateurs sont plus complexes à réaliser avec une M-PSK

Modulations par déplacement d’amplitude et de phase (APSK)

Modulations APSK

Modulations APSK

- Modification de l'amplitude (ASK) :
  - a_k modifie l'amplitude toutes les T secondes
  - Symboles équivalents en modulation ASK : $\alpha_k = a_k$ réels
- Modification de la phase (PSK) :
  - a_k modifie la phase toutes les T secondes
  - Symboles équivalents en modulation ASK : $\alpha_k = e^{ja_k}$ sur le cercle unité
- Si l'on veut modifier simultanément l'amplitude et la phase toutes les T secondes ?
- Amplitude and Phase Shift Keying (APSK)

Modulations APSK

Modulations APSK : principe

A chaque période symbole T, on change l'amplitude m_k et la phase Φ_k de la porteuse

$$e(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \Phi(t)\right)$$

- $m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k h_e(t - kT)$
- $\Phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_k h_e(t - kT)$

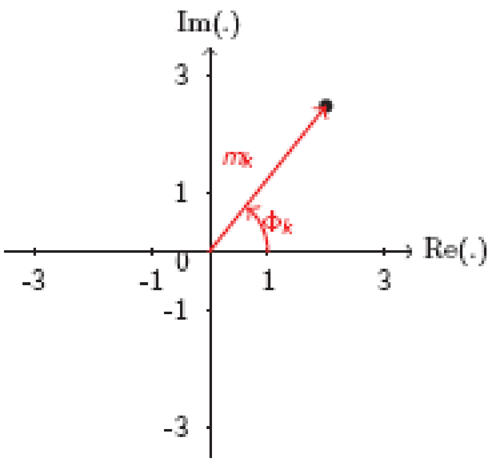
A chaque période symbole T on agit sur deux paramètres au lieu d'un, ce qui revient à une mise au carré du nombre de symboles possibles

Modulations APSK

Modulations APSK : constellation

Modification conjointe de l'amplitude et de la phase : peut être vue mathématiquement comme la transmission de symboles α_k complexes en ASK tels que

$$\alpha_k = m_k e^{j\phi_k}$$



Remarque : ASK revient à $m_k = a_k, \Phi_k = 0$ et PSK à $m_k = 0, \Phi_k = a_k$

Modulations APSK

Modulations APSK : composantes en phase et en quadrature de phase

Par définition des symboles équivalents en modulation ASK,

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_e(t - kT)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

Et on a par définition de $I(t)$ et $Q(t)$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

On peut montrer alors que :

$$I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(\alpha_k)h_e(t - kT)$$

$$Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\alpha_k)h_e(t - kT)$$

- $I(t)$ transmet la partie réelle du symbole
- $Q(t)$ transmet la partie imaginaire du symbole

Modulations APSK

Modulations QAM

Cas particulier courant :

$$\mathrm{Re}(\alpha_k) \in \left\{-(\sqrt{M}-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, \sqrt{M}-1\right\} \text{ dictionnaire antipolaire}$$

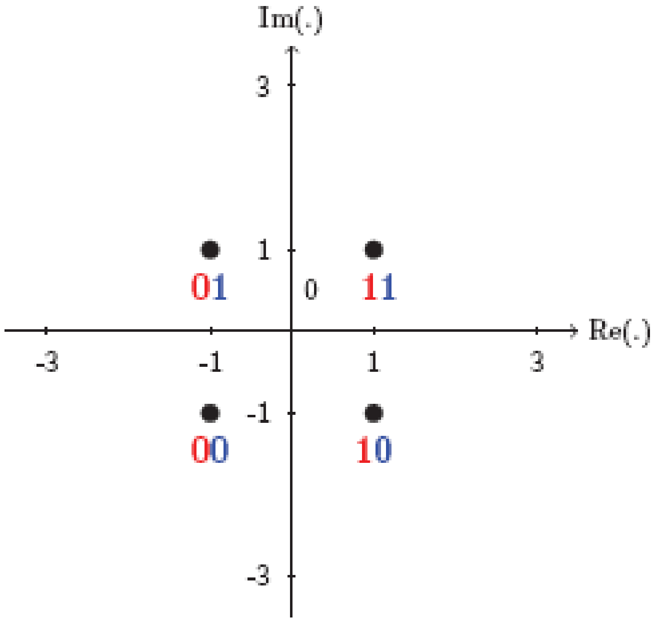
$$\mathrm{Im}(\alpha_k) \in \left\{-(\sqrt{M}-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, \sqrt{M}-1\right\} \text{ dictionnaire antipolaire}$$

$$\alpha_k \in \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j, ...\}$$

- Si chaque dictionnaire contient $\sqrt{M}$ symboles réels, cela fait M symboles complexes !
- Comme si on transmettait simultanément un signal $\sqrt{M}$-ASK symétrique réel et un signal $\sqrt{M}$-ASK symétrique imaginaire pur
- Deux signaux $\sqrt{M}$-ASK symétriques $I(t)$ et $Q(t)$ en quadrature de phase : d'ou le nom Quadrature Amplitude Modulation

Modulations APSK

Modulation 4-QAM

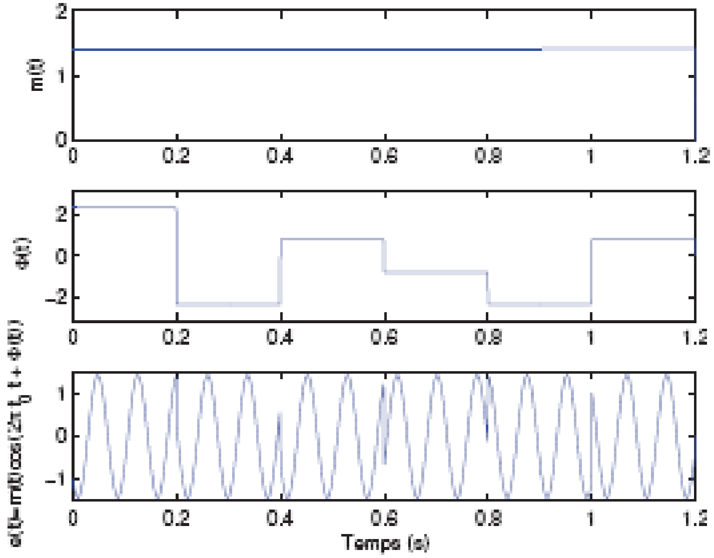


$$\alpha_k = \pm 1 \pm j$$

code la partie réelle - code la partie imaginaire

Modulations APSK

4-QAM - Filtre NRZ - $m(t)/\Phi(t)$



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$\alpha_k = \text{-1+j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j} \quad \text{1-j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j}$$

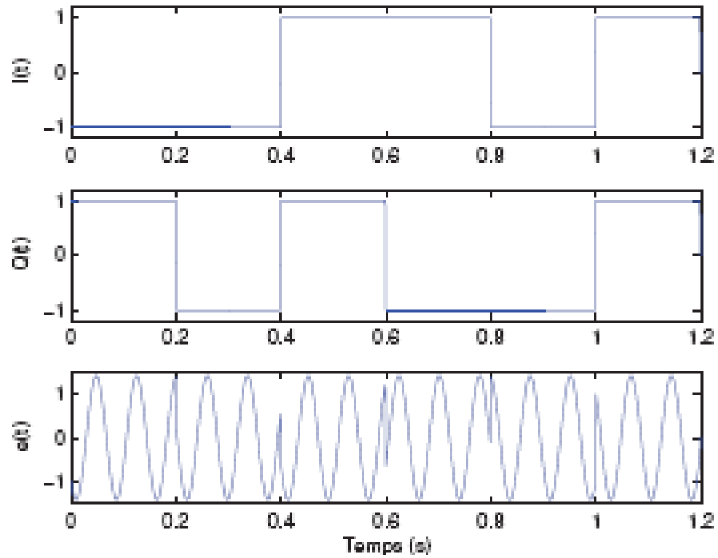
$$m_k = \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$

$$\Phi_k = \frac{3\pi}{4} \quad \frac{-3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{-\pi}{4} \quad \frac{-3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}$$

$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

Modulations APSK

4-QAM - Filtre NRZ - $I(t)/Q(t)$



$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

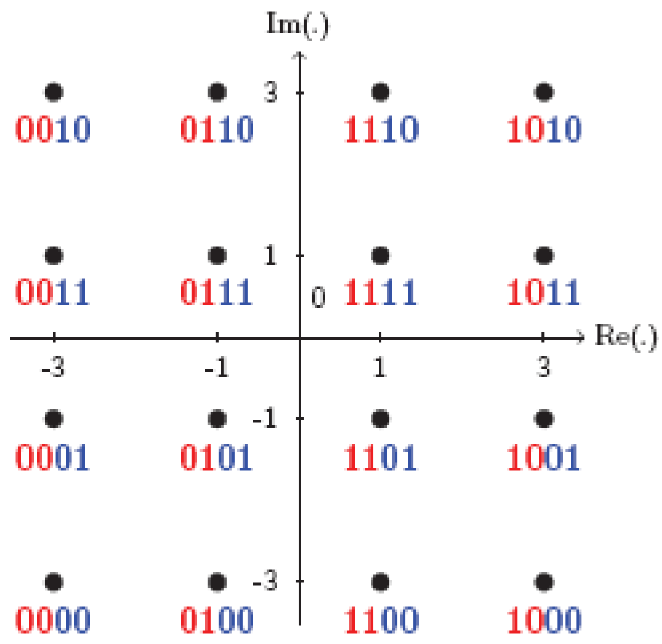
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$\alpha_k = \text{-1+j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j} \quad \text{1-j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j}$$

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations APSK

Modulation 16-QAM

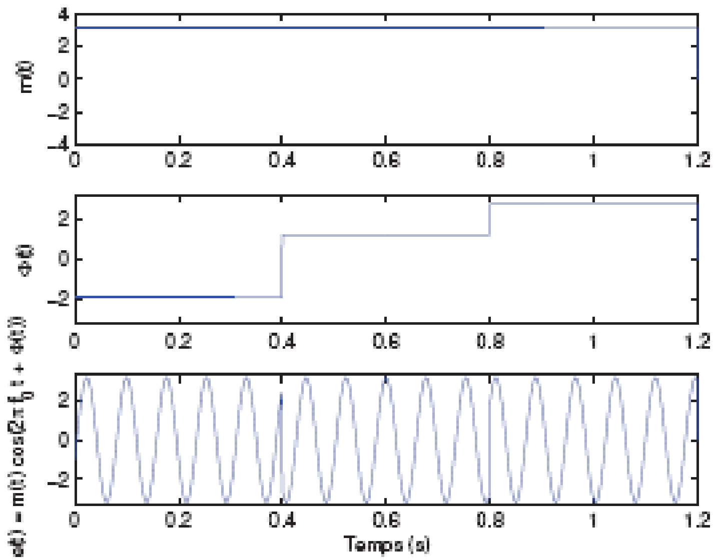


$$\alpha_k \in \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j\}$$

code la partie réelle - code la partie imaginaire

Modulations APSK

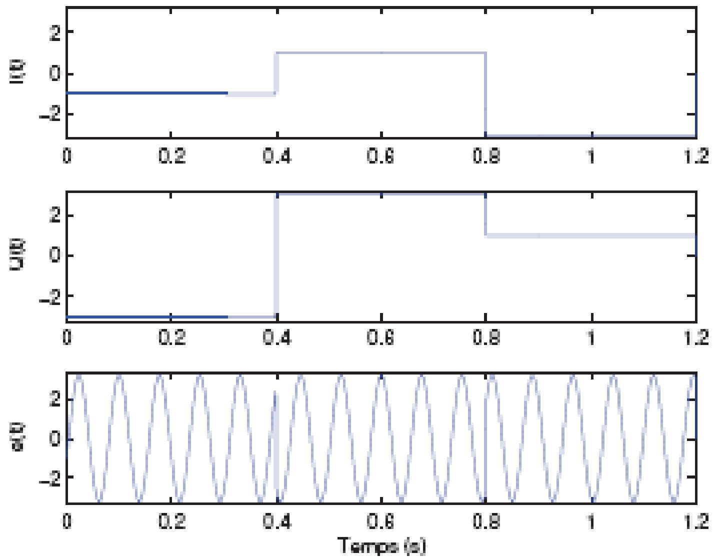
16-QAM - Filtre NRZ - $m(t)/\Phi(t)$



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$
$$\alpha_k = \text{-1-3j} \quad \text{1+3j} \quad \text{-3+j}$$
$$m_k = \sqrt{10} \quad \sqrt{10} \quad \sqrt{10}$$
$$\Phi_k = \frac{-\pi}{2} - atan(\tfrac{1}{3}) \quad \frac{\pi}{2} - atan(\tfrac{1}{3}) \quad \pi - atan(\tfrac{1}{3})$$
$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

Modulations APSK

16-QAM - Filtre NRZ - $I(t)/Q(t)$



$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

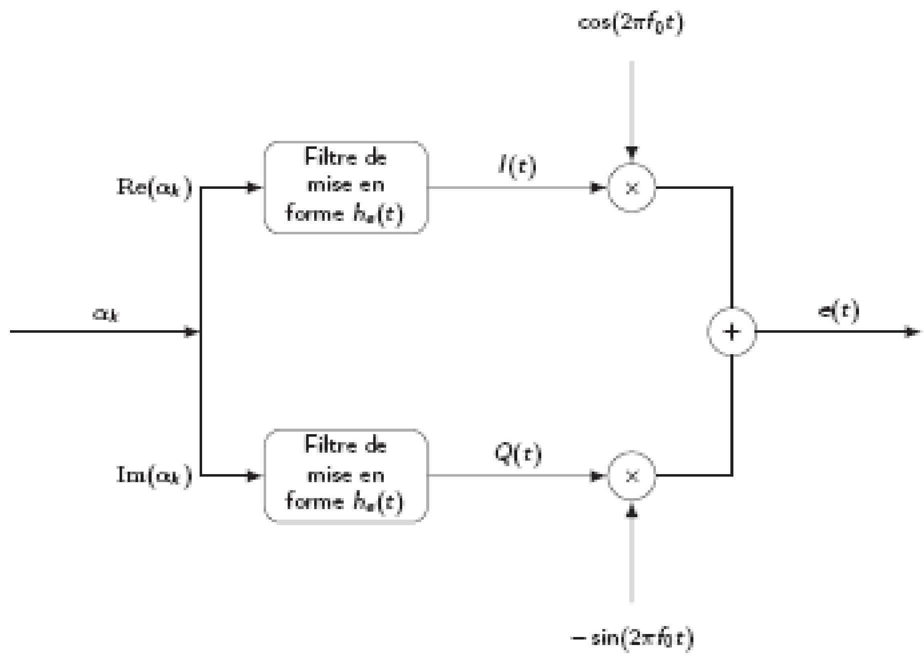
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$\alpha_k = \text{-1-3j} \quad 1+3\text{j} \quad \text{-3+j}$$

$f_0 = 13$ Hz et Db=10 bits/seconde

Modulations APSK

Modulateur

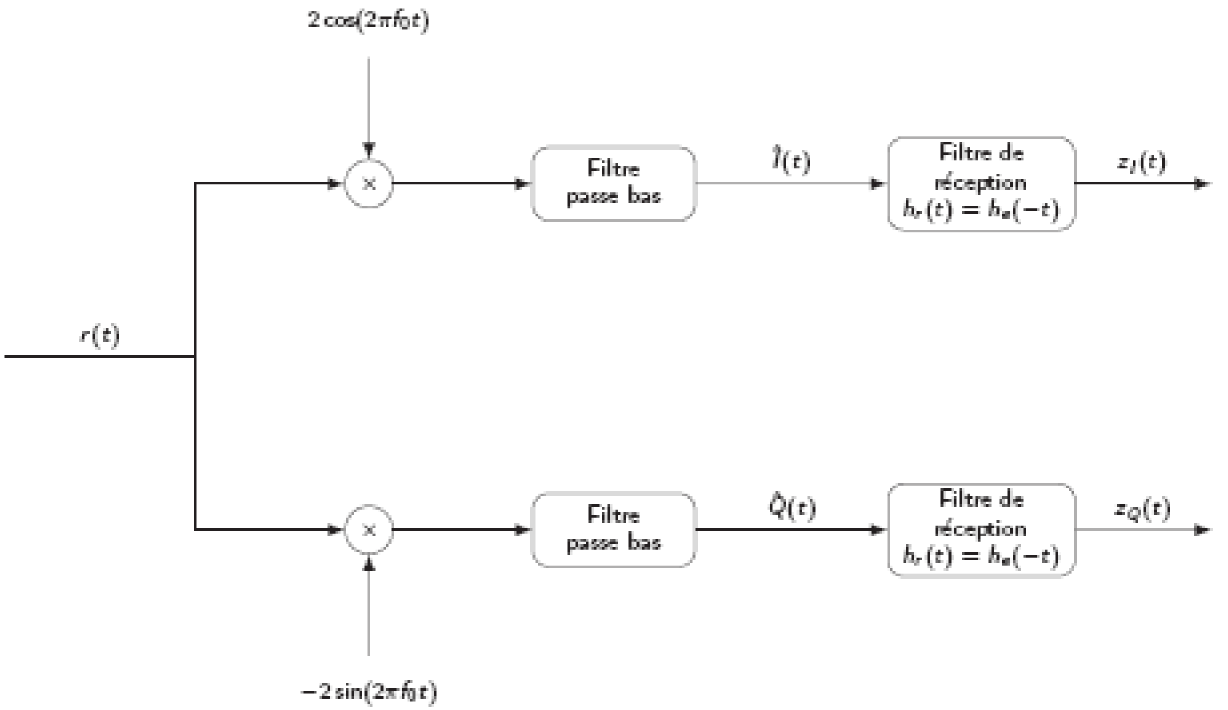


$$I(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Re}(\alpha_k) h_e(t - kT) \qquad Q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\alpha_k) h_e(t - kT)$$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Modulations APSK

Démodulateur



$$2\cos(2\pi f_0 t)e(t) = I(t) + I(t)\cos(4\pi f_0 t) - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$
$$-2\sin(2\pi f_0 t)e(t) = Q(t) - I(t)\sin(4\pi f_0 t) - Q(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

Après un filtrage passe-bas, on retrouve $I(t)$ et $Q(t)$, puis en échantillonant $\mathrm{Re}(\alpha_k)$ et $\mathrm{Im}(\alpha_k)$, et enfin α_k

Modulations APSK

Energie moyenne par bit

Une modulation M-QAM correspond à deux modulations $\sqrt{M}$-ASK symétriques en parallèle :

$$E_{bit} = \frac{2(M-1)}{3\log_2 M} E_{h_e}$$

Modulations APSK

Probabilité d'erreur binaire

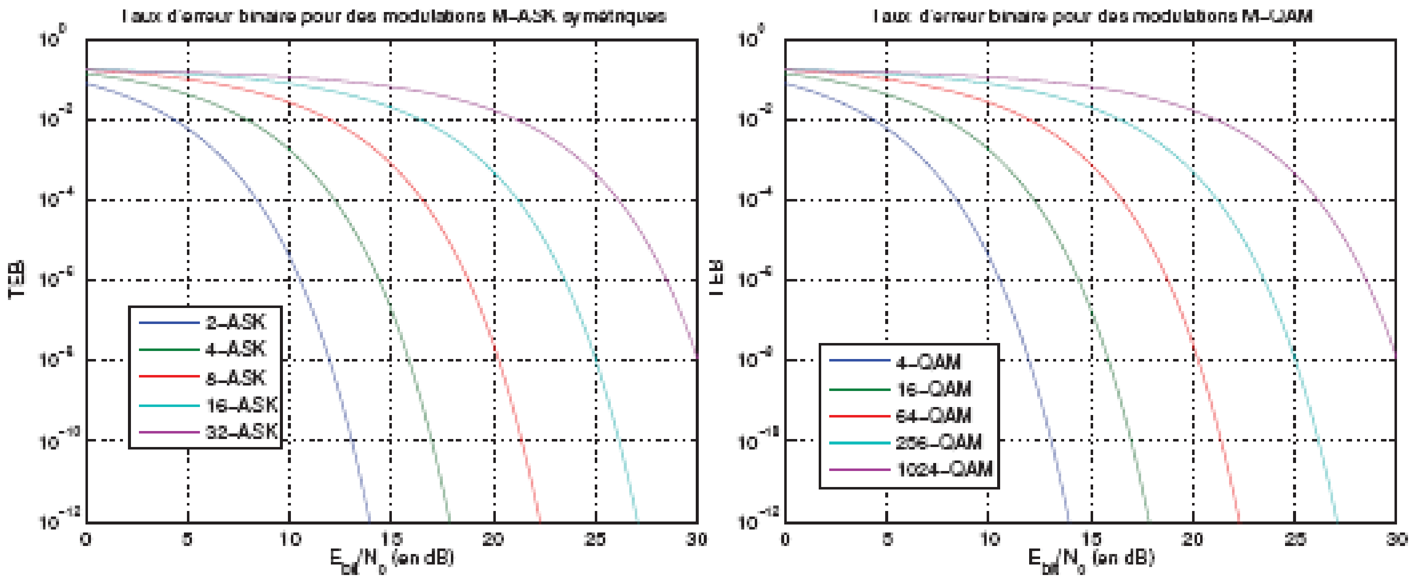
Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que

$$TEB \approx 2\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}\log_2\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2\sqrt{M}}{M-1}}\right)$$

- Comme si on avait deux modulations $\sqrt{M}$-ASK indépendantes !
- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente.

Modulations APSK

Comparaison ASK / QAM



- On peut transmettre avec une M-QAM pour le même taux d'erreur binaire qu'une $\sqrt{M}$-ASK symétrique !
- En revanche, les modulateurs et démodulateurs sont plus complexes à réaliser avec une M-QAM

Modulations par déplacement de fréquence (FSK)

Modulations FSK

Modulation par déplacement de fréquence : FSK

On a déjà modifié l'amplitude et la phase de la porteuse, cette fois ci on va modifier la fréquence fondamentale de la porteuse : Frequency Shift Keying

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{2\pi j t(f_0 + x(t))}\right\}$$

Ce qui revient à

$$e(t) = \cos\left(2\pi\left(f_0 + x(t)\right)t\right)$$

- Dans le cas d'un filtre de mise en forme $h_e(t)$ NRZ, cela devient

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos\left(2\pi\left(f_0 + a_k\right)t\right) h_e(t - kT)$$

- On change la fréquence fondamentale de la porteuse tous les T, en fonction des symboles a_k : la fréquence fondamentale pour $kT \leq t < (k+1)T$ est $f_0 + a_k$

Modulations FSK

Choix des symboles

Dans le cas d'une modulation FSK à M symboles, les a_k doivent être homogènes à une fréquence et on choisit un dictionnaire antipolaire :

$$a_k \in \frac{\Delta f}{2}\{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\}$$

- f_0 est donc la fréquence centrale
- Δf est l'excursion de fréquence

Modulations FSK

Modulation FSK

- Dans la suite du cours on suppose que $M = 2$ (cas 2-FSK, souvent appelé simplement FSK)
- On a donc 2 fréquences fondamentales possibles :
  - $f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$
  - $f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$
- On a donc

$$f_2 - f_1 = \Delta f$$

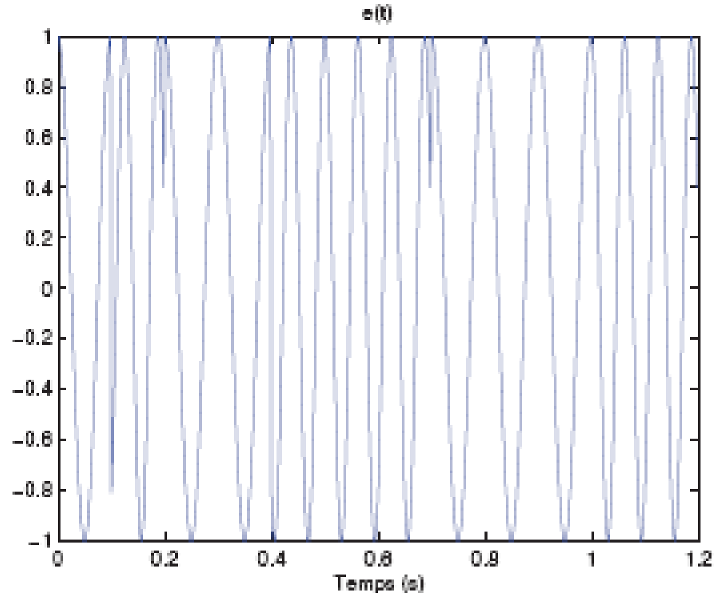
- Plus on réduit Δf, moins on utilise de bande passante
- Indice de modulation

$$\mu = \Delta f \; T$$

- Plus μ est petit, moins on utilise de bande passante

Modulations FSK

FSK non cohérente



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = 6$ Hz ($f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 16$ Hz)

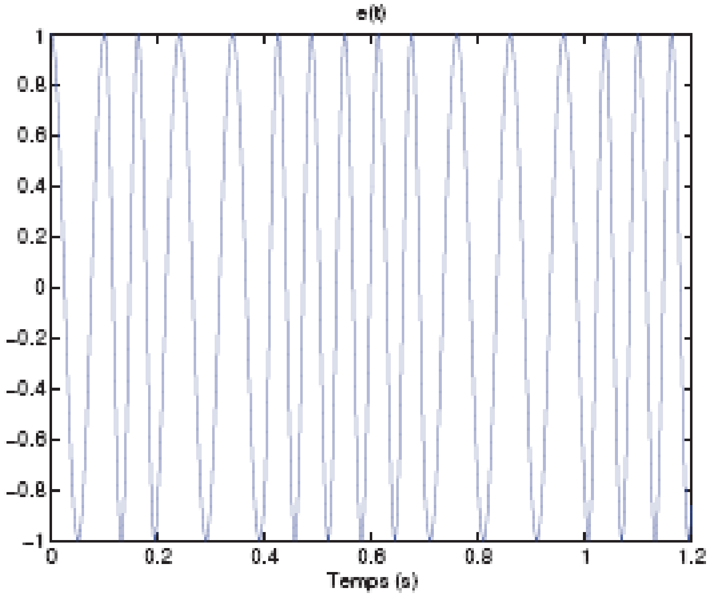
Modulations FSK

FSK cohérente et non cohérente

- Problème : il y a un saut tous les T quand la fréquence change : FSK non cohérente
- Ces sauts créent des fréquences parasites sur le spectre du signal modulé
- On peut transformer $x(t)$ pour que la phase soit continue dans le temps : FSK cohérente (ou CPFSK)
  - Plus difficile à réaliser en pratique
  - Permet de réduire l'occupation spectrale

Modulations FSK

2-FSK cohérente



$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = 6$ Hz ($f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 16$ Hz)

Modulations FSK

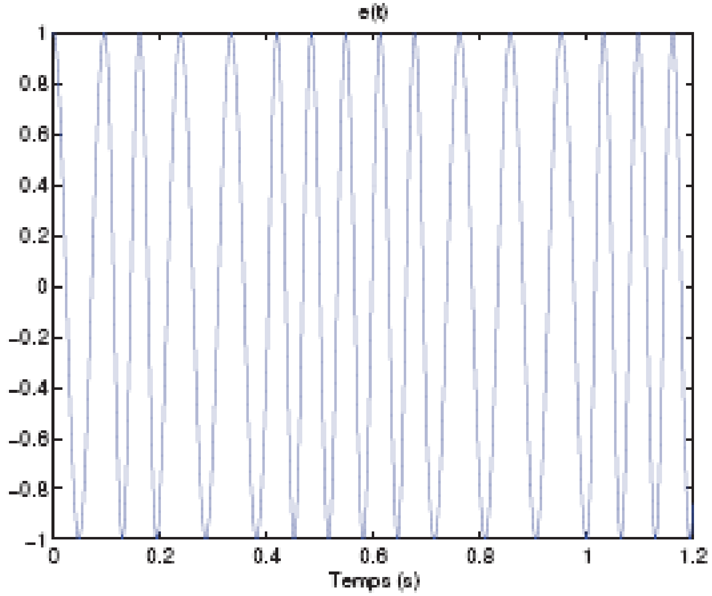
Modulation MSK

Rappel :

- Plus μ est petit, moins on utilise de bande passante
- Avec une CPFSK, on diminue la largeur de la bande passante
- Minimum Shift Keying (MSK) : plus petite valeur de μ permettant une probabilité d'erreur optimale ($\mu = 0.5$).
- MSK : CPFSK (cohérente) avec un filtre NRZ et $\Delta f = \frac{1}{2T}$

Modulations FSK

MSK



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = \frac{1}{2T} = 5$ Hz ($f_1 = 10.5$ Hz, $f_2 = 15.5$ Hz)

Communications Numériques

Chapitre 5
Communications Numériques Avancées