Cours
Communications Numériques

Chapitre 3
Transmission sur canal à bande limitée

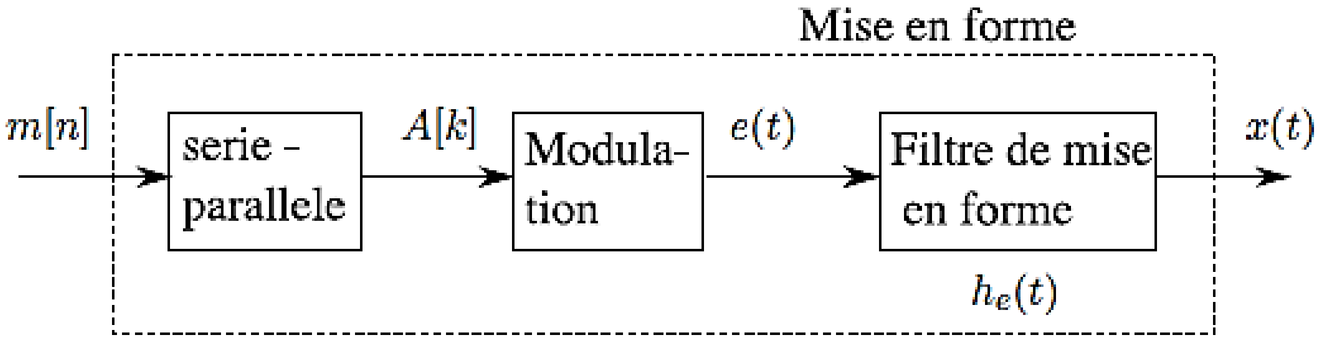
Amin ZRIBI

Plan du Chapitre

1. Chaine de transmission numérique
2. Etudes des paramètres après émission/réception
3. Débit et rapidité
4. Interférences entre symboles (IES)
5. Diagramme de l’œil
6. Annulation de l’IES
7. Filtre en cosinus surélevé
8. La notion d’égalisation

Chaine de transmission numérique

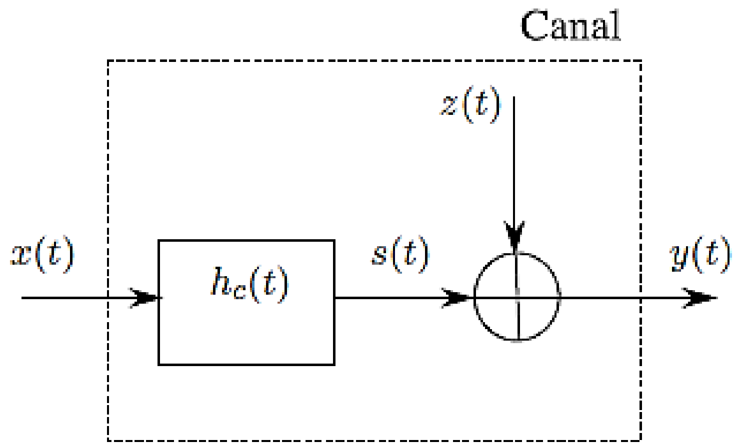
- Emetteur: mise en forme du signal



- Différents messages
  - $m[n]$: message binaire de *m* bits
  - $A[k]$: *k* symboles contenant chacun *n*/*k* bits
  - $e(t)$: signal modulé
  - $h_e(t)$: RI du filtre de mise en forme

Chaine de transmission numérique

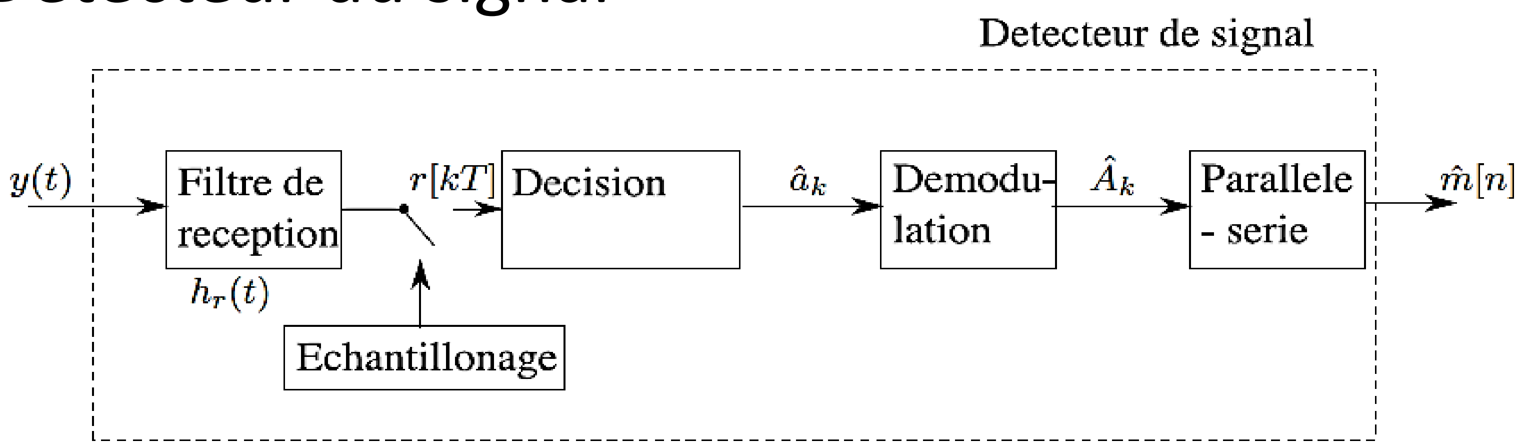
- Canal de transmission



- Modèle général (Chap. 1)
- Différents messages:
  - $h_c(t)$: RI du canal de transmission
  - $z(t)$: Bruit blanc additif Gaussien

Chaine de transmission numérique

- Détecteur du signal



- Différents messages
  - $h_r(t)$: RI du filtre de réception
  - $r[kt]$: signal filtré, puis échantillonné
  - $\hat{a}_k$: symboles de modulation détectés
  - $\hat{A}_k$: vecteurs de bits démodulés

Etudes des paramètres après émission/réception

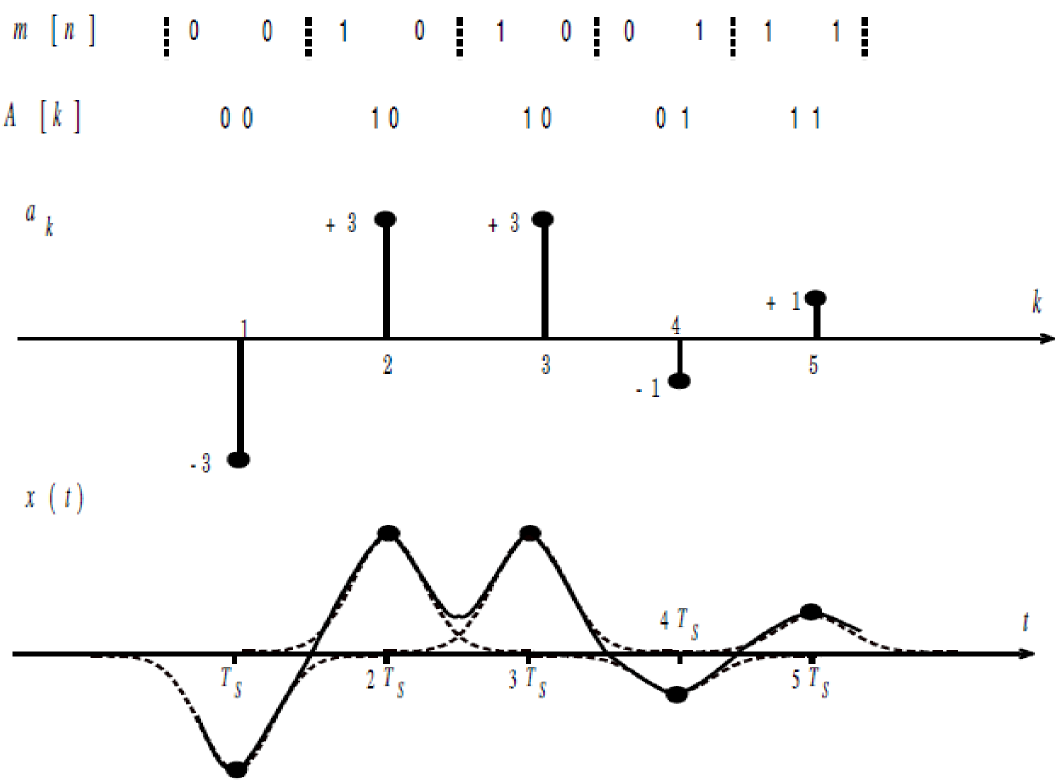
- **Emetteur:** v bits à la sortie codeur source
  - Après codage canal ($n > v$ bits) et conversion série parallèle: k vecteurs de n/k bits chacun: $A[k]$
  - Modulateur:
    - Transformation de chaque vecteur $A[k]$ en symbole de modulation $a_k \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ selon un alphabet M-aire ($M = 2^{n/k}$)
    - Génération d'une série d'impulsions modulées à l'horloge symbole T_s : $e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s)$
  - Filtre de mise en forme:

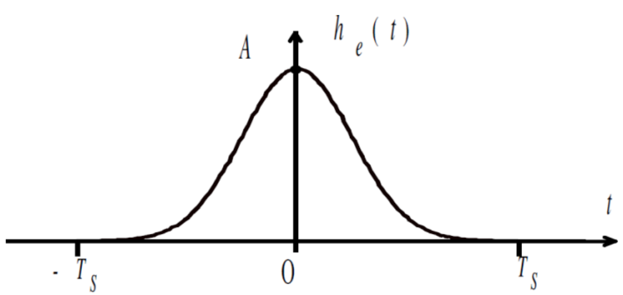
$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT_s)$$

Etudes des paramètres après émission/réception

- **Emetteur**: Exemple

$A[k]$		a_k
0 0	$\rightarrow$	-3
01	$\rightarrow$	-1
11	$\rightarrow$	1
10	$\rightarrow$	3





Etudes des paramètres après émission/réception

- **Canal de transmission:**
  - Signal à la sortie du canal : $y(t) = s(t) + z(t)$
  - BBAG aléatoire: $z(t)$
  - Composante filtrée:
    $s(t) = x(t) * \ h_c(t) = e(t) * \ h_e(t) * h_c(t)$
  - Définition: $h(t) = h_e(t) * h_c(t)$
  - Signal reçu:

$$y(t) = e(t) * h(t) + z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) + z(t)$$

Le canal inclut une déformation de l'impulsion de base émise, et du bruit Gaussien

Etudes des paramètres après émission/réception

- Le récepteur:
  - Filtre de réception: $r(t) = y(t) * \ h_r(t)$
  - Définition: $g(t) = h_e(t) * h_c(t) * h_r(t)$
  - Signal obtenu:

$$r(t) = e(t) * g(t) + b(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT_s) + b(t)$$

  - Echantillonnage aux instants $t = kT_s$

$$r(kT_s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(kT_s - nT_s) + b(kT_s)$$

  - Seuillage: $r(kT_s)$ à comparer avec un seuil de décision

Distorsion et bruit peuvent causer une erreur symbole ➔ erreur(s) bit

Débit et rapidité

- Débit symbole de modulation:
  - Rapidité de modulation en *Bauds*
  - $D_s = R = \frac{1}{T_s}$, *avec* T_s *:* durée d'un symbole
- Débit binaire:
  - Débit bit en *bits/seconde*
  - $D_b = \frac{1}{T_b}$, *avec* T_b *:* durée d'un bit d'information
- Relation débit binaire et rapidité de modulation:
  - $n = log_2(M)$, où M est le nombre de symboles de modulation possibles
  - $D_b = n.D_s$
  - Exemple
  - Compromis débit/qualité

Interférences entre symboles (IES)

- Hypothèse: canal à bande limitée non bruité

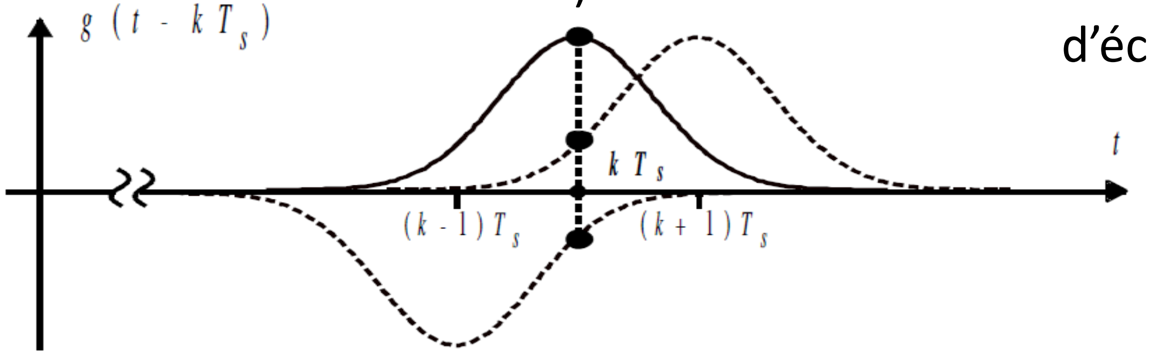
$$z(t) = 0 \ \rightarrow b(kT_s) = 0$$

- Le signal reçu, filtré et échantillonné devient:

$$r(kT_s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g((k-n)T_s) = a_k g(0) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq k}} a_n g((k-n)T_s)$$

Signal utile (symbole à détecter)

Signal interférent: effet des autres symboles à l'instant d'échantillonnage



Interférences entre symboles (IES)

L'interférence entre symboles est un phénomène qui se produit si le niveau échantillonné a l'instant de décision ne dépend pas du seul symbole attendu, mais se trouve altéré par la superposition d'un ou plusieurs autres symboles voisins.

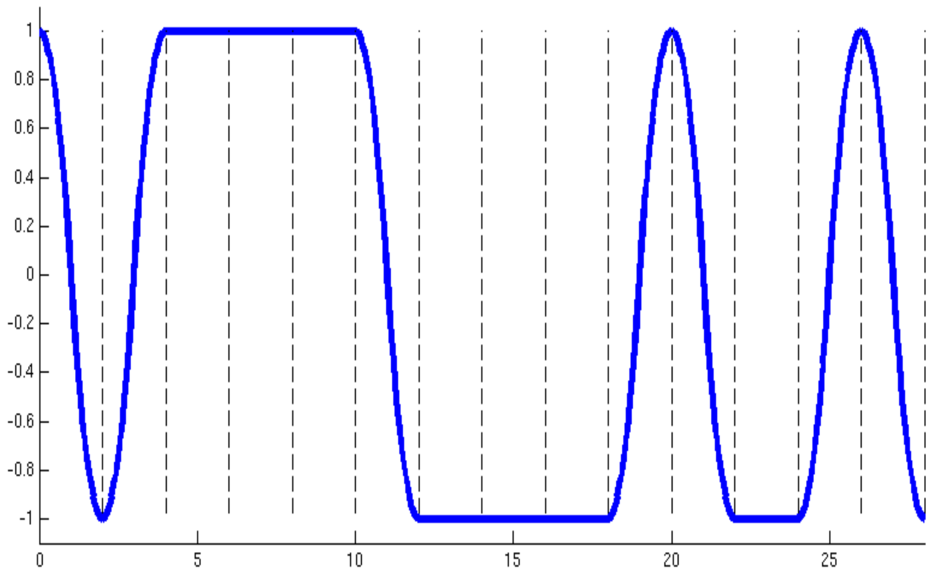
- Distorsion maximale:

$$D = \frac{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} |a_n g(nT_s)|}{|a_0 g(0)|} = \left[\frac{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} |a_n g(nT_s)|}{|a_0 g(0)|}\right]_{|a_n|=1}$$

- Interprétations: $D > 1$, $D < 1$

Diagramme de l'œil

- Moyen efficace pour détecter la présence IES
- Superposition de plusieurs signaux pendant N temps symbole



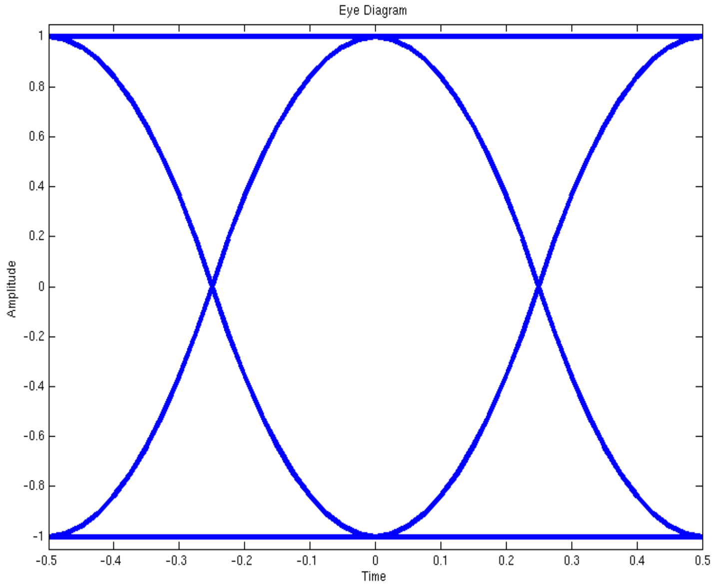
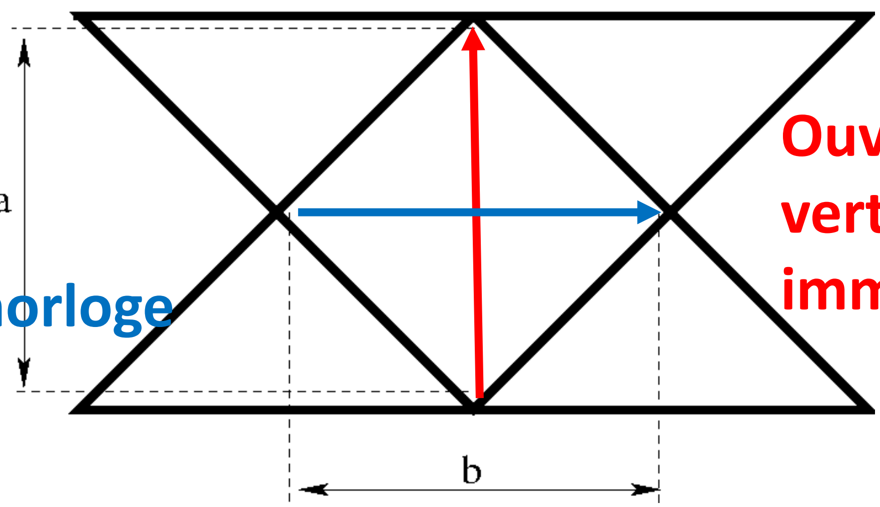


Diagramme de l’œil

- En l'absence d'IES, tous les signaux passent par les memes points à l’instant d’échantillonnage (2 en binaire, *M* points en *M*-aires).
- Le diagramme est complètement ouvert a l'instant de décision

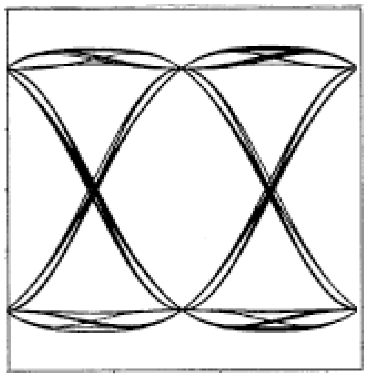
Ouverture horizontale : immunité au déphasage d'horloge

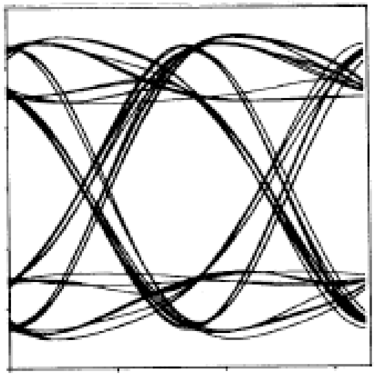


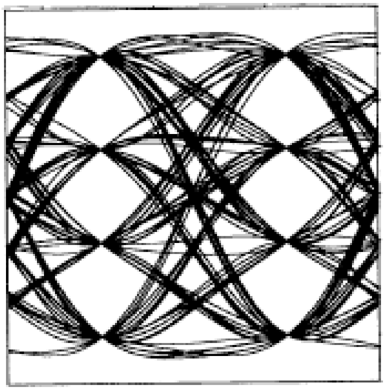
Ouverture verticale : immunité au bruit

Diagramme de l'œil

- Exemples







Annulation de l'IES

- Rappel signal reçu:

$$r(kT_s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g((k-n)T_s) = a_k g(0) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq k}} a_n g((k-n)T_s)$$

- Pour avoir IES nulle il faut:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq k}} a_n g((k-n)T_s) = 0, \qquad \forall n \neq k$$

Donc, le filtre global doit être définie tels que:

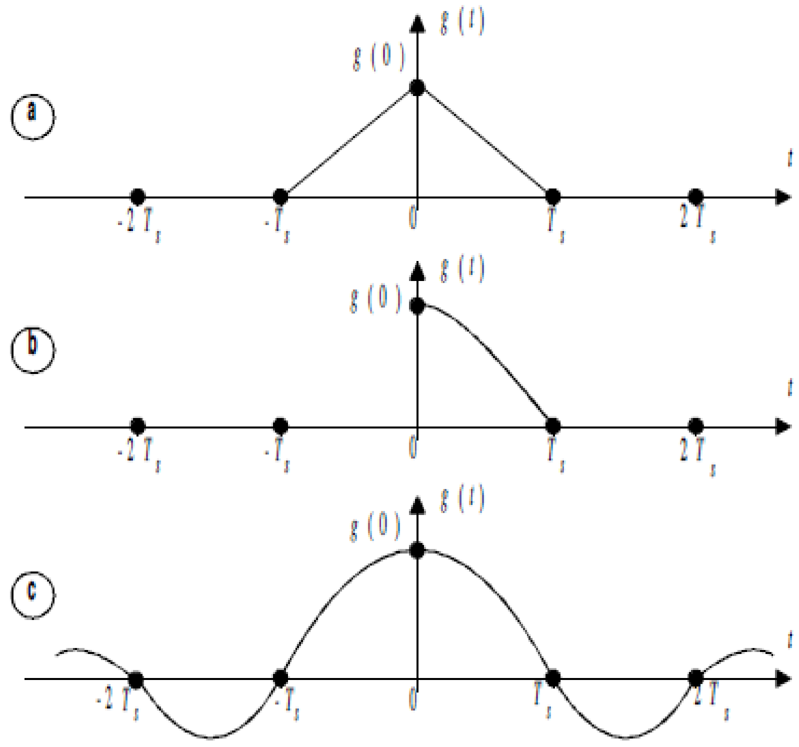
$$g(t) = h_e(t) * h_c(t) * h_r(t) = \begin{cases} g(kT_s) = 0, \forall k \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{g(kT_s) = g(0)\delta(k)}$$ Filtre de Nyquist

La forme du filtre n'est pas importante, il faut juste avoir l'annulation aux instants symboles différents de kT_s

Annulation de l'IES

- **Exemples**



- La condition est satisfaite lorsque:
  - $g(t)$ est de durée $< T_s$
  - $g(t)$ vérifie $g(kT_s) = 0, \forall k \neq 0$

Annulation de l'IES

- Etude fréquentielle:
  - Le critère de Nyquist implique que le signal reçu échantillonné vérifie:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(t-nT_s) = g(t) \times \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT_s) = g(0)\delta(k)$$

  - En fréquentiel, on aura:

$$G(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f-n/T_s) = g(0)$$

  - Ainsi:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} G\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = T_s.\,g(0)}$$

Critère de Nyquist en fréquence

Annulation de l'IES

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} G\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=T_s.\,g(0)}$$

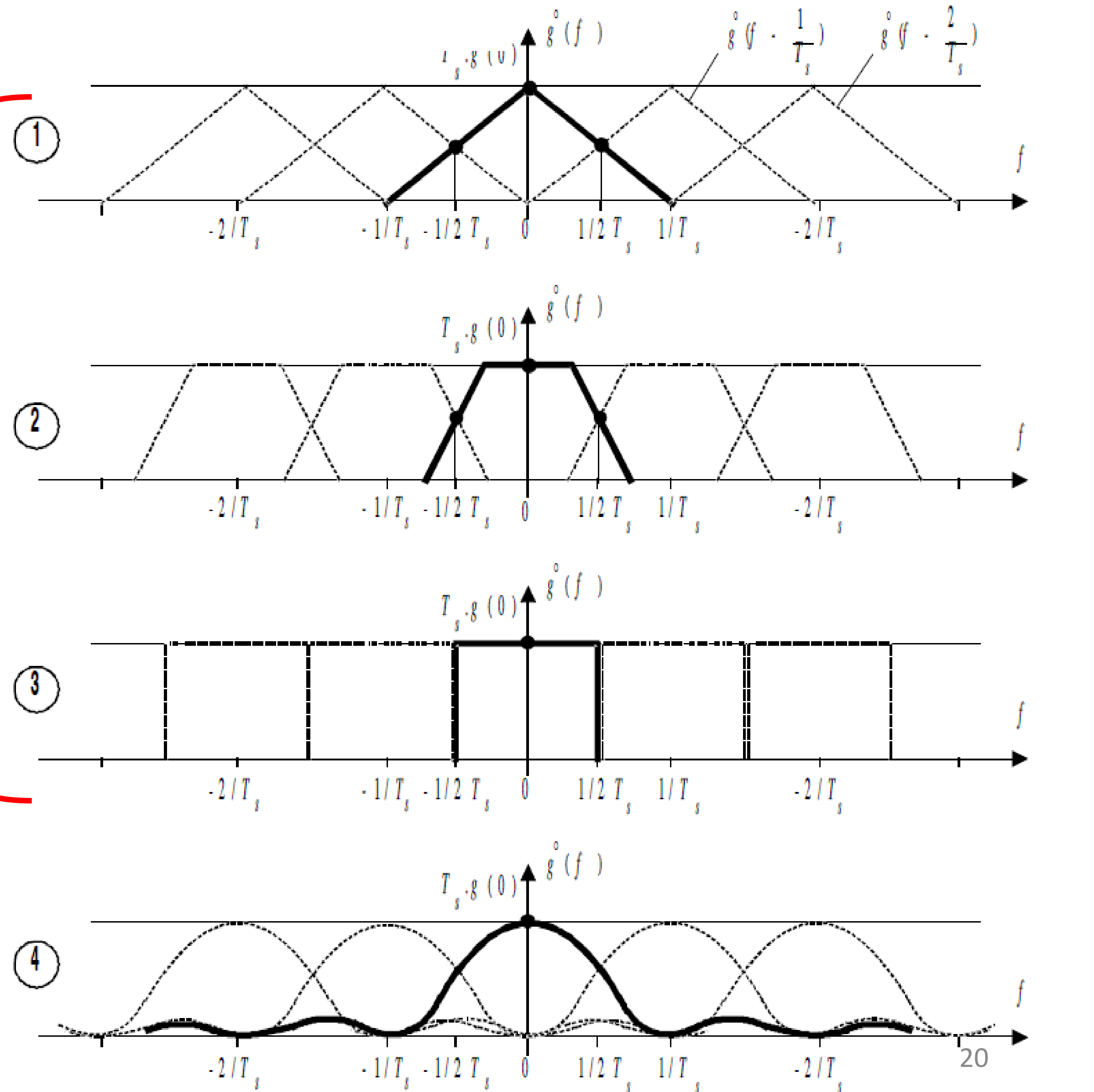
Critère de Nyquist en fréquence

- Explication pour un canal de largeur *B*
  - ***Cas 1***: $\frac{1}{2T_s}>B$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} G\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$ est plusieurs répétitions de $G(f)$ séparées de $\frac{1}{T_s}$ qui ne se recouvrent pas: condition non vérifiée.
  - ***Cas 2***:$\frac{1}{2T_s}=B$: c'est possible. Exemple:$G(f)=g(0)T_s$ pour $|f|<B$. Ainsi, $B=\frac{1}{2T_s}$ est la bande minimale nécessaire pour transmettre sans IES un signal à une rapidité de $\frac{1}{T_s}$
  - ***Cas 3:*** $\frac{1}{2T_s}<B$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} G\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$ est plusieurs répétitions de $G(f)$ séparées de $\frac{1}{T_s}$ qui se recouvrent. Possible si le point $\left(\frac{1}{2T_s},\frac{g(0)}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $G(f)$

Annulation de l'IES

- Il faut que:
  - $G(f)$ soit constante sur une largeur de bande $B > \frac{1}{2T_s}$
  - On appelle bande de Nyquist la largeur de bande minimale $B = \frac{1}{2T_s}$

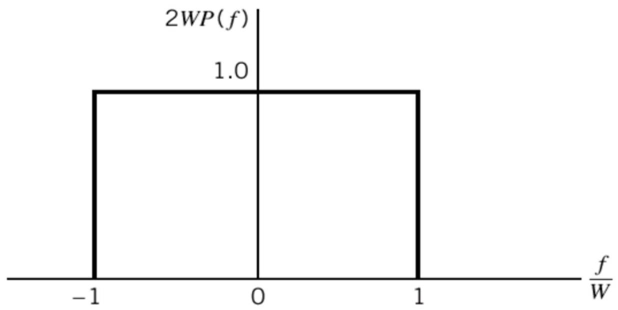
Support borné

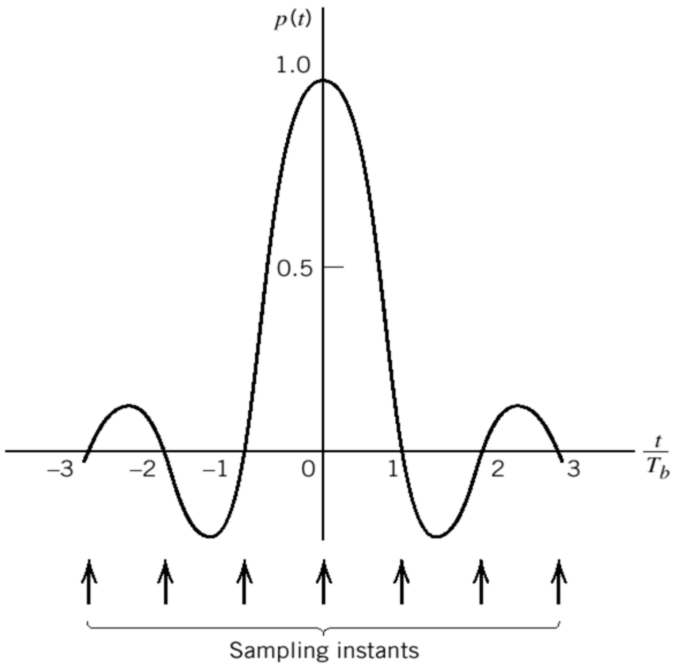


Annulation de l'IES

- **Canal de Nyquist idéal:**

$$B = \frac{1}{2T_s}$$





– Spectre $G(f)$ rectangulaire, de bande passante $B = \frac{1}{2Ts}$

– Impulsion correspondante dans le domaine temporel:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = sinc(\frac{t}{Ts})$$

Filtre en cosinus surélevé

- **Canal de Nyquist idéal:**
  – Elimination des IES
  – Minimum de bande passante (rapidité maximale)
- **Mais**
  – Transition abrupte de la réponse du filtre, irréalisable en pratique
  – L'impulsion $g(t)$ décroît en $1/|t|$, ce qui provoque une dégradation importante des performances en cas d'erreur de timing

Filtre en cosinus surélevé

- **Solution**:
  - Extension de la bande passante depuis la valeur minimale $B = \frac{1}{2Ts}$ vers une valeur ajustable entre B et $2B$
  - Pour un filtre dont le spectre est limité à la bande $[-2B, 2B]$, on peut se contenter de spécifier le critère de Nyquist dans la bande $[-B, B]$ comme:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} G\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = G(f) + G(f-\frac{1}{T_s}) + G(f+\frac{1}{T_s}) = T_s.\,g(0)$$

Filtre en cosinus surélevé

- **Solution possible:** filtre en cosinus surélevé (raised cosine filter) constitué d'une partie plate et une partie dite 'roll-off' de forme sinusoïdale
- Fonction de transfert est:

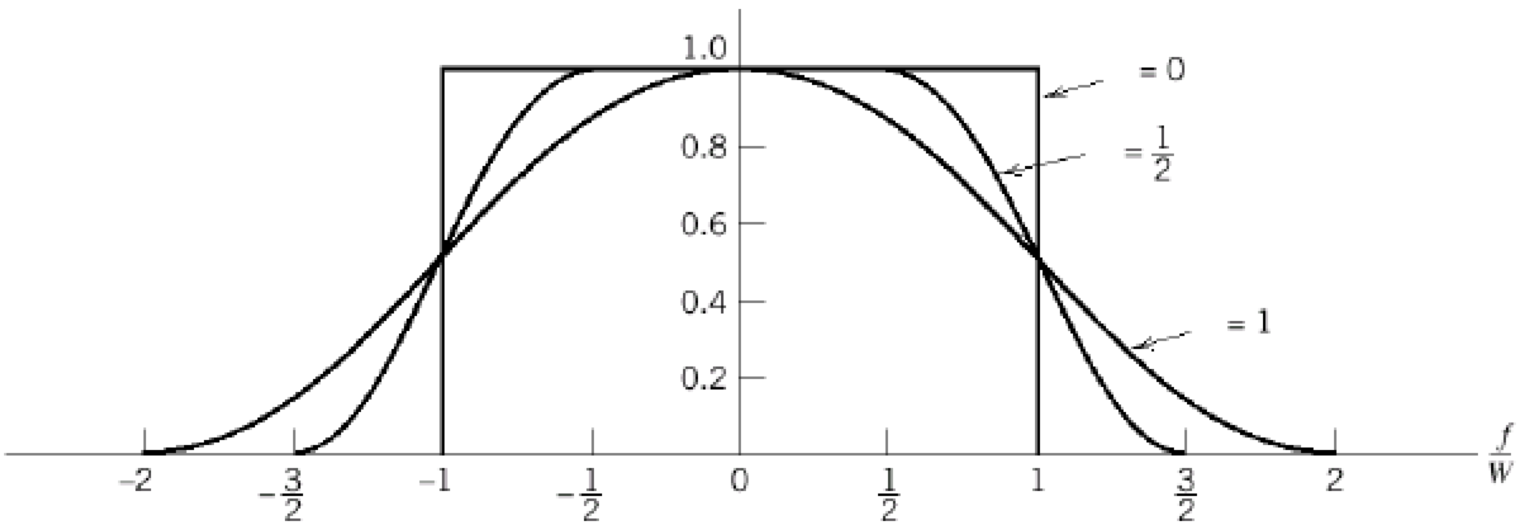
$$G(f) = \begin{cases} g(0)Ts, & si|f| < \dfrac{1-\alpha}{2Ts} \\ \dfrac{g(0)Ts}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi Ts}{\alpha}\left(f-\dfrac{1-\alpha}{2Ts}\right)\right)\right], & si\,\dfrac{1-\alpha}{2Ts} < |f| < \dfrac{1+\alpha}{2Ts} \\ 0, & si\ |f| > \dfrac{1+\alpha}{2Ts} \end{cases}$$

- Avec α est le coefficient d'excès en bande

$$B_T = B(1+\ \alpha)$$

Filtre en cosinus surélevé

- *Cas1:* $\alpha = 0$: Filtre rectangulaire
- *Cas 2*: $\alpha = 1$: $G(f) = \frac{g(0)Ts}{2}[1 + \cos(\pi T_s f)]$



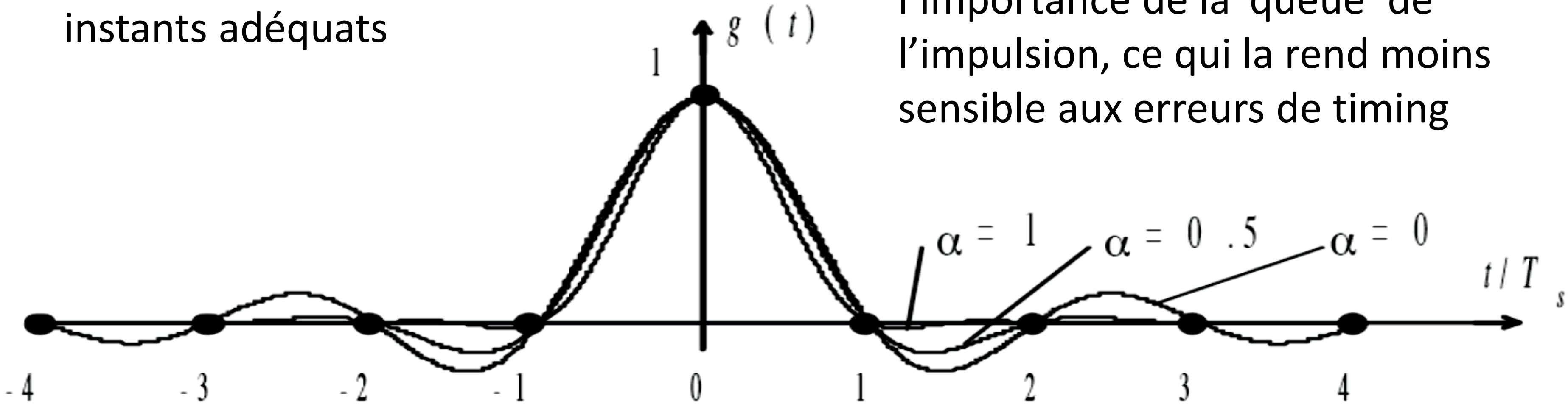
Filtre en cosinus surélevé

- **Analyse temporelle du filtre**
  - La réponse impulsionnelle du filtre vaut:

$$g(t) = g(0)sinc(\frac{\pi T}{T_s})\frac{\cos(\frac{\pi\alpha T}{T_s})}{1-(\frac{2\alpha T}{T_s})^2}$$

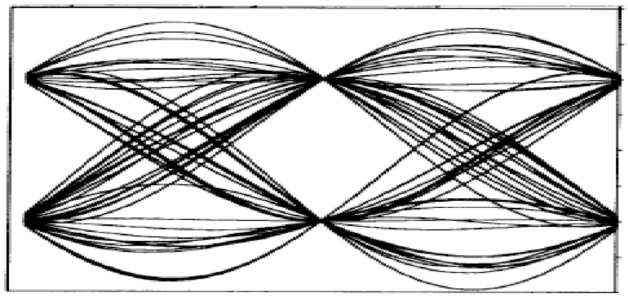
impulsion de Nyquist idéale, assurant le passage par 0 aux instants adéquats

décroissance en $\frac{1}{|t|^2}$, réduisant l'importance de la 'queue' de l'impulsion, ce qui la rend moins sensible aux erreurs de timing

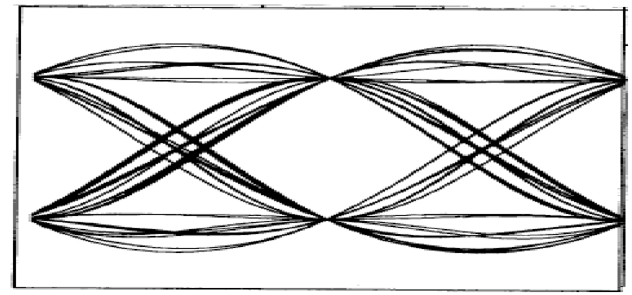


Filtre en cosinus surélevé

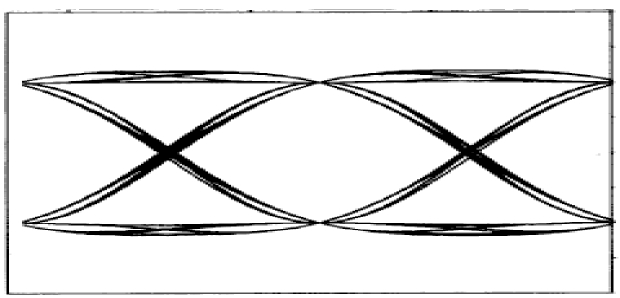
- **Impact sur le diagramme de l'œil**



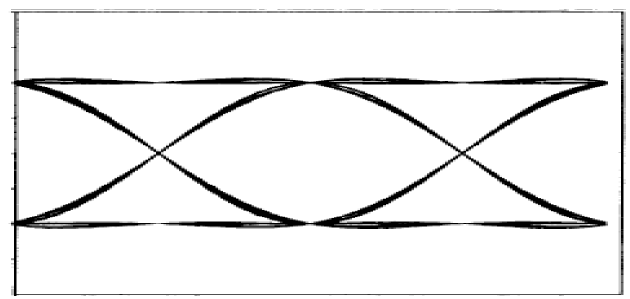
$\alpha = 0.2$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 0.8$



$\alpha = 1$

- **Impact sur la bande**

Compromis

La notion d’égalisation

- En présence du bruit, le filtre de réception doit corriger, de façon adaptative, la distorsion linéaire responsable de l'IES introduite par le canal.
- Le canal est dit **égalisé** lorsque la réponse globale vérifie le critère de Nyquist.
- En pratique, on y parvient à l'aide d'un filtre supplémentaire appelé égaliseur placé derrière le filtre d'entrée du récepteur, après échantillonnage (filtre numérique)