

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Méthode de décomposition LU

AN - 4 GC - **A.U.** 2021/2022

La décomposition LU

Soit S un système d'équations linéaires défini par

$$(S): AX = b$$

où ${\cal A}$ est une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le mineur principal $M_{p,p}$ de A est le déterminant de la sous-matrice de A formée des p premières lignes et p premières colonnes



Exemple:

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix}, \quad M_{2,2} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad M_{3,3} = \det(A)$$

sont les mineurs principaux de la matrice A.

Remarque

Si A est d'ordre n alors elle admet n mineurs principaux.



- ▶ Le principe de la méthode est de se ramener à deux systèmes triangulaires en appliquant les étapes suivantes:
 - **1 Décomposition de** A : Trouver les matrices L et U vérifiant A = LU où :

L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients

de la diagonale sont égaux à 1.

et

 ${\cal U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

- **Q** Résolution du système triangulaire inférieur LY = b.(Descente)
- 2 Résolution du système triangulaire supérieur UX = Y.

$$AX = b \xrightarrow{\textbf{Décomposition LU}} AX = L \underbrace{UX}_{Y} = b \rightarrow \begin{cases} LY &= b \\ UX &= Y \end{cases}$$

ightharpoonup L'existence de la décomposition LU est assurée par le théorème suivant :

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls alors il existe un unique couple de matrices (L,U), avec U triangulaire supérieure, et L triangulaire inférieure dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1. (i.e. $l_{i,i}=1$), vérifiant A=LU.



Si A une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls

 $\Rightarrow \exists \quad \text{deux matrices} \quad \begin{cases} L & \text{triangulaire inférieure dont les coefficients} \\ & \text{de la diagonale sont égaux à 1.} \\ U & \text{triangulaire supérieure.} \end{cases}$

vérifiant A=LU



Étude dun exemple

Soit le système (S) suivant:

(S):
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 & \Leftrightarrow AX = b \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

où
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
 et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que le système admet une solution unique (syst'eme de Cramer).
- 2 Montrer que la décomposition LU existe.
- 3 Résoudre (S) par la méthode de la d'ecomposition LU.



Solution

- ① $\det A = 32 \neq 0$ donc le système admet une solution unique(système de Cramer).
- ② A est une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. En effet,

$$\begin{cases} \det(3) = 3 \neq 0 \\ \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 8 \neq 0 \\ \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \det A = 32 \neq 0$$

Donc la décomposition LU existe.

3 Etape 1:

$$A = LU \text{ alors} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$



1ère méthode: Calcul des matrices L et U en utilisant la méthode d'identification

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times u_{1,1} = 3 \Rightarrow u_{1,1} = 3 \\ 1 \times u_{1,2} = 1 \Rightarrow u_{1,2} = 1 \\ 1 \times u_{1,3} = 1 \Rightarrow u_{1,3} = 1 \\ l_{2,1} \times 3 = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + 1 \times u_{2,2} = -3 \Rightarrow u_{2,2} = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + 1 \times u_{2,3} = 1 \Rightarrow u_{2,3} = \frac{2}{3} \\ 3 \times l_{3,1} = 1 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + l_{3,2} \times -\frac{10}{3} = 1 \Rightarrow l_{3,2} = -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + 1 \times u_{3,3} = -3 \Rightarrow u_{3,3} = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -16/5 \end{pmatrix}$$

@UP Maths AN ESPRIT



2ème méthode: Calcul des matrices L et U en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

On applique la méthode de pivot de Gauss à la matrice A. Etape 0:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 1:

Le pivot est $3 \neq 0$, on applique les opérations suivantes:

$$L_1 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$$
 et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1$, on a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$



Etape 2:

Le pivot est $-\frac{10}{3} \neq 0$, on applique les opérations suivantes:

$$L_1 \leftarrow L_1, \underline{L_2} \leftarrow \underline{L_2}$$
 et $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5}\underline{L_2}$ à $A^{(1)}$, on a

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

 $U=A^{(n)}$ où $A^{(n)}$ est la matrice triangulaire supérieure de la dernière étape n de la méthode de pivot de Gauss donc $U=A^{(2)}$



Les coefficients de la matrice L sont $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{\alpha_k}$ où $a_{ik}^{(k-1)}$ sont les coefficients de $A^{(k-1)}$ à l'étape k-1 et α_k est le pivot à l'étape k-1.

$$l_{21} = \frac{1}{3}, l_{31} = \frac{1}{3} \text{ et } l_{32} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{10}{3}} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/5 & 1 \end{pmatrix},$$



Résolution AX = b

Résoudre $AX = b \Leftrightarrow$ Résoudre

$$\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

où
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
 et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$



Etape 2: la solution du système linéaire LY = b.

$$L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Etape 3: la solution du système linéaire

$$UX = Y \Rightarrow U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -48/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Autre critère d'existence de la décomposition LU:

Matrice à diagonale strictement dominante

Définition

Une matrice A est à **diagonale strictement dominante** si la valeur absolue de chaque coefficient diagonal $a_{i,i}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$ de A est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres coefficients de A situés à la i ème ligne. En d'autre terme,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \ \forall i \in \{1, ..., n\}.$$



Exemple: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\begin{cases} |a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| & (\operatorname{car}|5| > |2| + |-1|) \\ |a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| & (\operatorname{car}|6| > |1| + |-3|) \\ |a_{3,3}| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}| & (\operatorname{car}|4| > |2| + |1|) \end{cases}$$

 \Rightarrow A est une matrice à diagonale strictement dominante.

Proposition

Si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors elle admet une décomposition LU.