ÁLGEBRA LINEAL - Clase 24/04

Para hacer en clase (y después) (y antes)

Ejercicio 1. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. (Notar que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial; si lo considera necesario, pruebe que lo es).

i) Dar distintos conjuntos de generadores para V.

ii) Probar que el conjunto $U = \mathbb{R}^{(\mathbb{Z})} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ si } |x| \geq M\}$ es un subespacio de V. Dar conjuntos de generadores para U.
¿Puede darse un conjunto de generadores *minimal* de U?

iii) ¿Puede darse un conjunto de generadores *finito* de U?

Ejercicio 2. Sea $V = \mathbb{C}_3[X]$. Sea $S = \langle X^3 + iX, X^2 + X + i, -iX^3 + X, iX^3 + X^2 + i\rangle \subseteq V$. Extraiga una base de S del conjunto de generadores, considerando a V como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Halle la dimensión de S en ambos casos, y compare lo obtenido con el Ejercicio 20 de la Práctica. ¿Por qué no tenemos una contradicción?

Ejercicio 3. Sea $V = \mathbb{F}_3[X]$ el espacio vectorial dado por todos los polinomios con coeficientes en el (único) cuerpo de tres elementos.

i) Sea $n \in \mathbb{N}$. De una base del subespacio $U_n = \mathbb{F}_3[X]_{\leq n} = \{P \in V : P = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(P) \leq n\}$.

ii) ¿Cuántos elementos tiene U_1? ¿Cuántos elementos tiene U_2? ¿Cuántos elementos tiene U_3? ¿Puede dar una fórmula general para la cantidad de elementos en U_n?

iii) Dados $P, Q \in V$ linealmente independientes, ¿cuántas combinaciones lineales distintas existen de P y Q? ¿Qué dice esto sobre el subespacio generado por P y Q?

iv) ¿Puede un subespacio de V tener más de 3 pero menos de 9 elementos?

v) ¿Se puede decir algo (interesante) sobre la cantidad de elementos que tienen los subespacios de dimensión finita de V?

iv) Consideremos los polinomios $P = X^3 - X$ y $Q = X^4 - X^2$ en V (notar que podríamos considerarlos dentro de U_n para cualquier $n \geq 4$). Verifique que $P(\alpha) = Q(\alpha) \in \mathbb{F}_3$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}_3$. ¿Son P y Q linealmente independientes en V? ¿Cambia la respuesta si los consideramos como elementos de U_4 en lugar de V?

Ejercicio 4. (tarea) Notar que la elección de $\mathbb{F}_3$ en el Ejercicio 2 fue arbitraria, podría cambiarse por cualquier otro cuerpo finito. Medite sobre las respuestas dadas a lo largo del ejercicio si cambiamos el cuerpo finito sobre el cual estamos trabajando.

Ejercicio 5. (Bonus) ¿Existen espacios vectoriales finitos con cualquier cardinal?
Si necesita una ayuda: Si V es un K-espacio vectorial finito, entonces K debe ser un cuerpo finito (¿por qué?). Además, si B es una base de V, entonces B debe ser un conjunto finito (¿por qué?). En términos de los cardinales de B y K, deduzca el cardinal de V.