ÁLGEBRA LINEAL - Clase 26/05

Para hacer en clase (y después) (y antes)

Ejercicio 1.

i) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $f^3 = -f$. Probar que $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$.

ii) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea f un endomorfismo de V. Probar que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2)$ si y solo si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

iii) Probar que el ítem ii) es falso si omitimos la hipótesis de dimensión finita (en el Ejercicio 4 de la Práctica 3 hay posibles contraejemplos).

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por $f(X + 1) = (2, 3, -4)$, $f(X - 1) = (-1, 5, 3)$ y $f(X^2) = (0, \frac{13}{4}, \frac{1}{2})$. Decidir si f es monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo. Calcular bases de $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Nu}(f)$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Definimos $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dada por $f(x) = Ax$. Dar un conjunto de generadores para $\mathrm{Im}(f)$. ¿Puede asegurarse que dicho conjunto de generadores es una base poniendo alguna hipótesis (razonable) sobre la matriz A? (Si después de pensar un rato, no encuentra hipótesis razonables, puede revisar el Ejercicio 16 de la Práctica 2).

Ejercicio 4. Hallar, en cada caso, una transformación lineal (distinta) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que cumpla lo pedido:

i) $f \neq 0$ e $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nu}(f)$.

ii) $f \neq 0$, $\mathrm{Nu}(f) = \langle E^{11} \rangle$ y $f^4 = 0$.

iii) f no es isomorfismo, $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicios de la guía relacionados: 6 **al** 14**, exceptuando el** 12.