ÁLGEBRA LINEAL - Clase 17/04

Para hacer en clase (y después)

Ejercicio 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Probar que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por escalares dados por:

$\oplus \;:\; x \oplus y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$

$\otimes \;:\; \alpha \otimes x = \sqrt[n]{\alpha}x.$

Bonus (?): Sea $\beta > 0$. Probar que $\mathbb{R}_{>0}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por escalares dados por:

$\oplus \;:\; x \oplus y = \beta xy$

$\otimes \;:\; \alpha \otimes x = \beta^{\alpha-1}x^{\alpha}.$

Notar que esto generaliza el Ejercicio 8 iii) de la Práctica.

Ejercicio 2. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dar algunos ejemplos y no-ejemplos de subespacios de este espacio vectorial. Para los no ejemplos, *puede ser más divertido* intentar construir subconjuntos que sean cerrados para la suma y no para el producto por escalares, y viceversa.

Ejercicio 3. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es función}\}$. (Notar que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial; si lo considera necesario, pruebe que lo es).

i) Dar distintos conjuntos de generadores para V.

ii) Probar que el conjunto $U = \mathbb{R}^{(\mathbb{Z})} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \,|\, \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ si } |x| \geq M\}$ es un subespacio de V. Dar conjuntos de generadores para U.
¿Puede darse un conjunto de generadores *minimal* de U?

Ejercicio 4. Sea $V = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,:\, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ el subespacio dado por las matrices de traza nula (si necesita convencerse, pruebe que V es efectivamente un subespacio).

i) Dar un conjunto de generadores para V.

ii) Sean $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $T = \{(a_{ij}) \in V \,:\, a_{22} = 0\}$.
Notar (probar, si hace falta) que ambos conjuntos son subespacios de V.

iii) Decidir si $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \in S$.

iv) Dar un conjunto de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V.

Ejercicio 5. (tarea) Buscar un ejemplo de espacio vectorial que llame su atención (en internet, libros, incluso en su imaginación) y probar que efectivamente es un espacio vectorial. Use su curiosidad: intente encontrar ejemplos de subespacios, conjuntos de generadores, subconjuntos que no sean subespacios pero sean cerrados para la suma o producto por escalares, interseque algunos subespacios e intente describir dicha intersección...

Ejercicios de la guía relacionados: 8 a 17.