

## PRÁCTICA 5 - SISTEMAS DEDUCTIVOS PARA LÓGICA PROPOSICIONAL Y APLICACIONES DE COMPACIDAD -

Salvo que se indique lo contrario, *no* asumir que SP es correcto ni completo.

**Ejercicio 1.** Considerar la axiomatización SP para la lógica proposicional dada en la teórica. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas

- a.  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
- b.  $\vdash (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

*Sugerencia:* recordar que en SP vale el teorema de la deducción.

**Ejercicio 2.**

- a. Demostrar que (toda instancia de) SP3 es una tautología.
- b. Demostrar que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.
- c. Suponiendo además que (todas las instancias de) SP1 y SP2 también son tautologías, demostrar que SP es correcto.

**Ejercicio 3.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas del lenguaje  $\{\neg, \rightarrow\}$ . Demostrar que  $\Gamma$  es inconsistente (i.e. existe  $\beta$  tal que  $\Gamma \vdash \beta$  y  $\Gamma \vdash \neg\beta$ ) sii  $\Gamma \vdash \alpha$  para todo  $\alpha$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas del lenguaje  $\{\neg, \rightarrow\}$ . Demostrar los siguientes puntos:

- a. Si  $\Gamma$  es un conjunto maximal consistente, entonces  $\Gamma \vdash \alpha$  sii  $\alpha \in \Gamma$ .
- b.  $\Gamma$  es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:
  1. Para toda  $\alpha$ , o bien  $\alpha \in \Gamma$  o bien ('o' exclusivo)  $\neg\alpha \in \Gamma$ .
  2. Todos los axiomas de SP están en  $\Gamma$ .
  3.  $\Gamma$  está cerrado por MP, es decir: si  $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$  y  $\alpha \in \Gamma$  entonces  $\beta \in \Gamma$ .
- c. Si  $\Gamma$  es maximal consistente y  $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$ , entonces  $\alpha \in \Gamma$  ó  $\beta \in \Gamma$ .

**Ejercicio 5.** Recordemos el procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente  $\Gamma$ .

- 1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
- 2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Gamma^+ &= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n \end{aligned}$$

Demostrar los siguientes puntos:

- a. Cada  $\Gamma_i$  es consistente.
- b. Exactamente una de las fórmulas  $\alpha$  y  $\neg\alpha$  está en  $\Gamma^+$  para cada fórmula  $\alpha$ .
- c. Todos los teoremas están en  $\Gamma^+$ .
- d.  $\Gamma^+$  es un conjunto maximal consistente.

**Ejercicio 6.** Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

- Si  $\Gamma \models \alpha$  entonces para algún subconjunto finito  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ,  $\Gamma_0 \models \alpha$ .
- Si todo subconjunto finito  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  es satisfacible, entonces  $\Gamma$  es satisfacible.
- Si  $\Gamma$  es insatisfacible, entonces algún subconjunto finito de  $\Gamma$  es insatisfacible.

En los siguientes ejercicios se puede asumir que SP es correcto y completo.

**Ejercicio 7.** Sea  $\alpha$  una fórmula que no es una tautología, y sea  $\Gamma$  el conjunto de todas las instancias de  $\alpha$  (por instancia de  $\alpha$  nos referimos a reemplazar uniformemente las variables proposicionales de  $\alpha$  por fórmulas arbitrarias). Demostrar que  $\Gamma$  es inconsistente.

**Ejercicio 8.** Sea  $\beta$  una fórmula fija y  $\Gamma$  un conjunto consistente, mostrar que si  $\Gamma \not\models \beta$  y  $\Gamma \not\models \neg\beta$ , entonces existen  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  maximales consistentes, tales que  $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1)$ ,  $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ , y  $\Gamma_1 \vdash \beta$  y  $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$ .

**Ejercicio 9.** Demostrar que si  $\Gamma$  es un conjunto maximal consistente entonces  $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$ .

**Ejercicio 10.** Dados  $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\Gamma_i$  es satisfacible y  $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ . ¿Es  $\Gamma^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$  satisfacible?

**Ejercicio 11.** Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas  $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$ ,  $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$  tales que  $\alpha \rightarrow \neg\beta$  es una tautología. *Sugerencia:* usar el Teorema de Compacidad.

**Ejercicio 12.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas  $\alpha, \beta$  se cumple que  $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$ . Probar que  $\Gamma$  es satisfacible.

**Ejercicio 13.** \* Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de  $\Gamma$ . Probar que existe un número finito de fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$  tales que  $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$  es tautología.

**Ejercicio 14.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si  $\alpha, \beta \in \Gamma$ , entonces  $\alpha \rightarrow \beta$  es tautología ó  $\beta \rightarrow \alpha$  es tautología. Probar que si  $\Gamma \models \gamma$ , entonces existe  $\delta \in \Gamma$  tal que  $\{\delta\} \models \gamma$ .

**Ejercicio 15.** Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2$  satisfacibles, tal que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es insatisfacible. Mostrar que existe un  $\alpha$  tal que  $\Gamma_1 \models \alpha$  y  $\Gamma_2 \models \neg\alpha$ .

**Ejercicio 16.** Decidir si la siguiente afirmación es verdadera ó falsa y justificar: Si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son consistentes, entonces o bien a partir de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  se demuestra una contradicción o bien existe  $\Delta$  maximal consistente tal que  $\Gamma_1 \subseteq \Delta$  y  $\Gamma_2 \subseteq \Delta$ .

\*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.