Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Моделювання систем

Лабораторна робота №1

Виконав студент 3-го курсу

Групи ІПС-31

Пригода Максим

2023

Завдання

1. Вивчити означення дискретного перетворення Фур'є і його властивості
2. Написати програму, яка б за допомогою дискретного перетворення Фур'є визначала суттєві вклади частот $f_i,\ i = 1,2,\ldots,r$ за спостереженнями $\hat{y}\left(t_i\right),\ i = 1,2,\ldots,N$ і вивести його графік. Спостереження записані у файлі що додається.
3. Зробити аналіз функції модуля перетворення Фур'є дискретної послідовності $\hat{y}\left(t_i\right),\ i = 1,2,\ldots,N$ і вивесті його графік. Вивести знайдені значення $f_i,\ i = 1,2,\ldots,r$
4. Оформити в друкованій формі звіт про виконання роботи, в якому викласти результати проведених обчислень.

Спостереження

3 38.3803 33.6656 3.3167 -4.4051 25.2552 52.7626 38.7924 -1.2885 -18.2657 3.522 25.3102 8.3345 -31.7437 -45.7103 -18.1983 11.4678 3.7528 -26.5884 -31.2942 4.096 39.4868 34.7829
4.445 -3.2656 26.4062 53.9253 39.9671 -0.10158 -17.0663 4.734 26.5351 9.5726 -30.4923 -44.4451 -16.9192 12.761 5.0603 -25.2663 -29.9572 5.448 40.8541 36.1658 5.8436 -1.8509 27.8372
55.3728 41.4314 1.3797 -15.5678 6.25 28.0688 11.1243 -28.9224 -42.8568 -15.3122 14.3869 6.7054 -23.6018 -28.2731 7.152 42.5782 37.9103 7.6087 -0.064964 29.6443 57.2011 43.2813
3.2514 -13.6741 8.166 30.0073 13.0856 -26.9381 -40.8493 -13.2813 16.4416 8.784 -21.4989 -26.1458 9.304 44.7552 40.1124 9.8362 2.1882 31.9232 59.5063 45.6127 5.6095 -11.2892 10.578
32.4467 15.5525 -24.4434 -38.3266 -10.7302 19.0211 11.3923 -18.8616 -23.4793 12 47.4809 42.868 12.6221 5.0045 34.7703 62.3842 48.5218 8.5499 -8.3171 13.582 35.4828 18.6209 -21.3423
-35.1927 -7.5632 22.2214 14.6262 -15.594 -20.1776 15.336 50.8514 46.2733 16.0624 8.48 38.2813 65.9309 52.1045 12.1688 -4.6617 17.274 39.2117 22.387 -17.5389 -31.3515 -3.6842 26.1386
18.5817 -11.5999 -16.1446 19.408 54.9627 50.4242 20.253 12.7107 42.5523 70.2424 56.4568 16.5621 -0.22722 21.75 43.7294 26.9467 -12.937 -26.7072 1.0027 30.8685 23.3548 -6.7834
-11.2845 24.312 59.9108 55.4167 25.2901 17.7926 47.6792 75.4147 61.6747 21.8258 5.0825 27.106 49.1319 32.396 -7.4407 -21.1637 6.5937 36.5072 29.0414 -1.0485 -5.5012 30.144 65.7918
61.3468 31.2696 23.8218 53.7582 81.5439 67.8541 28.0559 11.3634 33.438 55.5153 38.8309 -0.95402 -14.625 13.1847 43.1507 35.7377 5.7008 1.3013 37 72.7015 68.3104 38.2875 30.8941
60.8852 88.7258 75.0912 35.3483 18.7115 40.842 62.9754 46.3473 6.6191 -6.9951 20.8717 50.895 43.5396 13.5604 9.219 44.976 80.736 76.4037 46.4398 39.1056 69.1562 97.0565 83.4819
43.7992 27.2229 49.414 71.6083 55.0414 15.3745 1.8221 29.7508 59.8362 52.5431 22.6265 18.348 54.168 89.9913 85.7226 55.8224 48.5523 78.6673 106.632 93.1222 53.5045 36.9934 59.25
81.51 65.0091 25.4084 11.9224 39.9177 70.0701 62.8442 32.995 28.7841 64.672 100.5634 96.3631 66.5315 59.3302 89.5142 117.5483 104.1081 64.5602 48.1191 70.446 92.7765 76.3464
36.8167 23.4019 51.4688 81.6928 74.5388 44.7619 40.6234 76.584 112.5484 108.4212 78.663 71.5354 101.7933 129.9015 116.5355 77.0623 60.696 83.098 105.5039 89.1493 49.6954 36.3566
64.4998 94.8003 87.7231 58.0232 53.9619 90 126.0421 121.9928 92.3129 85.2637 115.6002 143.7874 130.5006 91.1067 74.8201 97.302 119.788 103.5137 64.1405 50.8825 79.1067 109.4886
102.493 72.8748 68.8956 105.016 141.1406 137.1741 107.5772 100.6112 131.0312 159.3021 146.0993 106.7896 90.5875 113.154 135.7249 119.5358 80.2479 67.0757 95.3857 125.8538
118.9445 89.4129 85.5206 121.728 157.9399 154.061 124.5518 117.6739 148.1822 176.5416 163.4276 124.2069 108.094 130.75 153.4106 137.3115 98.1138 85.032 113.4327 143.9917
137.1736 107.7334 103.9327 140.232 176.536 172.7495 143.3329 136.5478 167.1492 195.6019 182.5815 143.4546 127.4357 150.186 172.9411 156.9368 117.8341 104.8475 133.3437
163.9984 157.2762 127.9323 124.228 160.624 197.025 193.3356 164.0164 157.329 188.0282 216.5791 203.6569 164.6287 148.7086 171.558 194.4125 178.5077 139.5048 126.6182 155.2148
185.9699 179.3485 150.1056 146.5025 183 219.5027 215.9152 186.6983 180.1133 210.9152 239.569 226.75 187.8251 172.0087 194.962 217.9206 202.1201 163.2219 150.4401 179.1418
210.0022 203.4864 174.3492 170.8522 207.456 244.0652 240.5845 211.4746 204.9968 235.9062 264.6677 251.9567 213.14 197.4321 220.494 243.5615 227.8702 189.0813 176.4093 205.2207
236.1914 229.7859 200.7593 197.3732 234.088 270.8085 267.4394 238.4412 232.0755 263.0973 291.9712 279.373 240.6693 225.0746 248.25 271.4312 255.8539 217.1792 204.6216 233.5477
264.6333 258.343 229.4318 226.1613 262.992 299.8286 296.5759 267.6943 261.4454 292.5843 321.5755 309.0949 270.509 255.0323 278.326 301.6257 286.1672 247.6115 235.1731 264.2187
295.424 289.2536 260.4627 257.3126 294.264 331.2216 328.09 299.3298 293.2026 324.4632 353.5767 341.2183 302.7551 287.4012 310.818 334.2411 318.9061 280.4742 268.1598 297.3298
328.6595 322.6139 293.948 290.9231 328

Теорія

Дискретне перетворення Фур'є це математична процедура, що використовується для визначення гармонічного, або частотного складу дискретних сигналів. ДПФ є однією з найбільш розповсюджених процедур цифрової обробки сигналів.

Властивості ДПФ:

1) Симетрія $X(N-m)\ = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}$
2) Лінійність. Якщо вхідна послідовність $x_1(n)$ має ДПФ $X_1(m)$, а інша вхідна п-ть $x_2(n)$ має ДПФ $X_2(m)$, то ДПФ суми цих послідовностей $x_{sum}(n) = x_1(n) + x_2(n)$ рівна $X_{sum}(n) = X_1(m) + X_2(m)$

3) Зсув у часі $X_{shifted}(m) = e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} X(m)$

ДПФ визначається таким способом

$$c_x(k) = \frac{1}{N} * \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-\frac{i2\pi km}{N}}$$

Тут $i^2 = -1$ – комплексна одиниця, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Задані інтервал спостереження $[0,T]$, $T = 5$, спостереження $\hat{y}(t_i)$ в дискретні моменти часу $t_i \in [0,T]$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $t_{i+1} - t_i = \Delta t = 0.01$. Спостереження подані вище. Потрібно визначити суттєві внески частот за спостереженнями (задача про приховану періодичність).

1. Знаходимо $\Delta f = \dfrac{1}{T}$.
2. Для всіх $k = 0,1,\ldots,N-1$ визначаємо модуль перетворення Фур'є $\left|c_{\hat{y}}(k)\right|$, за спостереженнями $\hat{y}\left(t_j\right)$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.
3. Визначаємо локальні максимуми k_* модуля перетворення Фур'є $\left|c_{\hat{y}}(k)\right|$, $k = 0,1,\ldots,\left[\dfrac{N}{2}\right] - 1$.
4. Знаходимо частоти $f_* = k_* \Delta f$.

Код розв'язку:

```
clear

% Записуємо початкові дані
delta_t = 0.01;
T = 5;
t = 0:delta_t:T;
y = load("f14.txt");
N = length(y);

% Будуємо графік спостережень
figure
plot(t,y), grid

% Дискретне перетворення Фур'є за початковими даними
fourier_func = zeros(1,N);
for m = 1:N
    for j = 1:N
        fourier_func(m) = fourier_func(m) + 1/N*y(j)*exp(1)^(-1i*2*pi/N*m*j);
    end
end
```

```
figure
% Знаходимо дельта ф і будуємо графік перетворення Фур'є для показу
% екстремумів
delta_f = 1/T;
n = length(t);
plot(abs(fourier_func)),grid
f = 0:delta_f:round(n/2) * delta_f;

figure
plot(f,abs(fourier_func(1:round(n/2)+1)))

% Знаходимо локальні максимуми і частоти
fourier_func=abs(fourier_func);
counter = 0;
extr = zeros(2,1);
for j = 3:round(N/2)-1
    if(fourier_func(j) > fourier_func(j+1) && fourier_func(j) >
fourier_func(j-1) && abs(fourier_func(j)-fourier_func(j+1)) > 1)
        counter = counter + 1;
        extr(counter) = j*delta_f
    end
end

% Будуємо та розв'язуємо систему рівнянь, щоб знайти коефіцієнти при
% частотах
f_sin = sin(2*pi*extr(1)*t);

A = [sum(t.^6), sum(t.^5), sum(t.^4), sum(f_sin.*t.^3), sum(t.^3);
     sum(t.^5), sum(t.^4), sum(t.^3), sum(f_sin.*t.^2), sum(t.^2);
     sum(t.^4), sum(t.^3), sum(t.^2), sum(f_sin.*t),    sum(t);
     sum(f_sin.*t.^3), sum(f_sin.*t.^2), sum(f_sin.*t), sum(f_sin.*f_sin),
sum(N*f_sin);
     sum(t.^3), sum(t.^2), sum(t), sum(N*f_sin), N];

c = [sum(y.*t.^3), sum(y.*t.^2), sum(y.*t), sum(y.*f_sin),  sum(y)];

a = inv(A)*c'
temp = a'

% Отримана апроксимуюча функція
aprox_f = a(1).*t.^3 + a(2).*t.^2 + a(3).*t + a(4).*f_sin +a(5);

% Графік апроксимуючої функції
figure
plot(t, aprox_f), grid

% Середньоквадратична похибка
error_value = sum((aprox_f-y).^2)
```

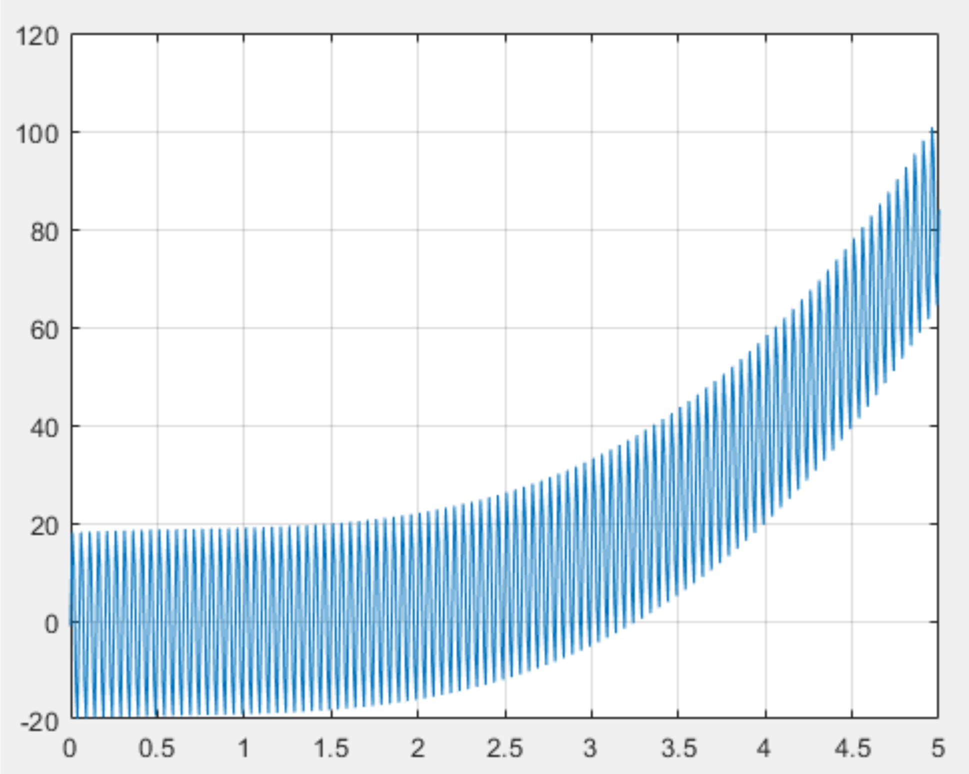
Розв’язок:

Спочатку будуємо графік функції $\hat{y}(t_i)$.

$$[0,T],\ i = 0,1,\ldots,N-1,\ t_{i+1} - t_i = \Delta t = 0.01$$

```
% Записуємо початкові дані
delta_t = 0.01;
T = 5;
```

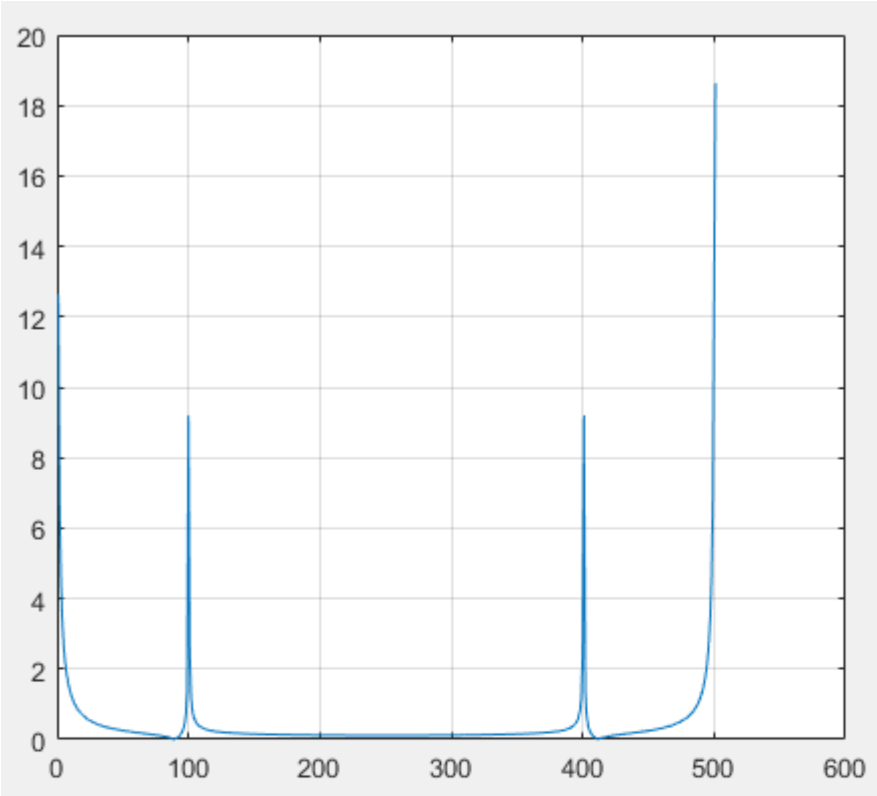
```
t = 0:delta_t:T;
y = load("f14.txt");
N = length(y);

% Будуємо графік спостережень
figure
plot(t,y), grid
```



Знаходимо $\Delta f = \frac{1}{T}$

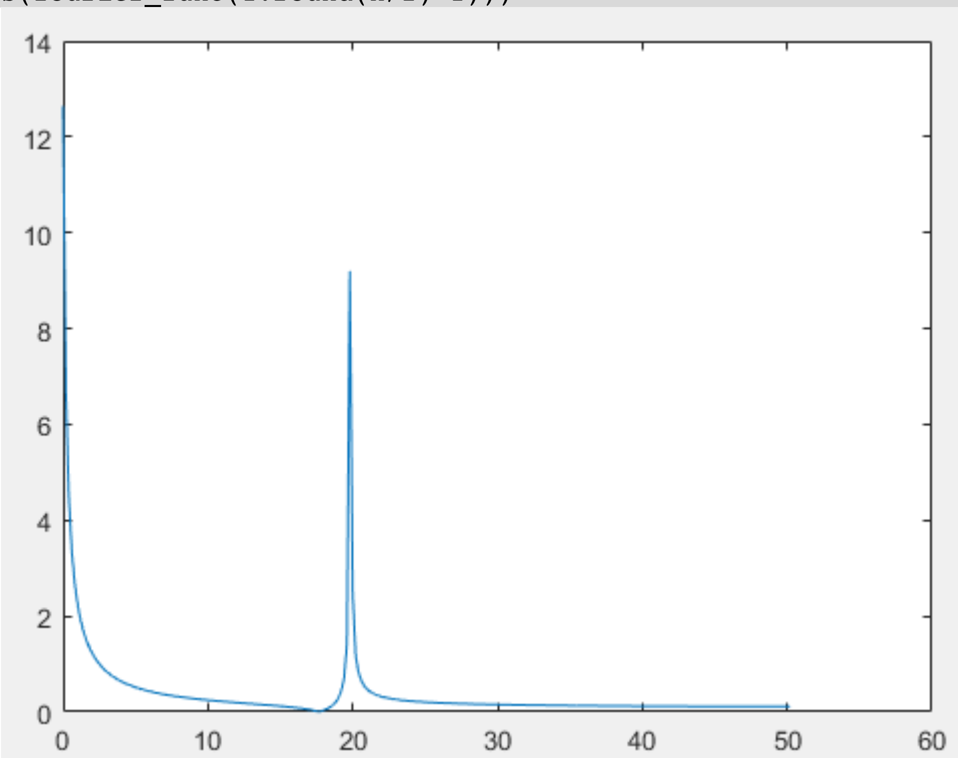
Будуємо графік перетворення Фур'є для показу екстремумів.

```
delta_f = 1/T;
n = length(t);
plot(abs(fourier_func)),grid
f = 0:delta_f:round(n/2) * delta_f;
```



Графік модуля перетворення Фур'є на першій половині вибірки де нижньою віссю будуть $f_* = k_* \Delta f$, де $k_i = 1,2,\ldots,\dfrac{N}{2}$.

```
figure
plot(f,abs(fourier_func(1:round(n/2)+1)))
```



Локальний максимум при *f = 20*

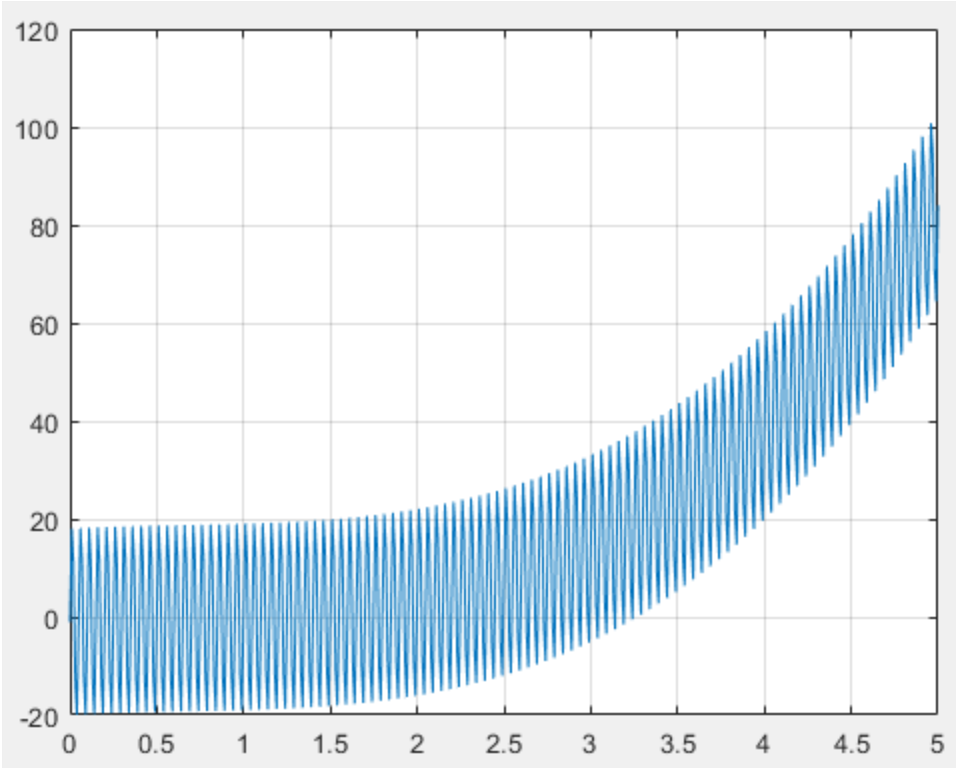
```
>> main

extr =

    20
     0
```

Знаходимо $a_i,\ i = 1,2,3,4,5$ *за допомогою МНК.*

$$F\left(a_1,\ a_2, a_3, a_4, a_5\right) = 1/2\sum_{j=0}^{N-1}\left(a_1t_j^3 + a_2t_j^2 + a_3t_j + a_4 sin2\pi f_1t_j + a_5 - \hat{y}\left(t_i\right)\right)^2$$

$$\frac{\delta F(a_1,\ a_2, a_3, a_4, a_5)}{\delta a_i} = 0$$

```
% Будуємо та розв'язуємо систему рівнянь, щоб знайти коефіцієнти при
% частотах
f_sin = sin(2*pi*extr(1)*t);

A = [sum(t.^6), sum(t.^5), sum(t.^4), sum(f_sin.*t.^3), sum(t.^3);
     sum(t.^5), sum(t.^4), sum(t.^3), sum(f_sin.*t.^2), sum(t.^2);
     sum(t.^4), sum(t.^3), sum(t.^2), sum(f_sin.*t),    sum(t);
     sum(f_sin.*t.^3), sum(f_sin.*t.^2), sum(f_sin.*t), sum(f_sin.*f_sin),
sum(N*f_sin);
     sum(t.^3), sum(t.^2), sum(t), sum(N*f_sin), N];

c = [sum(y.*t.^3), sum(y.*t.^2), sum(y.*t), sum(y.*f_sin),  sum(y)];

a = inv(A)*c'
temp = a'

% Отримана апроксимуюча функція
aprox_f = a(1).*t.^3 + a(2).*t.^2 + a(3).*t + a(4).*f_sin +a(5);

% Графік апроксимуючої функції
figure
plot(t, aprox_f), grid

% Середньоквадратична похибка
error_value = sum((aprox_f-y).^2)
```




```
a =

    1.0000
   -2.0000
    2.0000
   20.0000
   -1.0000


temp =

    1.0000   -2.0000    2.0000   20.0000   -1.0000


error_value =

   3.5283e-07
```

Висновок: 1) Вивчив означення ДПФ і його властивості

2) Написав програму яка за допомогою ДПФ визначила суттєві вклади частот за спостереженнями.

3) Зробив аналіз функції модуля ДПФ дискретної послідовності і вивів його графік.

4) Оформив в друкованій формі звіт про виконання роботи в якому виклав результати проведених обчислень