выбрать k таких позиций из n имеющихся можно C_n^k способами)

2) Для произвольного кортежа $\omega = (x_1, .., x_n) \in A$

$P\{\omega\} = P\{\{$в 1-м испыт. произошло $x_1\} \cdot \{$во 2-м испыт произошло $x_2\} \cdot ... \cdot \{$в n-м испыт $x_n\}\} =$

$= \{$т.к. отд. испыт-я независ$\} = \underline{P\{\text{в 1-м исп пр-ло } x_1\} \cdot ... \cdot P\{\text{в n-м исп. пр-ло } x_n\}} = \cdot p^k q^{n-k}$

ровно k раз „успех", т.е ровно k сомн-лей равны p „неудача" имела место n-k раз, т.е ровно n-k сомн. равны q

3) Т.к все кортежи указ вида, входящие в A, образуют несовместные соб-я, то

$P(A) = P(\sum_{\omega \in A} \omega) = \{\text{несовм}\} = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ∎.

Следствие вер-ть того, что в серии из n испыт. по сх. Бернулли с вер. успеха p число успехов будет $\geq k_1$ и $\leq k_2$ будет равна

$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Док-во: $A = \{$число k успехов $\geq k_1$ и $\leq k_2\}$

$A_{k_1} = \{$число k успехов $= k_1$

$A_{k_1+1} = \{ ... \text{ — " — } = k_1+1\}$

$A_{k_2} = \{ \text{ — " — } = k_2\}$

Тогда $A = \sum_{i=k_1}^{k_2} A_i$

$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P(A) = P(\sum_{i=k_1}^{k_2} A_i) = \{A_i \text{ попарно несовм.}\} =$

$= \sum_{i=k_1}^{k_2} P(A_i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$ ∎

Следствие 2 вер-ть того, что в серии из n испыт по сх. Берн. произойдёт хотя бы 1 успех:

$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$, $q = 1-p$

Доп-во: $A=\{$произошел хотя бы 1 успех$\}$

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \left\{ \bar{A} = \{\text{не произошло ни одного успеха}\} \right\} =$

$= 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$

24.10.17

Модуль 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Основные понятия

① Понятие случайной величины

Опр (нестрогое)

Пусть исход случ. эксп-та можно описать числом X. Тогда X - случ. величина.

Пр
1) Бросают игральную кость
$X \in \{1, .., 6\}$ - число выпавших очков
2) Бросают кость до 1-го появления шестерки
X - сумма выпавших очков во всех бросках $X \in N$
3) Бросают симм. монету до 1-го появл-я герба. X - число бросков. $X \in N$
4) Измеряют температуру тела у случайно выбранного пациента больницы
$X \in [34; 41]$
5) Производят стрельбу по круглой мишени.
X - расстояние от точки попадания пули до центра мишени. $X \in [0; +\infty)$

Пусть (Ω, B, P) - вероятное пр-во

Опр (строгое)

Случайной величиной наз-т отображение

$X : \Omega \to R$,

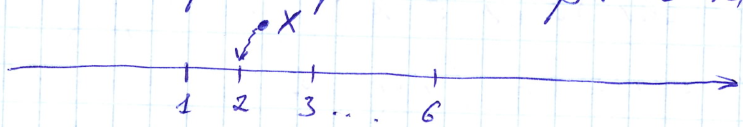
$\{X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in R\}$

если для $\forall x \in R$ $\{\omega : X(\omega) < x\} \in B$,

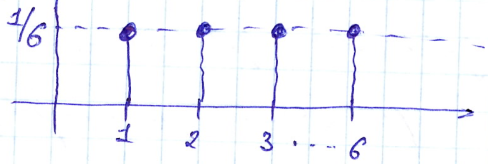
{т.е. для любого $x \in R$ мн-во $\{\omega : X(\omega) < x\}$ явл событием}
ЧП

Замечание Упрощенно случ. величину X можно представлять себе как исход случ. эксп-та, в к-ром на прямую бросают точку. При этом X - коор-та места падения этой точки.

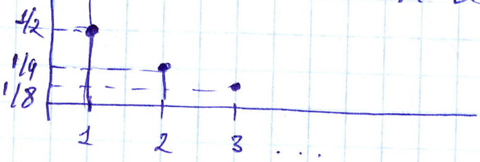
1) Пусть X - сл. велич., равная числу выпавших очков при броске игр. кости



При этом бросаемая точка будет „падать" в каждую из точек 1, …, 6 с одинаковой вер-тью, равной 1/6



2) Рассм. пример, где X - число бросков до 1-го появл-я герба.

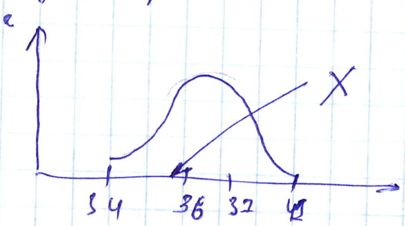


$P\{X=1\} = \frac{1}{2}$

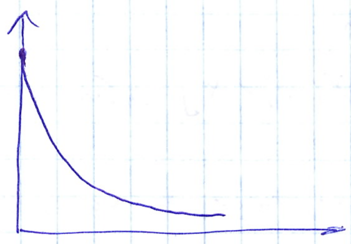
$P\{X=2\} = \frac{1}{4}$

$P\{X=k\} = \frac{1}{2^k}$

3) В примере с измерением тела пациента „частоты" появл-я тех или иных значений X будут распределены (примерно) в соотв-ии с диаграммой:



4) В примере со стрельбой диаграмма будет иметь примерно такой вид (при условии, что стрелок честно прицеливается и хорошо стреляет



чп

Во всех разобранных примерах разл. сл. величины имели различные диаграммы распределения вероятностей (частот) между разл. своими знач-ми.

Опр Правило, в соответствии с которым различным возможным значениям (мн-вам значений) случайной величины приписываются вероятности их появления, наз. законом распределения этой случайной величины.

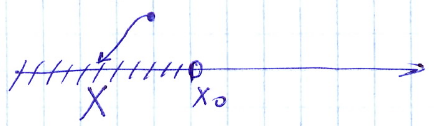
Универсальным способом задания закона распр-я сл. величины явл. ф-ция распределения (вероятностей) сл. величины

② Функция распределения вероятностей сл. величины

Опр Функцией распределения вероятностей сл. вел. X наз. отображение $F_X : R \to R$, определенное след. правилом:

$$F_X(x) = P\{X < x\}.$$ чп

Замеч Зн-е $F_X(x_0)$ равно вер-ти того, что в рез-те броска точки на прямую последняя упадёт левее x_0



Пр 2 раза бросают симметричную монету.
X - число выпадений герба

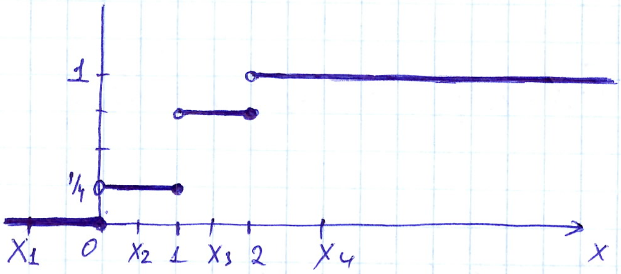
③

$X \in \{0, 1, 2\}$

X	0	1	2
p	1/4	$\frac{1}{2}$	1/4

Построим ф-цию распр-я с.в. X.

$$\boxed{F_X(x) = P\{X < x\}}$$



$$F_X(x_1) = P\{X < x_1\} = 0$$

$$F_X(0) = P\{X < 0\} = 0$$

$$F_X(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$F_X(1) = P\{X < 1\} = \frac{1}{4}$$

$$F_X(x_3) = P\{X < x_3\} = P\{\{X=0\} + \{X=1\}\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$F_X(2) = P\{X < 2\} = \frac{3}{4}$$

$$F_X(x_4) = P\{X < x_4\} = P\{\{X=0\} + \{X=1\} + \{X=2\}\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Т.о.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Разобранный пример иллюстрирует основные св-ва ф-ции распр. сл. вел.

Св-ва ф-ции распр-я

1° $0 \le F(x) \le 1$

2° если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4° $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

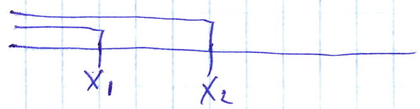
5° $\forall x_0 \in R \quad \lim\limits_{x \to x_0 -} F(x) = F(x_0)$

(т.е. $F(x)$ в каждой т. x_0 непрерывна слева)

<u>Док-во:</u>

1° очевидно

2° Рассм. соб-я $\{X < x_1\} \subseteq \{X < x_2\}$, если $x_1 \le x_2$



Тогда по св-ву вер-ти $\underbrace{P\{X < x_1\}}_{F(x_1)} \le \underbrace{P\{X < x_2\}}_{F(x_2)}$

3° а) Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Рассм. неуб. посл-ть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где

1) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

Рассм. соб-е $A_n = \{X < x_n\}$, $n \in N$. Очевидно, что $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \in N$, т.е. A_n образуют неуб. посл-ть событий.

Тогда в соотв. с аксиомой непр-ти

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\{\lim_{n \to \infty} A_n\} = P\{\underbrace{X < +\infty}_{\text{достоверное соб-е}}\} = 1$$

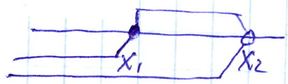
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} F(x_n)$$

Т.о. $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = 1$

Т.к. $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - произвольная посл-ть, стремящаяся в $+\infty$, то в соотв-ии с опр-м предела ф-ции по Гейне $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x) = 1$

б) Св-во $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ док-ся аналогично.

4°



Рассм. соб-я:

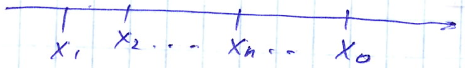
$$\{X < x_2\} = \underbrace{\{X < x_1\} + \{x_1 \le X < x_2\}}_{\text{не пересекаются}}$$

Тогда

$$\underbrace{P\{X < x_2\}}_{F(x_2)} = \underbrace{P\{X < x_1\}}_{F(x_1)} + P\{x_1 \le X < x_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

5° Рассм. неуб. посл-ть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящуюся к x_0 (слева)



Пусть $A_i = \{X = x_i\}$, $i \in N$

$A = \{X < x_0\}$

Тогда $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

$$F(x_0) = P\{A\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \left\{\begin{matrix}\text{акс.}\\ \text{непр.-ти}\end{matrix}\right\} = \lim_{i\to\infty} P(A_i) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} P\{X < x_i\} = \lim_{i\to\infty} F(x_i)$$

Т.к. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – произв. посл-ть, сх-ся к x_0 слева, то в соотв. с опр-м предела ф-ции по Гейне

$$\lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0) \blacksquare$$

Замеч Можно показать, что любая ф-ция, облад. св-вами $2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ явл. ф-цией распр-я некот. случ. величины

3 Дискретные случайные величины

Опр Случ. величина X наз. дискретной, если мн-во её возможных значений конечно или счетно

Закон распр-я дискретной случ. величины можно задать с исп-м таблицы:

X	x_1	...	x_n	...
P	p_1	...	p_n	...

При этом должно вып-ся усл-е $\sum_n p_n = 1$
Эта таблица наз. рядом распределения дискр. сл. вел. X.

<u>Пр</u> Пусть X - число выпадений герба после 2-х бросков симм. монеты.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{3} p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

<u>Пр</u> Пусть X - число бросков симм. монеты до 1-го появления герба

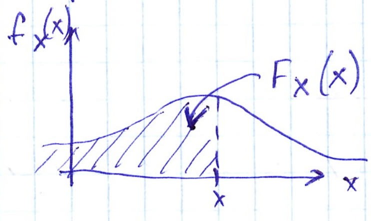
X	1	2	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2^n}$	

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

<u>31.10.17</u>

4 Непрерывные случайные величины

<u>Опр</u> Сл. вел. X наз. непрерывной, если $\exists$ ф-ция $f_X : R \to R$ такая, что $\forall x \in R$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$, где ~~F(x~~ F_X - ф-ция распр-я случ. вел. X.



При этом ф-ция f_X наз ф-цией плотности распр-я вер-тей сл. вел. X (плотностью)

Замеч 1) Для всех представляющих практ. интерес случ. величин ф-ция пл-ти явл. кусочно-непр. ф-цией. Это означает, что ф-ция распр-я таких случ. вел.

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ явл непр. ф-цией.

Кроме того, почти всюду (за исключением, быть может, конечного числа точек) справедливо р-во

$F_X'(x)=f_X(x)$

(это следует из th о производной интеграла с переменным верхним пределом)

2) Т.о. а) если известна f_X, то можно найти F_X

б) если известна F_X, то можно найти f_X.

Это означает, что ф-ция пл-ти распр-я сл. вел X сод-т. всю информацию о з-не распределения этой сл. величины. Поэтому з-н распр-я непр. сл. вел часто задают с исп-м ф-ции пл-ти

Св-ва ф-ции плотности распределения вер-тей

1° $\forall x \;\; f(x)\geq 0$

2° $P\{x_1\leq X<x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

3° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ (усл-е нормировки)

4° $P\{x_0\leq X<x_0+\Delta x\}\approx f(x_0)\cdot\Delta x$, где x_0 - точка непр-ти сл. вел X.

5° ~~Для~~ ~~по~~ Если X - непр. сл. величина, то для любого наперёд заданного x_0

$P\{X=x_0\}=0$

Док-во

1° $f(x) = F'(x)$

т.к F – неуб. ф-ция, то $F'(x) \geq 0$

2° $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \left\{\begin{matrix}\text{по св-ву}\\ \text{ф-ции}\\ \text{распр-я}\end{matrix}\right\} = F(x_2) - F(x_1) = \left\{\begin{matrix}\text{т.к } F\text{-первообразн}\\ \text{для } f\text{, то в}\\ \text{соотв. с ф-лой}\\ \text{Ньютона-Лейбница}\end{matrix}\right\}$

$= \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

3° $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty\\ x_2 \to +\infty}} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty\\ x_2 \to +\infty}} [F(x_2) - F(x_1)] =$

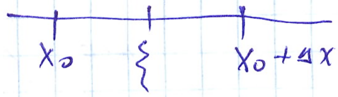
$= \underbrace{F(+\infty)}_{=1} - \underbrace{F(-\infty)}_{=0} = 1$

(св-ва ф-ции распр-я)

4° $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \{\text{св-во } 2^\circ\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{т.к. } f(x) \text{ непр-на}\\ \text{в окр-ти } x_0\text{, то}\\ \text{восп. th Лагранжа}\end{matrix}\right\} = \overset{=f(\xi)}{F'(\xi)} \cdot \underbrace{(x_0 + \Delta x - x_0)}_{\Delta x} \approx$

$\approx \left\{\begin{matrix}\text{т.к. } \Delta x \text{ мало}\\ f \text{ непр-на в т. } x_0\\ \text{то } f(\xi) \approx f(x_0)\end{matrix}\right\} \approx f(x_0)\Delta x$



5° $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$

$P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] =$

$= F(x_0) - F(x_0) = 0$

Замеч Если X – непр. случ. величина, то

$\overset{A}{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = \overset{B}{P}\{x_1 \leq X \leq x_2\} =$

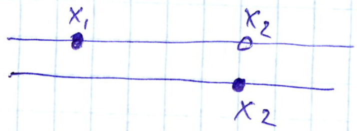
$= \overset{C}{P}\{x_1 < X \leq x_2\} = \overset{D}{P}\{x_1 < X < x_2\} = \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{E}$

Равенство $A = E$ было доказано выше, оно справедливо для любых сл. вел, не обяз. непр-ных

Пок. напр., что $B = F$

$$B = P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\{\underbrace{\{x_1 \le X < x_2\} + \{X = x_2\}}_{\text{несовместны}}\} =$$

$$= P\{x_1 \le X < x_2\} + \underbrace{P\{X = x_2\}}_{0,\ \text{т.к. } X - \text{непр. сл. вел (св-во } 5^\circ)}$$



Аналогичным образом док-ся ост. рав-ва (*)

⑤ Основные примеры случайных величин

I. Биномиальная сл. величина

Опр Говорят, что сл. вел X имеет биномиальное распр-е с пар-ми $p \in (0;1)$ и $n \in N$, если она принимает зн-я из мн-ва $\{0, 1, \dots, n\}$ с вероятностями

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n} \quad (*)$$

Очевидно, что бином. сл. вел явл. дискр. сл. вел, имеющей ряд распр-я

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	$(1-p)^n$			$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$		p^n

Проверим усл-е нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \left\{\begin{matrix}\text{бином} \\ \text{Ньютона}\end{matrix}\right\} = (p + (1-p))^n = 1$$

Замеч 1) Обозн: $X \sim B(n, p)$ - случ. вел. X распр. по бином. з-ну с пар-рами n и p.

2) Случ. вел. $X \sim B(n, p)$, то X - число успехов в серии из n испыт по сх. Бернулли с вер. p успеха в одном испытании.

II. Пуассоновская случайная величина

Опр Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с пар-ром $\lambda > 0$, если она принимает знач-я 0, 1, 2... с вер-тями
$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots \quad ЧП$$

Очевидно, что Пуассоновская сл. вел. явл. дискр. сл. вел., ряд распр-я которой имеет вид.

X	0	1	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	

Проверим правильность зап-я табл.
$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = e^{-\lambda}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{= e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

(ряд Маклорена для эксп-ты)

Замеч 1) Распр. Пуассона наз-т законом редких событий, т.к. оно проявляется в тех случаях, где проводится большое число испытаний с малой вер-тью успеха. Напр, число метеоритов, упавших в некот. местности за некот. фикс. промежуток времени, распределено по этому закону

2) Обозн. $X \sim \Pi(\lambda)$

III. Геометрическое распределение

Опр Говорят, что сл. вел. X имеет геометрич. распр-е с пар-ром $p \in (0,1)$, если она принимает зн-я 0, 1, 2, ... с вероятностями
$$P\{X=k\} = p(1-p)^k \quad k=0,1,2,\dots \quad ЧП$$

Очевидно, что геом. сл. вел. явл. дискр. сл. вел., к-рая имеет ряд распр-я.

X	0	1	2	...	k	...
P	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$		$p(1-p)^k$	

Проверим правильность зап-я таблицы

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \left\{\begin{matrix}\text{обозн.}\\ 1-p=q\\ q\in(0,1)\end{matrix}\right\} = p\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}_{\text{сумма беск. уб. геом. прогр}} =$$

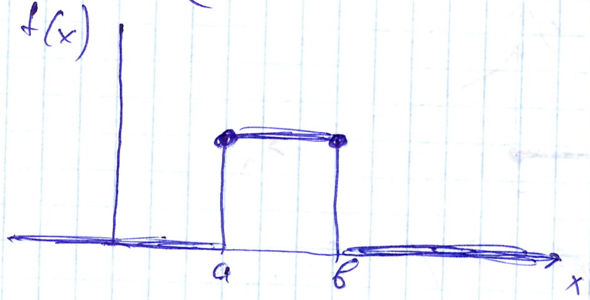
$$= p\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

~~Замеч~~ **Замеч** Геом. сл. вел X можно интерпретировать, как сл. величину, которая принимает зн-я, равны числу испыт. по сх Бернулли, которые были проведены ~~~~ прежде чем наступил 1-й успех. Т.е. если 1й успех в серии испыт ~~про~~ по сх. Бернулли произошел в $(k+1)$-м эксп-те, то $X=k$ (док. самост)

IV Равномерное распр.

Опр Говорят, что непр сл. вел X имеет равномерное ~~рас~~ на отрезке $[a, b]$ распр, если её ф-ция пл-ти распр-я вер-тей имеет вид

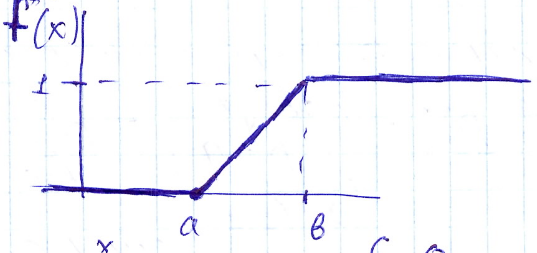
$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x\in[a;b] \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$



Замеч 1) константа c однозначно опр-ся условием нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a) \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{b-a}}$$

2) Функция распр-я равном. сл. вел.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

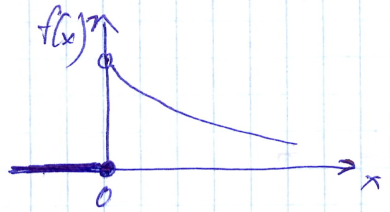
3) Вер-ть того, что равном. сл. вел X примет знач-е из мн-ва $A \subseteq [a, b]$, пропорциональна мере этого мн-ва. Это означает, что равномерная сл. вел. реализует геом. опр-е вер-ти при случайном бросании точки на прямую.

4) Обозн $X \sim R[a, b]$

V. Экспоненциальное распределение

Опр Говорят, что сл. вел X имеет экспоненциальное распр-е с пар-ром $\lambda > 0$, если её ф-ция пл-ти распр-я вер-тей имеет вид.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



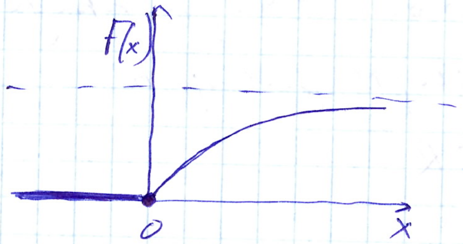
Проверим корректность ~~ре~~ опр-я.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{+\infty}^{0} = 1 - 0 = 1$$

Замеч 1) Ф-ция распр-я экс. сл. вел. имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

(проверить самостоятельно)



2) Для многих технич. устр-в время их безотказной работы распределено по экспоненц. закону.

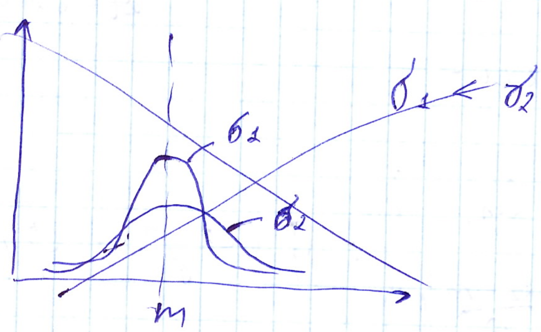
3) Обозн. $X \sim Exp(\lambda)$

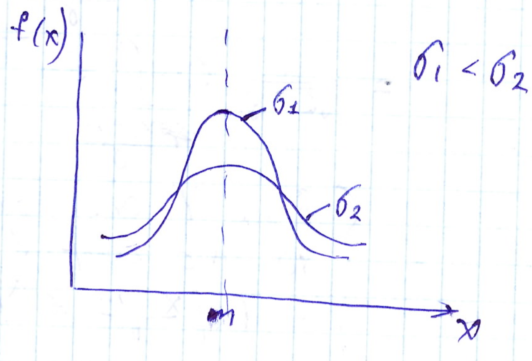
4) Эксп з-н распр-я иногда наз-т показательным законом.

VI. Нормальное распределение

Опр Говорят, что сл. вел. X имеет нормальное распределение (или X распределена по з-ну Гаусса) с пар-рами $m \in R$ и $\sigma > 0$, если ф-ция пл-ти распр-я вер-тей сл. вел X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R \qquad (*)$$





Замеч 1) Параметр m отвечает полож-ю точки максимума ф-ции f(x).

Параметр σ отвечает за разброс значений относ. т. $x=m$. Чем больше σ, тем больше разброс

2) Обозн $X \sim N(m, \sigma^2)$

Замеч 1) Если $m=0$, $\sigma=1$, то соотв. норм. распределение наз-ся стандартным норм. распр-м

$$f(x)\Big|_{\substack{m=0\\ \sigma=1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

2) Ф-ция распр-я для норм. сл. вел.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

не явл. элементарной ф-цией (док-ся в мат анализе).

Для станд. норм. величины её ф-ция распр.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

табулирована (т.е. для неё сост-ны табл. знач)

3) Как быть, если распр-е не явл. станд. нормальным?

$\{$ Для ст. норм. сл. вел X

$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Если X - произв. норм. сл вел ?

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t-m}{\sigma} = u, \text{ тогда} \\ t = x_1 \Rightarrow u_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} \\ t = x_2 \Rightarrow u_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} \\ dt = \sigma du \end{array} \right\} =$$

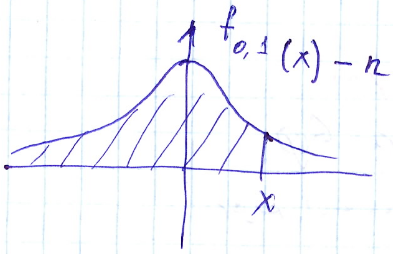
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \sigma \int_{\frac{x_1 - m}{\sigma}}^{\frac{x_2 - m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Если } Y \text{ - ст. норм. вел,} \\ \text{то это выр-е} = \\ = P\left\{\frac{x_1 - m}{\sigma} \le Y \le \frac{x_2 - m}{\sigma}\right\} \end{array} \right\} = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right).$$

Т.о. $\boxed{P\{x_1 \le X \le x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right)}$

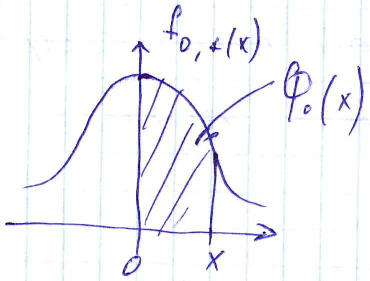
где $X \sim N(m, \sigma^2)$

4) Геом. смысл $\Phi(x)$



Наряду с ф-цией $\Phi(x)$ часто расс-ся ф-ция

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$



С-ва ф-ции $\Phi_0(x)$

1° $\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)$

2° $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$ – нечетн ф-ция

3° Если $X\sim N(m,\sigma^2)$

$$P\{x_1\le X\le x_2\}=\Phi_0\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)$$

(т. к. Φ_0 – тоже первообразн. для $f_{0,1}(x)$).

5) Норм распр-е играет особую роль в теории вероятностей и мат. статистике. Большинство случ. величин, описывающих естеств. процессы, протекание к-рых обусловлено наличием большого числа случ факторов, распределено по норм. з-ну.

Случайные векторы

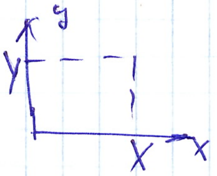
① Функция распределения сл. век-ра.

Пусть 1) $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ — вероятностное пр-во.

2) $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ — случ. величины, ~~задаваем~~ заданные на этом вер. пр-ве

Опр n-мерным случ. в-ром наз. кортеж $\vec{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$. чр

Пр 1) Производят стрельбу по плоской мишени (X, Y) — коор-ты точки попадания пули.
Тогда (X, Y) — сл. в-р.



2) У случ. выбранного пациента б-цы измеряют

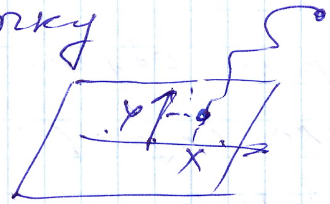
H — рост, T — т-ра тела, L — фиксируют возраст

M — массу тела, V — объем легких

Тогда (H, M, T, V, L) — случ. в-р.

Замеч 1) Как пр-ло, мы будем огр-ся случаем $n=2$

2) На двумерный случ в-р упрощенно можно смотреть как рез-т. экс-та, в к-ром на пл-ть случ. образом бросают точку



К-ты места падения точки и представляют собой реализацию этого случ. в-ра

Для разл. сл. в-ров эта точка может выпадать в разл. части пл-ти.

В некот. обл-ти на пл-ти точка может