падать чаще, в некот. реже, в некот. может не попадать совсем.

Аналогично одномерным сл. величинам, правило в соотв. с которым разл. областям на пл-ти приписываются те или иные вер-ти того, что точка попадет в эти обл-ти наз. законом распр-я вер-тей сл. в-ра.

Универсальным способом задания з-на распр-я сл. в-ра явл. ф-ция распр-я вер-тей (ФР)

Пусть $\vec{X} = (X_1, .., X_n)$ - сл. в-р (n-мерный)

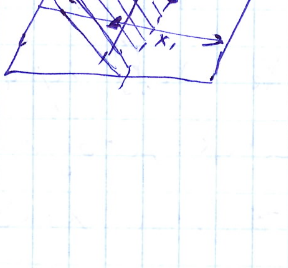
Опр Ф-цией распр-я сл. в-ра $\vec{X}$ наз. отображ-е $F: R^n \to R$, определенное пр-лом.

$$F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, .., X_n < x_n\}.$$

Замечание 1) в опр-ии ф-ции распр-я сл. в-ра под знаком вер-ти стоит произв-е событий

$$\{X_1 < x_1\} \cdot ... \cdot \{X_n < x_n\}$$

2) В случае $n=2$ зн-е ф-ции распр-я $F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ в точке (x_1, x_2) равно вер-ти того, что точка, случ. образом брошенная на пл-ть, упадет левее и ниже т. (x_1, x_2)



Св-ва ф-ции распр-я случ в-ра ($n=2$)

1° $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° при фикс x_1 ф-ция $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_2 явл. неуб. ф-цией ~~при фикс x_2~~

при фикс x_2 ф-ция $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_1 явл. неуб. ф-цией

3° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x_2 \to -\infty \\ x_1 = const}} F(x_1, x_2) = 0$

4° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$,

$\lim\limits_{\substack{x_2 \to +\infty \\ x_1 = const}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$,

где F_{X_i} - ф-ция распр-я сл. вел. X_i, $i = \overline{1,2}$

(здесь считаем, что $\vec{X} = (X_1, X_2)$)

6° $P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$.

<u>Док-во</u>:

1° т.к $F(x_1, x_2) = P\{\dots\} \Rightarrow 0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° док-ся аналогично одномерному случаю.

3° а) Док. что $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = 0$

$F(x_1, x_2) = P\{\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\}\}$ при $x_1 \to -\infty$ событие $\{X_1 < x_1\}$ становится невозможным, а т.к. пр-е невозм. соб-я на любое соб-е явл. невозм. событием, то

$P\{\{X_1<x_1\}\{X_2<x_2\}\} \xrightarrow[x_1\to-\infty]{} 0$

б) док-ся аналогично

4° $F(x_1,x_2)=P\{\{X_1<x_1\}\{X_2<x_2\}\}$

При $x_1\to+\infty$ соб-е $\{X_1<x_1\}$ становится достоверным

Аналогично при $x_2\to+\infty$ соб-е $\{X_2<x_2\}$ становится достоверным.

Т.к. пр-е достоверных событий явл. достоверным соб-м, то $P\{\{X_1<x_1\}\{X_2<x_2\}\} \xrightarrow[\begin{cases}x_1\to\infty\\x_2\to\infty\end{cases}]{} 1$

5° а) док-м, что $\lim\limits_{\begin{cases}x_1\to+\infty\\x_2=const\end{cases}} F(x_1,x_2)=F_{X_2}(x_2)$

$F(x_1,x_2)=P\{\{X_1<x_1\}\{X_2<x_2\}\}$

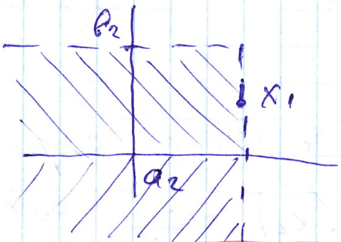
При $x_1\to+\infty$ соб-е $\{X_1<x_1\}$ становится достоверным. Поскольку пр-е достов. соб-е на произвольное соб-е A равно A, то

$P\{\{X_1<x_1\}\{X_2<x_2\}\} \xrightarrow[\begin{cases}x_1\to+\infty\\x_2=const\end{cases}]{} \underbrace{P\{X_2<x_2\}}_{=F_{X_2}(x_2)}$

б) док-ся аналогично

6° а) Сначала найдем вер-ть попадания сл. в-ра (X_1,X_2) в полуполосу

$\{X_1<x_1,\ a_2\le X_2<b_2\}$



$P\{X_1<x_1,\ X_2<b_2\}=P\{X_1<x_1,\ a_2\le X_2<b_2\}+P\{X_1<x_1,\ X_2<a_2\}$

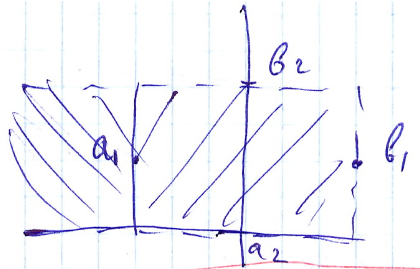
$F(x_1,b_2)$

Отсюда $P\{X<x_1,\ a_2\le X_2<b_2\}=F(x_1,b_2)-F(x_1,a_2)$

10

*

б)



$$P\{X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} = P\{X_1 < a_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} +$$

$F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)$ см (*)

$$+ P\{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\}$$

$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2)$ (см *)

Т.о. $P\{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) -$
$- F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$ ■

Замеч. 1) Рассм. св-во 5°.
Если известна ф-ция $F(x_1, x_2)$ распр-я в-ра (X_1, X_2), то можно найти и ф-ции распределения его компонент по отд-ти:

$$F(x_1, x_2) \Rightarrow F_{X_1}(x_1), \quad F_{X_2}(x_2)$$

2) Верно ли обратное, т.е. можно ли зная $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$, найти ф-н распр-е $F(x_1, x_2)$ сл. в-ра (X_1, X_2)?
Оказывается, не всегда, т.к. дополнительно необходимо знать зависимость между X_1 и X_2

3) Принята след. терминология:
$F(x_1, x_2)$ наз. совместной ф-цией распр-я сл. вел. X_1 и X_2. $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$ наз. частными или маргинальными ф-циями распр-я комп-т в-ра (X_1, X_2) ФР

② Дискретные случайные векторы

14.11.17.

Пусть $\overline{X} = (X_1, .., X_n)$ – сл. в-р

Опр Сл. в-р X наз. дискретным, если каждой из случ. величин $X_i, i=\overline{1,n}$, явл. дискретной.

Аналогично случаю одном дискр. сл. вел. з-н распр-я дискр. сл. ~~в~~ в-ра можно задать с ~~по~~ исп-м табл.

Пусть 1) $n=2$, (X, Y) – сл. в-р

2) $X \in \{x_1, .., x_m\}$

$Y \in \{y_1, .., y_n\}$

(будем считать, что X, Y принимают зн-я из конечного мн-ва)

$X \backslash Y$	y_1	...	y_j	...	y_n	p_X
x_1	p_{11}		p_{1j}		p_{1n}	p_{x_1}
$\vdots$						$\vdots$
x_i	p_{i1}		p_{ij}		p_{in}	p_{x_i}
$\vdots$						$\vdots$
x_m	p_{m1}		p_{mj}		p_{mn}	p_{x_m}
p_Y	p_{y_1}		p_{y_j}		p_{y_n}	1

Здесь $p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

Эту табл. обычно дополняют строкой p_Y и столбцом p_X:

$$P\{X = x_i\} = P\{(X,Y) \in \{(x_i, y_1), ..., (x_i, y_n)\}\} = P\{\{(X,Y) = (x_i, y_1)\} + ... + \{(X,Y) = (x_i, y_j)\} + ... + \{(X,Y) = (x_i, y_n)\}\} = \sum_{j=1}^{n} P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{x_i}}_{\text{обозн-е}}$$

Аналогично $P\{Y = y_j\} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}_{\text{обозн } p_{y_j}}$

При этом очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} p_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ (усл-е нормировки)

Пр. Симм. монету подбрасывают 2 раза.

X - число выпадений герба

Y - номер броска, при к-ром герб выпал впервые

(будем считать, что $Y = 3$, если герб не выпал ни разу)

Составим табл. распр-я вер-тей для сл. в-ра (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3	P_X
0	0	0	1/4	1/4
1	1/4	1/4	0	1/2
2	1/4	0	0	1/4
P_Y	1/2	1/4	1/4	1

$$P\{(X, Y) = (0,1)\} = 0$$

$$P\{(X, Y) = (0,3)\} = \left\{\begin{matrix} \text{при 1-м бр: Р} \\ \text{2-м бр: Р} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}$$

ЧП $\ne$ СП $\boxed{\text{СП}}$

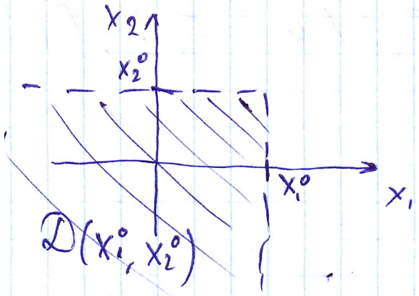
③ Непрерывные случ. векторы

Опр Сл. в-р $(X_1, \dots, X_n)$ наз. непрерывным, если $\exists$ ф-ция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n$$

(здесь предполагается, что указ. несобств. инт-л сходится для всех $(x_1, \dots, x_n)$). При этом ф-ция f наз. ф-ей пл-ти распр-я вероятностей сл. в-ра $(X_1, \dots, X_n)$

Замеч 1) $n = 2$



$$F(x_1^0, x_2^0) = \iint\limits_{D(x_1^0, x_2^0)} f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

2) В дальнейшем будем считать, что совместная пл-ть распр-я сл. вел. X_1 и X_2 (т.е. „простo" плотность распр-я в-ра (X_1, X_2)) непр-на почти всюду (т.е. непрерывна всюду, кроме быть может, мн-в меры нуль). Это означает, что $f(x, x_2)$ непр-на всюду, кроме, быть может, отдельн. конечного мн-ва точек или линий.

3) Для $n=2$ с исп-м th о производной инт-ла с перем. верхним пределом получаем, что

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Для произвольного n

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdot \ldots \cdot \partial x_n}$$

4) Т.о. а) если изв-на f => можно найти F (см. опр-е непр. сл. в-ра)

б) если изв-на F => можно найти f

Это означает, что пл-ть распр-я сл. в-ра сод. всю инф-цию о з-не распр-я этого в-ра. При этом з-н распр-я сл. в-ра можно задавать как с исп-м ф-ции F, так и с исп-м f.

Св-ва непр. сл. в-ров (для $n=2$)

1° $f(x_1, x_2) \geq 0$

2° $P\{a_1 \leq X < b_1,\ a_2 \leq X_2 < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$

3° $\iint\limits_{R^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$ (усл-е норм-ки)

4° Если (X_1, X_2) – непр. сл. в-р, то $P\{x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2\} \approx f(x_1, x_2)\Delta x_1 \Delta x_2$, если (x_1, x_2) – точка непр-ти ф-ции f.

5° Для любого наперед заданного зн-я (x_1^0, x_2^0)

$P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = 0$, если (X_1, X_2) - непр. сл. в-р.

6°. $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \iint_D f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

7° $$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1,$$

где $f(x_1, x_2)$ - пл-ть распр-я в-ра (X_1, X_2),

$f_{X_i}(x_i)$ - частная (маргинальная) пл-ть распр-я сл. вел. X_i, $i = \overline{1,2}$

Док-во:

1°-5° док-ся аналогично одном. случаю.

6°. Явл. обобщением св-ва 2° (без док-ва)

7°. а) Пок, что

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2$$

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty) = \left\{\begin{matrix}(X_1, X_2) \text{ - непр} \\ \text{сл. в-р}\end{matrix}\right\} =$$

см. св-ва ф-ции распр. сл. в-ра

$$= \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\,dt_2$$

см. опр-е непр. сл. в-ра

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left[\int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\,dt_2\right] = \left\{\begin{matrix}\text{Th о произв.} \\ \text{инт-ла} \\ \text{с перем} \\ \text{верхним} \\ \text{пределом}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)\,dt_2$$

б) аналогично док-ся

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x_2)\,dt_1.$$

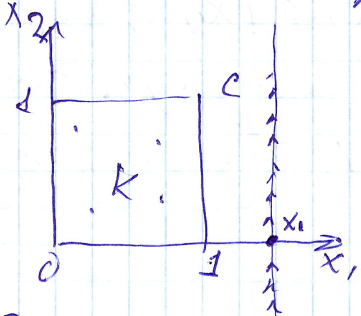
Пр. Пл-ть распр-я непр. двумерного сл. в-ра (X_1, X_2) имеет вид

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} c\cdot x_1\cdot x_2, & \text{если } (x_1,x_2)\in K \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где K - квадрат

1) Найти постоянную c

2) Найти маргин. пл-ти сл. вел. X_1 и X_2



Реш-е

1) $\iint\limits_{R^2} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint\limits_{K} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$= c\iint\limits_{K} x_1x_2\,dx_1\,dx_2 = c\int_0^1 x_1\,dx_1 \int_0^1 x_2\,dx_2 =$

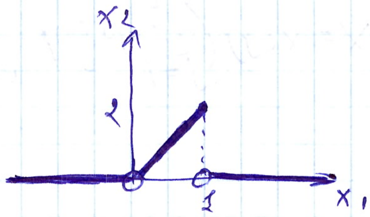
$= c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{c}{4} = 1} \Longrightarrow \boxed{c=4}$

из усл-я норм-ки (св-во 3°)

2) $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,t_2)\,dt_2 = \begin{cases} 0, & x_1\notin(0;1) \\ ⊛, & x_1\in(0;1) \end{cases} \; \textcircled{=}$

$⊛ = \int_0^1 f(x_1,t_2)\,dt_2 = 4\int_0^1 x_1t_2\,dt_2 = 4x_1\int_0^1 t_2\,dt_2 = 2x_1$

$\textcircled{=} \begin{cases} 0, & x_1\notin(0;1) \\ 2x_1, & x_1\in(0;1) \end{cases}$



3) Аналогично

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \notin (0,1) \\ 2x_2, & x \in (0;1) \end{cases}$$

④ Независимые случайные величины

Замеч. Напомним, что соб-я A и B наз. независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$ (*)

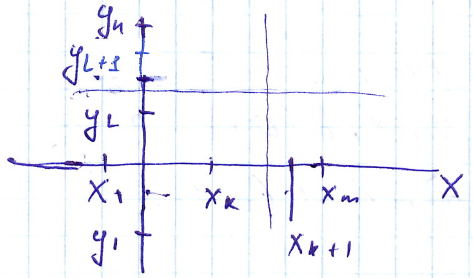
I. Рассм. двумерный дискр. сл. в-р (X,Y), мн-во значений к-го конечно ($X \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$). По аналогии со случ. событием опр-е независ. сл. вел X и Y в этом случае можно сф-ть след. образом:

сл. вел X и Y независ., если

$$P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$$

Посмотрим, что в этом случае можно сказать о совместной ф-ции распр-я сл. вел (X,Y)

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{X \in \{x_1, \dots, x_k\}, Y \in \{y_1, \dots, y_l\}\} =$$



$$= P\{(X,Y) \in \{(x_i, y_j) : i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l\}\}\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = \left\{ \begin{matrix} \text{сл. вел. } X \text{ и } Y \\ \text{независ} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = \left(\sum_{i=1}^{k} P\{X = x_i\}\right)\left(\sum_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\}\right) =$$

$$= (P\{X < x\})(P\{Y < y\}) = F_X(x) F_Y(y).$$

II. ~~Имея~~ в виду полученный для ~~случ.~~ дискр. случ. величин рез-т, сформулируем общее опр-е независ. сл. величин (справедливо для любых сл. вел)

Опр Сл. величины X и Y наз. независимыми, если

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

где F - совместная ф-ция распр сл. вел X и Y ($\equiv$ ф-ция распр случ. в-ра (X, Y))

F_X, F_Y - маргинальные ф-ции распр сл. вел X и Y

21.10.17

Свойства независимых сл. вел.

1° Сл. вел X и Y независ $\Leftrightarrow$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независ для любых x и y.

2° Сл. вел X и Y независ $\Leftrightarrow$ события $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ для любых x_1, x_2, y_1, y_2

3° Сл. вел X и Y независ $\Leftrightarrow$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независ для любых M_1 и M_2 к-рые явл. промежутками числовой прямой или их объединениями.

4° Пусть X, Y - дискр сл. вел. Тогда X и Y независ $\Leftrightarrow$ $p_{ij} = p_{X_i} p_{Y_j}$, где

$p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$

$p_{X_i} = P\{X = x_i\}$

$p_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$

5° Пусть X, Y - непр. сл. вел.
Тогда X, Y - независ $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$,
где $f(x, y)$ - совместная пл-ть распр-я вел X и Y ($\equiv$ пл-ть распр-я в-ра (X, Y))

f_X, f_Y — маргинальные пл-ти распр-я сл. вел X и Y.

Док-во.

1°. Непосредственно вытекает из опр-я независ сл. вел. и опр-я ф-ции распр-я.

2° а) необходимость $\Rightarrow$

Пусть X, Y - независ $\Rightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

Тогда

$$P\{\{x_1 \le X < x_2\}\cdot\{y_1 \le Y < y_2\}\} = \left\{\begin{matrix}\text{см. св-ва}\\ \text{ф-ции}\\ \text{распр-я}\\ \text{сл. в-ра}\end{matrix}\right\} =$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) =$$

$$= F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) = [F_X(x_2) - F_X(x_1)][F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{св-во}\\ \text{ф-ции}\\ \text{распр}\end{matrix}\right\} = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\} \Rightarrow$$

$P\{x_1 \le X < x_2\}$ и $P\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ.

б) достаточность $\Leftarrow$

Пусть $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2$ $P\{x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\}$. Тогда

$$F(x,y) = P\{X<x, Y<y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} =$$
$$= P\{-\infty < X < x\}\cdot P\{-\infty < Y < y\} = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

3°. Явл обобщением св. в 1° и 2° (без док-ва)

4° а) $\Leftarrow$ достаточность фактически была док-на выше (перед опр-м независ. сл. величин)

б) $\Rightarrow$ необх-ть - док-ся аналогично

~~Пусть X, Y - независ $\Rightarrow F(x,y) = F_X(x$~~

(док самост)

5°. д) ($\Rightarrow$) необх-ть

Пусть X, Y – независ $\Rightarrow F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F(x,y)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F_X(x)\,F_Y(y)\right] =$$

$$= \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x)\,f_Y(y)$$

д) ($\Leftarrow$) достаточность

Пусть $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt_1 \int_{-\infty}^{y} f(t_1,t_2)\,dt_2 = \int_{-\infty}^{x} dt_1 \int_{-\infty}^{y} f_X(t_1)\,f_Y(t_2)\,dt_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t_1)\,dt_1 \int_{-\infty}^{y} f_Y(t_2)\,dt_2 = F_X(x)\,F_Y(y) \quad \blacksquare$$

Пр Рассм. пример о подбрасывании монеты (см. выше)

X \ Y	1	2	3	P_X
0	0	0	1/4	1/4
1	1/4	1/4	0	1/2
2	1/4	0	0	1/4
P_Y	1/2	1/4	1/4	1

Рассм., напр., зн-е (0, 1)

$$P\{(X,Y)=(0,1)\} = 0 \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = P\{X=0\}\,P\{Y=1\}$$

$\Rightarrow$ сл. вел X и Y зависимы

Пр Рассм. непр. сл. в-р (см. выше)

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x\cdot y, & (x,y)\in K \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x\in(0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y\in(0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что $f(x,y) \equiv f_X(x)\,f_Y(y) \Rightarrow X, Y$ – независим (!)

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ - n-мерный случ. в-р.

Опр Случ. величины $X_1, \dots, X_n$ наз. попарно независ., если

$\forall i \forall j : 1 \le i < j \le n$ X_i и X_j явл. независ.

Опр Сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ наз. независимыми, в совок-ти, если $F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$.

Замеч 1) Можно док, что если сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ независ в сов-ти, то они парно независ. При этом обратное утв-е неверно.

2) Можно док, что св-ва 4° и 5° естественным образом обобщаются на случай и сл. величин независ в сов-ти.

⑤ Условные распределения

Рассм. сл. в-р (X, Y)

Предп, что известно, что сл. вел Y приняла зн-е y. Что в этом случае можно сказать о возможных зн-х сл. вел X? Что в этом случае можно сказать о з-не распр-я сл. вел X?

I. Случай дискр сл-в-ра (X, Y)

Пусть 1) сл. вел X может принимать зн-я $x_1, \dots, x_m$, при этом $P\{X = x_i\} = p_{x_i}$, $i = \overline{1,m}$

2) Сл. вел Y принимает зн-я $y_1, \dots, y_n$; при этом $P\{Y = y_j\} = p_{y_j}$, $j = \overline{1,n}$

3) Обозн $P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

Замеч $p_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$

Пусть известно, что сл. вел Y приняла зн-е y_j.
Тогда

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$$

опр. усл. вер-ти

Опр В случае двумерного дискр. сл. в-ра условной вер-тью того, что сл. вел. X приняла зн-е x_i при усл-и, что сл. вел Y приняла зн-е y_j наз число

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,m}$$

Опр Совокупность всех значений π_{ij} для фикс j наз усл. з-ном распр-я с.в. X при усл. $Y=y_j$.

Замеч Усл τ_{ij} вер-ть того, что с. в Y приняла зн-е y_j при усл-и $X=x_i$ опр-ся аналогично:

$$\tau_{ij} = P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}$$

Пр Рассм двум. сл. в-р (X, Y) из з-ни о подбрасывании монеты (см. выше)

x \ y	1	2	3	p_x
0	0	0	1/4	1/4
1	1/4	1/4	0	1/2
2	1/4	0	0	1/4
p_y	1/2	1/4	1/4	1

π_{ij}

x \ y	1	2	3
0	0	0	1
1	1/2	1	0
2	1/2	0	0
	1	1	1

$$\pi_{01} = P\{X=0 \mid Y=1\} = \frac{p_{01}}{p_{y_1}} = \frac{0}{1/2} = 0$$

задают усл. з-н распр сл вел X при усл $Y=3$

Найти усл. вер-ти распр-я компонент этого в-ра

$$\pi_{11} = P\{X=1 \mid Y=1\} = \frac{p_{11}}{p_{y_1}} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

r_{ij}

X \ Y	1	2	3	
0	0	0	1	1
1	1/2	1/2	0	1
2	1	0	0	1

зад. усл. з-н распр сл. вел Y при усл X = 0

II. Случай непрерывного случ в-ра

Пусть (X, Y) - произв. случ. в-р (т.е. либо дискр., либо непр., либо смешанного типа)

Опр Усл. ф-цией распр-я с.в. X при условии что с.в. Y приняла зн-е y, наз отображ-е

$$F_X(x \mid Y=y) = P\{X<x \mid Y=y\} \quad (*)$$

Замеч Если (X, Y) - непр. сл. в-р, то сл. вел Y также явл. непр и в этом случае ф-ла (*)

$$F_X(x \mid Y=y) = P\{X<x \mid Y=y\} = \frac{P\{X<x, Y<y\}}{\underbrace{P\{Y=y\}}_{=0,\text{ т.к. } Y\text{-непр}}}$$

Потому в случае непр сл. в-ра (X, Y) можно провести расс-я, аналогичные тем, что были проведены при рассм-ии усл. з-на распр-я двум. дискр сл. в-ра и придти к след опр-ю.

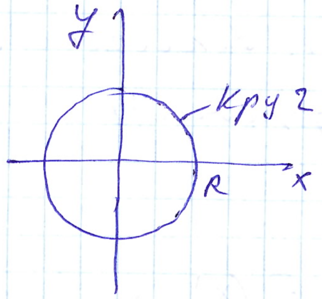
Опр Усл. плотностью распр-я с.в. X при условии Y = y ((X, Y) - непр. сл. в-р) наз. ф-ция

$$f_X(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Замеч Совершенно аналогично усл. пл-тью распр-я сл. вел. Y при усл-ии X = x ((X, Y) - непр сл в-р) наз ф-ция $f_Y(y \mid X=x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

Пр Двум. сл. в-р (X,Y) распределен равномерно в круге рад-са R с центром в начале коорд-т. Найти усл пл-ти $f_X(x|Y=y)$ и $f_Y(y|X=x)$.

Решение:



$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in \text{круг}\\ 0, & (x,y)\notin \text{круг}\end{cases}$$

Константу с найдём из усл-я нормировки

$$\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\text{круг}} c\,dxdy = c\underbrace{\iint_{\text{круг}} dxdy}_{=\text{площадь круга}} = c\cdot\pi R^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{\pi R^2}}$$

2) $f_X(x|Y=y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0, & y<-R \text{ или } y>R\\ (*), & y\in(-R,R)\end{cases}$$

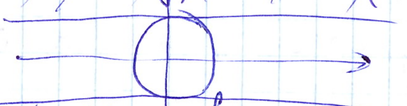
$$(*) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} C\,dx = \left\{C=\frac{1}{\pi R^2}\right\} = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$$

Т.о.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y\in(-R,R)\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

3) $$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \text{не опр.}, & y\notin(-R;R)\\ \dfrac{C}{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}}, & y\in(-R;R),\ (x,y)\in \text{круг}\\ \dfrac{0}{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}}, & y\in(-R,R),\ (x,y)\notin \text{кр}\end{cases} =$$

$f_Y(y)=0 \Rightarrow f_X(x|Y=y)$ - не опр



$f_Y(y)=0 \Rightarrow f_X(x|Y=y)$ - не опр

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & y \in (-R, R) \quad x \in (-\sqrt{R^2-y^2}, \sqrt{R^2-y^2}) \\ 0, & y \in (-R, R) \quad x \notin (-\sqrt{R^2-y^2}, \sqrt{R^2-y^2}) \\ \text{не опр-на} & y \notin (-R, R). \end{cases}$$

28.11.17.

Th условия независимости 2х случ. величин в терминах условных распределений.

1) Пусть X, Y - случ. величины
Тогда
а) X, Y - независ $\Rightarrow \begin{cases} F_X(x \mid Y=y) = F_X(x) \text{ для всех } y, \text{ для к-рых определена } F_X(x \mid Y=y) & (1а) \\ F_Y(y \mid X=x) = F_Y(y) \text{ для всех } x, \text{ для к-рых опр-на } F_Y(Y \mid X=x) & (1б) \end{cases}$

б) если вып-ся хотя бы одно из условий (1а) или (1б.), то сл. вел. X и Y независ

2) Если X, Y - дискр. сл. величины, то
а) ~~...~~ X, Y независ, то
$$\begin{cases} P\{X=x_i \mid Y=y_i\} = P\{X=x_i\} \text{ для всех } y_i & (2а) \\ P\{Y=y_i \mid X=x_i\} = P\{Y=y_i\} \text{ для всех } x_i & (2б) \end{cases}$$
б) если вып-но хотя бы одно из усл. (2а) или (2б), то X, Y - независ

3) Пусть X, Y - непр. сл. величины.
Тогда
а) X, Y - независ $\Rightarrow \begin{cases} f_X(x \mid Y=y) = f_X(x) \text{ для всех } y, \text{ для к-рых опр-на } f_X(x \mid Y=y) & (3а) \\ f_Y(y \mid X=x) = f_Y(y) \text{ для всех } x, \text{ для к-рых определена } f_Y(y \mid X=x) & (3б) \end{cases}$

б) Если вып-но хотя бы одно из усл (3а) или (3б), то сл. вел X и Y независ.

Пр 1) (см выше о подбрасывании 2х монет, где вычисляли π_{ij} и τ_{ij})

Напр.

$P\{X=0 \mid Y=2\}=1$ (А)

$P\{X=0\}=1/4$ (Б)

т.к. (А) $\neq$ (Б), то X, Y - завис

Пр 2) см выше, где вычисляли $f_X(x|Y=y)$ и $f_Y(y|X=x)$.

$f_X(x|Y=y) \neq f_X(x) \Rightarrow$ X, Y - завис

Функции от случайных величин

① Скалярная ф-ция от одномерной случ. величины

Пусть 1) $X=X(\omega)$ - случ. величина

2) $\varphi: R \to R$ - некот ф-ция

Тогда

$Y=\varphi(X)$ - тоже некот. сл. величина

Пр. Для некот. изделия выпускают цилиндрические валы, диаметр X которых явл случ. величиной. Тогда $Y=\frac{\pi X^2}{4}$ - площадь поперечного сечения вала - некот сл. вел.

В этом примере $\varphi(x)=\frac{\pi x^2}{4}$

Осн. вопрос: как, зная з-н распр-я сл. вел X и ф-цию φ найти з-н распр-я сл. вел $Y=\varphi(X)$?

I. Случай дискр. сл вел. X

Пусть ряд распр-я сл. вел. X имеет вид

X	x_1	..	x_n
P	p_1	..	p_n

$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$

Тогда $Y=\varphi(X)$ - тоже дискр. сл. величина.

(т.к. $\varphi(X)$ не может принимать зн-ий больше чем X)

Ряд распр-я сл. вел Y

Y	$\varphi(x_1)$	...	$\varphi(x_n)$
P	p_1	...	p_n

Если некот знач-я в 1ой строке совпадают, то соотв столбцы следует объединить, приписав этому зн-ю суммарную вер-ть

Пр

X	-1	0	1
p	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}5$

Пусть $\varphi(x) = x^2+1$

Тогда $Y = \varphi(X) = X^2+1$

Y	2	1	2
P	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}5$

$\Rightarrow$

Y	1	2
P	$0{,}2$	$0{,}8$

II. Случай непрерывной случайной величины

Если X - непр. сл. величина, то в зав-ти от свойств ф-ции φ сл. вел $Y = \varphi(X)$ м.б. как непр-ой, так дискретной или смешанного типа.

Th Пусть 1) X - непр. сл. величина

2) $f_X(x)$ - ф-ция пл-ти распр-я вер-тей сл. вел X

3) $\varphi: R \to R$ - монотонная и непр-но дифф-ая ф-ция.

а) т.к. ф-ция φ - монот, то $\exists\, \psi = \varphi^{-1}$ - обратная к φ

б) т.к. φ при этом дифф-ма, то ψ - тоже дифф-ма

4) ψ - ф-ция, обратная к φ

Тогда $Y = \varphi(X)$ - непр. сл. величина, пл-ть