Анализ алгоритмов

Зачёт

Ульянов Михаил Васильевич

8-916-589-94-04

muljanov@mail.ru

1.09.17.

I. Историческое введение

1900 г Д. Гильберт – проблемы

1931 г. К. Гёдель – теорема о неполноте символических логик

1936 г. Э.Л. Пост, А. Тьюринг => классическая теория алгоритмов
о проблеме разрешимости

1960-е. Возникает понимание, что алгоритмические задачи м.б. разрешимы.

Теория сложностей вычислений $O(n^2)$
Эдмондс, Кук, Карп, Левин, ...

1970-е. Практический анализ алгоритмов (рациональный выбор)

Д.Э. Кнут, Кормен, Лег, Риверст ...

II. Общая схема "разработки ПО"

Z!

?A?

$Q(q_1, \dots, q_k)$

Проблемная область

$Q(A_1), Q(A_2)$

$\mathcal{A}$ мн-во известных алг. реш. задач
$\cdot A_1$ $\cdot A_2$ $\cdot A_3$

Оценки качества
$q_1, q_2, \dots q_k$

рац. выбор ?

Требования => Q_T

Квалиметрия – оценка кач-ва.

$$Q(q_1, \dots, q_k) = \sum_{1 \le j \le k} \alpha_j q_j,$$

?

$$\sum \alpha_j = 1$$

Универс. оценки

Пробл. оценки

$f(x)=0$

Методы

? → Да $Q(A_3) > Q_T$ => A_3

→ **Нет** => Методы разработки

8-09.17.

Э.А. Пост (1936г): „Финитные комбинаторные процессы - формулировка 1"

1. Общая проблема (задача - Z)

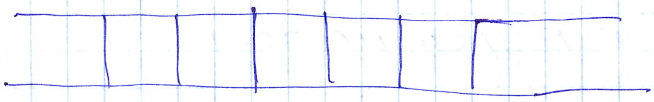
Конкретная проблема (индивидуальная задача ≡ вход алгоритма)

Общ. проблема задана мн-вом конкретных проблем

Решение общей проблемы => решение <u>всех</u> конкретных

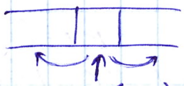
2. <u>Пространство символов</u>

Бесконечная лента ящиков, каждый из которых м.б. в 2-х состояниях помечен (v), не помечен



Конкретная проблема задаётся „внешней силой" путем пометки <u>конечного</u> числа ящиков.

3. <u>Работник</u>

Элементарные операции:  (в дан. момент раб. стоит у этого ящ.).

1) Стереть метку, если она есть (ξ)

2) Поставить метку, если её нет (V)

3) →

4) ←

5) ? да → N°, нет → N°

6) Stop

4. Набор инструкций (программа)

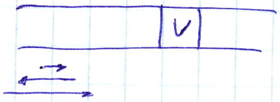
1...
2...
⋮
5 ? → 17, → 23

1. ξ

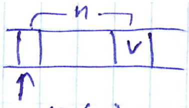
2. →

3. ? да → 1, нет → 4

4. Stop



$\Theta(n^2)$



$\Theta(n)$

$\pi = 3,\overset{1}{1}\overset{2}{4}\overset{3}{1}\overset{4}{5}\ldots$

$f_\pi(k,5) \overset{def}{=}$ № десятичной позиции π, начиная с которой впервые идёт ровно k "5" подряд.

$f_\pi(1,5) = 4$

$$\sum^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

5. Финитный 1-процесс

1) Программа применима к общей проблеме, если для каждой конкретной нет коллизий в опер 1, 2.

2) Программа заканчивается, если выполняется „stop"

Если выполняется 1) и 2), то это финитный 1-процесс

Если для каждой конкретной проблемы „внешняя сила" распознаёт правильный ответ, то финитный 1-процесс есть решение общей проблемы.

№ конкр. проблемы => прогр. => конкр. пробл сл°

! Мы вправе рассматривать всё более широкие формулировки, касающиеся:
- пространства символов
- заполнения
- набора инструкций, наша цель показать, что все они логически сводимы к формулировке 1

мы выдвигаем это умозаключение в кач-ве рабочей гипотезы

Финитный 1-процесс, доставляющий решение общей проблемы.

очевидно

Алгоритм

Гипотеза Поста.

Машина Поста → процед. прогр.

Машина Тьюринга → потоковая парадигма

Нормальные алгорифмы Маркова →

Черч - Клини → функц. прогр

15.09.18 Модели вычислений

1. Алгебра

$A = < O, S >$

носитель алгебры (мн-во объектов) — O; операции — S

$A = < R^1, \{+, *\} >$

$\forall a \in G \quad a^{|G|} = e$

2. Конструктивная алгебра

$A = < O, S, R >$

механизм реализации опер S над O — R

$! \forall s \in S \ \exists$ алгоритм

3. Модели вычислений

$O \subset R^1 \Rightarrow O \subset Q$

$O \subset \tilde{Q}$

$A = < O \subset \tilde{Q}, S, R >$

Формат

М П

$\boxed{x|x|y|y} \equiv 0.xx \cdot 10^{yy}$

0/1 +/- ... +/- 0/1

6 байт 2 байт

$\boxed{6|3|0|3} = 0.63 \cdot 10^3$

$$\begin{array}{r} \boxed{1|7|0|4} \\ + \ \boxed{6|3|0|1} \\ \hline \end{array}$$

$0.17 \cdot 10^4$
$+$
$0.00063 \cdot 10^4$

$a + b = a, \ b \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j} \neq \underbrace{\sum_{j=10^6}^{1} \frac{1}{j}}_{\text{точнее}} = H_n \approx \ln n + j^{=0,57..}$$

4. Информационная алгебра

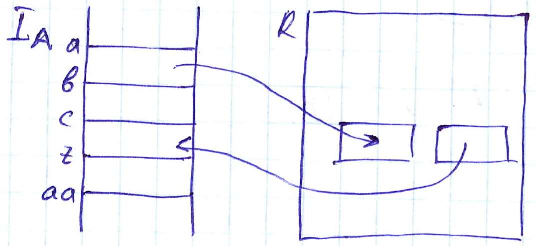
$I_a = \langle St, S_I, R_I \rangle \Rightarrow M = \langle I_A, S, R \rangle$

структура

операц. с пом-ю кот взаимод со структ. (read, write)

Q

5. Вариант RAM модели



$\underline{S}$: $\leftarrow$ $(a \leftarrow b)$ присваивание (одна операция)

$\{+, -, *, /\}$ $a \leftarrow b*c$ (2 операции)

$\{<, >, =, \neq\}$ If $a>b$ then

$A[i]$ - (1)

6. Алг. конструкции

if $(a>b)$ or $(c<d)$
then
else

3 оп

for $j \leftarrow 1$ to n $\Rightarrow$ $j \leftarrow 1$

$j \leftarrow j+1$

if $j \leq n$

$1+3n$ элем. операц.

Терминология в анализе ресурсной эффективности 21.09.17

1. Вход алгоритма

Конкретная проблема ≡ индивидуальная задача $\Rightarrow$ в модель вычислений $\Rightarrow$ Вход алгоритма - D

$D = \{ d_i \mid i = \overline{1,m} \}$

мн-во чисел

2. Длина входа - n

Задача Z $\quad M_Z(D) = n \quad M_Z(D) = M_Z(|D|)$ мощность мн-ва $\quad \exists\ M_Z(D) = |D| - 1$

Z-умножение матриц $(n \times n)$ $M_Z(D) = n$

! $D_n = \{ D \mid M_Z(D) = n \}$

0 15

$|D_{10}| = (2^{16})^{10} = 2^{160}$

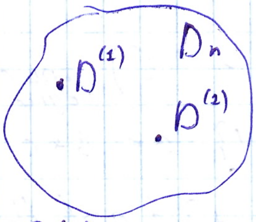
3. Трудоемкость

$f_A(D) \rightarrow$ число элементарных (базовых) операций модели вычислений, заданных алгоритмом A на входе D

$Z \rightarrow A_1$, $Z \rightarrow A_2$ $\qquad f_{A_1}(D^*) < f_{A_2}(D^*)$

$f^{\vee}_A(n) = \min\limits_{D \in D_n} f_A(D)$ - лучший случай

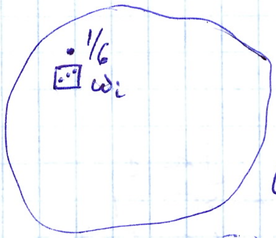
$f^{\wedge}_A(n) = \max\limits_{D \in D_n} f_A(D)$ - худший случай.

$\overline{f}_A(n)$: 

$M = <\Omega, P(\cdot)>$

$P(D^{(j)}) = P(D^{(k)}) = \frac{1}{|D_n|}$

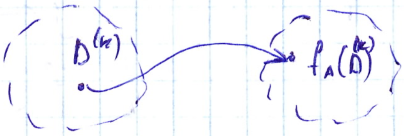
$M_0 = <\Omega, P(\cdot)> \Rightarrow <\Omega_x, P_x(\cdot)>$



$x(\omega_i) = 3$

$\Omega \xrightarrow[x]{} R^1$

Случ. величина - измеримая на R_1 хар-ка случ. событ.



$f_A(n) = \sum f_A(D) \cdot p(D)$

4. Емкостная эффективность.

! $V(\cdot)$ - дополн (без входа D и р-та R) память [$f(x)$ $\quad f(\cdot)$

$V^{\vee}_A(n)$, $\overline{V}_A(n)$, $V^{\wedge}_A(n)$

Примеры анализа

1. Сумма массива

```
Sum(A, n; S)
  S ← 0
  for j ← 1 to n
     S ← S + A[j]
END
```

$f^{\vee} = f^{\wedge} = f_A(n) = \underbrace{1}_{S \leftarrow 0} + \underbrace{1}_{j \leftarrow 1} + \underbrace{n(3+3)}_{for} = 6n+2$

Классификация алгоритмов по типу трудоемкости

29.09.17

1. Примеры анализа

```
MultMatr (A, B, n; C)
  for i ← 1 to n
    for j ← 1 to n
      S ← 0
      for k ← 1 to n
        S ← S + A[i,k] × B[k;j]
      C[i,j] ← S
End.
```

$$f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(\underset{for}{3} + \underset{S\leftarrow 0}{1} + \underset{k\leftarrow 1}{1} + 3 + n(3+7))) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

Возведение в степень

```
Pow (x, k; y)
  y ← 1
  for j ← 1 to k
    y ← y * x
```

$\forall D \in D_z \quad |D| = 2$

$f_A(k) = 1 + 1 + k(3+2) = 5k + 2$

$e^x = e^{[x]} \cdot e^{\{x\}} \qquad 0 \le \{x\} < 1 \quad \Rightarrow \qquad \frac{1}{k!} \cdot x^k > \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$

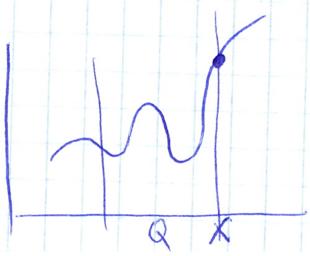
наим. целое меньшее или равное x

$e^x = \sum^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

Exp (x, eps)

$\frac{1}{k!} x^k < eps$

$\underset{x \in Q}{\arg\max}\, F(x)$



Max

```
Max (A, n; M)
    M ← A[1]
    for j ← 2 to n
        If M < A[j]
            then
                M ← A[j]
```

$f_A^{\vee}(n) = 2 + 1 + (n-1)(3+2) = 5n - 2$

$f_A^{\wedge}(n) = 3 + (n-1)(3+2+2) = 7n - 4$

Классы

1. Класс N (количественно-зависимые)

   $f_A(D \in D_n) = f_A(n) = f^{\vee} = f^{\wedge}$

   Векторно-матр. операции

2. Класс $P(P_r)$ (параметрически-зависимые)

   $f_A(D) = f_A(p_{r1}, \dots, p_{rk})$

3. Класс NP_r (NPR) (количественно-параметрические)

   $f_A(D \in D_n) = f_A(\underset{\downarrow \atop M_r(D)}{n}, p_{r1}, \dots, p_{rk})$

Подклассы в NPR

1) Декомпозиция $f_A(D)$

   $NPR: f_A(D) = f(n, pr) \longrightarrow ? \rightarrow f_n(n) + f_{pr}(pr)$

   $? \rightarrow f_n(n) * f_{pr}(pr)$

$f_A^{\wedge}(n) = f_n(n) + f_{pr}^{\wedge}(n)$

$\Rightarrow$ I. NPRL (Low)

$f_{pr}^{\wedge}(n) < f_n(n)$

II. NPRE (Eq)

$$f^{\wedge}_{pr}(n) \asymp f_n(n)$$

III. NPRH

$$f^{\wedge}_{pr}(n) \succ f_n(n)$$

6.10.17

Метод классов эквивалентности

0. Отношения и функции

$A, B \quad R \subseteq A \times B \quad (A \times A)$

$(a, b) \in R, \quad aRb$

Если: а) $R \subset A \times A$

1) $(a_i, a_i) \in R$ – рефлексивно
2) $(a_i, a_j) \in R \Rightarrow (a_j, a_i) \in R$ – симметр.
3) $(a_i, a_j) \in R, (a_j, a_k) \in R \Rightarrow (a_i, a_k) \in R$ – транзитивно

отношен. эквивал.

порождает классы эквивалентности

$A = N \cup \{0\} = Z_+$

$a \bmod b \qquad aR_{(b)}c \Leftrightarrow a \bmod b = c \bmod b$

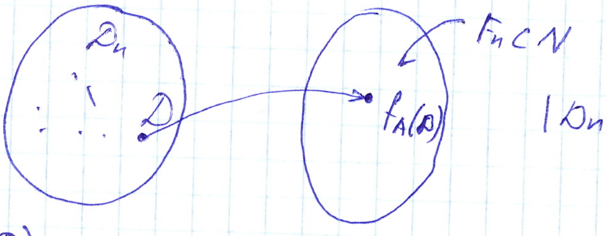
Фактор мн-ва – по одному эл-ту из каждого класса

Функция – отн. униморфное по второй координате

$(a, b) \in F \quad (a, b') \in F \Rightarrow b = b'$

1. Идея метода

$n = const \Rightarrow D_n$



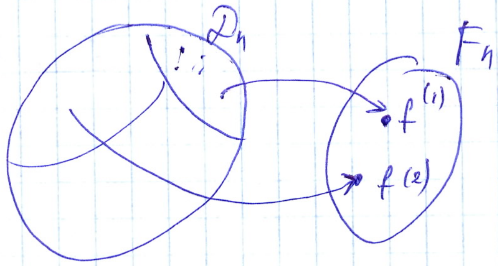
$|D_n| \gg |F_n|$

$f_A(D)$

$D_n \xrightarrow{f_A} F_n$

$\exists!\, R \subset D_n \times D_n \Rightarrow (D', D'') \in R \Leftrightarrow f_A(D') = f_A(D'')$

↳ отн. эквивалентности

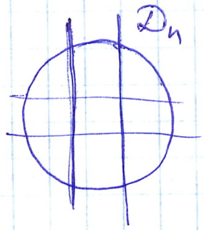


Идея

1. R на D_n → разбиение на классы эквив. (по f_A)
2. $D_n^{(i)}$ $i = \overline{1,k}$ – классы эквив.

   Мощности $D_n^{(i)} = ? \Rightarrow p(D \in D_n^{(i)}) = \dfrac{|D_n^{(i)}|}{|D_n|}$
3. $f^{\vee} \leftarrow \min$, $f^{\wedge} \leftarrow \max$, $\bar{f}_A(n = const) = \sum\limits_{i=1}^{k} f^{(i)} \cdot p^{(i)}$
4. Переход к изменяющемуся n

2. Особенности реализации



Равномощное разбиение

$^{(m)}D_n$ $m > k$

$|^{(i)}D_n| = |^{(l)}D_n|$

3. Сортировка 3х чисел по месту

рез-т в тех же ячейках, что и вход.

a $\boxed{7}$ b $\boxed{11}$ c $\boxed{3}$

3 7 11

Sort 3_1 (a, b, c) (D_3)

If a > b

then

3 { t ← a
a ← b
b ← t }

f	V
3	1
6	0

If $b > c$

  then

    обмен (3)

If $a > b$

  then

    обмен (3)

END

$f_A^{\vee}(3) = f_A^{\vee} = 3$

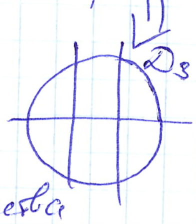
$f_A^{\wedge} = 12$

Метод классов

min → "1"   7 11 3

midl → "2"   8 14 3

max → "3"   "2" "3" "1"



Подмножества (Классы) (m)

разд. на классы эквив.

$1\,2\,3 \to f_{(1,2,3)} = 3$

$1\,3\,2 \quad = 6$

$2\,1\,3 \quad = 6$

$2\,3\,1 \quad = 9$

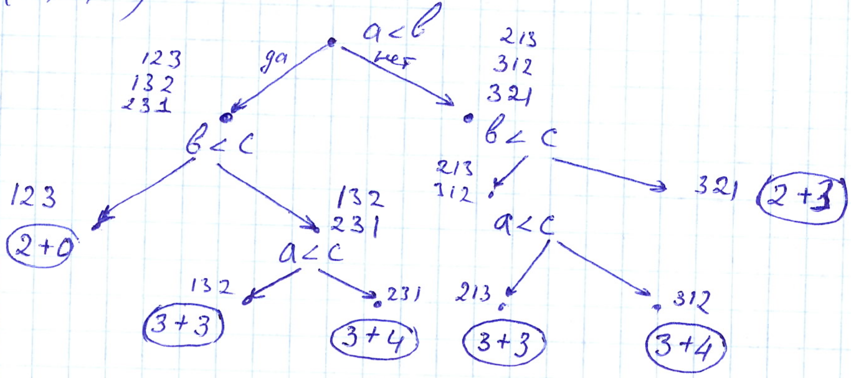
$3\,1\,2 \quad = 9$

$3\,2\,1 \quad = 12$

$P({}^{(i)}D_3) = \frac{1}{6}$

$$\bar{f}_A = 3 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 9 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 12 \cdot \frac{1}{6} = 7\frac{1}{2}$$

Sort 3-2 (a, b, c)



a b c

2 3 1 →

t ← c

c ← b

b ← a

a ← t

$f^{\vee} = 2$

$f^{\wedge} = 7$

$\bar{f} = 5\frac{1}{2}$

13.10.17 **Метод мат. ожиданий.**

1. Идея (для NPR)

$D \in D_n \qquad f_A(D) = f_n(n) + g(D)$ P_n

1) $g(D) = c \cdot Y_n$ случайная величина

$Y \in N_m$

$\bar{f}_A(n) = E(f_n(n) + c \cdot Y) = f_n(n) + c \cdot E(Y)$

$Y = \sum X_i$

$E(Y) = E(\sum X_i) = \sum(E(X_i))$

2. Поиск max

```
Max (A, n; M)
  M ← A [1]
  for j ← 2 to n
     if M < A[j]
     then
       M ← A[i]
End
```

gn

$f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g(D) = 1 + (n-1)(\underset{for}{3} + 2) + 2 \cdot Y,$

$(5n-4)$

число $M \leftarrow$ за весь ал-м

$n = 4 \quad \Omega_Y = \{1, 2, 3, 4\}$

$P(Y = k) = ?$

Метод классов для Y

1 2 3 4 − Y = 4	2 1 3 4 − Y = 3	3 1 2 4 − Y = 2	4	
1 2 4 3 − Y = 3	2 1 4 3 − Y = 2	3 1 4 2 − Y = 2	⋮	6 Y = 1
1 3 2 4 − Y = 3	2 3 1 4 − Y = 3	3 2 1 4 − Y = 2	⋮	
1 3 4 2 − Y = 3	2 3 4 1 − Y = 3	3 2 4 1 − Y = 2	⋮	
1 4 2 3 − Y = 2	2 4 1 3 − Y = 2	3 4 1 2 − Y = 2	⋮	

1 4 3 2 - $Y=2$ 2 4 3 1 - $Y=2$ 3 4 2 1 - $Y=2$

$P(Y_4 = \ ) =$

$1 = \frac{6}{24}$ *

$2 = \frac{11}{24}$

$3 = 6/24$

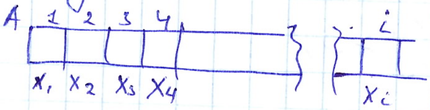
$4 = 1/24$

$x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)(x+3)(\dots)(x+k-1)$

$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+x)(x+2)(x+3) = x^4+3x^3+2x^2+3x^3+9x^2+$
$+6x = x^4+6x^3+11x^2+6x$

Метод мат. ожиданий

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$



$X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

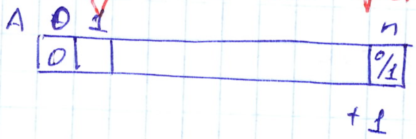
$X_1 = \begin{cases} 0, & p=0 \\ 1, & p=1 \end{cases}$ $X_2 = \begin{cases} 0, & 1/2 \\ 1, & 1/2 \end{cases}$ $X_3 = \begin{cases} 0, & 2/3 \\ 1, & 1/3 \end{cases}$ $X_i = \begin{cases} 0, & 1-1/i \\ 1, & 1/i \end{cases}$

$E(Y) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n \approx \ln n + \gamma$ $^{=0{,}5773}$ - постоянная Эйлера

$\ln n = \frac{\log_2 n}{1{,}44}$

$\overline{f_A}(n) = 5n - 4 + 2(\ln n + \gamma) = 5n + 2\ln n - 4 + 2\gamma$

+1 в длинное целое



$j \leftarrow n$
while $A[j] = 1$
  $A[j] \leftarrow 0$
  $j \leftarrow j-1$
$A[j] \leftarrow 1$

Y

$\check{f}_A(n) = 1+2+2 = 5 = \Theta(1)$

$\hat{f}_A(n) = 3 + n(2+4) = 6n+3 = \Theta(n)$

$f_A(n) = 3 + 6 \cdot Y_n$

$\overline{f_A}(n) = 3 + 6E(Y)$

$Y = 0$ $P(Y=0) = 1/2$

$Y = 1$ (01) $P = 1/4$

$= k-1$ $P = 1/2^k$

$E(Y) = \sum (k-1) \cdot 2^{-k} = 2\sum(k-1)\cdot 2^{-k+1} = 2\sum(k)\cdot 2^{-k} = \sum k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$(1+x+x^2+x^3+\dots)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$

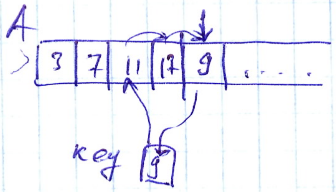
$1+2x+3x^2+4x^3\dots = \frac{1}{(1-x)^2}$

$x+2x^2+3x^3+4x^4 = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

20.10.17.

Сортировка вставками

1. Идея (по месту)



2. Sort.Ins(A, n)

```
for i ← 2 to n
    Key ← A[i]
      j ← i-1
    while (key < A[j]) and (j > 0)
        A[j+1] ← A[j]
        j ← j-1
    A[j+1] ← key
End
```

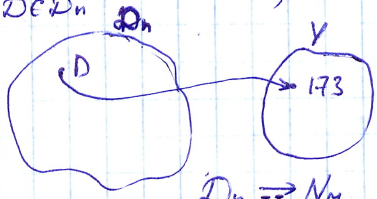
! $f_A(D \in D_n) = f_n(n) + g(D)$

3. $f_n(n)$

$$f_n(n) = 1 + (n-1) * (\underbrace{3}_{for} + 2 + 2 + \underbrace{4}_{\substack{end\\while}} + 3) = 14n - 13$$

4. $g(D)$

$$\underset{D \in D_n}{g(D)} \to (4+6) \cdot Y_n$$



$D_n \xrightarrow{Y} N_M$

$\Rightarrow F_A(n) = f_n(n) + 10E(Y)$

5. Метод мат. ожиданий

$Y_n \overset{?}{=} \sum x_i \Rightarrow x_i$ – число проходов While при i

$Y_n = \sum_{i=2}^{n} x_i$

$E(x_i) \Rightarrow \overset{1}{\circ} \uparrow \overset{2}{\circ} \ldots \circ \uparrow \overset{i-1}{\circ} \uparrow$

$x = i-1 \qquad x = 2 \qquad x = 1 \qquad x = 0$

$P(x_i = k) = \frac{1}{i}$

$E(X_i) = \sum_{k=0}^{i-1} k \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \sum_{0}^{i-1} k = \frac{1}{i} \cdot \frac{(i-1)i}{2} = \frac{i-1}{2}$

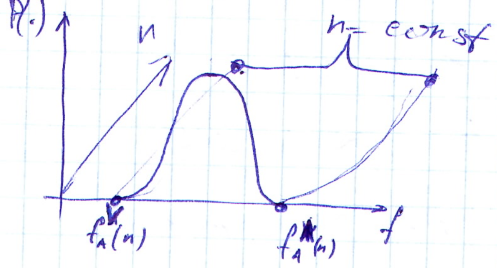
$E(Y_n) = E\left(\sum_{i}^{n} X_i\right) = \sum_{2}^{n} E(x_i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{2} = \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{2} - \frac{1}{2}(n-1) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} - \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2} =$

$= \frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}$

! $\overline{f_A}(n) = 14n - 13 + 10\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}n^2 + 11\cdot\frac{1}{2}n - 13$

Информационная чувствительность алгоритмов



Сортировка индексами

27.10.17

1. Идея и ограничение

$A \quad a_i \in N, \quad a_i \neq a_j \quad i \neq j \quad ! \max a_i = 11$

7	11	3	6

1	2	3			6	7				11
		1			1	1				1

B, $= M$

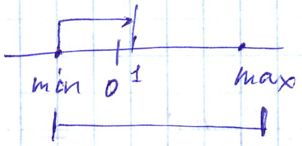
! $B[A[i]] \leftarrow 1$

```
for i ← 1 to n
|  B[A[i]] ← 1
k ← 1
for j ← 1 to M
|  A[k] ← j
|  k ← k + B[j]
```

2. Расширение

а) $a_i \neq a_j \Rightarrow B[\,] \leftarrow B[\,]+1$

в) $a_i \in \mathbb{Z}$



3. Текст

а) $MinMax(A, n; Min, Max) \Rightarrow 5\frac{1}{2}n + a\ln n + b = \overline{f_A}(n)$

б) SortInd (A, n ; Max, Min)

```
L ← Max - Min + 1
! B[1..L]
for j ← 1 to L
    B[j] ← 0
for i ← 1 to n
    k ← A[i] - min + 1
    B[k] ← B[k] + 1
i ← 1
for j ← 1 to L
    if B[j] ≠ 0
    then
        C ← B[j]
        for k ← 1 to C
            A[i] ← j + min - 1
            i ← i + 1
End
```

$$f_A(n, L) = 3+1 + L(3+2) + 1 + n(3+8) + 2 + L(3+2) + 10\frac{1}{2}n =$$
$$= 10L + 21n + C$$

1) $a_i \neq a_j \Rightarrow B[j] \neq 0 \,|= 1$

$n * (3 + \underset{for}{3} + 6) = 12n$

2) $a_i = a_j \quad \forall i, j \quad B[a_j] = n$

$3 + n(3+6) = 9n + 3$

4. Анализ L

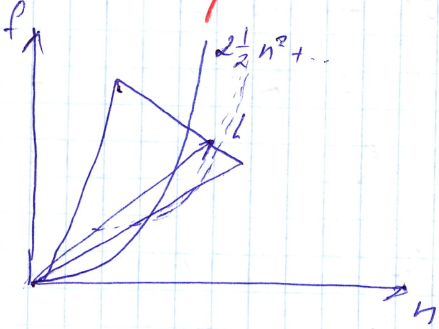
$$P(n, \mathrm{Max}A \mid L = k) = ?$$

$\max L = \mathrm{Max}A \qquad \min L = 1$

Рациональный выбор

$$\overline{f}_{A1} = 2\tfrac{1}{2}n^2 + 11\tfrac{1}{2}n$$

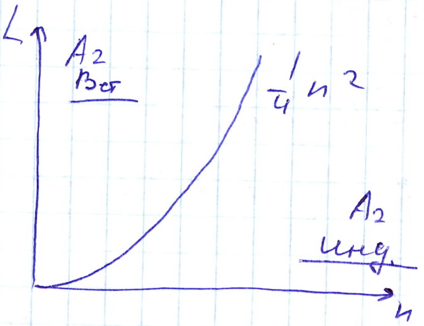
$$\overline{f}_{A2} = 10L + 21n \quad \Rightarrow$$



$$2\tfrac{1}{2}n^2 + 11\tfrac{1}{2}n = 10L + 21n$$

$$10L = 2\tfrac{1}{2}n^2 - 9\tfrac{1}{2}n$$

$$L = \tfrac{1}{4}n^2 - \ldots$$



Монитор

MinMax(...)

$L \leftarrow \mathrm{Max} - \mathrm{Min} + 1$

if $f_{A1} > f_{A2}$

$A_1 \qquad A_2$

Теория сложности

3.11.17

1. Обозначения

а) $O(\cdot)$ К. Бахман конец XIX в.

! $f(x), g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$

$f = O(g) \iff \exists x_0 : 0 \le f \le c \cdot g, \ \forall x > x_0, \ c > 0$

! $f(x) = O(g(x))$

$f(x) \in O(g(x))$

б) $\Theta(\cdot)$ – Д. Э. Кнут 1961

$\exists\, c_1, c_2 > 0 : \ c_1 \cdot g \le f \le c_2 \cdot g$

$\exists x_0 :$

$f(x) = \Theta(x^2) \Rightarrow f(x) = c \cdot x^2 + \ldots$

c) Ω – Д. Э. Кнут 1961

$\exists\, c > 0,\ x_0 : \ \forall x > x_0 \quad f \geq c \cdot g$

$n_{(10)} = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

$n_{(2)} = 0 \quad 1 \quad 010 \quad 011 \quad 100 \quad 101 \quad 110 \quad 111$

$\beta_1(n) = 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 1$

считает кол-во единиц в двоичном представлении числа n

$\beta_1(2^k) = 1 \qquad \beta_1(2^k - 1) = k$

$\underset{(1)}{0} \leq \beta_1(n) \leq \log_2 n$

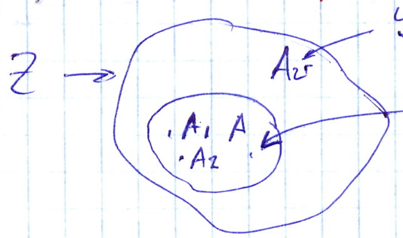
$\beta_1(n) = O(\log_2 n)$

$\beta_1(7) = 3 \quad \log_2 7 = 2{,}81 \Rightarrow c > 1$

2. Объекты исследования в теор. сл-ти

Задачи Z

Предмет fthlim



Универсум

Известные => Amin – лучший по асимптотике из A.

$f_{thlim}{}_Z^{(n)} : \forall A \in A_Z \underset{\text{(модели вычисл)}}{} \quad \hat{f}_A(n) = \Omega(f_{thlim}{}_Z^{(n)})$

3. Тривиальные оценки сложности

! Сложность алгоритма – асимптотическая оценка (O) $\hat{f}_A(n)$

$\hat{f}_A(n) = 5n^2 + \ldots = O(n^2)$

Задача Z

$D \in D_n \quad f_{read}(n) = h(D)$ часто $h(D) \cong c \cdot n$

$f_{write}(n)$

$f_{R|W} = \max_{\alpha} \{f_R, f_W\}$

$\forall A_z \quad f_A^A(n) = \Omega(f_{RIW}(n))$

4. Классификация задач

$f_{Amin}(n)$, $f_{RIW}(n)$, $f_{thLim_z}(n)$

I. THCL - теоретические закрытые задачи

$\Theta(f_{Amin}(n)) = \Theta(f_{thLim_z}(n))$

Улучшение констант

II. THOP - теоретич. открытые

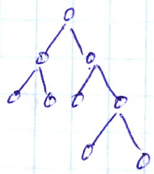
$f_{Amin} \succ f_{RIW}$ и (f_{thLim} недоказано)

$f_{RIW} = \Theta(n^2)$

$f_{Amin}(n) = O(n^{2,34\ldots})$

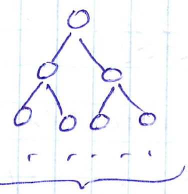
5. Сортировка сравнениями

$f_{RIW}(n) = \Theta(n)$



$L = 5 \quad h_{min} = \lceil \log_2 n \rceil$

$\mho$ - все перестановки



$|\mho| = n!$

$h_{min} = \log_2 n! = \log_2 \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}(1+\ldots)$ n! листьев

$\approx n\log_2 n - n\log_2 e + \ldots$

Число выч. операций сравнение не м.б меньше чем

$f_{thLim_z}(n) = \Omega(n \log_2 n)$

$F(A) = \sum_{i=1}^{n} i * a_i \to \max$

Теория сложности (в терминах сертификатов)

1. Сложность

$Z \to A \to f_A^\wedge(n) \to O(g(n))$ - сложность алгоритма

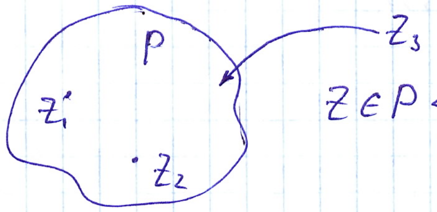
Сложность Z - ? $O(f_{thlim}(n))$

2. Класс P

1960е - хорошая задача (Z)

1965 Эдмондс, Карп, ...

$f_A^\wedge(n) = O(n^k)$



$Z \in P \Leftrightarrow \exists A: f^\wedge_{A_z}(n) = O(n^k)$, $k = const$, $k \neq h(n)$

3. Задача о сумме

$B = (7, 3, 14, 8, 5)$

$V = 18$

Найдите представление V как сумму чисел из B.
(подразумевается, что решение есть.

$\min b_i \leq V \leq \sum b_i$

X - характеристический вектор решения

$X = (1,1,0,1,0) \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

$\mathfrak{X} = \{X_n\}$ $\quad |\mathfrak{X}| = 2^n - 1$

n: $t_A = 1$ сек

$n + \underset{\approx 24}{L} \Rightarrow 1$ год

! Проверка решений

$Z: D \in D_n \to R$

проверка A_v $(D, R) \to \{0, 1\}$ $\quad A_v$ - верифицирующ. алг.

$(B, V; X) \to \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$

A_v вычисляет $V = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$