$|S_n - S|$ - погр-ть n-ой част. суммы ряда.

Пр. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k}}_{=a_k}$ с точностью 10^{-2}

Решение: 1) Исследуем сходимость

а) Абсолютн. сх-ть.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ - гармонич. ряд - расх.

Т.о. если Σa_k сх-ся, то только условно

б) Иссл. сходимость

$b_k = |a_k| = \frac{1}{k}$ - монот. убывают и стремятся к 0 при $k \to \infty$

Т.о. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сх-ся по пр-ку Лейбница

Т.к. он не сх-ся абс, то он сх. условно

2) Вычислим сумму этого ряда с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

из пр-ка Лейбница $\Rightarrow |S_n - S| \le b_{n+1} < \varepsilon$

$b_{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 10^{-2} \Leftrightarrow n+1 > 100 \Leftrightarrow n > 99$

Примем $n = 100$

Тогда $S \approx \sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^{100}}{100} = \ldots \approx -0{,}6882$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение вероятности

1 Случайный эксперимент

Опр Случайным наз-ся эксперимент рез-т которого невозможно предсказать заранее.

Пр 1) подбрасывают монету:

Возм. исходы: выпад-е герба (Г)

выпад-е решки (Р)

Мн-во всех элем. исходов. $\Omega = \{Г, Р\}$, $|\Omega| = 2$

2) Бросают игровую кость.

Набл. рез-т - число выпавших очков.

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $|\Omega| = 6$.

3) Подбрасывают монету

Набл. рез-т — число бросков до 1-го появл-я герба

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$ (т.е. Ω — счетно)

4) Производят выстрел по плоской мишени:

Набл. рез-т: (x, y) — координаты точки попадания пули

$\Omega = \mathbb{R}^2$. ($|\Omega| = c$ — имеет мощность континуума).

Опр Мн-во Ω всех элем. исходов данного эксперимента наз-ся пространством элем. исходов.

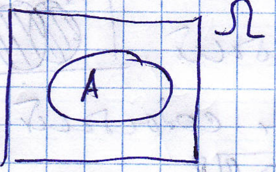
Замеч Всюду в дальнейшем будем предполагать, что пр-во элем. исходов обладает св-вами:

1) Никакой элем. исход в рамках данного случ. эксп-та невозможно разделить на более мелкие составляющие.

2) В рез-те провед-я эксп-та (однократного) обязат. реализуется ровно один из элем исходов.

Опр (нестрогое)

Событием наз. (любое) подм-во мн-ва Ω



$A \subseteq \Omega \iff A$ — событие в рамках одного сл. эксп.

Опр Говорят, что в данном сл. эксп-те произошло соб-е A, если в рез-те эксп-та реализовался один из входящих в A элем. исходов.

Пр. Из колоды карт извлекают 1 карту:

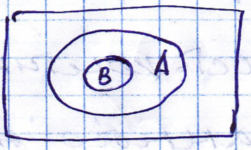
A = {извлечена картинка}

B = {извлечена карта красной масти}

C = {извлечена карта трефовой масти}

Пусть в рез-те эксп-та цвет 7 граф.: АВ - не произошло
С - произошло

Опр Соб-е A наз. следствием соб-я B, если осущ-е соб-я B в рез-те эксперимента влечет осущ-е соб-я A, т.е. $B \subseteq A$



Замеч Любое мн-во Ω сод-т 2 подмн-ва: $\varnothing$ и Ω

Соб-е $\varnothing$ наз-ся невозможным } наз. несобственными событиями
-//- Ω наз-ся достоверным

Все остальн. события наз. собственные

Пр В урне нах-ся 2 синих и 3 красных шара. Из урны извлекают 1 шар:

A = {извлечен белый шар} = $\varnothing$ - невозм

B = {извл. шар явл красного или син. цв} = Ω - достов

② Операции над событиями

События явл мн-вами => $\cup, \cap, \setminus, \overline{}, \Delta$

При этом в теории вероятн-тей исп-ся след терминология:

а) $A \cup B = A + B$ - наз. суммой событий


б) $A \cap B = A \cdot B$ - наз-т. произведением событий


в) $A \setminus B$ наз разностью событий


г) $\overline{A} = \Omega \setminus A$ - дополнение события A


Опр Событие A и B наз-ся несовместными, если их произведение является невозможным событием $A \cdot B = \varnothing$. В противном случ. A и B наз. совместными

Опр Соб-я $A_1, \dots, A_n$ наз

- попарно несовместными, если $A_i A_j = \varnothing$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$
- несовместными в совок-ти, если $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = \varnothing$

Замеч. Очевидно, что

соб-я $A_1, .., A_n$ несовм. попарно $\Rightarrow$ соб-я $A_1, \dots, A_n$ несовместим. в сов-ти

③ Классическое определение вероятности

Пусть 1) $|\Omega| = N < \infty$

2) по условиям эксп-та нет оснований предпочесть тот или иной элем исход остальным (в этом случае говорят, что все элем исходы равновозможны)

3) $A \subseteq \Omega$ – соб-е;

$|A| = N_A$

Тогда

Опр (класс. опр-е вер-ти)

вероятностью соб-я A наз. число $P(A) = \frac{N_A}{N}$. ЧП

Пр 2 раза бросают игральную кость.

$A = \{$сумма выпавших очков $\geq 11\}$

$P(A) = ?$

Реш-е: элем. исход: (x_1, x_2), где x_1 – кол-во выпавших очков при 1-м броске, x_2 – -//- при 2-м броске.

$\Omega = \{(x_1, x_2): x_i \in \{1, .., 6\}, i = \overline{1;2}\}$; $|\Omega| = 36 = N$.

$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

Т.к. все элем исходы равновозможны, то воспользуемся класс. опр. вер-ти:

$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Св-ва вероятности (на основе класс. опр-я)

1. $\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Если $AB = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Док-во: 1) $P(A) = \frac{N_A \geq 0}{N > 0} \Rightarrow \geq 0$

2) $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$

3) ф-ла включений и исключений:

$|A+B| = |A| + |B| - \underbrace{|AB|}_{0 \text{ т.к. } AB = \varnothing} \Rightarrow N_{A+B} = N_A + N_B$

$P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = P(A) + P(B)$ ∎

Замеч. недостатки класс. опр-я

1) не применима к случаю, когда $|\Omega| = \infty$
2) не применима к случаю, когда элем. исходы не явл. равновозможными

④ Геометрическое определение вероятност.

явл. обобщением класс. опр-я на случай ∞ мн-в.

Пусть 1) $\Omega \subseteq R^n$,

2) $\mu(\Omega) < \infty$, μ - мера мн-ва ($\mu = 1$ - длина $\mu = 2$ - площадь, $\mu = 3$ - объем.)

3) возможность принадлежности исхода эксп-та некот мн-ву $A \subseteq \Omega$ пропорциональны мере этого мн ва и не зависит от его формы и его расп-я внутри Ω.

Тогда

Опр (геометрич. опр-е вер-ти)

Вероятностью события $A \subseteq \Omega$ наз. число

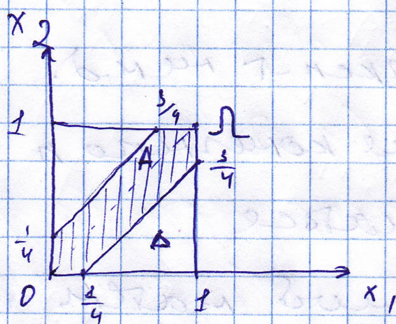
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Пр. „Задача о встрече" 3.10.17

Два человека договорились встрет. с 12^{00} до 13^{00} в опред. месте. Появление каждого из них в усл. месте равновозможно в любое время из указ. промежутка. При этом они договорились, что тот, кто приходит 1-м ждет 15 мин, а затем уходит. Какова вер-ть того, что они встретятся.

Реш-е: элем. исход: (x_1, x_2), где $x_i \in [0;1]$,
x_i - время появления в условленном месте i-го человека

$\Omega = [0;1] \times [0;1]$



$A = \{2 \text{ человека встретились}\} = \{(x_1, x_2): |x_1 - x_2| \le \frac{1}{4}\}$

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \left\{\begin{matrix}\mu - \text{площадь} \\ \mu(\Omega) = 1\end{matrix}\right\} = \mu(A) = 1 - 2\mu(\Delta) = 1 - 2\left(\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2}\right) =$

$= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ чп

Замеч 1) Очевидно, что из геом. опр. вер-ти можно получить все те же св-ва вер-ти, что и из классич. опр-я.

2) недостаток геом опр-я вер-ти заключается в том, что оно не может учесть, то, что некот. обл-ти внутри Ω м.б. более предпочтитель-ными. Так, если в предыдущ. примере

появление обоих встречающихся боле вероятно в середине часа, то геом. опр-е не дает удовл рез-т

⑤ Статистическое определение вер-ти.

Пусть 1) случайный эксп-т произведен n раз.

2) при этом событие A произошло n_A раз.

Опр Вер-тью события A наз. эмпирический (т.е. полученный из опыта) предел:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Можно пок-ть, что для статистического опр-я также справедливы все осн. св-ва вер-ти, получ из классич. опр-я.

Недостатки статич. опр-я:

1. На практике никакой случ. эксп-т не м.б. произведен беск. число раз. Для конечного n величина $\frac{n_a}{n}$ может изменятьс
2. С точки зрения современной матем статистич. опр-е явл. анахронизмом, т.к. не дает достат. базы для дальнейшего развития теории.

⑥ Сигма-алгебра событий

Для строгого аксиомат. опр-я вер-ти необх. уточнить понятие события. Выше мы давали опр. события (нестрогое), в котором соб-м событие называли произвольное подмн-во мн-ва Ω. Проблема в том, что в случае $|\Omega| = \infty$ такое опр-е не позволяет построить логически непротиворечивую теорию

Поэтому событиями целесообразно наз-ть не произв. подмн-ва мн-ва Ω, а лишь некоторые из них.

Из „житейских" соображений понятно, что если A, B - некот. соб-я, связанные с данным случаем экс-том, то событиями должны быть и мн-ва $A+B$, AB, $A \setminus B$, $\bar{A}$....

Поэтому мн-во событий должно быть замкнуто относ $+, \cdot, \setminus, \ldots$

Эти соображ. и приводят к след. опр-ю.

Пусть 1) Ω - мн-во элем. исходов данного сл. эксп-та

2) $\mathcal{B} \neq \varnothing$ - набор п/мн-в мн-ва Ω.

Опр Мн-во $\mathcal{B}$ наз. σ-алгеброй событий на Ω, если вып-ны усл-я. (сигма)

1) если $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

2) если $A_1, \ldots, A_n, \ldots, \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$

Простейшие следствия из опр-я σ-алгебры

1° $\Omega \in \mathcal{B}$

2° $\varnothing \in \mathcal{B}$

3° если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4° если $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$

Док-во: 1° а) по опр-ю σ-ал-ры $\mathcal{B} \neq \varnothing \Rightarrow$

$(\exists A \subseteq \Omega)(A \in \mathcal{B})$

б) по опр-ю σ-алгебры $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

в) по опр-ю σ-алг. $((A \in \mathcal{B}) \wedge (\bar{A} \in \mathcal{B})) \Rightarrow \underbrace{A + \bar{A}}_{\Omega} \in \mathcal{B}$

2° а) из 1° $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$

б) из опр-я σ-ал $\Rightarrow \underbrace{\bar{\Omega}}_{=\varnothing} \in \mathcal{B}$

3° а) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{опр.} \\ \sigma\text{-ал} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$= \left\{ {опр \atop б\text{-}ст} \right\} \Rightarrow \overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots \in B \Rightarrow \left\{ {опр \atop б\text{-}алг} \right\} \Rightarrow$

$\overline{\overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots} \in B \Rightarrow \{\text{з-н де Моргана}\} \Rightarrow$

$\overline{\overline{A}}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{A}}_n \cdot \ldots \in B \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in B$

9° $A, B \in B \overset{опр\ б\text{-}алг}{\Longrightarrow} A, \overline{B} \in B \Rightarrow \left\{ {св\text{-}во \atop 3^\circ} \right\} \Rightarrow \underset{= A \setminus B}{A\overline{B}} \in B$ ∎

Замеч. 1) В дальнейшем, говоря о вероятности, всегда будем предполагать, что на мн-ве Ω элем. исходов случ. эксп-та зафиксирована некот. б-алг-ра

2) При этом слово „событие" всегда будет означать эл-т этой б-алг-ры

3) Если мн-во Ω конечно, $|\Omega| < \infty$, то всегда будем считать, что б-алгебра $B = 2^\Omega$, т.е. B мн-во всех п/мн-в мн-ва Ω

Пример. Случ. выбранного человека попросили „выбросить" одно из трех: „камень", „ножницы", „бумагу".
В этом случае
$\Omega = \{К Н Б\}$
$B = 2^\Omega = \{\varnothing, \{К\}, \{Н\}, \{Б\}, \{К, Н\}, \{К Б\}, \{Н, Б\}, \{К, Н, Б\}\}$

⑦ Аксиоматическое определение вер-ти

Пусть 1) Ω – пространство элем. исходов некот. случ. эксп-та.

2) B – б-алгебра на Ω

Опр Вероятностью (вероятностной мерой) наз-ся отображение $P: B \to \mathbb{R}$ $\{P: (\text{событие}) \in B \to \text{число} \in \mathbb{R}\}$ обладающее след св-вами:

1° $\forall A \in B$ $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)

2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3° для любых попарно непересекающ событий $A_1, \dots, A_n, \dots$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения)

Опр Тройка $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ наз. вероятностным пр-вом.

<u>Св-ва вероятности</u> (в соотв. с аксиоматич опр-м)

1° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $A \in \mathcal{B}$

2° $P(\varnothing) = 0$

3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$

4° $\forall A \in \mathcal{B}$ $\quad 0 \le P(A) \le 1$

5° $\forall A, B \in \mathcal{B}$ $\quad P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° Для любого конечного набора событий A_i

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{n=1}^{n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

<u>Док-во:</u>

1° а) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$ (св-во σ-ал)

б) $A \cdot \bar{A} = \varnothing \Rightarrow$ {по акс 3°} $\Rightarrow P(\underbrace{A + \bar{A}}_{=\Omega}) = P(A) + P(\bar{A})$

в) $P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

г) б, в $\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° а) $P(\Omega) = 1$

б) по св-ву 1° $P(\varnothing) = P(\bar{\Omega}) = 1 - \overset{1}{P(\Omega)} = 0$

3° а) т.к $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$

б) т.к $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$, то по акс 3°

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B) \ge P(A)$

4° Нужно док-ть $0 \le P(A) \le 1$

а) $P(A) \ge 0$ — аксиома 1°

б) осталось док-ть $P(A) \le 1$

$\forall A \in \mathcal{B}$ $\quad A \subseteq \Omega \Rightarrow$ {св-во 3°} $\Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$

5° а) $A+B = A + (B\setminus A)$

при этом

$A\cdot(B\setminus A) = \varnothing$, поэтому

(1) $\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B\setminus A)}$ (акс 3°)

б) $B = (B\setminus A) + AB$

при этом $(B\setminus A)\cdot(AB) = \varnothing$ по акс. 3°

$\boxed{P(B) = P(B\setminus A) + P(AB)}$ (2)

в) (2) $\Rightarrow$ $P(B\setminus A) = P(B) - P(AB)$ тогда в (1):

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° является следствием (и обобщением) св-ва 5° и доказывается аналогично док-ву ф-лы включений и исключений ∎

Замеч. 1) Иногда в определении вероятности вместо расширенной акс. сложения

$$\left.\begin{array}{l} A_1,\dots,A_n,\dots \in B \\ A_1,\dots,A_n,\dots \text{ попарно непересек} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A_1+\dots+A_n+\dots) = P(A_1)+\dots+P(A_n)+\dots$$

используют аксиомы

$$3')\quad \left.\begin{array}{l} A_1,\dots,A_n \in B \\ A_1,\dots,A_n \text{ попарно непересек} \end{array}\right\} P(A_1+\dots+A_n) = P(A_1)+\dots+P(A_n)$$

(аксиома сложения – конечный набор соб-ий

$$3'')\quad \left.\begin{array}{l} а)\ \overbrace{A_1,\dots,A_n,\dots}^{\text{неуб. посл-ть событий}} \in B \\ б)\ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \end{array}\right\} \Rightarrow P(A_1+\dots+A_n+\dots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

2) можно док-ть, что $(3°) \Leftrightarrow (3') \wedge (3'')$

Условная вероятность 10.10.17.

① Определение условной вероятности

Пусть A, B - 2 события, наблюдаемые в некот. случайном эксперименте. Пусть дополнительно известно, что в рез-те эксп-та произошло соб-е B. Что в этом случае можно сказать о вер-ти наступления соб-я A?

Пр Из колоды в 36 случайным образом вынимают 1 карту

$A = \{$извлечен туз$\}$

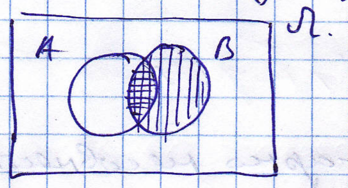
$B = \{$извлечена картинка$\}$

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P_B(A) = \left\{ \text{произошло } B \Rightarrow \text{извлеч. валет, дама, король, туз} \Rightarrow \text{всего 16 исходов; из них 4 благопр для } A \right\} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

вер-ть этого соб-я A при усл-ии, что произошло

Дадим геом. иллюстрацию, предполагая, что Ω конечно и содержит N эл-тов $|\Omega| = N$. Также будем считать, что все исходы равновозможны.



Т.к. известно, что произошло соб-е B, то в рез-те эксп-та мог иметь место лишь 1 из $N_B = |B|$ элем. исходов. При этом условие осущ-е соб-я A возможно лишь при реализации одного из исходов, входящих в $A \cap B$, т.е. соб-ю A благоприятствуют $N_{A\cap B}$ исходов. Т.о.

$$P_B(A) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \{:N\} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Т.о. приходим к опр-ю.

Пусть A и B - 2 соб-я, наблюдаемые в нек-ом случ эксп-те. $P(B) \neq 0$

Опр Условной вер-ю осущ-я соб-я A при условии, что произошло B наз. число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Замеч Иногда, чтобы подчеркнуть различие, „обычную" вероятность $P(A)$ также наз-т. безусловной вероятностью.

Зафиксируем соб-е B и будем рассм-ть усл. вер-ть $P(A|B)$ как ф-цию события A.

Th Условная вер-ть $P(A|B)$ (при фикс. B) удовл. всем аксиомам безусловной вер-ти

Док-во:

1° $\left\{\begin{matrix} \text{акс} \\ P(A) \geq 0 \end{matrix}\right\}$

$$P(A|B) = \frac{\overbrace{P(AB)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$$

2° $\{\text{акс } P(\Omega) = 1\}$

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\overbrace{\Omega B}^{=B})}{P(B)} = 1$$

3° $\left\{\begin{matrix} \text{акс } A_1, \ldots, A_n, \ldots - \text{посл-я попарно несовмест. соб., то} \\ P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) \end{matrix}\right\}$

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots | B) = \frac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots) B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B + \ldots + A_nB + \ldots)}{P(B)} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} A_i - \text{попарно непересек.} \\ \Rightarrow A_i B - \text{попарно непересек.} \end{matrix}\right\} = \{\text{акс } 3^\circ\} = \frac{1}{P(B)} (P(A_1B) + \ldots + P(A_nB) + \ldots) =$$

$$= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \ldots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \ldots = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots \blacksquare$$

Следствие Условная вер-ть $P(A|B)$ (при фикс. B) обладает всеми св-вами безусловной вер-ти, т.е.

1° $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

2° $P(\varnothing|B) = 0$

3° Если $A_1 \subseteq A_2$, то $P(A_1|B) \le P(A_2|B)$

4° $0 \le P(A|B) \le 1$

5° $P(A_1+A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$

6° Для любых событий $A_1, \dots, A_n$

$$P(A_1+\dots+A_n|B) = \sum_{1\le i_1\le n} P(A_{i_1}|B) - \sum_{1\le i_1<i_2<} P(A_{i_1}A_{i_2}|B) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1\dots A_n|B)$$

Док-во: т.к. в случае безусл. вероятности эти 6 св-в явл. следствиями 3х аксиом, а условная вер-ть удовл. этим аксиомам, то для усл. вер-ти также справедливы эти 6 св-в. ∎

Пр. Среди 15 лотерейных билетов 5 выигрышных. 2 игрока поочереди вытягивают по 1 билету.

$A_1 = \{$1-ый игрок достал выигр. билет$\}$

$A_2 = \{$2ой — // — // $\}$

$P(A_2|A_1) = ?$

Реш-е:

I способ: (по опр-ю)

а) Исход: (x_1, x_2), где x_i - номер билета, вытянутого i-м игроком, $i=\overline{1,2}$

При этом по смыслу задачи $x_1 \ne x_2$

Тогда общее число исходов:

$N = 15 \cdot 14$ $\quad \{(\underset{15\text{ способов}}{x_1}, \underset{14\text{ способов}}{x_2})$

б) $N_{A_1} = ?$ $\quad (\underset{5\text{ способов}}{x_1}, \underset{14\text{ способов}}{x_2})$

$N_{A_1} = 5 \cdot 14$

в) $N_{A_1A_2} = ?$ $\quad (\underset{5\text{ способов}}{x_1}, \underset{4\text{ способа}}{x_2})$

$N_{A_1A_2} = 5 \cdot 4$

2) $P(A_1) = \frac{5 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{1}{3}$

$P(A_1 A_2) = \frac{5 \cdot 4}{15 \cdot 14} = \frac{2}{21}$

$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{2}{21} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2}{7}$

<u>II. Способ</u>

Перестроим пр-во элем. исходов с учетом того, что соб-е A_1 произошло.

Т.к. 1-ый игрок вытащил выигр билет, то в барабане осталось 14 билетов, среди кот-рых 4 выигрышных. Т.о. $P(A_2 | A_1) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ ЧД

② Формула умножения вероятностей

Th Пусть 1) A, B – 2 события, наблюдаемые в данном случ. эксп-те

2) $P(A) \neq 0$

Тогда $\boxed{P(AB) = P(A)\, P(B|A)}$ ф-ла умн-я вер-тей для 2-х событий

<u>Док-во</u>: из опр-я усл вер-ти $\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(AB) = P(A)\, P(B|A)$. ∎

Th Пусть 1) $A_1, \dots, A_n$ – события, наблюдаемые в некот случ. эксп-те.

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) \neq 0$

Тогда $\boxed{P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \ldots A_{n-1})}$

ф-ла умножения вероятностей

<u>Док-во</u>: 1) Рассм $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$

по св-вам вер-ти $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq \underbrace{P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})}_{\neq 0} > 0$

$\Rightarrow$ все условные вер-ти, входящие в пр. часть ф-лы умн-я, определены

2) $P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}_{A} \cdot \underbrace{A_n}_{B}) = \left\{ \begin{matrix} \text{ф-ла умн-я} \\ \text{для 2-х событий} \end{matrix} \right\} = P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}}_{A} \underbrace{A_{n-1}}_{B}) \cdot$

$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) P(A_{n-1} | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot$

$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = \ldots = P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \ldots A_{n-1})$

Пр На 7 карточках написаны буквы слова "шоколад". Карточки тщательно перемешивают и последовательно извлекают 3 карты (без возвращения)

$A = \{$эти 3 карты в порядке извлечения образуют слово "код"$\}$

Решение: Обозн: $A_1 = \{$на 1-ой извлеч. карточке написано "к"$\}$

$A_2 = \{$на 2-ой -"- "о"$\}$

$A_3 = \{$на 3-ей -"- "д"$\}$

Тогда: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \underbrace{P(A_1)}_{1/7} \cdot \underbrace{P(A_2 | A_1)}_{2/6} \cdot \underbrace{P(A_3 | A_1 A_2)}_{1/5} =$

$= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$

③ Независимые события

Пусть A, B - соб-я, наблюдаемые в некот. сл. эксп-те

Опр События A и B наз независимыми, если

$P(AB) = P(A) P(B)$

Th 1) Пусть $P(B) > 0$, тогда соб-я A и B независимы $\Leftrightarrow$

$P(A|B) = P(A)$

2) Пусть $P(A) > 0$, тогда A, B - независимы $\Leftrightarrow$

$P(B|A) = P(B)$

Док-во:

1) а) (необх-ть) $\Rightarrow$

$\{A, B$ - независ $\Rightarrow P(AB) = P(A) P(B)$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \{A, B - \text{незав}\} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$

б) (достаточность) $\Leftarrow$

{ изв., что $P(A|B) = P(A)$

$$\underset{P(A)}{\overset{}{P(A|B)}} = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$$

2) док-ся аналогично

Замеч. Разумеется, в опр-нии независ. событий было бы логичнее иметь усл-е

$P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$

(A, B — независ., если доп. информация об осущ-нии одного из них никак не влияет на вер-ть осущ-я другого). Однако эти усл-я „работают" лишь для $P(B) > 0$ (или $P(A) > 0$), в то время как использованное нами усл-е $P(AB) = P(A)P(B)$ „работает" всегда ///

Пр. Из колоды в 36 карт случ. образ. извлекают 1 карту

$A = \{$извлеч. картинка$\}$

$B = \{$извлеч. карта красной масти$\}$

Явл. A, B независ?

Реш-е: 1) $P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

2) $P(AB) = \{AB$ — извлеч. картинка красной масти$\} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

3) $P(AB) \overset{?}{=} P(A)P(B)$

$\frac{2}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$ — верно $\Rightarrow A, B$ — независ ///

Th Пусть A, B — независ

Тогда 1) A и $\overline{B}$ независ

2) $\overline{A}$ и B независ

3) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независ

Док-во: 2) Проверим рав-во $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$

а) если $P(B)=0$, то т.к. $\bar{A}B \subseteq B \Rightarrow P(\bar{A}B) \le P(B) = 0 \Rightarrow$

Л. часть $= P(\bar{A}B) = 0$.

Пр. часть $= 0 \Rightarrow$ рав-во верно

б) если $P(B) > 0$, то по ф-ле умн-я вер-тей

$P(\bar{A}B) = P(B)\cdot P(\bar{A}|B) = \left\{\begin{matrix}\text{по св-ву}\\ \text{усл. вер-ти}\end{matrix}\right\} = P(B)\cdot(1 - \underbrace{P(A|B)}_{P(A),\ \text{т.к. } A, B \text{ независ.}}) =$

$= (1 - P(A))\,P(B) = P(\bar{A})\,P(B)$

Рав-во верно.

Утв-е 1) и 3) доказ-ся аналогично.

17.10.17

Опр События $A_1, \dots A_n$ наз. независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1, \dots, i_k$ такого что $i_1 < i_2 < \dots i_k$,

$P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$

- независ. попарно, если $\forall i, j: 1 \le i < j \le n$

$P(A_i A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$

Замеч 1) если соб-я $A_1, \dots, A_n$ независ. в сов-ти, то они попарно независ. Обратное неверно. Это показывает след. пример.

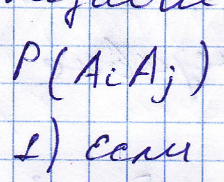
Пр (Пример Бернштейна) Рассм. тетраэдр (правильный)

на одной его грани написано "1"

на другой "2"

третьей "3"

четвертой "1, 2, 3"



Тетраэдр подбрасывают и смотрят что написано на нижней грани

$A_1 = \{$на нижней грани есть единица$\}$

$A_2 = \{$ двойка $\}$

$A_3 = \{$ тройка $\}$

Док, что соб-я A_1, A_2, A_3 явл попарно независ, но не явл. независ. в сов-ти.

а) попарно незав:

$$P(A_1 A_2) = \left\{ A_1 \cdot A_2 = \left\{ \begin{matrix} \text{на нижней грани} \\ \text{одновр присутств } 1 \text{ и } 2 \end{matrix} \right\} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1) = \left\{ \begin{matrix} \text{на нижней грани} \\ \text{есть '1'} \Rightarrow 1 \text{ или } 123 \end{matrix} \right\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{matrix} P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) \\ P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3) \\ P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \text{ попарно независ}$$

б) Проверим нез-ть в сов-ти.

$$P(A_1 A_2 A_3) = \left\{ \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 = \{\text{на нижней} \\ \text{грани есть } 1, 2 \text{ и } 3\} \ 123 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1) P(A_2) P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A_1 A_2 A_3)$$

Т.о A_1, A_2, A_3 не явл независ в сов-ти ЧП

Замеч Можно док-ть, что если соб-я $A_1, \ldots, A_n$ независ в сов-ти, то и соб-я $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ независ. в сов-ти. ЧП

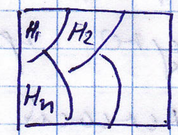
④ Формула полной вероятности

Пусть Ω - пр-во элем. исходов некот случ. эксп-та

$H_1, \ldots, H_n \subseteq \Omega$ - соб-я, связ с этим случ. эксп-том

Опр Будем говорить, что соб-я $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, если

1) $H_1+\ldots+H_n=\Omega$



2) $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$

3) $P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$

Замеч. Соб-я H_i, входящие в полную группу событий, часто наз-т гипотезами

Th Пусть 1) $H_1,\ldots,H_n$ образ. полную группу событий

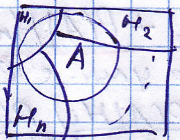
2) $A\subseteq\Omega$ — событие

Тогда: $\boxed{P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)}$

ф-ла полной вер-ти

Док-во: $P(A)=P(A\Omega)=P(A(H_1+\ldots+H_n))=$

$=P(AH_1+\ldots+AH_n)=\{H_iH_j=\varnothing \Rightarrow (AH_i)(AH_j)=\varnothing\} =$



$= P(AH_1)+\ldots+P(AH_n)=\{\underbrace{P(AB)=P(A|B)P(B)}_{\text{ф-ла умнож. вер-тей}}\}=$

$=P(A|H_1)P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)$ ■

Пр В магазине продаются телевизоры 3-х фирм

30% этих тел-ров пр-тся 1й фирмой

50% — // — // 2й — // — //

20% — // — // 3й — // — //

Известно, что

продукция 1й фирмы сод-т 7% брака

— // — 2й — // — 5% брака

— // — 3й — // — 10% брака

Найти вер-ть того, что случайно выбранный телевизор окажется бракованным.

A = { случ. выбр. тел-р бракованный }

Рассм. полную гр. соб-ий:

H_1 = { выбранный тел-р пр-н 1й фирмой }

H_2 = { — // — // — 2й — // — }

H_3 { — // — // — 3й — // — }

Ф-ла полной вер-ти

$$P(A) = \underbrace{\boxed{P(A|H_1)}}_{0{,}07}\underbrace{\boxed{P(H_1)}}_{0{,}3} + \underbrace{\boxed{P(A|H_2)}}_{0{,}05}\underbrace{P(H_2)}_{0{,}5} + \underbrace{\boxed{P(A|H_3)}}_{0{,}1}\underbrace{P(H_3)}_{0{,}2} = 0{,}066$$

⑤ Формула Байеса

Th Пусть 1) вып-ны усл-я th о ф-ле полной вер-ти
2) $P(A) > 0$

Тогда (ф-ла Байеса)

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}} \quad i = \overline{1, n}$$

Док-во:

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

ф-ла умн-я вер-тей

опр-е усл. вер-ти ф-ла полной вер-ти ∎

Пр рассм. предыд. пример о покупке телевизора. Пусть известно, что случ. выбр. тел-р оказался бракованным (т.е. соб-е A наступило). Какой фирмой он вероятнее всего произведен?

Реш-е: Найти вер-ти

$$\underbrace{P(H_1|A)}_{\text{вер-ть того, что брак. тел-р произв. 1-й фирмой}} = \{\text{ф-ла Байеса}\} = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}3}{0{,}066} = \frac{0{,}021}{0{,}066}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)\,P(H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}5}{0{,}066} = \boxed{\frac{0{,}025}{0{,}066}}^{\max}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)\,P(H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}066} = \frac{0{,}02}{0{,}066}$$

Отв. вероятнее всего этот брак тел-р пр-н 2-ой фирмой

Замеч. Вер-ти $P(H_i)$, $i=\overline{1,n}$ наз. априорными (т.к. они известны до опыта)

Вер-ти $P(H_i|A)$; $i=1,n$, наз-ся апостериорными (т.к. они становятся известными после опыта) (И)

⑥ Схема Бернулли

Расм. случайный эксп-т, в рез-те которого может произойти один из двух элем. исходов, т.е $|\Omega|=2$

Один из этих исходов наз. условно „успехом", вер-ть его осущ-я обозн. p. Другой исход наз „неудачей", вер-ть его осущ-я обозначим $q=1-p$.

Опр Последовательность однотипных испытаний указанного вида наз-ся схемой испытаний Бернулли (биномиальной сх-емой), если отдельные испытания независимы, т.е в i-м испыт. вер-ть осуществления „успеха" не зависит от рез-тов первых $i-1$ испытания (И)

Пр 1) n раз подбрасывают монету

„успех" - выпад-е герба $p=\frac{1}{2}$

„неудача" - вып-е решки. $q=\frac{1}{2}$

Вся серия из n испыт укладывается в схему Берн.

2) n раз подбрас. игральн. кость

„успех". - выпад-е "6"

„неудача" - выпад-е "1", ..., "5"

$p=\frac{1}{6}$; $q=5/6$

3) Покупают n лотерейных билетов из некот. тиража
Эта серия испытаний не удовл. схеме испыт. Бернулли, т.к. отдельные исп-я не явл. независимыми.
Скажем, если i первых купленных билетов оказались выигрышными, то вер-ть того, что $i+1$ билет будет выигрышным уменьшается, по сравнению с первыми испытаниями (всего выигрышных билетов к началу $(i+1)$-го испыт. станет меньше, однако, если общий тираж $\gg n$, то сх. Берн. удовл. описывает этот эксп-т ☺)

Обозн. $P_n(k)$ - вер-ть того, что в серии из n по сх. Берн. испытаний произошло ровно k успехов.

Th Пусть 1) p - вер-ть осущ-я „успеха" в одном испыт.
2) $q = 1-p$ - вер-ть осущ-я „неудачи"
Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальный к-т

Док-во: 1) Опишем рез-т серии из n испытаний с пом-ю кортежа $(x_1, \ldots, x_n)$, где
$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в } i\text{-ом испыт. произошел „успех"} \\ 0, \text{если } -''- \text{ „неудача"} \end{cases}$$
$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{в серии из } n \text{ испыт. имели место ровно } k \\ \text{успехов} \end{array} \right\} =$
$= \{ (x_1, \ldots, x_k) : \sum_{i=1}^{n} x_i = k \} = \{ (x_1, \ldots, x_k) : \text{ровно } k \text{ компонент равны } 1 \}$

Всего в событии A сод-ся C_n^k таких кортежей (каждый такой кортеж однозначно определяется k позициями, в к-рых стоят единицы;

выбрать k таких позиций из n имеющихся можно C_n^k способами)

2) Для произвольного кортежа $\omega = (x_1, \ldots, x_n) \in A$

$P\{\omega\} = P\{ \{$в 1-м испыт. произошло $x_1\} \cdot \{$во 2-м испыт произошло $x_2\} \cdot \ldots \cdot \{$в n-м испыт $x_n\}\} =$

$= \{$т.к. отд. испыт-я независ$\} = \underbrace{P\{\text{в 1-м исп пр-ло } x_1\} \cdot \ldots \cdot P\{\text{в n-м исп. пр-ло } x_n\}}_{}= p^k q^{n-k}$

ровно k раз „успех", т.е ровно k сомн-лей равны p. „неудача" имела место $n-k$ раз, т.е ровно $n-k$ сомн. равны q

3) Т.к все кортежи указ вида, входящие в A, образуют несовместные соб-я, то

$P(A) = P\left(\sum_{\omega \in A} \omega\right) = \{\text{несовм}\} = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ■.

Следствие вер-ть того, что в серии из n испыт. по сх. Бернулли с вер. успеха p число успехов будет $\geq k_1$ и $\leq k_2$ будет равна

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Док-во: $A = \{$число k успехов $\geq k_1$ и $\leq k_2\}$

$A_{k_1} = \{$число k успехов $= k_1$

$A_{k_1+1} = \{ \ldots$ ״ — ״ $= k_1+1\}$

$A_{k_2} = \{$ ״ — ״ $= k_2\}$

Тогда $A = \sum_{i=k_1}^{k_2} A_i$

$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P(A) = P\left(\sum_{i=k_1}^{k_2} A_i\right) = \left\{\begin{matrix}A_i \text{ попарно} \\ \text{несовм.}\end{matrix}\right\} =$

$= \sum_{i=k_1}^{k_2} P(A_i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$ ■

Следствие 2 вер-ть того, что в серии из n испыт по сх. Берн. произойдет хотя бы 1 успех:

$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$, $q = 1-p$

Доп-во: $A = \{$произошел хотя бы 1 успех$\}$

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = \{\text{не произошло ни} \\ \text{одного успеха}\} \end{array} \right\} =$

$= 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$

24.10.17

Модуль 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Основные понятия

① Понятие случайной величины

Опр (нестрогое)

Пусть исход случ. эксп-та можно описать числом X. Тогда X - случ. величина.

Пр
1) Бросают игральную кость
$X \in \{1, .., 6\}$ - число выпавших очков
2) Бросают кость до 1-го появления шестерки
X - сумма выпавших очков во всех бросках $X \in N$
3) Бросают симм. монету до 1-го появл-я герба. X - число бросков. $X \in N$
4) Измеряют температуру тела у случайно выбранного пациента больницы
$X \in [34; 41]$
5) Производят стрельбу по круглой мишени. X - расстояние от точки попадания пули до центра мишени. $X \in [0; +\infty)$

Пусть (Ω, B, P) - вероятное пр-во

Опр (строгое)

Случайной величиной наз-т отображение

$X : \Omega \to R$,

$\{X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in R\}$