распр-е которой удовл. соотн-ю

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|.$$

<u>Док-во:</u>

1) $F_Y(y) \overset{\text{опр-е}}{=} P\{Y<y\} = P\{\varphi(X)<y\}$

(а) если φ - мон. возр, то $\varphi(X)<y \Leftrightarrow \psi(y) > X$

(б) если φ - мон. убывающая, то $\varphi(X)<y \Leftrightarrow \psi(y)<X$

Т.о. в случае:

(а) $F_Y(y) = P\{X<\psi(y)\} = F_X(\psi(y))$.

(б) $F_Y(y) = P\{X>\psi(y)\} = 1 - P\{X \le \psi(y)\} =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{т.к. } X\text{-непр} \\ \text{сл. вел}\end{matrix}\right\} = 1 - P\{X<\psi(y)\} = 1 - F_X(\psi(y))$

2) В любом случае $f_Y(y) = F'_Y(y)$ поэтому

в сл. (а): $f_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(\psi(y))) = \left\{\begin{matrix}\text{Th о производной} \\ \text{сл. ф-ции}\end{matrix}\right\} =$

$= f(\psi(y))\, f'(y)$

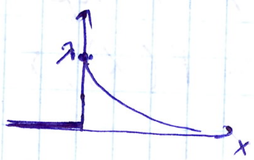
в сл (б): $f_Y(y) = \frac{d}{dy}\big(\overset{F_Y(y)\,=\,1-F_X(\psi(y))}{\cancel{F_X(\ldots(y))}}\big) = - f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$

Оба случая описываются общей ф-лой

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$$

<u>Пр</u> Пусть 1) $X \sim Exp(\lambda)$, т.е.

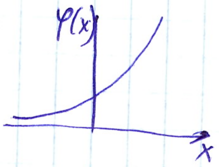
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$



2) $\varphi(x) = e^x$

Найдем ф-цию пл-ти сл. вел $Y = \varphi(X) = e^X$

<u>Реш-е</u>

1) 

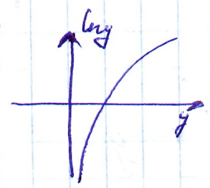
$\Rightarrow \varphi$ - монотонная

$y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \ln y$

Т.о $\psi(y) = \ln y$

2) $Y = e^X$, $\Rightarrow$ $Y > 0$. Поэтому $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ f_X(\psi(y))|\psi'(y)|, & y > 0 \end{cases}$

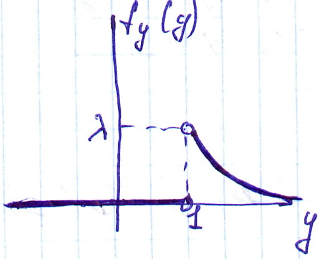
$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ f_X(\ln y) \cdot |(\ln y)'|, & y > 0 \end{cases} =$



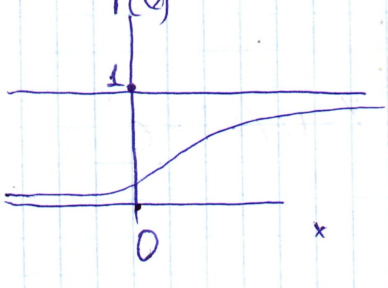
$y \in (0,1) \Rightarrow$
$\ln y < 0 \Rightarrow$
$f_X(\ln y) = 0$

$y > 1 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow$
$f_X(\ln y) = \lambda e^{-\lambda \ln y} =$
$= \lambda e^{\ln y^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{y^\lambda}$

$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0, & y \in (0,1) \\ \frac{\lambda}{y^\lambda} \left| \cdot \frac{1}{y} \right|, & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\lambda}{y^{\lambda+1}}, & y > 1 \end{cases}$



Пр Пусть 1) X – непр. случайная величина
2) $F(x)$ – ф-ция распр-я сл. вел X явл. непр и монотонно возрастающей
3) $Y = F(X)$, т.е. $\varphi = F$

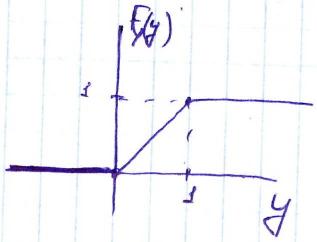


Тогда 1) Очевидно, что $Y \in [0; 1]$
~~Так~~ т.о. $F_Y(y) = 0$, если $y \le 0$
$F_Y(y) = 1$, если $y > 1$
2) При $y \in (0; 1]$

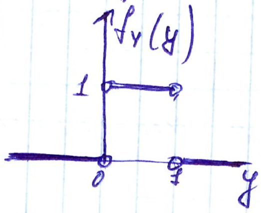
$$F_Y(y) \underset{\substack{\text{опр-е} \\ \text{ф-ции распр}}}{=} P\{Y<y\} = P\{F(X)<y\} = \left\{ \begin{array}{l} F\text{-монот. возр, то} \\ F(X)<y \Leftrightarrow X<F^{-1}(y) \end{array} \right\} =$$

$$= P\{X<F^{-1}(y)\} = \underset{F_X}{F}(F^{-1}(y)) = y$$

Т.о. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0<y\le 1 \\ 1, & 1<y \end{cases}$



Тогда $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1, & y\in(0;1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$



Т.о. $Y \sim R(0,1)$ (Y равномерно распределена на $(0;1)$). ч.т.д.

Замеч: Из предыдущего примера следует, что если $Y\sim R(0,1)$, то сл. вел. $X=F^{-1}(Y)$ будет иметь распределение с ф-цией распр-я $F(x)$. Этим фактом широко пользуются при моделировании сл. величин. Достаточно иметь лишь генератор случ. чисел для равномерного на $(0,1)$ распределения, при этом, подвергнув возвращаемые им знач-я функц. преобраз. F^{-1}, мы получим серию значений сл. вел X, имеющей ф-цией распр-е F, чп

5.12.17.

Th Пусть 1) φ - кусочн. монот. ф-ция (имеет конечное число участков монот)

2) $f_X(x)$ - ф-ция пл-ти распр. вер-тей непр сл. вел. X.

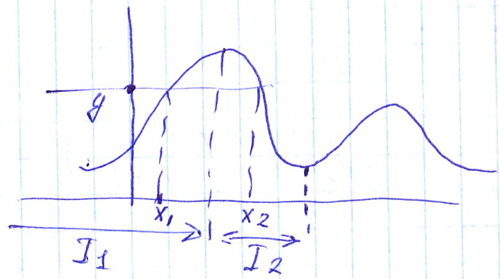
3) φ - дифф-ма

4) для данного $y \in \mathbb{R}$

$x_1 = x_1(y), \dots, x_k = x_k(y)$ - все решения ур-ния $\varphi(x) = y$, причем $x_j \in I_j$

где I_j - интервалы монот ф-ции φ $(K = k)$

φ - инт. монот
y - выбр. знач.
$k = 2$ для данного y



5) $\psi_1(y), \dots, \psi_k(y)$ - ф-ции, обр к φ на инт-лах $I_1, \dots, I_k$ соотв.

Тогда $f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_j(y)) |\psi_j'(y)|$

для y из 4)

② Скалярная ф-ция векторного аргумента

Пусть 1) (X_1, X_2) - двум. случ. вектор

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - ф-ция 2х переменных

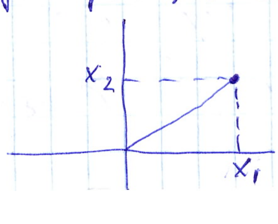
$\varphi(X_1, X_2) = Y$ - некот случ. величина.

Вопрос: как найти з-н распр. Y, если ~~(X_1, X_2) и~~ известны з-н распр. вектора (X_1, X_2) и ф-ция φ?

Пр Стрельба по плоской мишени.

(X_1, X_2) - коорд. точки попад. пули

Тогда $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ - расст от т. попадания до центра мишени



$\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

I (X_1, X_2) – дискр. случ. вектор, приним. зн. (X_{1i}, X_{2j}) $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ может прин. знач. $\varphi_1(X_{1i}, X_{2j})$

Пр 2 исп. по схеме Бернулли с вер. успеха p.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м исп. успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $Y = X_1 + X_2$ – общее число успехов в серии 2-х исп

Найти з-н распр сл. вект. Y.

1) Найти з-н распр. в-ра (X_1, X_2)

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	q^2	pq
1	pq	p^2

$q = 1 - p$

$P\{(X_1, X_2) = (0,0)\} = q^2$

2)

Y	$\varphi(0,0)=0$	$\varphi(0,1)=1$	$\varphi(1,0)=1$	$\varphi(1,1)=2$
P	q^2	pq	pq	p^2

$\Rightarrow$

Y	0	1	2
P	q^2	$2pq$	p^2

$$q^2 + 2pq + p^2 = (p+q)^2 = 1^2 = 1$$

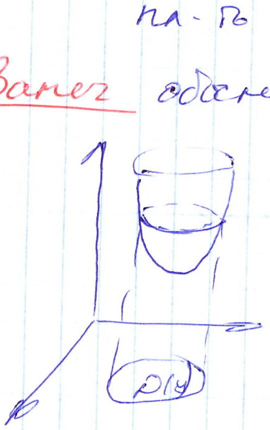
II Пусть (X_1, X_2) – непр. сл. вектор

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непр ф-ция

Тогда ф-цию распр сл. вел Y можно найти по ф-ле $F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ (*), где

$D(y) = \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}$, $f(x_1, x_2)$ – совм. пл-ть распр сл. вел X_1 и X_2

Замеч обоснование ф-лы (*)



$F_Y(y) = P\{Y < y\} \ominus$ по опр ф-ции расп-ия

события $\{(X_1, X_2) \in D(y)\}$ и $\{Y < y\}$ эквив, поэтому $\ominus$ $P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \{$св-ва непр случ в-ра$\} =$

$$= \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

③ Формула свертки

Th Пусть 1) (X_1, X_2) - непр сл. вектор

2) X_1, X_2 - независ

3) $Y = X_1 + X_2$

(рассм. частн. случай 2 II)

Тогда

$f_Y(y)$ можно найти как $\boxed{f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y-x)\, f_{X_2}(x)\,dx}$ ф-ла свертки

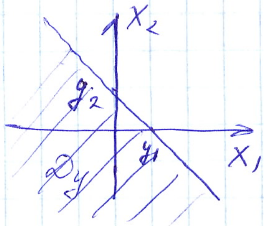
Док-во:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} \underbrace{f(x_1,x_2)}_{\text{пл-ть распр. в-ра } (X_1,X_2)} dx_1\,dx_2 = \{X_1, X_2 \text{ - независ} \Rightarrow f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\} =$$

$$= \iint\limits_{D(y)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1\,dx_2 \ominus$$

$$D(y) = \{(x_1,x_2) : \varphi(x_1,x_2) < y\} = \{\varphi(x_1,x_2) = x_1+x_2\} = \{(x_1,x_2) : x_1+x_2 < y\}$$

$$\ominus \{\text{дв инт} \to \text{повт. инт}\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 =$$



$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x_2)\,dx_2 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f_{X_1}(x_1)\,dx_1}_{\text{ф-ция } F_{X_1}(y-x_2)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x_2) F_{X_1}(y-x_2)\,dx$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}[F_Y(y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x_2) \cdot \frac{d}{dy}[F_{X_1}(y-x_2)]\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y-x_2)\, f_{X_2}(x_2)$$

Замеч Сверткой 2х ф-ций f_1 и f_2 наз ф-ция

$$(f_1 * f_2)(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-x)\, f_2(x)\,dx$$

1) Можно показ. что свертка коммут т.е.

$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

2) С учетом обозн ф-ла м.б. записана как:

$f_Y(y) = (f_{X_1} * f_{X_2})(y)$

Числовые характеристики случ. величин

① Математическое ожидание

I. Случай дискретной случайной величины

Пусть X – дискр. случ. величина, приним. знач. x_i с вер. p_i, $i \in I$.

Опр мат. ожиданием (средним значением) случ. величины X наз. число $M[X] = \sum\limits_{i \in I} x_i p_i$

Замеч 1) если I – счетное мн-во, то в опред. подразум., что cooтв. ряд сходится абсолютно.

В противном случае говорят, что $\nexists\ M[X]$

2) Механич. интерпретация

Будем интерпр-ть з-н распр. сл. вел X как систему мат. точек на прямой, где x_i – координата i-ой точки, p_i – масса i-й точки

Координата центра масс такой системы

$$x_{ц.м} = \left\{ \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \right\} = \frac{1}{\underbrace{\sum p_i}_{=1}} \sum x_i p_i = MX$$

Т.о. мат ожид. сл. вел характ. положение центра масс вероятн. массы.

Пр Пусть з-н распр-я сл. вел X имеет вид.

X	0	1
P	q	p

где $q = 1 - p$

{X – кол-во успехов в одном исп с вер-ю усп p}

$MX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

II. Случай непр. сл. величины

Пусть X – непр сл. вел с пл-тью распр-я $f(x)$

Если интерпрет f как пл-ть беск стержня масса кот. равна 1, то коорд. ц. м. стержня

$$x_{ц.м} = \frac{1}{\underset{1}{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Поэтому

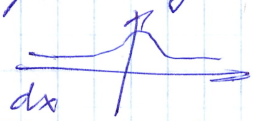
Опр Мат. ожиданием (ср. знач) непр случ. вел X наз-ся число

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

Замеч в опр. подразум, что несобств. инт. сх-ся абсолютно. Если это не так, то говорят, что $\nexists MX$

Пр Рассм сл. вел X, распр по з-ну Коши

$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in R$



$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ при $x\to+\infty$ $\frac{1}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^2}$ =>

$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ – расход => $\nexists M[X]$

Св-ва мат. ожидания (произв. случ. вел)

1° Если $P\{X=x_0\}=1$, т.е. ряд распр с.в X имеет вид

X	x_0
p	1

, то $MX=x_0$

2° $M[aX+b]=aM[X]+b$, где $a,b=\text{const}$

3° $M[X_1+X_2]=M[X_1]+M[X_2]$

4° Если X_1, X_2 – независ, то $M[X_1X_2]=(MX_1)(MX_2)$

Замеч 1) $M[\varphi(x)]=\sum\varphi(x_i)p_i$, если X - дискр. сл. вел.

$M[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$, если X - непр сл. вел.

2) $M[\varphi(X_1,X_2)]=\sum_i\sum_j\varphi(x_{1i},x_{2j})p_{ij}$, если (X_1,X_2) - дискр вектор x_{1i} - зн. сл. в X_1, x_{2j} - // X_2

Док во:

1° $M[X]=\sum_i x_i p_i=x_0\cdot 1=x_0$

2° $M[aX+b]=\{\varphi(x)=aX+b\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)f(x)dx=$ для непр сл. вел

$=a\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}_{MX}+b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}_{1\text{ - усл. норм}}=aM[X]+b$

3° $M[X_1+X_2]=\left\{\begin{matrix}\varphi(X_1,X_2)=\\=X_1+X_2\end{matrix}\right\}=$ // для дискр сл. вел

$=\sum_i\sum_j(x_{1i}+x_{2j})p_{ij}=\sum_i\sum_j(\underbrace{x_{1i}}_{\text{независ от } j}p_{ij})+\sum_i\sum_j \underbrace{x_{2j}}_{\text{не завис от } i}p_{ij}=$

$=\sum_i x_{1i}\underbrace{\sum_j p_{ij}}_{P\{X_1=x_{1i}\}}+\sum_j x_{2j}\underbrace{\sum_i p_{ij}}_{P\{X_2=x_{2j}\}}=MX_1+MX_2$

4° $M[X_1 X_2] = \{\varphi(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2\} =$ // для непр. случ. велич
$= \iint_{R^2} x_1 x_2 \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \{f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\} =$
$= \iint_{R^2} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 dx_1 = \int x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$
$= (MX_1)(MX_2)$

док-ть 2, 4 - для дискр, 3 - для непр сл. вел

Пусть $\vec{X} = (X_1, .., X_n)$ - n-мерный сл. в-р

Опр Вектором средних (вектором мат ожиданий) наз $M\vec{X} = (MX_1, ..., MX_n)$

② Дисперсия

19.12.17.

Опр Дисперсией сл. вел X наз число
$D[X] = M[(X-m)^2]$, где $m = M[X]$.

Замеч 1) Непосредственно из опр-я следуют ф-лы для вычисления дисперсии:
$D[X] = \sum (x_i - m)^2 p_i$, если X - дискр. сл. вел.
$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx$, если X - непр. сл. вел.
$f(x)$ - пл-ть распр-я X.

2) Механич. смысл дисперсии
Дисперсия явл. моментом инерции вероятностной массы относ. мат. ожидания. Другими словами, дисперсия хар-т разброс вероятностной массы относ. т. $m = M[X]$

$DX < DY$

Пр Пусть $X = \begin{cases} 1, & \text{если в (одном) испыт произошел успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\left\{\begin{array}{l} p = P\{\text{"успех"}\} \\ q = 1 - p \end{array}\right\}$

X	0	1
p	q	p

Вычислим MX, DX.

$m = MX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$$D = \sum (x_i - m)^2 p_i = (0-p)^2 \cdot q + \underbrace{(1-p)}_{q}{}^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p =$$

$$= pq \underbrace{(p+q)}_{1} = pq$$

Свойства дисперсии

1° Для любой случ. вел X $DX \geq 0$

2° Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$

3° $D[aX + b] = a^2 DX$, $a \neq 0$

4° $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$

5° Если X_1, X_2 - независ, то $D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$

Док-во:

1° $DX = M[Y]$, где $Y = (X - MX)^2 \geq 0 \Rightarrow MY \geq 0$

2°

X	x_0
p	1

$MX = x_0$

$$DX = \sum_i (x - m)^2 p_i = (x_0 - x_0)^2 \cdot 1 = 0$$

3° $$D[aX + b] = M[(\underbrace{aX + b}) - \underbrace{M[aX + b]}_{a(MX)+b})^2] =$$

$$= M[(aX + \cancel{b} - a(MX) - \cancel{b})^2] = M[a^2 (X - MX)^2] =$$

$$= a^2 \underbrace{M[(X - MX)^2]}_{DX} = a^2 DX$$

4° $DX = M[(X-m)^2] = \{m = MX\} = M[X^2 - 2mX + m^2] =$
$= M[X^2] - 2m\underbrace{M[X]}_{=m} + m^2 = M[X^2] - m^2$

5° Обозначим: $m_1 = MX_1$, $m_2 = MX_2$.

$D[X_1 + X_2] = M[(X_1 + X_2 - \underbrace{M[X_1 + X_2]}_{=m_1+m_2})^2] =$

$= M[\{(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2)\}^2] =$

$= M[(X_1 - m_1)^2 + (X_2 - m_2)^2 + 2(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] =$

$= \underbrace{M[(X_1 - m_1)^2]}_{=A} + \underbrace{M[(X_2 - m_2)^2]}_{=B} + \underbrace{2M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]}_{=C} = \left\{ \begin{array}{l} A = DX_1, \; B = DX_2 \\ C = M[X_1X_2 - m_1X_2 - m_2X_1 + m_1m_2] = \\ \quad = \overbrace{M[X_1X_2]}^{m_1m_2 \text{ т.к. } X_1, X_2 \text{ - независ.}} - m_1\underbrace{MX_2}_{=m_2} - m_2\underbrace{MX_1}_{=m_1} + m_1m_2 = \\ \quad = m_1m_2 - m_1m_2 = 0 \end{array} \right\} =$

$= DX_1 + DX_2$

Замеч. 1) Можно док-ть, что справедливо св-во, обратное св-ву 2°: Если $DX = 0$, то X принимает единств. зн-е с вер-ю 1.

2) Св-во 5° справедливо для любого числа попарно независимых сл. вел $X_1, \ldots, X_n$: $D[X_1 + \ldots + X_n] = DX_1 + \ldots + DX_n$

3) ~~Диспер~~ DX имеет размерность, равную квадрату размерности сл. вел X. Это не всегда удобно, поэтому часто рассматривают след. хар-ку.

Опр Среднеквадратичным отклонением сл. вел X наз. число

$$\sigma_X = \sqrt{DX}$$

③ Вычисление значений математического ожидания и дисперсии некот. случ. вел.

I. Биномиальная случ. вел.: $X \sim B(n, p)$

X - число успехов в серии из n испыт. по сх. Бернулли с вер. успеха p.

Введем в рассм-е сл. вел. X_i, $i = \overline{1,n}$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. произошел успех} \\ 0, & \text{если} \quad - \quad " \quad - \quad " \quad \text{неудача} \end{cases}$$

Тогда 1) $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

2) X_i, $i = \overline{1,n}$ - независ., т.к. отд. испыт-я в сх. Бернулли независ.

3) $MX_i = p$, $DX_i = pq$, $i = \overline{1,n}$

(см. пример выше)

Т.о. $MX = M\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} MX_i = np$

$DX = D\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \{X_i \text{ - независ}\} = \sum\limits_{i=1}^{n} DX_i = npq.$

$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}$

II. Пуассоновская случ. величина: $X \sim \Pi(\lambda)$

$$P = \{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\frac{i}{i!}}_{= \frac{1}{(i-1)!}} \cdot \lambda^i =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \left\{ j = i-1;\ \begin{matrix} i = 1 \Rightarrow j = 0 \\ i = \infty \Rightarrow j = \infty \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{= e^{\lambda} \text{ (ряд Маклорена)}} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

Аналогично можно пок-ть, что

$DX = \lambda$

III Случ. величина X, имеющая геом распр-е

$$P\{X=k\}=pq^k,\quad k=0,1,2,\dots$$

$$MX=\sum_i x_i p_i=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot pq^i = p\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot q^i = pq\cdot\sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1}=$$

$$=pq(1+2\cdot q^1+3q^2+\dots)=pq(\underbrace{1+q+q^2+\dots}_{\frac{1}{1-q}})'_q=$$

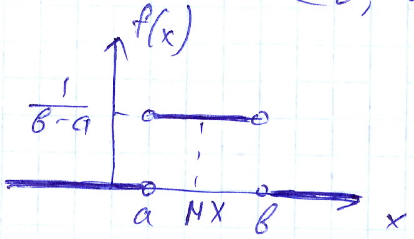
$$=pq\left(\frac{1}{1-q}\right)'_q = pq\frac{1}{\underbrace{(1-q)^2}_{p}}=\frac{q}{p}$$

Аналогично:

$$DX=\frac{q}{p^2}$$

IV Равномерное распределение: $X\sim R(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$



$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2(b-a)}x^2\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]=$$

$$=\frac{2}{3\cdot 8(b-a)}\left[(b-a)^3\right]=\frac{1}{12(b-a)}(b-a)^3=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

V Экспоненциальное распр-е

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$MX=\frac{1}{\lambda}$, $DX=\frac{1}{\lambda^2}$ (док самост.)

VI. Нормальная случ. величина $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

$MX = m$

$DX = \sigma^2$ (док. самост.)

④. Моменты

Опр Моментом k-го порядка случ. вел X наз-ся число

$$m_k = M[X^k].$$

Опр Центральным моментом k-го порядка сл. вел. X наз. число

$$\mathring{m}_k = M[(X-m)^k], \text{ где } m = MX$$

Замеч 1) ф-лы для выч-я

$$\left.\begin{aligned} m_k &= \sum_i x_i^k p_i, \\ \mathring{m}_k &= \sum_i (x_i - m)^k p_i \end{aligned}\right\} \text{ если } X \text{ - дискр. сл. в.}$$

$$\left.\begin{aligned} m_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \\ \mathring{m}_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \text{ если } X \text{ - непр. сл. вел.}$$

Замеч 2) $m_1 = MX$

$\mathring{m}_1 = 0$

$\mathring{m}_2 = DX$

⑤ Квантиль

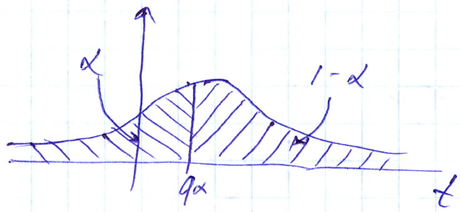
Пусть X - сл. вел.

Опр Квантилью уровня α, $\alpha \in (0,1)$, случ. вел X наз. число q_α такое, что $P\{X < q_\alpha\} \le \alpha$,

$P\{X > q_\alpha\} \le 1 - \alpha$

Замеч 1) грубо говоря, что q_α — такая точка на числовой прямой, слева от которой располагается α кг вероятностной массы

2) Если X — непр. сл. величина, то q_α явл. решением ~~ур~~ ур-я $F(t)=\alpha$ (т.е. реш-е $t=q_\alpha$)



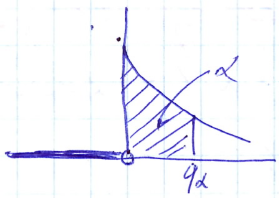
Опр Квантиль ур-ня $\frac{1}{2}$ наз медианой случ. вел.

Пр $X \sim Exp(\lambda)$

Найти квантиль ур-ня α и медиану.

Реш-е.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$F(q_\alpha)=\alpha \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{q_\alpha} f(t)\,dt=\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{т.к. } \alpha>0 \\ \text{то } q_\alpha>0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{q_\alpha} f(t)\,dt=\alpha \Leftrightarrow \lambda\int_0^{q_\alpha} e^{-\lambda t}\,dt=\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t}\Big|_{t=q_\alpha}^{t=0}=\alpha \Leftrightarrow 1-e^{-\lambda q_\alpha}=\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda q_\alpha}=1-\alpha \Leftrightarrow -\lambda q_\alpha=\ln(1-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q_\alpha=-\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}},\ \alpha\in(0;1)$$

Медиана $\alpha=\frac{1}{2}$ $\qquad -\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

$q_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{\lambda}$ ил

⑥ Ковариация

До сих пор мы рассматривали числ. хар-ки одномерных случ. величин. Ковариация явл характеристикой случ в-ра

Пусть (X, Y) — двумерный сл. в-р

Опр Ковариацией случ. величин X и Y наз. число $cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)]$, где $m_1 = MX$, $m_2 = MY$. чп

Замеч 1) Если (X,Y) – дискр. сл. в-р, то
$$cov(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - m_1)(y_j - m_2)p_{ij}$$
2) Если (X,Y) – непр сл. в.р, то
$$cov(X,Y) = \iint_{R^2} (x-m_1)(y-m_2) f(x,y)dxdy,$$
где $f(x,y)$ - пл-ть распр-я в-ра (X,Y).

Св-ва ковариации.

1° $D(X+Y) = DX + DY + 2cov(X,Y)$;

2° $cov(X,X) = DX$.

3° Если X, Y независ, то $cov(X,Y) = 0$

4° $cov(a_1X+a_2, b_1Y+b_2) = a_1b_1 cov(X,Y)$

5° $|cov(X,Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}$, причем
$|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \iff$ сл. вел X и Y связаны линейной зависимостью, т.е для некот $a, b = const$ $Y = aX + b$

6° $cov(X,Y) = M[X \cdot Y] - (MX)(MY)$

Док во:

1° $D[X+Y] = M[\{(X+Y) - M[M+Y]\}^2) = \left\{ \begin{matrix} m_1 = MX \\ m_2 = MY \end{matrix} \right\} =$
$= M[((X-m_1)+(Y-m_2))^2] = M[(X-m_1)^2 + (Y-m_2)^2 + 2(X-m_1)(Y-m_2)] = M[(X-m_1)^2] + M[(Y-m_2)^2] + 2M[(X-m_1)(Y-m_2)] =$
$= DX + DY - 2cov(X,Y)$.

2° $cov(X,X) = M[(X-m_1)(X-m_1)] = M[(X-m_1)^2] = DX$

3° $cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)] = M[XY - m_1Y - m_2X + m_1m_2] = M[XY] - m_1MY - m_2MX + m_1m_2 =$

$= \{X, Y - \text{независ} \Rightarrow M[XY] = m_1 m_2\} = 0$

4° $\operatorname{cov}(a_1 X + a_2, b_1 Y + b_2) = M[(a_1 X + a_2 - \underbrace{M[a_1 X + a_2]}_{= a_1 m_1 + a_2})$
$(b_1 Y + b_2 - \underbrace{M[b_1 Y + b_2]}_{b_1 m_2 + b_2})] =$
$= M[(a_1(X - m_1))(b_1(Y - m_2))] = M[a_1 b_1 (X - m_1)(Y - m_2)] =$
$= a_1 b_1 M[(X - m_1)(Y - m_2)] = a_1 b_1 \operatorname{cov}(X, Y)$

6° $\operatorname{cov}(X, Y) = M[(X - m_1)(Y - m_2)] = M[XY - m_1 Y -$
$- m_2 X + m_1 m_2] = M[X_1 X_2] - m_1 m_2 - \cancel{m_2 m_1} + \cancel{m_1 m_2} =$
$= M[XY] - (MX)(MY)$