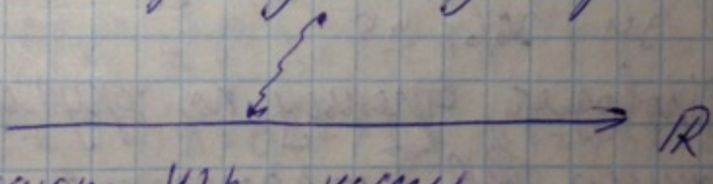
2. Случайные величины

① <u>Опр.</u> (нестрогое) Пусть некоторому элем. исходу случ. эксперимента поставлено в соответствие число X. Тогда X - случ. величина

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ - вер. пространство

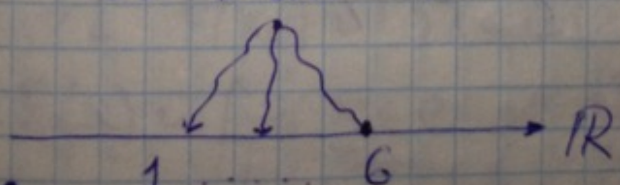
<u>Опр.</u> Вод случ. величиной наз ф-цию $X: \Omega \to \mathbb{R}$ такую, что $\forall x \in \mathbb{R}$ мн-во $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{B}$ (т.е. это мн-во явл. событием).

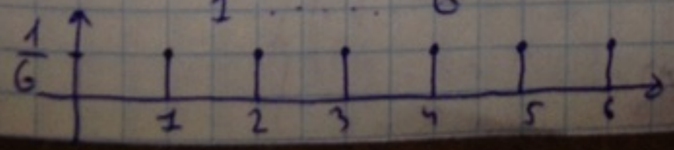
<u>Замеч.</u> Упрощенно любую случ. величину можно ассоциировать со след. экспериментом: на прямую случ. бросают точку.



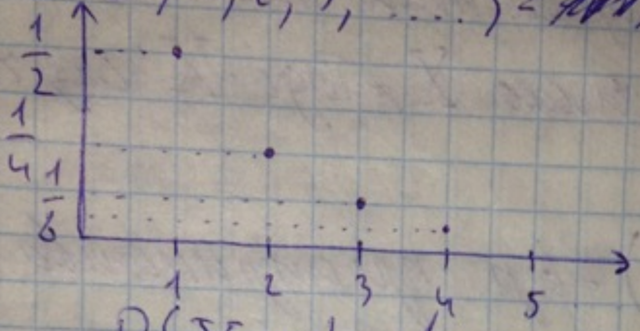
<u>Пр.</u> 1) Бросают игр. кость

X - число вып. очков $X \in \{1, \ldots, 6\}$





2) Бросают монету до 1го появ. герба
X - число бросков до 1го появл.
$X \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$



$P\{X=1\} = \frac{1}{2}$

$P\{X=2\} = \frac{1}{4}$

3) У случ. выб. чел. в больнице мер. температуру X тела.

$X \in [34, 45]$

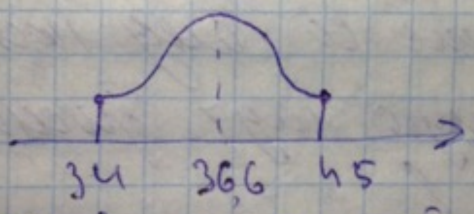


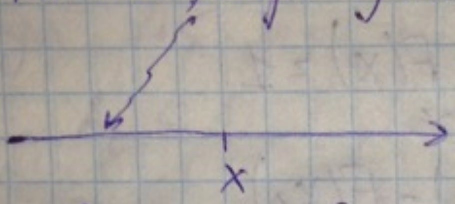
Диаграмма частот будет иметь примерно такой вид

4) Проводят стрельбу по круглой мишени радиуса ~~R~~ R. X - расстояние от т-ки попадания пули до центра мишени.

$X \in [0; R]$

Пусть X - некот. случ. величина

Опр. Ф-цией распред. (вероятностей) случ. величины X наз. отображение $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, опр. условием $F(x) = P\{X < x\}$



Пр. 2 раза бросают сим. монету

X - число появ. герба

X_i	0	1	2
$P\{X = x_i\}$	$1/4$	$\frac{1}{2}$	$1/4$

Построим график ф-ции распред. сл. в. X

$x_1 < 0$ $F(0) = P\{X < 0\} = 0$.

$x_2 \in (0, 1)$ $F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$.

$F(1) = P\{X < 1\} = \frac{1}{4}$.

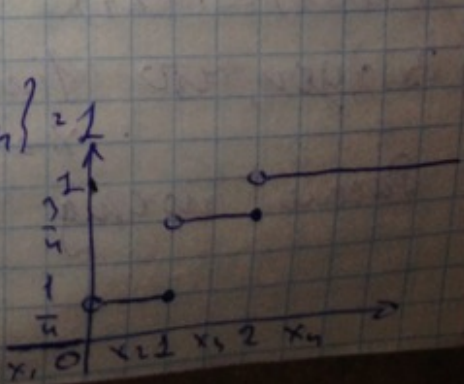
$x_3 \in (1, 2)$ $F(x_3) = P\{X < x_3\} = P\{\{X = 0\} + \{X = 1\}\} =$

$= P\{X < x_3\} = P\{\{X = 0\} + \{X = 1\}\} = P\{X = 0\} +$

$+ P\{X = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

$x_4 > 2$ $P(x_4) = P\{X < x_4\} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1/4, & 0 < x \le 1 \\ 3/4, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



Св-ва ф-ции распред.

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, т.е. $F(x)$ - неуб. ф-ция.

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 1$

4. $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, т.е. $F(x)$ – непрерывна слева в каждой т-ке $x \in R$.

Док-во:

1. $F(x) = P\{X < x\} \Rightarrow 0 \le F(x) \le 1$.

2. $A_1 = \{X < x_1\}$

$A_2 = \{X < x_2\}$

Т.к. $x_1 \le x_2$, то $A_1 \subseteq A_2$.

По св-ву вер-ти $P(A_1) \le P(A_2)$;

$F(x_1) \le F(x_2)$.

3. а) док, что $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 1$

Рассм. послед. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ таких, что

1) $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots$

2) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Рассм. посл-ти событий: $A_n = \{X < x_n\}, n \ge 1$

Тогда $A_n, n=1,2,\ldots,n,\ldots$ - возраст. послед.,

т.к. $A_i \subseteq A_{i+1}, i=1,2,\ldots$

В соотв. с аксиомой непрерывности

$$\lim_{x\to\infty} P\{A_n\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = P\{\underbrace{X<+\infty}_{\text{достовер. соб.}}\} = 1$$

Т.к. $P\{A_n\} = P\{X<x_n\} = F(x_n)$

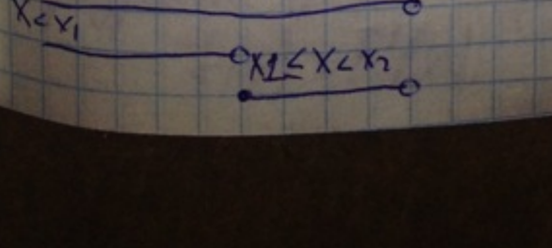
Т.о. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x_n) = 1$

Т.к. x_n - произв. послед., то в соотв. с опред. предела ф-ции по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

б) Рав-во $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ доказ. аналогич.

4. Рассм. 3 события: $\{X<x_2\} = \overbrace{\{X<x_1\} + \{x_1 \le X < x_2\}}^{\text{несовмест.}}$



$$P\{X<x_2\} = P\{X<x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\}$$

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

5. Рассм. послед. $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая

1) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$ (неубывающ.)

2) $x_n \to x_0$ (слева стрем. к x_0).

Тогда $A_n = \{X<x_n\}$ - неуб. посл-ть событий

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{x\to\infty} P\{A_n\} = \left\{\begin{matrix}\text{акс.}\\ \text{непр.}\end{matrix}\right\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} =$$

$$= P\{X<x_0\} = F(x_0)$$

с учет. опред. предела ф-ции по Гейне $\lim_{n\to x_0^-} F(x) = F(x_0)$

Замеч. Можно показать, что любая ф-ция $F(x)$, $x\in R$, облад. св-вами 2,5 есть ф-цией распред. некот. случ. величины.

② Опр. Случ. величина X наз. дискретной, если мн-во её знач. конечно или счётно.

Записать распр. дискретной сл. в. можно в виде таблицы

(*)

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n	...

$\sum_i p_i = 1$

Опр. Таблица (*) наз. рядом распр. случ. вел. X

Опр. Сл. величина X наз. непрерывной, если $\exists$ ф-ция $f(x)$ такая, что ф-ция распред. случ. вел. X м.б. представлена в виде: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

При этом ф-ция $f(x)$ наз. плотностью распред. вероятностей сл. в. X

Замеч. Для всех встречающихся на практике непрерыв. сл. вел., пл-ть распред. явл. кусочно-непрерыв. ф-цией. Это означ., что $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ явл. непрерыв. ф-цией. Тогда всюду, кроме точек разрыва ф-ции f справедливо рав-во

$$f(x)=F'(x).$$

Св-ва ф-ции пл-ти распред вер.

1. $f(x) \geq 0, \ x \in R$.

2. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

4. Если x_0 — т-ка непрерывности $f(x)$, то при $P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5. Если X - непр. сл вел., то для любого непрерыв. наперёд заданного x_0

$P\{X = x_0\} = 0$.

Док-во:

1. $f(x) = F'(x)$; т.к. $F(x)$ - неуб. ф-ция, то $F'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$.

2. По св-ву ф. распределение

$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \{$ т.к. $F(x)$ - первообр. для $f(x)$ $\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

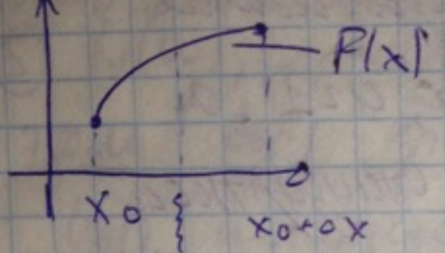
ф-ла Ньютона - Лейбница.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \{$ св-во 2 $\} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

4. $P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} = F(x_2) - F(x_1) =$

$= \left\{ \begin{matrix} \text{т.к. } f \text{ непр.} \\ \text{то восп. теор. Лагранжа} \end{matrix} \right\} = f(\xi)\,\Delta x$, где

$\xi \in (x_0, x_0+\Delta x)$



Т.к. Δx мало, а ф-ция f непрерывна, то $f(\xi) \approx f(x_0)$

$P\{x_0 \le X < x_0+\Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x.$

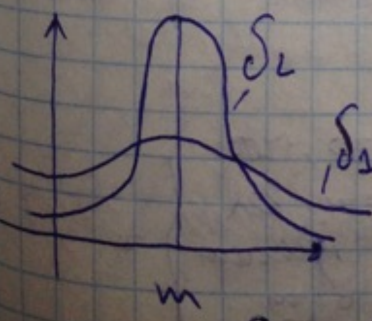
5. $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \le X < x_0+\Delta x\} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x = \{f(x) \text{ непрерыв. и ограничен.}\} =$

$= [\text{огр}, \text{б.м.}] = 0.$

③ __Опр.__ Непр. сл. вел. X имеет норм. распред. или ~~на~~ распределение Гаусса с пар-рами m и δ^2, если её плотность распр-е имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\delta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}, \; x \in R$$



__Замеч__ Пар-р m характеризует полож. центра симметрии графика $f(x)$, пар-р δ отвеч. за степень разброса знач.

сл. вел. относ. сред. знач. Чем больше σ сигма, тем больше разброс ($\sigma_1 > \sigma_2$)

Нормальный з-н называется стандартным, если $m = 0$, $\sigma = 1$, а сл. вел. $X \sim N(0,1)$ наз. стандартной норм величиной.

Для стандартной норм. сл вел. вер-ть попад в промежуток $[a, b)$:

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

из табл.

<u>Замеч</u> Для норм. случ. вел., не явл. стандартной:

$$P\{a \le X < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\delta} \\ dt = \frac{1}{\delta} dx \\ x = a \Rightarrow t = \frac{a-m}{\delta} \\ x = b \Rightarrow t = \frac{b-m}{\delta} \end{array} \right\} = \frac{1 \cdot \delta}{\sqrt{2\pi} \cdot \delta} \int_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{вер-ть того, что} \\ \text{станд. норм. вел.} \\ \text{попала в промеж} \\ \left[\frac{a-m}{\delta}; \frac{b-m}{\delta}\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

④ Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ - вероятн. пр-во

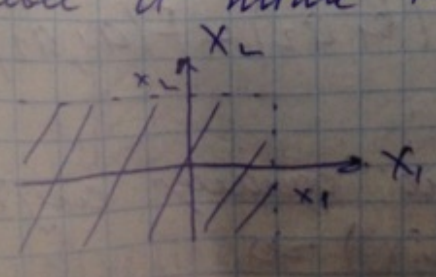
⑤ $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ - сл. вел., заданные на этом вер. пр-ве

Опр. n-мерным случ. в-ром наз. кортеж $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$

Опр. Ф-цией распределения n-мерного сл. в-ра $(X_1, \dots, X_n)$ наз. отображ. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которое опред. усл. $F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$

Замеч. 1) в опр. соб. $\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$ означ. произв. $\{X_1 < x_1\} \dots \{X_n < x_n\}$

2) в случ. $n=2$ велич. $F(x_1, x_2)$ равна вер-ти того, что брош. т-ка упадёт левее и ниже т-ки (x_1, x_2).



Св-ва двумерной ф-ции распред.

1. $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$.

2. при фикс. x_2 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_1, при фикс. x_1 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_2.

3. $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

$\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5. $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

$\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$

6. $P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} =$
$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

<u>Док-во:</u>

1., 2. доказ. аналогично одномер. случ.

3. док-м а) $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

Рассм. соб. $\{X_1<x_1\}\cdot\underbrace{\{X_2<-\infty\}}_{\text{невозм.}} \Rightarrow \{X_1<x_1\}\cdot$

$\cdot\{X_2<-\infty\}$ - невозможни $\Rightarrow F(x_1,-\infty)=$

$=P\{X_1<x_1, X_2<-\infty\}=0$.

б) $\lim\limits_{x_1\to-\infty}F(x_1,x_2)=0$ доказ аналогично.

4. Рассм. соб. $\underbrace{\{X_1<+\infty\}}_{\text{достовер.}}\cdot\underbrace{\{X_2<+\infty\}}_{\text{і достовер.}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\{X_1<+\infty\}\{X_2<+\infty\}}_{\text{достовер.}} \Rightarrow F(+\infty,+\infty)=P\{X_1<+\infty,$

$X_2<+\infty\}=1$.

5. а) док, что $\lim\limits_{x_2\to+\infty}F(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)$

соб. $\{X_2<+\infty\}$ явл. достоверным $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{X_1<x_1\}\cdot\{X_2<+\infty\}=\{X_1<x_1\}$

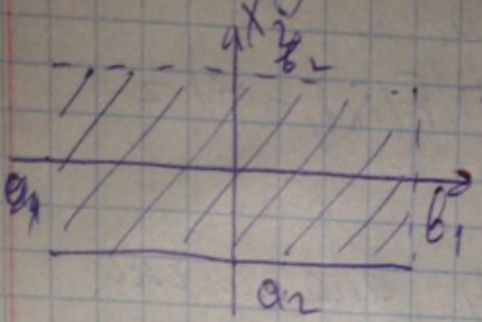
Тогда $F(x_1,+\infty)=P\{X_1<x_1\}=F_{X_1}(x_1)$.

б) $\lim\limits_{x_1\to+\infty}F(x_1,x_2)=F_{X_2}(x_2)$ док. аналогич.

6.

$P=?$

а) найдём вер-ть того, что сл. в-р попадет в полосу $\{X_1 < x_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\}$



$F(x_1, b_2) = P\{X_1 < x_1,\ X_2 < b_2\}$

$F(x_1, a_2) = P\{X_1 < x_1,\ X_2 < a_2\}$

$P\{X_1 < x_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)$

б)

$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2)$

(по получ. в а) ф-ле)

$F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)$

Тогда

$$P\{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} =$$

$$= P\{(X,Y) \in\ \} - P\{(X,Y) \in\ \} =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2),$$

7. (св-во). При фикс. x_2 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция от x_1 явл. непрерыв. слева во всех т-ках.

При фикс. x_1 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция от x_2 явл. непрерыв слева во всех т-ках.

<u>Док-во</u>: аналогич. одномер. случ.

(6) <u>Опр</u>. Случ. в-р $(x_1, \ldots, x_n)$ наз непрерыв, если $\exists$ ф-ция $F(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что
$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n$$
При этом 1) ф-ция $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. (совместной) плотностью распределения вер-тей случ. в-ра $(x_1, \ldots, x_n)$

2) предполаг., что указ. несобств. интеграл сход. для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$

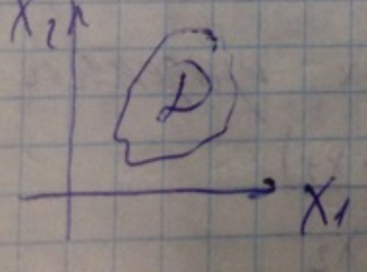
<u>Замеч</u>. Для $n=2$ с исп. th о произв. инт-ла с перем. верх. пределом получ.
$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}$$

Для прерыв. н:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

Св-ва пл-ти распределения вер. ($n=2$)

1. $f(x_1, x_2) \geq 0$.
2. $P\{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$
3. $\iint_{R^2} f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 = 1$.
4. $P\{a_1 \leq X_1 < a_1 + \Delta x_1, a_2 \leq X_2 < a_2 + \Delta x_2\} \approx f(a_1, a_2) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$; где (a_1, a_2) - т-ка непр. ф-ции $f(x_1, x_2)$
5. Для любого наперёд заданного знач. (x_1°, x_2°) $P\{(X_1, X_2) = (x_1^\circ, x_2^\circ)\} = 0$.
6. $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$



7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 = f_{X_1}(x_1)$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 = f_{X_2}(x_2)$

<u>Док-во:</u>

1.–5. аналог. одномер. случ.

6. явл. обобщ. св-ва 2.

7. а) покажем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 = f_{X_1}(x_1)$

$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty) \underset{\text{опр. непр. сл. в-ра}}{=} \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\,dt_2$

Продифф. обе части по x_1 $f_{X_1}(x_1) =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{по теор. о} \\ \text{преобр. инт.} \\ \text{с перем. в. пр}\end{matrix}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)\,dt_2$

б) доказ. аналогично.

(73) <u>Опр.</u> Сл. вел. X и Y наз. независ., если $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, где F – совм. ф-ция распр. в-ра (X, Y), F_X, F_Y – ~~монодерн~~ маргин. ф-ции распред. сл. в-н X и Y.

Св-ва независ. сл. вел.

1. Сл. вел. X и Y независ. $\Leftrightarrow \forall x \forall y \in \mathbb{R}$ соб. $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$ независ.

2. Сл. вел. X и Y независ $\Leftrightarrow \forall \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ соб. $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ.

3. Сл. вел. X и Y независ $\Leftrightarrow \forall \forall M_1, M_2$ соб $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независ, где M_1, M_2 - промежутки или объедин. промеж. в $\mathbb{R}$

4. Если X, Y - дискр. сл. вел., то X, Y независ $\Leftrightarrow P\{(X, Y) = (x_i; y_j)\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$ для всех i, j.

5. Если X, Y - непр. сл. вел., то X, Y независ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, где f - совм. пл-ть распред в-ра (X, Y), f_X, f_Y - ~~[illegible]~~ марг. пл-ти распред вел X и Y.

Док-во:

1. Непосредств. из опр-я

2. а) достаточн необход (!!)

Пусть X, Y - независ $\Rightarrow F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, тогда по св-ву двумер. ф-ции распред

$P\{x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) -$

$-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)=F_X(x_2)\cdot F_Y(y_2)-F_X(x_1)\cdot$
$\cdot F_Y(y_2)-F_X(x_2)\cdot F_Y(y_1)+F_X(x_1)\cdot F_Y(y_1)=$
$=[F_X(x_2)-F_X(x_1)]\cdot[F_Y(y_2)-F_Y(y_1)]=$
$=P\{x_1\le X<x_2\}\cdot P\{y_1\le Y<y_2\}\Rightarrow$ соб. незав.

св-во одномер. ф. ист распр. $/\{x_1\le X<x_2\}$ и $\{y_1\le Y<y_2\})$

б) доказат. достат. (!)

Пусть для любых x_1,x_2,y_1,y_2 соб. $\{x_1\le X<x_2\}$ и $\{y_1\le Y<y_2\}$ незав.

$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}=P\{-\infty\le X<x,$
$-\infty\le Y<y\}=\left\{\begin{matrix}\text{т.к. соб}\\ \text{незав.}\end{matrix}\right\}=P\{-\infty\le X<x\}\cdot P\{-\infty\le Y<y\}=$
$=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

3. см. обобщ. св-в 1 и 2.

4. а) доказат. достаточность (!)

$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}=\left\{\begin{matrix}\text{т.к. } (X,Y)\text{-}\\ \text{дискр. сл. в}\end{matrix}\right\}=$
$=P\{X\in\{x_1,\dots,x_k\},Y\in\{y_1,\dots,y_l\}\}=$
$=P\{(X,Y)\in\{x_i,y_j\}:i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,l}\}=$
$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=\{X,Y\text{ - незав.}\}=$
$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}$ ~~$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)$~~ $P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=$

$= \sum_{i=1}^{k} P\{X = x_i\} \cdot \sum_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\} = P\{X \in \{x_1, \ldots, x_k\}\} \cdot$

$\cdot P\{Y \in \{y_1, \ldots, y_l\}\} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

б) докажем необх ⇓

Пусть X, Y - независ дискр сл вел ⇒

⇒ $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, тогда

Пусть X, Y - независ сл вел ⇒ $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) =$

$= P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\} = \{X, Y$ - дискр сл вел$\} = P\{X \in \{x_1, \ldots, x_k\}\} \cdot$

$\cdot P\{Y \in \{y_1, \ldots, y_l\}\} = \sum_{i=1}^{k} P\{X = x_i\} \cdot \sum_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\} =$

$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = \{$соб независ$\} =$

$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$

5. а) докажем необх. ⇓

Пусть X, Y независ., тогда $F(x, y) =$
$= F_X(x) \cdot F_Y(y)$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F_X(x) \cdot F_Y(y)] =$$

$= \left[\frac{d}{dx} F_X(x)\right] \cdot \left[\frac{d}{dy} F_Y(y)\right] = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

б) докажем достаточность (1)

Пусть $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Тогда $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt_1 \int_{-\infty}^{y} f(t_1,t_2)\,dt_2 =$

$= \int_{-\infty}^{x} dt_1 \int_{-\infty}^{y} f_X(t_1) \cdot f_Y(t_2)\,dt_2 = \int_{-\infty}^{x} f_X(t_1)\,dt_1 \cdot$

$\cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(t_2)\,dt_2 = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Rightarrow X, Y$ - независ.

Опр. Случ. величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном вер. пр-ве, наз. попарно-независимыми, если для всех $i \neq j$ X_i, X_j независ. случ. величины.

Опр. Случ. величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном вероятностном пр-ве, наз. независимыми в совокупности, если $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$, где F - совмест. ф-ция распред. сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$

$F_{X_i}(x_i)$ - марг. ф-ции распред. комп.

③. Случай дискрет. сл. в-ра

Пусть 1) (X,Y) – дискр. сл. в-р

2) $X \in \{x_1, \dots, x_n\}$

$Y \in \{y_1, \dots, y_m\}$

3) Обозн. $p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}$

		$Y = y_j$	
	...	...	...
$X = x_i$	...	p_{ij}	...
	...	...	...

Тогда если $Y = y_j$, то

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} =$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}}$$

Опр. Для дискр. двум. сл. в-ра (X,Y) условной в-тью, что сл. вел. X приняла зн-е x_i при условии, что сл. вел. Y приняла зн-е y_j, наз. число

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$$

Замеч. Аналогич. образом опр-ся услов. вер-ть того, что Y примет зн-е y_j при условии, что $X = x_i$

$$\tau_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}$$

Опр. Усл. пл-ть распределения случ. вел. X при условии, что случ. вел. Y приняла знач. y наз.

$$f_X(X|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Замеч. Условная пл-ть $f_Y(y|X=x)$ опр-ся аналогично

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Теор. Критерий независимости случ. велич. в терминах услов. распред.

Пусть (X,Y) - случ. в-р

Тогда 1) X,Y - независ. $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} F_X(x|Y=y) = F_X(x) \\ \forall y, \text{ для кот. опред. } F_X(x|Y=y) \\ F_Y(y|Y=y) = F_Y(y) \\ \forall x, \text{ для кот. опред. } F_Y(y|X=x) \end{array}\right.$

2) если (X,Y) – непр. сл. в-р, то

X, Y - независ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_X(x|Y=y) = f_X(x), \forall y, \text{ для кот. опред. } f_X(x|Y=y) \\ f_Y(y|X=x) = f_Y(y), \forall y, \text{ для кот. опред. } f_Y(y|X=x). \end{array} \right.$

3) если (X,Y) – дискр. сл. в-р, то

X, Y - независ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(X=x_i | Y=y_j) = P(X=x_i) \, \forall y_j \\ P(Y=y_j | X=x_i) = P(Y=y_j) \, \forall x_i \end{array} \right.$

9. Опр. Пусть 1) $X = X(\omega)$ - некот. случ. вел.

2) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – числ. ф-ция

Тогда $Y = \varphi(X)$ – случ. вел.

Теор. Пусть 1) X – непр. сл. вел.

2) $f_X(x)$ – плотн. распред. сл. в. X

3) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонная ф-ция, которая непр. дифференц.

4) ψ – ф-ция, обратная к φ

5) $Y = \varphi(X)$.

Тогда Y - непр сл. вел., пл-ть распред. кот.

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \, |\psi'(y)|$$

Док-во: По опр. ф-ции распред.

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{\varphi(X)<y\}$, т.к. φ - монотонна, то $\exists$ обрат. к ней ф-ция $\varphi^{-1} = \psi$. Соб. $\{\varphi(X)<y\}$ = соб. $\{X<\psi(y)\}$ (если φ - возр. ф-ция) $\{\varphi(X)<y\} = \{X>\psi(y)\}$ (если φ - убыв. ф-ция)

$\left\{ \text{Пример: } \begin{array}{ll} \varphi(X) = X^3 & X^3<y \Leftrightarrow X<\sqrt[3]{y} \\ \varphi(X) = -X^3 & -X^3<y \Leftrightarrow X>\sqrt[3]{y} \end{array} \right\}$

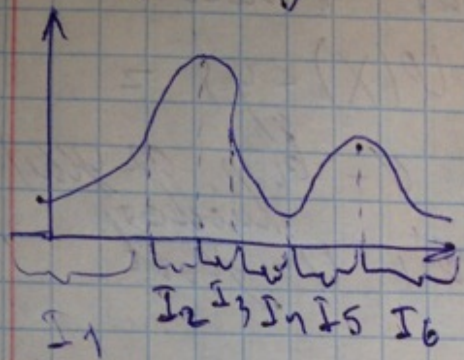
Тогда $F_Y(y) = P\{X<\psi(y)\} = F_X(\psi(y))$ (если φ - возраст.),

$F_Y(y) = P\{X>\psi(y)\} = 1-P\{X<\psi(y)\} = 1-F_X(\psi(y))$ (если φ - убыв)

Тогда $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_X(\psi(y))\right] = F_X(\psi(y))\cdot\psi'(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y)$ (если φ - возраст.), $f_Y(y) = \ldots = -f_X(\psi(y))\psi'(y)$ (если φ - убыв.). Т.к. $f_X \geq 0$, а знак $\psi'(y)$ зависит от возраст/убыв ф-ции φ, то обе ф-лы можно объедин.

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

<u>Теор</u> Пусть 1) X - непр. сл. вел.



2) $f_X(x)$ - пл-ть распр. X

3) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет n инт. монот. $I_1, \ldots, I_n$

4) φ непр. диф-ма

5) Для данного $y \in \mathbb{R}$ $x_1(y), \ldots, x_n(y)$ все реш. ур-е $\varphi(x) = y$ $(k \le n)$

6) $\psi_1(y), \ldots, \psi_k(y)$ - ф-ции, обр. к φ соотв. на тех инт. монотонности, к-рые принадл. $x_1, \ldots, x_k$

Тогда для данного знач. y:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|.$$

(10) Пусть 1) (X_1, X_2) – сл. в-р

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – ф-ция 2 перем.

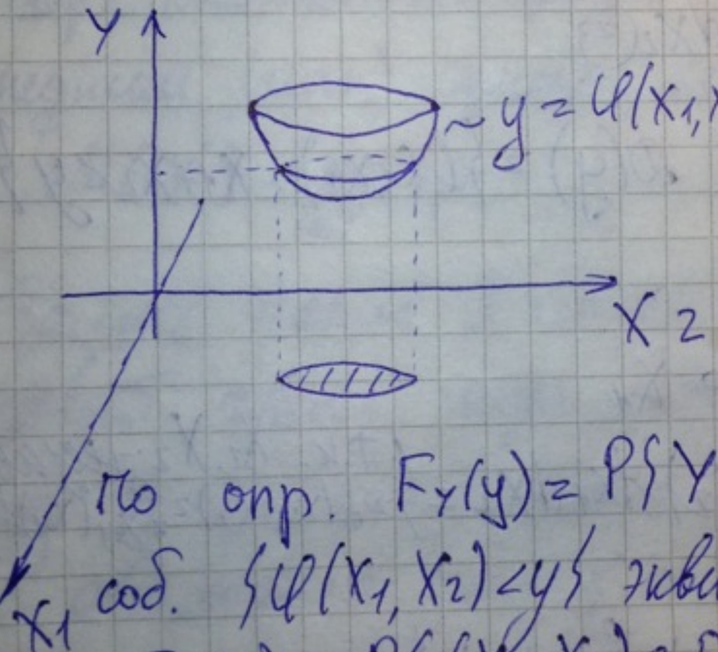
Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ – сл. вел. (скалярная)

Если (X_1, X_2) – непрерыв. сл. в-р, то

(*) $F_Y(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1,x_2)<y} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$, где $f(x_1, x_2)$ – пл-ть распр. (X_1, X_2).

$\{\varphi(x_1, x_2) < y\}$ обознач. обл-ть $\{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}$

Объяснение ф-лы (*)



По опр. $F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{\varphi(X_1, X_2) < y\}$

соб. $\{\varphi(X_1, X_2) < y\}$ эквив. соб. $\{(X_1, X_2) \in D(y)\}$

Т.О. $F_Y(y) = P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \left\{\begin{array}{l}\text{по св-ву}\\ \text{пл-ти сл. в-ра}\end{array}\right\} =$

$= \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\varphi(x_1,x_2)<y} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$

Теор. (о ф-ле свертки)

Пусть 1) (X_1, X_2) - непр. сл. в-р.

2) X_1, X_2 - независ.

3) $Y = X_1 + X_2$

Тогда $\boxed{f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x)\,dx}$ -

ф-ла свертки

Док-во:

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{X_1+X_2<y\} = P\{(X_1,X_2)\in D(y)\} =$

$= \iint f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \textcircled{=}$

$D(y) = \{(x_1,x_2) : x_1+x_2<y\}$

$\textcircled{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \left\{\text{т.к. } X_1, X_2 \text{ - незав.} \Rightarrow f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\right\}$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\,dx_2 =$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \boxed{\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\,dx} = F_{X_2}(y-x_1).$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(y-x_1)\,dx_1$

продифф. обе части ~~по~~ рав-ва

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

по y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

(11) Пусть X – дискр. сл. вел.

$$P\{X = x_i\} = p_i \quad , i \in I.$$

Опр. Математическим ожиданием (средним знач.) дискр. сл. в. X наз. число

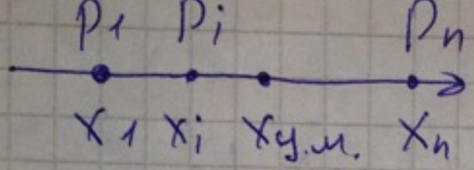
$$M[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$$

Замеч. 1) если I счётное мн-во, то в правой части опр. мат. ожид. стоит ряд. В опр. предполагается, что этот ряд сх. абсолютно, т.е. $\sum_{i \in I} |x_i| \cdot p_i < \infty$. В против. случае, говорят, что не $\exists$ мат. ож. сл. вел. X.

2) Мех. смысл мат. ожидания.

Дискр. сл. вел. X можно интерпрет.

как сист-му точек на прямой;
масса т-ки x_i равна p_i.



$$x_{ц.м.} = \frac{\sum_{i\in I} x_i p_i}{\cancelto{1}{\sum_{i\in I} p_i}} = MX.$$

Опр. Мат. ожид. ~~...~~ непр. сл. вел. X наз. число $M[X] = \int^{+\infty} x f(x)\,dx$.

Замеч. В опр. подразумевается, что инт. в пр. части сходится, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|\,dx < \infty$.
В против. случ. говорят, что не $\exists$ $M[X]$.

Св-ва мат. ожидания

1. Если сл. вел. X имеет такое распред.:

X	x_0
P	1

то $MX = x_0$

2. $M[aX+b] = aM[X]+b$, $a, b = const$
3. $M[X_1+X_2] = M[X_1] + M[X_2]$
4. Если X_1, X_2 - независ. сл. вел., то $M[X_1 X_2] = M[X_1]\cdot M[X_2]$.

Док-во:

1. $MX = 1\cdot x_0 = x_0$.

2. Док-м для непр. сл. вел.

$$M[aX+b] = \{\varphi(X) = aX+b\} = \int_{R} (ax+b) f(x)\,dx =$$

$$= a\underbrace{\int_{R} x f(x)\,dx}_{=MX} + b\underbrace{\int_{R} f(x)\,dx}_{=1} = aMX+b.$$

3. Док-м для дискр. сл. вел.

$$M[X_1+X_2] = \{\varphi(X_1,X_2) = X_1+X_2\} =$$

$$= \sum_i\sum_j (x_{1,i}+x_{2,j})\cdot p_{ij} = \sum_i\sum_j x_{1,i}\,p_{ij} +$$

$$+ \sum_i\sum_j x_{2,j}\,p_{ij} = \sum_i x_{1,i}\underbrace{\sum_j p_{ij}}_{=P\{X_1=x_{1,i}\}} + \sum_j x_{2,j}\underbrace{\sum_i p_{ij}}_{=P\{X_2=x_{2,j}\}} =$$

$$= \sum_i x_{1,i}\,P\{X_1=x_{1,i}\} + \sum_j x_{2,j}\,P\{X_2=x_{2,j}\} =$$

$$= MX_1+MX_2.$$

4. Для непр. сл. вел.

$$M[X_1\cdot X_2] = \{\varphi(X_1,X_2) = X_1\cdot X_2\} =$$

$$= \iint_{R^2} x_1\cdot x_2\cdot \underbrace{f(x_1,x_2)}_{f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)}\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\cdot$$

$$\cdot f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,dx_2 =$$

$= M[X_1] \cdot M[X_2]$ (*) продолж. после (12)

(12) <u>Опр.</u> Дисперсией сл. вел X наз. число

$$D[X] = M[(X-m)^2]$$

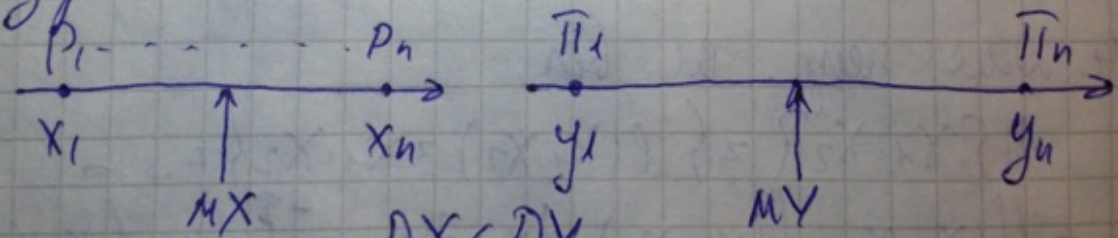
<u>Замеч.</u> 1) Если X-дискр. сл. вел, то

$$DX = \sum_{i \in I} (x_i - m)^2 p_i$$

2) если X-непр. сл. вел, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx.$$

3) Мех. смысл дисперсии (для дискр. сл. вел) – момент инерции сис-мы т-к относ. центра масс. Дисперсия характериз. разброс значений сл. вел. относ. мат ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс



$DX < DY$.

Св-ва дисперсии.

1. $DX \geq 0$.

2. Если $P\{X=x_0\}=1$, то $DX=0$

3. $D[aX+b]=a^2DX$, $a,b=const$

4. $D[X]=M[X^2]-(MX)^2$

5. Если X_1, X_2 – независ. сл. вел., то
$D[X_1+X_2]=DX_1+DX_2$

<u>Док-во:</u>

1. $DX=MY$, где $Y=(X-MX)^2\geq 0 \Rightarrow MY\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow DX\geq 0$.

2. $DX=\{MX=x_0\}=\{\sum(x_i-m)^2p_i\}=$
$=(x_0-x_0)^2\cdot 1=0$

3. Обозначим $MX=m$

$$D[aX+b]=M[((aX+b)-M(aX+b))^2]=$$
$$=(*)=M[a^2(X-MX)^2]=a^2M[(X-m)^2]=a^2DX.$$

~~ч.г. Обозн. MX=m~~ $(*)\ M[(aX+b-aM[X]-b)^2]$

4. Обозн. $MX=m$

$$DX=M[(X-m)^2]=M[X^2-2mX+m^2]$$
$$=M[X^2]-2m\underbrace{M[X]}_{m}+\underbrace{M[m^2]}_{m^2}=$$
$$=M[X^2]-m^2=M[X^2]-(MX)^2.$$

5. Обозн. $m_1 = MX_1$, $m_2 = MX_2$

$$D[X_1+X_2] = M[((X_1+X_2) - \underbrace{M[X_1+X_2]}_{m_1+m_2})^2] =$$

$$= M[((X_1-m_1)+(X_2-m_2))^2] =$$

$$= M[(X_1-m_1)^2 + (X_2-m_2)^2 + 2(X_1-m_1)(X_2-m_2)] =$$

$$= \underbrace{M[(X_1-m_1)^2]}_{DX_1} + \underbrace{M[(X_2-m_2)^2]}_{DX_2} + 2\underbrace{M[(X_1-m_1)\cdot(X_2-m_2)]}_{A} = DX_1 + DX_2$$

$$A = M[X_1X_2 - m_1X_2 + m_1m_2 - m_2X_1] =$$

$$= M[X_1X_2] - m_1M[X_2] - m_2M[X_1] + m_1m_2 =$$

$$= \{X_1, X_2 - \text{независ} \Rightarrow M(X_1 \cdot X_2) = m_1m_2\} =$$

$$= m_1m_2 - m_1m_2 - m_1m_2 + m_1m_2 = 0.$$

Замеч. 1) Можно док, что св-во 2 обратимо, т.к. $DX=0$, то X приним. единств. знач. с вер 1.

2) Св-во 5. справ для любого набора $X_1, \ldots, X_n$ попарно независим. сл. вел:

$$D[X_1+\ldots+X_n] = DX_1 + \ldots + DX_n.$$

3) DX имеет размерность квадрат сл. вел. X, т.е. если X измер. в метрах, то DX - в $м^2$

Поэтому во многих случ. удобно исп

$\delta_X = \sqrt{DX}$, которая наз. среднеквадратич. отклонением вел. X.

(*) к (11) вопросу.

Замеч. 1) Пусть X - сл. вел, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - некот. ф-ция $Y = \varphi(X)$. $M[Y] = ?$

$M[Y] = M[\varphi(X)] = \sum\limits_{i \in I} \varphi(x_i) p_i$, если X - дискр. сл. вел.

$M[Y] = M[\varphi(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$, если X - непрерыв. сл. вел.

2) если $X = (X_1, X_2)$ - сл. в-р, $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$Y = \varphi(X_1, X_2)$, то

$MY = \sum\limits_{ij} \varphi(x_{1,i}, x_{2,j}) p_{ij}$, если $\vec{X}$ - дискр. сл. в-р,

$p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1,i}, x_{2,j})\}$.

$MY = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$, если $\vec{X}$ - непр. сл. в-р.

---

(13) Биномиальная сл. вел. $X \sim B(n, p)$.

$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0; n}$

X равно числу успехов в n испыт.

по сх. Бернулли. Поэтому рассм. сл. вел.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если испыт - успех} \\ 0, \text{ если неудача} \end{cases}$$

Тогда $X = \sum_{i=1} X_i$

$$MX = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np.$$

$$DX = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left\{\begin{matrix} \text{испыт. в сх Бернулли} \\ \text{независ-ы } X_i \text{ - независ} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} DX_i = pq \cdot n$$

Пуассоновская сл. величина

$$X \sim \Pi(\lambda)$$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$MX = \sum_{k} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \left\{\begin{matrix} t = k-1 \\ k = 1 \Rightarrow t = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2$$

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \{k-1 = t\} = e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \frac{\lambda^{t+1}}{t!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \frac{\lambda^t}{t!} = \lambda e^{-\lambda} \Big[\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} t \frac{\lambda^t}{t!}}_{= MX \cdot e^{\lambda}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!}}_{= e^{\lambda}} \Big] = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} [\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda.$$

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Сл. вел. X, имеющая геометрич. распр.

$$P\{X = k\} = p q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p + q = 1, \quad p, q \in (0; 1)$$

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p q^k = pq \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} =$$

$$= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}. \quad \Big\{ 1 + q + q^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$(1 + q + q^2 + \dots)'_q = 1 + 2q + 3q^2 + \dots$$

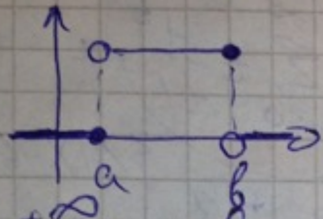
Аналогично можно найти $DX = \frac{q}{p^2}$

Равномерное распред. $X \sim R(a, b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$



$$DX = M[(X-MX)^2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

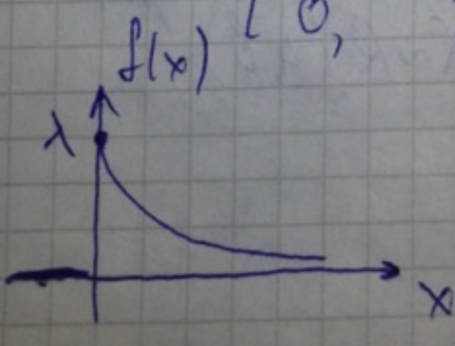
$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left\{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^3\right\} =$$

$$= \frac{2}{24(b-a)}(b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Экспотенциальное распред. $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \lambda\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= -\int_0^{\infty} x\,de^{-\lambda x} =$$

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \lambda\int^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx =$$

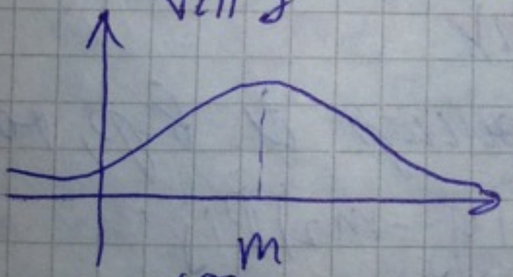
$$= -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x} = \underbrace{-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{0} + 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Нормальная сл. вел. $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma dy \\ x = \sigma y + m \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m) e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + m \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy} \right] =$$

0, ф-ция неч. $\qquad \sqrt{2\pi}$

$= m$.

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} dx =$$

$$= \left\{ y = \frac{x-m}{\delta} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta y + m - m) e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$= \ldots = \delta^2$

(14) Пусть (X,Y) - сл. в-р ~~...~~.

<u>Опр.</u> Ковариацией ~~...~~ сл. вел. X, Y наз. число: $\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)]$, где $m_1 = MX$, $m_2 = MY$

<u>Замеч.</u> Если (X,Y) - дискр. сл. в-р, то

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - m_1)(y_j - m_2) p_{ij}$$

Если (X,Y) - непрерыв. сл. в-р, то

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x-m_1)(y-m_2) f(x,y)\, dx dy$$

Св-ва ковариации:

1. $D[X+Y] = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y)$.
2. $\operatorname{cov}(X,X) = DX$.
3. Если X, Y – независ., то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.
4. $\operatorname{cov}(a_1X + a_2, b_1Y + b_2) = a_1 b_1 \operatorname{cov}(X,Y)$
5. $|\operatorname{cov}(X,Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}$, при этом $|\operatorname{cov}(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Leftrightarrow$ X и Y связаны лин. зависимостью, т.е. $Y = aX + b$.
6. $\operatorname{cov}(X,Y) = M[XY] - (MX)(MY)$.

Док-во:

1. $D[X+Y] = M[\{(X+Y) - M[X+Y]\}^2] =$
$= M[\{(X-m_1) + (Y-m_2)\}^2] =$
$= M[(X-m_1)^2] + M[(Y-m_2)^2] + 2M[(X-m_1) \cdot (Y-m_2)] = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

2. $\operatorname{cov}(X,X) = M[(X-m_1)(X-m_1)] =$
$= M[(X-m_1)^2] = DX$.

3. $\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)] =$
$= \left\{ \begin{array}{l} X, Y - \text{независ.} \\ X-m_1,\ Y-m_2 - \\ \text{независ.} \end{array} \right\} = \underbrace{M[X-m_1]}_{\overset{\circ}{m}_1(X) = 0} \cdot \underbrace{M[Y-m_2]}_{0} = 0$

4. $M[a_1X+a_2]=a_1m_1+a_2$

$M[b_1Y+b_2]=b_1m_2+b_2$

$cov(a_1X+a_2,\ b_1Y+b_2)=$

$=M[(a_1X+a_2-a_1m_1-a_2)(b_2Y+b_2-b_1m_2-b_2)]=$

$=M[a_1(X-m_1)\cdot b_1(Y-m_2)]=a_1b_1\cdot$

$\cdot M[(X-m_1)(Y-m_2)]=a_1b_1\,cov(X,Y)$.

5. 1) Покажем, что $|cov(X,Y)|\le\sqrt{DX\cdot DY}$

Рассм. сл. вел. $Z(t)=tX-Y$, где $t\in R$ – произв. число.

$D[Z(t)]=D[tX-Y]=\{1.\}=$

$=D[tX]+D[Y]-2t\,cov(X,Y)=$

$=\underbrace{t^2 D[X]-2t\,cov(X,Y)+D[Y]}_{\text{кв. трёхчлен отн. } t\text{, ветви напр. вверх, т.к. } DX>0}\overset{D[Z]\ge 0}{\ge} 0$

Кв. трёхчлен либо не имеет корней, либо имеет 1 корень $\Rightarrow D\le 0$.

$D=4cov^2(X,Y)-4DX\cdot DY\le 0$.

$|cov(X,Y)|\le\sqrt{DX\cdot DY}$.

2) Покажем, что если $|cov(X,Y)|=\sqrt{DX\cdot DY}$, то $Y=aX+b$.

Т.к. $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ур-е $D[Z(t)] = 0$ имеет единств. решение $\Rightarrow$ обозн. его $t = a$.

Тогда сл. вел. $Z(a) = aX - Y$ имеет $D[Z(a)] = 0 \Rightarrow Z(a)$ приним. единств. знач. $\Rightarrow$ обозн. его $-b$

$$Z(a) = aX - Y = -b \Rightarrow Y = aX + b$$

3) Покажем, что ~~если~~ $Y = aX + b$, то $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$

$Y = aX + b \Rightarrow Z(a)$ - принимает единст. значение $\Rightarrow D[Z(a)] = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$.

6. $cov(X,Y) = M[(X - m_1)(Y - m_2)] =$
$= M[XY - m_2X - m_1Y + m_1m_2] =$
$= M[XY] - m_2 \underbrace{MX}_{m_1} - \cancel{m_1MY} + \cancel{m_1m_2} =$
$= M[XY] - m_1m_2 = M[XY] - (MX)(MY)$

(15) Опр. Коэффициентом корреляции сл. величин X и Y наз. число

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

(предполагается, что $\exists DX$, $\exists DY$, $DXDY>0$)

Св-ва коэф. корреляции

1. $\rho(X,X)=1$ $\{ cov(X,X)=DX$.
2. Если X,Y независ, то $\rho(X,Y)=0$.
3. $\rho(a_1X+b_1, a_2Y+b_2)=\pm\rho(X,Y)$, причём нужно ставить „+", если $a_1a_2>0$, „–", если $a_1a_2<0$.
4. $|\rho(X,Y)|\leq 1$, причём $|\rho(X,Y)|=1 \Leftrightarrow$ X и Y свя. лин. зав.; т.е. $Y=aX+b$. При этом $\rho(X,Y)=1$, если $a>0$, $\rho(X,Y)=-1$, если $a<0$

Опр. Случ. величины наз. некоррелированными, если: $cov(X,Y)=0$.

Опр. Сл. вел. X и Y наз. независ, если $F(X,Y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$; где F – совм ф-ция распред. в-ра (X,Y), F_X, F_Y – марг. ф-ции распред. сл. в-н X,Y.

Замеч. Из св-ва 3. следует, что если X,Y – независим $\Rightarrow$ X,Y – некоррелиров.

Обратное неверно

0) Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - n-мерный случ. в-р

Опр. Ковариационной матрицей в-ра $\vec{X}$ наз. матрица

$$\Sigma = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}},$$

где $b_{ij} = cov(X_i, Y_j)$

Св-ва ковариационной м-цы

1. $b_{ij} = DX_i$
2. $\Sigma = \Sigma^T$
3. Если $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{C}$

Здесь $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$
$\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$
$B = M_{n,m}(\mathbb{R})$, т.е. компоненты в-ра $\vec{Y}$ лин. выраж. через компоненты в-ра $\vec{X}$.

$\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B$,

4. М-ца Σ явл. неотр. определённой, т.е. ф-ция $q(\vec{y}) = \vec{y}\, \Sigma \vec{q}^T \geq 0$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
(квадр. форма)

5. Если компоненты в-ра $\vec{X}$ попарно независ., то $\Sigma_{\vec{X}}$ - диагональная

Опр. Корреляционной матрицей в-ра $\vec{X}$ наз. м-ца $P = (\rho_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) \ (*)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{bmatrix}$$

16 Опр. Для дискр. сл. в-ра (X, Y) услов. в-тью, что сл. вел. X приняла зн-е x_i при условии, что сл. вел Y приняла зн-е y_j, наз. число $\pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

Опр. Усл. пл-тью распределения случ. вел. X при условии, что случ. вел. Y приняла знач y наз.

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Опр. ~~[illegible]~~ Значением услов. мат. ожидание сл. вел. X при усл. что сл. в. $Y = y_j$, наз. число

$$M[X|Y=y_j] = \sum_i x_i \pi_{ij}$$

Опр. Значением услов. мат. ожидание

сл.
чи
Опр
X
та
с
2)
ве
О
от
За
3
2)
D
3)
от
17
н

сл. вел. X при условии, что $Y=y$, наз. число $M[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|Y=y)\,dx$.

Опр. Условным мат. ожиданием с. в. X относ. сл. в. Y наз. ф-ция $g(Y)=M[X|Y]$ такая, что 1) обл-ть опред. ф-ции g совп. с мн-вом возможн. знач. сл. в. Y;
2) для каждого возможн. знач. y сл. вел. Y $g(y)=M[X|Y=y]$.

Опр. Условной дисперсией случ. вел X относ. сл. вел. Y наз. сл. величина

$$D[X|Y]=M[(X-M[X|Y])^2|Y]$$

Замеч. 1) если (X,Y) - дискр. сл. в-р, то значения $D[X|Y=y_j]=\sum (x_i-M[X|Y=y_j])^2 \pi_{ij}$

2) если (X,Y) - непр. сл. в-р, то значение $D[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X|Y=y])^2 f_X(x|Y=y)\,dx$.

3) Аналогично опред. услов. дисперсия Y относ X.

(17) Опр. Сл. в-р (X_1,X_2) имеет двумерное норм. распределение, если его ф-ция

пл-ти распределение вер-тей имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{\det\Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Q(x_1-m_1, x_2-m_2)}$$

где $\vec{m} = (m_1, m_2)$ - числ. в-р.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \text{ - полож. опр. м-ца}$$

$Q(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\,\tilde{\Sigma}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}$ - квадр. форма

$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$

Опр. Говорят, что сл в-р $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет норм. распределение, если его ф-ция пл-ти распред. вер-тей имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{\det\Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Q(\vec{x}-\vec{m})}, \text{ где}$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $Q(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}\,\tilde{\Sigma}\,\vec{\alpha}^T$, - кв. ф-ма от n перем.

$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Св-ва многомерного норм. распр.

1. Если $(X_1, \ldots, X_n)$ - норм. случ. в-р, то любая его компонента $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ - тоже норм. распред. сл вел.

$-m_2)$

u-

$л$

$де$

$а$

$ш$

2. Пусть в-р $\vec{X} \sim (\vec{m}, \Sigma)$, тогда если Σ - диагональная, то случ. вел. $X_1, \dots, X_n$ независ.

{независ $\Rightarrow$ Σ-диаг. для всех сл. вел.
для норм сл. вел. верно обратное}

3. Пусть $\vec{X} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ - норм. случ в-р с $\vec{m} = (m_1, \dots, m_{n-1})$ и ковариац. м-цей Σ', кот. получ. из Σ отбрасыванием послед строки и послед. столбца

4. Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2)$ - двум. сл. в-р с $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$ и $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

Тогда 1) услов. распред X при усл, что $Y = y$, будет нормальным

2) $M[X | Y = y] = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$

$D[X | Y = y] = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$.