1. Случайные события.

① **Опр.** Мн-во всех элементарных исходов Ω будем наз. пространством элем. исходов.

Замеч. 1) Эл-ты Ω явл. простыми исходами, т.е. неделимыми в рамках данного эксперимента.

2) в рез-те эксп-та обяз. имеет место 1, входящий в Ω, элем. исход.

Пр 1) Пусть опыт сост. в однокр. подбр. монеты. Возможны исходы: выпало Г или Р.

$\Omega = \{Г, Р\}$ $|\Omega| = 2$.

2) Бросают игр. кость. Набл. рез-т: кол-во очков на верх. грани. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

$|\Omega| = 6$.

3) Из колоды карт (36) извлек. 2 карты. Возможн. исходы: $\Omega = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 36\}$

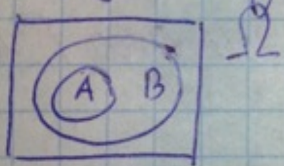
x_i - номер карты, кот. появ. при i извлеч.

Опр. Элем. исходом (или элем. событием) наз. любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта.

Опр. Событием наз. любое подмн-во Ω.

Опр. Говорят, что в рез-те эксп-та произошло соб. A, если в данном эксп-те имел место 1 из вход в A элем. исходов.

Опр. Событие B наз. следствием соб. A, если из того, что произошло A, следует, что произошло B. Другими словами, B наз. следствием A, если $A \subseteq B$.



Замеч. Любое мн-во Ω содержит 2 подмножества: $\varnothing$, Ω. Соотв. события наз. невозможное ($\varnothing$) и достоверное (Ω). Эти события наз. несобственными. Все остальные соб. наз. собственными.

Пр. Из урны, содер. 2 красных шара и 3 синих шара, вытаскивают случ. обр.

шар.

$A = \{$извлечён белый шар$\} = \varnothing$.

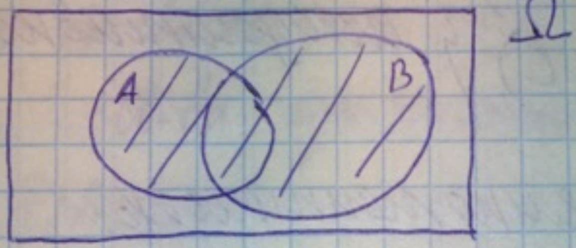
$B = \{$извлеч. красный или синий шар$\} = \Omega$

Операции над событиями.

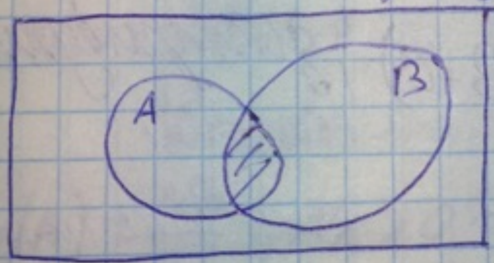
Соб. являются мн-вом $\Rightarrow \cup, \cap, \bar{}, \setminus, \circ$

В ТВ исп. след. терминология

$A \cup B = A + B$ – сумма событий.



$A \cap B = A \cdot B$ – произведение событий.



$A \setminus B$ – разность событий

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ – дополнение соб. A.

Св-ва операций над соб.

$$\left.\begin{aligned} &1.\ A+B = B+A \\ &2.\ A\cdot B = B\cdot A \end{aligned}\right\} \text{коммутативность.}$$

$$\left.\begin{aligned} &3.\ (A+B)+C = A+(B+C) \\ &4.\ (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \end{aligned}\right\} \text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned} &5.\ A+A = A \\ &6.\ A\cdot A = A \end{aligned}\right\} \text{идемпотентность.}$$

$$\left.\begin{aligned} &7.\ A(B+C) = AB+AC \\ &8.\ A+(BC) = (A+B)(B+C) \end{aligned}\right\} \text{дистрибутив.}$$

9. $\overline{(\overline{A})} = A$

$$\left.\begin{aligned} &10.\ \overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B} \\ &11.\ \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B} \end{aligned}\right\} \text{з-ны де Моргана.}$$

12. $A \subseteq B \Leftrightarrow AB = A$.

13. $A \subseteq B \Leftrightarrow A+B = B$.

14. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Классическое определение вероятности.

Пусть 1) $|\Omega| = N < \infty$

2) по усл. эксп-та нет объектив. оснований предпочесть какой-либо элем. исход остальным.

<u>Опр</u>. Вероятностью соб. A наз. число $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где N_A - число исходов, сост. соб. A $(N_A = |A|)$

Св-ва вероятности (у класс. опр)

1. $P(A) \geqslant 0$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. если $AB = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Док-во:

1. $P(A) = \frac{N_A}{N}$, $N_A \geqslant 0 \Rightarrow P(A) \geqslant 0$.
$N > 0$
2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
3. По ф-ле включ. и исключ.

$$|A+B| = |A| + |B| - \cancel{|AB|}^{0} = |A| + |B|$$

т.о. $N_{A+B} = N_A + N_B$ и $P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} =$

$= P(A) + P(B)$.

Замеч. Недостатки классич. опр-е:

1) клас. опр-е применимо лишь в случае конечного мн-ва Ω

2) клас. опр-е применимо лишь в тех случаях, когда одни исходы яв. более предпоч., а другие менее предпоч.

2. Геометрич. опред. ~~вер~~ вероятности.

Геом. опред. обобщает классич. на случай, когда Ω яв. бесконеч. мн-вом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$, через $\mu(A)$ будем обознач. меру мн-ва A:

$n = 1$ $\mu(A)$ - длина, $n = 2$ $\mu(A)$ - ~~объем~~ площадь,

$n = 3$ $\mu(A)$ - объём.

Пусть 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(\Omega) < \infty$

2) $A \subseteq \Omega$.

Опр. вер-тью соб. A наз. число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{N(\Omega)}$$

Замеч. 1) Очевидно, что для геом опр-е вер-ти остаются в силе 1-3 св-ва, получ. в случае классич. опр-е,

2) недостатком геом. опр-е явл. то, что оно не применимо в случае, когда отд. области явл. предпочтит. Так, в предыдущем примере (про встречу людей в между 12 и 13 ч.), если появ. каждого из людей более вероятно около 12:30, то ~~а~~ геом. опр. не дает верного рез-та.

Статическое опред. вер-ти.

Пусть случ. экс-т повторен N раз, при этом соб. А произошло N_A раз.

Опр. Вер-тью соб. А наз. эмпирический (т.е. получ. опытным путем) предел отнош. n_A/n при $n \to \infty$. $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$

Замеч. 1) недостатки ~~ком~~ статистич. опр-е:

- опыт не может быть повторен беск кол-во раз;

- такое опр-е не даёт достаточной основы для дальнейш~~его~~ разв. мат. теории.

2) тем не менее можно док, что для статистич. опр. будут в силе св-ва 1-3 опр. вероят.

③ Сигма-алгебра событий

Пусть Ω - пр-во элем. исходов, β - некот. набор подмн-в. Ω.

<u>Опр</u>. β наз. σ-алгеброй событий, если

1) $A \in \beta \Rightarrow \bar{A} \in \beta$; 2) $A_1, \ldots, A_n \in \beta \Rightarrow$ $A_1 + A_2 + \ldots + A_n \in \beta$.

Заметим, что:

1) Данное выше опр события как ~~правильно~~ произвольное подмн-ва элем. исходов в случ. беск. Ω приводит к противоречию.

2) С т-ки зрения здравого смысла если можно установить, что в экс-те произошло соб. A и B, то можно

установить, что произошли соб. $\bar{A}$, $A+B$, AB, $A \setminus B$, ..., т.о. если A и B - соб., то соб. должны явл. $\bar{A}$, $A+B$, $A \setminus B$, ...

Эти соображения приводят к опр.

Пусть 1) Ω - пр.-во элем. исх.

2) $\mathcal{B}$ - набор некот. подмн-в мн-ва Ω, $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

Опр. $\mathcal{B}$ наз. сигма-алгеброй, если

1) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$.

2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 + \ldots + A_n \in \mathcal{B}$.

Простейшие следствия из определения.

1. $\Omega \in \mathcal{B}$
2. $\varnothing \in \mathcal{B}$
3. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \in \mathcal{B}$.
4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

Док-во:

1. Т.к. $\mathcal{B} \neq \varnothing$, то рассм. произв. мн-во $A \in \mathcal{B}$

В силу 1 опр-я $\bar{A} \in \mathcal{B}$

В силу 2 опр-е $\Omega = A + \bar{A} \in \beta$

2. $\Omega \in \beta \Rightarrow \varnothing = \bar{\Omega} \in \beta$

3. $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta \Rightarrow \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n, \ldots \in \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots + \bar{A}_n + \ldots \in \beta \Rightarrow \overline{\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots + \bar{A}_n + \ldots} \in \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \in \beta$

4. $A \setminus B = A \cdot \bar{B}$
$A \in \beta;\ B \in \beta \Rightarrow A \in \beta,\ \bar{B} \in \beta \Rightarrow A\bar{B} \in \beta$

Аксиоматическое опр-е вер-ти.

Пусть Ω - пр-во элем. исходов
β - некот. б-алгебра соб.

<u>Опр.</u> Вероятностью наз. ф-ция
$$P: \beta \to \mathbb{R},$$
которая обладает след. св-вами

1. $\forall A \in \beta\ P(A) \geq 0$ (аксиома неотриц.)
2. $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормиров.)
3. для любой послед. событий $A_1, \ldots, A_n \in \beta$, которые попарно несовместные, справедливо $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$
$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расшир.

аксиома сложение).

4. Замеч. Величина $P(A)$ наз. вер-тью событие A.

Св-ва вероятности.

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.
4. $\forall A \in \beta \quad 0 \leq P(A) \leq 1$.
5. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(теорема слож. 2 событий).

6. Если $A_1, \ldots, A_n \in \beta$, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots$$

$$+ \ldots + (-1)^n P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$ (теор. сложение).

Док-во:

1. $\Omega = A + \bar{A}$.

$A\bar{A} = \varnothing$.

$P(\Omega) = 1$ (акс. 2).

$P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = \{акс. 3\} = P(A) + P(\bar{A})$

$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. $\varnothing = \overline{\Omega}$

по пред св-ву

$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = \{\text{акс } 2\} = 1 - 1 = 0$

3.

$B = A + B\setminus A$

т.к. $A\cdot(B\setminus A) = \varnothing$,

то (акс. 3) $P(B) = P(A) + \overset{\geq 0}{P(B\setminus A)} \geq P(A)$

4. $P(A) \geq 0$ (акс. 1)

Осталось док-ать, что $P(A) \leq 1$.

$A \subseteq \Omega \Rightarrow \{\text{св-во } 3\} \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$

5. а)

$A + B = A + (B\setminus A)$

т.к. $A(B\setminus A) = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\text{акс } 3\} \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B\setminus A)$

б)

$B = (B\setminus A) + AB$

т.к. $(B\setminus A)\cdot(AB) = \varnothing$,

то $P(B) = P(B\setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B\setminus A) = P(B) - P(AB)$

в) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

6. явл. следствием св-ва 5, доказ. аналогично ф-ле вкл. и исключ.

⑤ **Опр.** Пусть $P(B) > 0$. Услов. вероятностью осущ. соб. A при условии, что произошло B наз. число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Зафиксир. соб. B, $P(B) > 0$. и будем рассматривать усл. вер-ть $P(A|B)$ как ф-цию соб A.

Оказывается усл. вер-ть удовлетворяет всем аксиомам безусловной вер-ти, т.е.

1. $P(A|B) \geq 0$.
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Для ~~...~~ любого счётного набора попарно ~~...~~ не пересек. соб. $A_1, \dots, A_n$ имеет место $P(A_1 + \dots + A_n|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B)$

Док-во:

1. $P(A|B) = \frac{\overset{\geq 0}{P(AB)}}{\underset{>0}{P(B)}} \geq 0$.

2. $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

3. $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots | B) = \frac{P((A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots)B)}{P(B)} =$

$= \{$св-во счётного дистриб. $\cap$ относ. $\cup\}$ $= \frac{P(A_1B + \ldots + A_nB + \ldots)}{P(B)} =$

$= \Big\{$ 

$A_iA_j = \varnothing, \; i \neq j$

$A_iB \subseteq A_i, \; A_jB \subseteq A_j$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (A_iB) \cap (A_jB) = \varnothing \Big\} = \{$акс 3$\} =$

$= \frac{1}{P(B)} \left[P(A_1B) + \ldots + P(A_nB) + \ldots \right] =$

$= \{$лин. св. сход. ряда$\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_iB)}{P(B)} =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Следствие. Усл. вер-ть облад. всеми св-вами безусл. вер-ти, т.е.

1. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
2. $P(\varnothing|B) = 0$
3. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
4. $0 \leq P(A|B) \leq 1$

5. $P((A_1+A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) -$
$- P(A_1A_2|B)$.

6. $P(A_1+\ldots+A_n|B) = \sum\limits_{1\le i_1\le n} P(A_{i_1}|B) - \sum\limits_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}|B) +$
$+\ldots+(-1)^{n+1} P((A_1\cdot\ldots\cdot A_n)|B)$

Док-во:

Св-ва 1-6 для безусл. вер-ти явл. след. аксиом 1-3 т.к. усл. вер-ти удовл. этим аксиомам, тогда для неё будут верны все следствия

(6) __Теор__ (ф-ла умнож. вер-тей)

Пусть 1) $P(A)>0$

Тогда $\boxed{P(AB) = P(A)\cdot P(B|A).}$ - ф-ла умнож. вер-тей

Док-во: Т.к. $P(A)>0$, то по __опр.__ усл. вер-ти $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(B|A)\cdot P(A)$.

__Теор__ Пусть соб. $A_1,\ldots,A_n$ таковы, что $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})>0$.

Тогда $\boxed{P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot \ldots\cdot P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})}$ - ф-ла умнож. вер (*).

Док-во:

1) Для $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$

$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все усл. вер-ти в ф-ле (*) опред.

2) $P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}_{A} \cdot \underbrace{A_n}_{B}) = P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}}_{A} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B}) \cdot$

$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot$

$\cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$

$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot$

$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$.

Пр. На 7 карточках написаны буквы слова "ШОКОЛАД" карточки перемеш. и послед. вынимают 3 штуки

$A = \{$карты в порядке появл. слова "код"$\}$

$P(A) = ?$

$A_1 = \{$на первой карте - "к"$\}$

$A_2 = \{$2ой - "о"$\}$

$A_3 = \{$3ей - "д"$\}$

Тогда $A = A_1 A_2 A_3$.

По ф-ле умнож. вер-тей

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \underbrace{P(A_1)}_{1/7} \cdot \underbrace{P(A_2 | A_1)}_{1/6} \cdot \underbrace{P(A_3 | A_1 A_2)}_{1/5} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210}$$

6 карт, нет "к"   5 карт нет "к", "о"

(7) **Опр** События A и B наз. независ., если

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Теор. 1) если $P(B) \neq 0$, то A, B - независ. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

2) если $P(A) \neq 0$, то A, B - независ. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Док-во:

1) $\Rightarrow$: Пусть $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, тогда

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A).$$

$\Leftarrow$ Пусть $P(A|B) = P(A)$

Тогда $P(A|B) = \boxed{P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$ и B независ.

2) аналогично.

Опр. События $A_1, \dots, A_n$ наз. попарно независ., если $\forall i \neq j$ соб. A_i, A_j - независ., т.е. $P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j)$, $i \neq j$

Опр. События $A_1, \dots, A_n$ наз. независ. в совокуп., если для любого набора индексов $i_1, \dots, i_k$, $k = \overline{1, \dots, n}$.

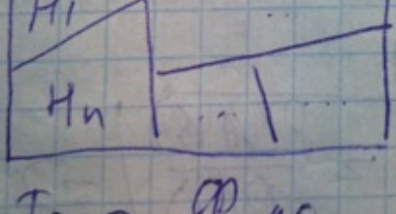
Справедливо $P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.

Замеч. Очевидно, что если соб. $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокуп., то они попарно независ. Обратное неверно

(3) Опр. Говорят, что соб. $H_1, \dots, H_n$ обр. полную группу соб., если вып. условия:

1) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

2) $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$



Замеч. При этом соб. H_i часто наз. гипотезами

Теор. Ф-ла полной вер-ти

Пусть 1) $H_1, \dots, H_n$ - полная гр. соб.

2) $P(H_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда $P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)\cdot P(H_n)$ – ф-ла полной вер-ти.

Док-во:

1) $A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n$

2) $P(A) = P(AH_1 + \ldots + AH_n) = \left\{ \begin{array}{l} H_iH_j = \varnothing,\ i \neq j \Rightarrow \\ \Rightarrow (AH_i)\cdot(AH_j) = \varnothing \end{array} \right\} =$

$= P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ф-ла умн.} \\ \text{вер-тей} \end{array} \right\} \overset{2}{} \; A \cap H_i \quad A \cap H_j$

$= P(A|H_1)\cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)\cdot P(H_n).$

Теор. Ф-ла Байеса.

Пусть 1) вып. все усл. из теор. о полной вер-ти.

2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i)\cdot P(H_i)}{P(A|H_1)\cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)\cdot P(H_n)}$ –

ф-ла Байеса.

Док-во:

По опр. усл. вер-ти $P(H_i|A) = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)} =$

теор. умн. вер.

ф. пол. вер.

$$= \frac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)\,P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)\cdot P(H_n)}$$

Замеч. Вер-ти $P(H_i)$ наз. априорными, т.е. известными до опыта, а вер-ти $P(H_i|A)$ апостериорными, т.е. известными после опыта.

9 Опр. Схемой Бернулли (биномиальной схемой) наз. серию экспериментов указ. вида, которая обладает след. св-вами:

1) все испыт. независимы, т.е. исход k-го испытания не зависит от исходов испытаний с номерами $1..k-1$

2) вер-ть осущ. успеха во всех испыт. неизменна

Теор. Обозн. $P_n(k)$ - вер-ть осущ. ровно k успехов в серии из n испытаний, тогда $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=\overline{0,1,\ldots,n}$

Док-во:

1) рез-т серии из n испытаний будем

описывать кортежами $(x_1, \ldots, x_n)$,

где $x_i = \begin{cases} 1, \text{если при } i \text{ испыт - удача} \\ 0, \text{если при } i \text{ испыт - неудача} \end{cases}$

2) $A = \{$произошло ровно k успехов$\}$

Тогда $A = \{\omega :$ в к-рых ровно k единиц$\}$

Число исходов в A равно кол-ву способ. поставить в кортеже ω ровно k единиц $=$ число способов выбрать в n k позиц. для расстановки единиц $= C_n^k$

3) для каждого $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in A$

$$P(\omega) = P((x_1, \ldots, x_n)) = P(\{\text{в 1 исп. рез-т } x_1\} \cdot \ldots \cdot \{\text{в } n \text{ исп. рез-т } x_n\}) = \{\text{исп. независимы}\} =$$

$$= \underbrace{P(\{\text{в 1 рез-т } x_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{\text{в } n \text{ рез-т } x_n\})}_{\text{ровно } k \text{ успехов}} =$$

$$= p^k \cdot q^{n-k}$$

4) Т.к. $|A| = C_n^k$, то $P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

__Следствие 1__ Вер-ть того, что число успехов в серии из n испыт. по схеме Бернулли не меньше k_1 и не более k_2

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}, \quad k_1 \le k_2$$

Док-во:

Пусть $A = \{$произошло $\geq k_1$ и $\leq k_2$ успехов$\}$

тогда $A = A_{k_1} + \ldots + A_{k_2}$, где

$A_i = \{$произошло ровно i успехов$\}$, $i = \overline{k_1, k_2}$

$P(A) = P(\sum_{i=k_1}^{k_2} A_i) = \{A_i$ несовместны$\} =$

$= \sum_{i=k_1}^{k_2} P(A_i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i \cdot q^{n-i}$.

Следствие 2 Вер-ть того, что в серии из n испыт. по сх. Бернулли произойдёт хотя бы один успех, можно найти по ф-ле $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$

Док-во: $P_n(k \geq 1) = 1 - p(\{$в серии из n испыт будет 0 успехов$\}) = 1 - P_n(0) =$

$= 1 - q^n$.