

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Новосибирский Государственный Университет» (НГУ)  
физический факультет

Квалификационная работа на соискание степени магистра  
Кафедра автоматизации физико-технических исследований

Сизов Михаил Михайлович  
Разработка системы автоматизации обработки данных  
для переносного мюонного плотномера

Научный руководитель:  
канд. техн. наук, с. н. с.  
Зюбин Владимир Евгеньевич,  
Институт автоматики и электрометрии СО РАН

Новосибирск – 2013

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Предметная область</b>	<b>7</b>
1.1 Методы измерения плотности грунта в геологии	7
1.1.1 Контактные методы	8
1.1.2 Бесконтактные методы	8
1.2 Физическая модель рождения мюонов	9
1.3 Устройство и работа мюонного плотномера	11
1.3.1 Принцип измерения плотности породы	11
1.3.2 Пилотный вариант мюонного скважинного плотномера	12
<b>2 Алгоритмы генерации и обработки данных</b>	<b>15</b>
2.1 Подходы к аппроксимации функций	15
2.1.1 Постановка линейной задачи меньших квадратов	16
2.1.2 Нелинейная задача наименьших квадратов	16
2.1.3 Метод наименьших гиперболизированных нелиней- ных квадратов	16
2.2 Постановка задачи аппроксимации тарировочных кривых	17
2.3 Генерация синтетических данных	18
2.3.1 Программный пакет MUSIC	19
2.3.2 Генерация данных на основе целевой функции	19
2.4 Алгоритмы экстраполяции тарировочной кривой	20
2.4.1 Алгоритм Прони	20
2.4.2 Модификация жадного алгоритма	22
2.4.3 Алгоритм Левенберга-Марквардта	24
2.4.4 Тестирование алгоритмов	25

2.4.5	Комбинированный алгоритм . . . . .	26
2.5	Архитектура системы автоматизации обработки данных . .	27
<b>3</b>	<b>Реализация системы обработки данных . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1	Комбинированный алгоритм . . . . .	29
3.2	Интерфейс оператора . . . . .	30
3.3	Метод определения неоднородностей в почве . . . . .	32
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>35</b>
	<b>Список публикаций по теме работы . . . . .</b>	<b>35</b>
	<b>Литература . . . . .</b>	<b>36</b>

# Введение

Один из основных параметров грунта, используемых в инженерной геологии и строительстве, — плотность. Информация о плотности грунта определяет объемы и состав работ при подготовке к строительству зданий, влияет на заключения о безопасности проводимых строительных работ и качестве их выполнения [1,2].

Плотность грунта измеряется либо контактными методами через замер плотности образцов, либо бесконтактными радиационными методами.

Привлекательность первого способа — присущая непосредственным измерениям точность, недостаток — локальный характер измерения (характерный объем забора —  $1 \text{ дм}^3$ ), невозможность оценки объекта в целом, и вытекающий отсюда чрезмерный объем бурильных работ.

Радиационный метод обеспечивает комплексную оценку исследуемого объекта, используется в широком классе задач: спектрометрическом контроле газовых и водных сред, дефектоскопии, рентгено-структурном анализе материалов и пр [3]. В частности, метод подходит для определения объемного веса большинства петрографических типов пород и практически незаменим для измерения плотности дисперсных грунтов.

Однако, использование гамма-плотномеров, реализующих радиационный метод измерения, связано с серьезными требованиями к безопасности [4], вызванными наличием в составе устройства источника радиоактивного излучения, — необходимостью специально оборудованных мест хранения, доставки и множественных согласований с санитарно-эпидемиологическими службами. Эти обстоятельства стимулируют исследователей искать альтернативные подходы к измерению плотности грунта.

Один из недавно предложенных способов, исследуемый в Институте автоматики и электрометрии СО РАН, — мюонный скважинный плотномер [5]. За счет конструктивных решений удалось обеспечить высокую чувствительность датчика плотномера при измерении потока атмосферных мюонов, что позволяет сочетать приемлемое время измерения, безопасность эксплуатации прибора и комплексный характер получаемых оценок для плотности грунта.

На данный момент пользователь мюонного плотномера вынужден строить тарировочные кривые на миллиметровой бумаге и наносить данные на графики вручную. Соответственно, экстраполяция проводится «на глаз», что приводит к высокой погрешности при обработке данных.

Цель работы — разработка системы автоматизации обработки данных для мюонного плотномера. Данная цель достигается посредством решения следующих задач:

- Анализ специфики измерений мюонным плотномером, в том числе механизмов генерации и поглощения средой атмосферных мюонов.
- Формулировка требований к системе автоматизации обработки данных.
- Определение способов генерации синтетических тарировочных данных.
- Определение алгоритмов построения тарировочных кривых и восстановления плотности грунта.
- Разработка архитектуры системы автоматизации и интерфейса пользователя.
- Реализация системы автоматизации обработки данных для переносного мюонного плотномера.

Предложенные в работе комбинированный алгоритм аппроксимации тарировочных данных и алгоритм обработки данных измерений обеспечивают автоматическое построение тарировочных кривых мюонного плотномера и расчет плотности измеренного грунта.

Работа описана в трех главах. В первой главе анализируется предметная область, описываются механизмы рождения атмосферных мюонов и их переноса в веществе, формулируются требования к системе автоматизации. Во второй главе приводятся алгоритмы генерации синтетических данных, исследуются алгоритмы построения тарифовочных кривых, предлагаются комбинированный алгоритм и архитектура системы автоматизации. Третья глава посвящена вопросам реализации.

# Глава 1

## Предметная область

Данные о плотности грунта служат основанием для оценки залежей полезных ископаемых и принятия решения о начале геологоразведки перспективных районов. На основании информации о плотности грунта определяются порядок, объемы и состав проектных работ при подготовке к строительству зданий и дорог, делаются заключения о безопасности проводимых строительных работ, качестве их выполнения и возможности ввода в эксплуатацию возведенных сооружений. При подготовке ряда объектов (фундаментов зданий, шоссе, железнодорожных насыпей) проводятся работы по уплотнению грунта, для определения объема которых необходимы измеренные и требуемые значения показателей плотности сухого грунта. Мониторинг плотности грунта позволяет контролировать и упреждать возникновение аварийных ситуаций при эксплуатации возведенных объектов, в частности, таких, как высотные здания, мосты, железнодорожные насыпи, линии метро, шахты, аэродромы.

### 1.1 Методы измерения плотности грунта в геологии

Плотность грунта измеряется контактными методами через непосредственный замер плотности образцов, или бесконтактными (радиационными методами). В обоих случаях предполагается бурение исследуемого грунта.

### 1.1.1 Контактные методы

В ГОСТ-5180-84. “Грунты. Методы лабораторного определения физических характеристик“ описаны следующие методы измерения плотности грунта: режущим кольцом, взвешивание в воде парафинированных образцов, и взвешивание мерзлых пород в нейтральных жидкостях. В зависимости от типа грунта, его сыпучести и содержания воды, выбирается тот или иной метод. Масса образца грунта составляет от двухсот грамм до нескольких килограммов. При этом, чтобы получить распределение плотности грунта, проводится ряд параллельных замеров. Значение характеристик вычисляют, как среднее арифметическое из результатов параллельных измерений. Разница между параллельными измерениями не должна превышать значений, указанных в приложении к ГОСТ-5180-84 [1]. Если разница превышает допустимую, количество измерений следует увеличить.

Главный недостаток контактных методов — локальный характер измерения плотности грунта, связанные с этим проблемы с определением неоднородностей (полости, каверны) в грунте. Во время эксплуатации объектов подобные неоднородности могут привести к обрушениям или осадке фундамента. Цена за низкую погрешность итоговых значений плотности — чрезмерный объем бурильных и лабораторных работ.

### 1.1.2 Бесконтактные методы

Метод радиоизотопного измерения плотности грунтов основан на зависимости между плотностью контролируемого грунта и характеристиками ослабления и рассеяния измеряемого потока энергии гамма-излучения.

Плотность грунта измеряется путем детектирования и регистрации плотности потока рассеянного первичного гамма-излучения (метод альбедо), ослабленного первичного гамма-излучения (метод абсорбции) или рассеянного и ослабленного первичного гамма-излучения (альбедно-абсорбционный метод).



Метод альбедо заключается в регистрации плотности потока гамма-квантов, рассеянных на электронах атомов вещества при взаимодействии потока энергии первичного гамма-излучения источника ионизирующего излучения с материалом грунта. Метод абсорбции — в детектировании плотности потока гамма-квантов, прошедших через слой материала между радиоактивным источником и детектором гамма-излучения. Альбедо-абсорбционный метод заключается в определении плотности потока гамма-квантов, рассеянных в объеме грунта и прошедших через слой между источником ионизирующего излучения и детектором гамма-излучения.

При проведении измерений радиоизотопными плотномерами, должны соблюдаться “Основные санитарные правила работы с радиоактивными веществами и другими источниками ионизирующих излучений“, “Нормы радиационной безопасности“, “Правила безопасности при транспортировании радиоактивных веществ“.

Радиационный метод обеспечивает комплексную оценку исследуемого объекта, однако не лишен недостатков — используются радиоактивные вещества, представляющие опасность для здоровья.

Эти обстоятельства стимулируют исследователей искать альтернативные подходы к измерению плотности грунта. Один из недавно предложенных способов, исследуемый в Институте автоматики и электрометрии СО РАН [5] — использование в качестве источника радиации естественный радиационный фон — атмосферные мюоны. Обладая достоинствами радиационных методов, мюонный плотномер не использует активных источников радиации и, соответственно, безопасен для здоровья.

## **1.2 Физическая модель рождения мюонов и их поглощения в веществе**

Источником атмосферных мюонов является взаимодействие высокоэнергетичных космических частиц (Первичные Космические Лучи) с верхними слоями атмосферы. В модели В. И. Зацепина [6]. предполагает-

ся существование трех классов источников космических лучей — взрывов сверхновых и новых разного типа :

1. I класс — ударные волны от массивных взрывающихся скоплений (ассоциаций) сверхновых спектрального класса O или B;
2. II класс — ударные волны от неассоциированных сверхновых звезд, взрывающихся в случайную межзвездную среду;
3. III класс — определяется спектром меньшей жесткости, возможными физическими объектами в этом классе могли бы быть взрывы новых звезд.

Основные рассматриваемые данной моделью группы ядер — протоны (P), гелий (He), группа средних ядер – углерод, азот, кислород (C, N, O), группа тяжелых ядер от неона до серы (Ne–S) и группа очень тяжелых ядер от хлора до никеля ( $Z > 17$ ).

Данная модель оспользует следующие положения:

1. Ядра космических лучей высоких энергий останавливаются в верхних слоях атмосферы за счет ядро-ядерный столкновений
2. При взаимодействии ультрарелятивистской частицы с ядром вторичные частицы вылетают в направлении первичной
3. Первичные Космические Лучи имеют равномерное пространственное распределение

Таким образом, в данном приближении, в верхних 10-15км атмосферы рождаются потоки вторичных космических частиц, образующих сферические волны, которые приходят на поверхность Земли.

В результате ядро-ядерного взаимодействия происходят следующие превращения частиц:

$$\begin{aligned}
 \pi &\rightarrow \mu + \nu_\mu; \\
 K^\pm &\rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\nu_\mu); \\
 K^\pm &\rightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\nu_\mu); \\
 K^0 &\rightarrow \pi^\pm + \mu^\mp + \nu_\mu(\nu_\mu).
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Кроме того происходят цепочки распадов  $K \rightarrow \pi \rightarrow \mu$ .

Атмосферные мюоны — релятивистские частицы имеют энергию от десятков ГэВ до единиц ТэВ и высокую проникающую способность (характерное ослабление в  $e$  раз на 10 м. в. э.). В зависимости от энергии эти мюоны могут проникать на глубины до нескольких тысяч метров ниже уровня моря и более. Величина потока мюонов на различных глубинах определяется энергетическим спектром и составом породы, а также физикой взаимодействия мюонов с веществом. Но общая закономерность — ее монотонное падение с увеличением глубины. Второе значимое обстоятельство, позволяющее использовать мюоны в практических целях измерения плотности грунта, — относительное постоянство их интенсивности во времени. Поэтому в геологических задачах, когда точность регистрации интенсивности не более 3–5 процентов, изменениями в интенсивности пренебрегают.

## **1.3 Устройство и работа мюонного плотномера**

### **1.3.1 Принцип измерения плотности породы по тарировочной кривой**

В мюонных плотномерах используется абсорбционный метод, основанный на замере потока мюонов при прохождении через вещество. Интенсивность потока мюонов определяется средней плотностью горных пород над точкой наблюдения, поэтому в качестве единицы измерения глубины при наблюдениях в шахтах используют метры водного эквивалента, сокращенно — м. в. э..

При измерении в исследуемом грунте делается скважина, в скважину опускается прибор, включающий сцинтилляционный датчик, и замеряется поток частиц на разных глубинах. Тарировочная зависимость интенсивности потока мюонов от глубины в м. в. э. позволяет найти глубину в м. в. э., соответствующую измеренному потоку мюонов, а затем по фактическим глубинам, на которых делались замеры, определить среднюю плотность вещества между точками измерения:

$$\rho = \frac{H_{m.w.e.}(I_1) - H_{m.w.e.}(I_2)}{H_1 - H_2} \quad (1.2)$$

$H_{m.w.e.}(I_1)$  — глубина в м. в. э. для интенсивности потока мюонов  $I_1$ , измеренной на глубине  $H_1$ .

$H_{m.w.e.}(I_2)$  — глубина в м. в. э. для интенсивности потока мюонов  $I_2$ , измеренной на глубине  $H_2$ .

Однако известные приборы громоздки и требуют больших затрат времени на проведение измерений, что делает их малопригодными для практического использования в инженерной геологии и строительстве.

Для повышения точности измерений необходимо учитывать и свести к минимуму статистическую погрешность регистрации скорости счета и систематическую погрешность, возникающую при изготовлении скважины в зависимости от свойств грунта и диаметра скважины.

### 1.3.2 Пилотный вариант мюонного скважинного плотномера

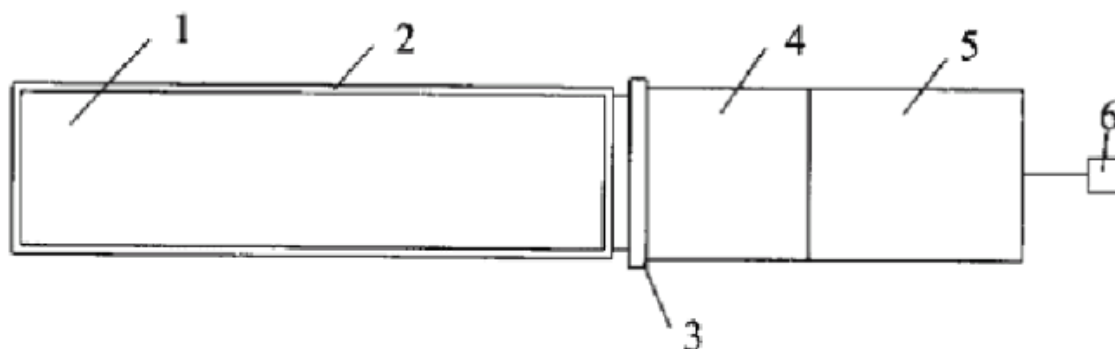


Рис. 1.1: Датчик мюонного плотномера

В целях снижения временных затрат на измерения с понижением погрешности была предложена конструкция датчика мюонного скважинного плотномера (Рис. 1), включающая сцинтилляционный детектор (1) с оболочкой (2) и стеклом окна (3), фотоумножитель (ФЭУ) (4), усилитель-дискриминатор (5) и пульт управления (6).

Физическая длина сцинтилляционного детектора выбирается из следующих ограничений. Сцинтилляционная вспышка, возникшая на максимальном удалении от фотокатода ФЭУ при взаимодействии с мюоном, должна при достижении фотокатода иметь достаточно высокий уровень, позволяющий отделить это событие от сцинтилляционных вспышек, обусловленных естественной радиоактивностью породы, которые возникают в непосредственной близости от ФЭУ. Это условие ограничивает длину сцинтилляционного детектора сверху и зависит от коэффициента ослабления света сцинтилляции, который для различных сцинтилляционных материалов может быть определен расчетом или экспериментально.

В усилителе-дискриминаторе предусмотрен регулируемый по пространственному разрешению плотности порог дискриминации. Это позволяет исключить при измерении вклад естественной радиоактивности в зависимости от радионуклидов, содержащихся в исследуемом грунте, а также регулировать длину рабочего участка сцинтилляционного детектора, тем самым настраивая разрешение под требования задачи.

В датчике могут быть использованы неорганические, органические, пластические и жидкие сцинтилляционные материалы, что позволяет варьировать как габариты датчика, так и его стоимость.

Предложенная конструкция мюонного скважинного плотномера реализована в пилотном варианте (рис. 1.2). Плотномер имеет герметичный металлический корпус, рассчитанный под диаметр обсадной трубы 76 мм. В качестве сцинтилляционного материала использован  $NaJ(Tl)$ . В состав прибора включен фотоэлектронный умножитель ФЭУ-93 и усилитель-дискриминатор, выполненный на триггере Шмидта, выход которого согласован с блоком управления. Блок управления и регистрации представляет собой серийно выпускаемый счетчик импульсов от радиоизотопного плотномера ППГР-1. Питание плотномера осуществляется от портативного приборного аккумулятора 12 В, 3 А\*ч. Эксплуатационные характеристики макетного варианта опробованы при замере зависимости интенсивности потока мюонов от глубины, на воде.

Резюмируя достоинства переносного скважинного мюонного плотномера следует отметить:



Рис. 1.2: Фотография мюонного плотномера

- Экологическую и биологическую безопасность прибора и связанную с этим простоту эксплуатации при хранении, транспортировке. Отсутствие необходимости в согласованиях его использования с санитарно-эпидемиологическими службами.
- Простоту калибровки датчика, не требующей специальных приспособлений. Калибровку проводят в открытых естественных водоемах, на воде – жидкости с низким коэффициентом сжатия.
- Существенное снижение (до двух порядков) объема буровых работ за счет интегрального характера обследования, значимое особенно в случае дисперсионных грунтов.
- Практически приемлемую погрешность (порядка 3%) и продолжительность измерений (не более 60 минут для глубин до 20 м. в. э.).
- Компактную конструкцию прибора (длина 0.9 м, масса 7 кг) и простоту его эксплуатации в автономном режиме в течение 8 часов непрерывной работы.

## Глава 2

# Алгоритмы генерации и обработки данных

В этой главе описываются постановки задач аппроксимации данных, а также исследованные алгоритмы генерации синтетических данных и экстраполяции тарифовочных данных.

### 2.1 Подходы к аппроксимации функций

Метод наименьших квадратов — один из базовых методов для оценки неизвестных параметров моделей по набору данных, при этом исследуется на минимум следующая функция

$$s(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x)^2, \quad (2.1)$$

$\vec{p}$  — вектор оцениваемых параметров модели,  $\phi_i(x) = f(x_i, \vec{p}) - y_i$  — функция, аппроксимирующая значения  $y_i$  в точках  $x_i$ .

Во многих случаях существует аналитическое решение для системы  $M$  уравнений  $m \in [0..M]$

$$\sum_{t=1}^n (y_t - f(x_t, \vec{p})) \frac{\partial f(x_t, \vec{p})}{\partial b_m} = 0.$$

### 2.1.1 Постановка линейной задачи меньших квадратов

Если зависимость модели от параметров  $\vec{b}$  имеет вид

$$y_t = \sum_{j=1}^M p_j x_j + \epsilon_t = x_t^T b + \epsilon_t,$$

то такая задача называется линейной. Эта задача решается аналитически, её решение можно найти в книгах по статистике, например [7].

### 2.1.2 Нелинейная задача наименьших квадратов

В общем случае, решения системы дифференциальных уравнений нет и применяются численные методы решения оптимизационных задач, основанные на градиентном спуске.

### 2.1.3 Метод наименьших гиперболизированных нелинейных квадратов

Известно, что мягкое излучение поглощается в одном-двух метрах породы [8], мягкое излучение обладает меньшей проникающей способностью, чем мюоны, но оказывает влияние на измерение (статистическая погрешность), поэтому измерения небольших глубин (до нескольких метров) должно меньше учитываться для тарировки. Напротив, ошибки на больших глубинах должны больше учитываться, поскольку значение интенсивности меньше в разы (в  $e$  раз на 10 м. в. э.). Такими свойствами обладает Метод наименьших гиперболизированных нелинейных квадратов (МНГНК), минимизирующий следующую функцию:

$$s(\vec{p}) = \sum_{t=0}^N \left| \frac{f(x_t, \vec{p}) - y_t}{\min(|f(x_t, \vec{p})|, |y_t|)} \right|^2 \frac{100\%}{N} \rightarrow \min$$



## 2.2 Постановка задачи аппроксимации тарифовочных кривых

Качество обработки результатов измерения существенно влияет на погрешность получаемых результатов, которая в первую очередь определяется качеством восстановления зависимости интенсивности потока мюонов от глубины в м. в. э.

Тарифовочные данные, полученные при получении тарифовочной кривой на воде, показывают, что интенсивность потока мюонов падает монотонно с увеличением глубины, а первая производная интенсивности монотонно возрастает от отрицательных значений к нулю. Этот факт послужил основанием для отказа от сплайновой интерполяции, практикуемой ранее. Используя решение однородного уравнения переноса, имеющего экспоненциальный характер, было решено искать целевую функцию в виде суммы экспонент:

$$f(t) = \sum_{j=0}^M a_j \exp(-b_j t), a_j \geq 0, b_j \geq 0 \quad (2.2)$$

В качестве критерия была выбрана следующая норма (МНГНК):

$$s(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=0}^N \left| \frac{f(a_j, b_j, i) - y_i}{\min(f(a_j, b_j, i), y_i)} \right|^2 \frac{100\%}{N} \rightarrow \min \quad (2.3)$$

Данный критерий похож на взвешенную задачу наименьших квадратов нелинейных функций, в зарубежной литературе можно встретить название Weightened Non-Linear Least Squares Problem. Эта задача отличается от задачи минимизации наименьших квадратов делителем зависящим от номера измерения:

$$w(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=0}^N \frac{|f(a_j, b_j, i) - y_i|^2}{w_i} \rightarrow \min$$

Один из способов решения задачи — взвешивание измерений, и дальнейшее использование любого из существующих методов для нахождения наименьших квадратов нелинейных функций.

Однако, поскольку в методе МНГНК в знаменателе находится функция, зависящая от минимизируемых параметров, данный способ не работает. Упростим  $k$ -е слагаемое выражения (для краткости опустим постоянные множители  $N$ , 100%) :

$$\left| \frac{f(a_j, b_j, k) - y_k}{\min(f(a_j, b_j, k), y_k)} \right|^2 = \begin{cases} \left| 1 - \frac{y_k}{f(a_j, b_j, k)} \right|^2, & f(a_j, b_j, k) < y_k \\ \left| 1 - \frac{f(a_j, b_j, k)}{y_k} \right|^2, & f(a_j, b_j, k) > y_k \end{cases}$$

Таким образом, разбивая  $2M$ -мерное пространство параметров  $\vec{a}, \vec{b}$  на две области, мы можем сформулировать критерий в терминах задачи наименьших квадратов нелинейных функций. Рассмотрим кусочно-гладкую функцию  $\phi(\vec{a}, \vec{b})$ :

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \frac{y_k}{f(a_j, b_j, k)}, & f(a_j, b_j, k) < y_k \\ \frac{f(a_j, b_j, k)}{y_k}, & f(a_j, b_j, k) > y_k \end{cases}$$

Решая задачу о наименьших квадратах для функции  $\phi(\vec{a}, \vec{b})$  на постоянном векторе данных, заполненным единицами получаем решение для минимизации метода МНГНК, используя стандартные методы:  $v(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=0}^N \left| 1 - \phi(\vec{a}, \vec{b}) \right|^2 \rightarrow \min$

## 2.3 Генерация синтетических данных

Получение большого набора тестовых измерений (исходных данных для тарифовочных кривых) сопряжено с рядом трудностей. Поскольку плотномер находится в активной разработке, большую часть времени прибор недоступен для проведения тестовых измерений. Кроме того, примерное время серии измерений составляет около часа. Соответственно, для получения большого набора данных, время пропорционально растёт.

Ввиду перечисленных сложностей, предложено в качестве тестовых данных для алгоритмов использовать синтетические данные. Было рассмотрено два подхода моделирования данных – полная симуляция потока мюонов и генерация зашумленных данных на основе известной целевой функции (суммы монотонно убывающих экспонент).

### 2.3.1 Программный пакет MUSIC

В рамках работы был исследован ряд статей и монографий описывающих подходы и существующие решения по моделированию мюонов. В результате в качестве ПО для генерации потока мюонов был выбран программный пакет MUSIC (MUon SIMulation Code). Он обладает рядом достоинств — результаты его моделирования находятся в соответствии с экспериментальными данными в широкой области энергий от нескольких ГэВ до 1 ТэВ (тогда, как ряд моделей обладают недостатком мюонов в определенных областях энергий). Данный программный пакет доступен бесплатно, доступен его исходный код, автор пакета Кудрявцев В. А. [9] дал несколько советов по моделированию потока мюонов в среде.

Программный пакет MUSIC проводит моделирование в 3х измерениях с помощью метода Монте-Карло. Взаимодействие мюонов с материей с высокими потерями энергии рассматриваются как стохастические процессы. При этом учитываются угловое отклонение и смещение мюонов из-за множественного рассеяния на ядрах атомов, потери энергии на тормозное излучение и неупругое рассеяние. В данной работе для каждого тестового измерения проводилась симуляция 5000 мюонов и из статистики определялась вероятность выживания мюонов на заданной глубине. Для тестирования алгоритмов было проведено 34 серии измерений по 10 измерений в серии.

### 2.3.2 Генерация данных на основе целевой функции

Проверка алгоритмов на основе симуляции потока мюонов обладает одним недостатком — неизвестна зависимость флуктуаций от кривой зависимости интенсивности потока мюонов от глубины. По этой причине была проведена другая серия синтетических измерений. В этой серии из допустимого диапазона параметров случайно определялись параметры экспонент, определялся "поток мюонов" на глубине и затем к этим данным добавлялся шум в пределах 5% относительной погрешности.

## 2.4 Алгоритмы экстраполяции тарировочной кривой

В ходе работы были рассмотрены следующие алгоритмы:

- Прони-подобные алгоритмы
- Алгоритм Левенберга-Марквардта
- Модификация жадного алгоритма

Описание алгоритмов дается в соответствующих секциях

### 2.4.1 Алгоритм Прони

Алгоритм Прони был разработан Гаспаром Рише де Прони в 1795 году. Чаще всего этот метод рассматривается в качестве метода анализа сигналов (выделения экспоненциально-затухающих синусоидальных гармоник), но также может применяться и в других областях, например, при определении количества вещества в фармакинетике [10].

Подход метода Прони - в преобразовании экспоненциальных выражений к нелинейной алгебраической системе уравнений и дальнейшем преобразовании их в большее количество линейных алгебраических уравнений, которые могут быть решены методом наименьших квадратов. В предположении, что данные аппроксимируются суммой экспонент с  $2M$  неизвестными

$$f(t) = \sum_{j=0}^M a_j \exp(-b_j t) \quad (2.2)$$

Пусть  $\mu_j = \exp(-b_j)$ , тогда выражение (2.2) можно представить в виде

$$f(t) = a_0 \mu_0^t + a_1 \mu_1^t + \dots + a_m \mu_M^t \quad (2.4)$$

Метод Прони накладывает дополнительные ограничения на измерение данных — данные должны измеряться с равными интервалами и количество точек измерений  $N \geq 2M$ . В общем случае абсциссы данных

перенормируются  $t \rightarrow k = 0 \dots N - 1$ , в случае с экспериментальными данными мюонного плотномера перенормировка не требуется, т. к. измерения на воде проводятся каждый метр, начиная от уровня поверхности воды (нулевая глубина). После подстановки получаем:

$$\begin{aligned}
f_0 &\approx a_0\mu_0^0 + a_1\mu_1^0 + \dots + a_M\mu_{M-1}^0 \\
f_1 &\approx a_0\mu_0^1 + a_1\mu_1^1 + \dots + a_M\mu_{M-1}^1 \\
f_2 &\approx a_0\mu_0^2 + a_1\mu_1^2 + \dots + a_M\mu_{M-1}^2 \\
&\vdots \\
f_{N-1} &\approx a_0\mu_0^{N-1} + a_1\mu_1^{N-1} + \dots + a_M\mu_{M-1}^{N-1}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для разрешения этой нелинейной системы алгебраических уравнений, введем временную переменную  $\mu$  и составим уравнение:

$$(\mu - \mu_0)(\mu - \mu_1) \dots (\mu - \mu_{M-1}) = 0, \tag{2.6}$$

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}$  — корни алгебраического уравнения

$$\alpha_0\mu^M + \alpha_1\mu^{M-1} + \alpha_2\mu^{M-2} + \dots + \alpha_{M-1}\mu^1 + \alpha_M\mu^0 = 0. \tag{2.7}$$

В уравнении (2.7)  $\alpha_i = f(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1})$  — неизвестные коэффициенты, которые можно получить из системы  $N - M$  уравнений

$$\begin{aligned}
f_M\alpha_0 + f_{M-1}\alpha_1 + f_{M-2}\alpha_2 + \dots + f_0\alpha_M &\approx 0 \\
f_{M+1}\alpha_0 + f_M\alpha_1 + f_{M-1}\alpha_2 + \dots + f_1\alpha_M &\approx 0 \\
&\vdots \\
f_{N-1}\alpha_0 + f_{N-2}\alpha_1 + f_{N-3}\alpha_2 + \dots + f_{N-M-1}\alpha_M &\approx 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Значения  $f_i$  определены из результатов измерений, и поскольку  $N \geq 2M$ , данная система является переопределенной линейной системой уравнений.

После определения коэффициентов  $\alpha_i$ , коэффициенты  $\mu_i$  (и соответствующие им коэффициенты  $b_i$ ) находятся как корни полинома (2.4). После подстановки коэффициентов  $\mu_i$  в (2.5) получаем еще одну переопределенную линейную систему с неизвестными коэффициентами

$a_0, a_1, \dots, a_M$ , которую также можно разрешить с помощью метода наименьших квадратов.

Данный алгоритм имеет следующие модификации — Алгоритмы Кунга, Зейгера-МакЕвена, Осборна [11–13], которые были реализованы на языке octave и протестированы на экспериментальных и синтетических данных вместе с оригинальным алгоритмом. В результатах при аппроксимации двумя и более экспонентами при решении полинома (2.4) возникают комплексные  $\mu_i$ , которым соответствуют синусоидальные гармоники, что противоречит физической модели измерения.

По этой причине, в дальнейшем, данное семейство алгоритмов не рассматривается.

## 2.4.2 Модификация жадного алгоритма

Аппроксимация проводится в два этапа. На первом этапе находятся базовые экспоненты интерполяции. Поиск базовых экспонент проводится перебором настроечного  $\delta$  — параметра, начиная с экспоненты с наименьшим значением  $b_i$ . Экспонента строится по двум точкам, так, чтобы она проходила через крайнюю правую тарировочную точку  $(x_j, y_j)$  и точку, расположенную ниже следующей тарировочной точки  $(x_{j-1}, y_{j-1})$  на величину, задаваемую настроечным  $\delta$ -параметром. Если коэффициенты  $a_i, b_i$  удовлетворяют условию (2.2), то найденная экспонента вычитается из исходной кривой. Если значения полученной кривой положительны, то для нее запускается новая итерация. В противном случае найденная экспонента бракуется и делается новая попытка построить экспоненту, но уже с использованием следующей точки  $(x_{j-2}, y_{j-2})$ . После завершения процедуры, применяется метод МНГНК (2.3). В случае нахождения нового минимума решение фиксируется. Решение ищется для  $\delta$ -параметра, лежащего в диапазоне  $[\delta_{min}; \delta_{max}]$ .

На втором этапе проводится оптимизация степенных коэффициентов, найденных экспонент. Как и на первом этапе, оптимизация проводится по методу МНГНК.

Подробнее работа алгоритма изображена на блок-схеме (рис. 2.1)

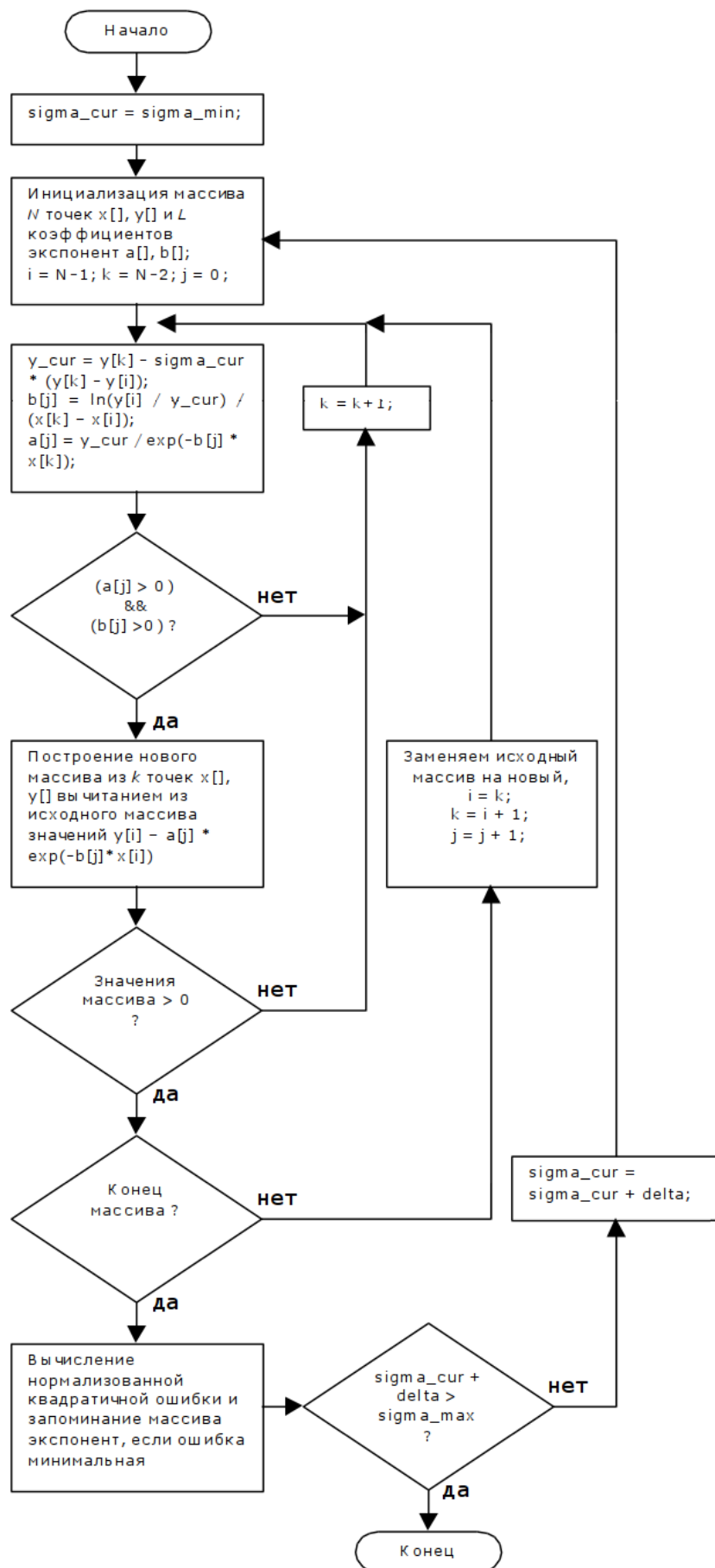


Рис. 2.1: Блок-схема жадного алгоритма

### 2.4.3 Алгоритм Левенберга-Марквардта

Алгоритм Левенберга-Марквардта используется для оптимизации функций вида:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x)^2, \quad (2.1)$$

при этом используется алгоритм градиентного спуска:

1. Задается начальное приближение  $\vec{x}_0$  и точность расчета  $\epsilon$ ;
2. Рассчитывается  $x_{i+1}^{\vec{}} = \vec{x}_i - \gamma \nabla F(\vec{x}_i)$ ;
3. Проверяются условия  $|\vec{x}_{i+1}^{\vec{}} - \vec{x}_i| > \epsilon, |F(x_{i+1}^{\vec{}}) - F(\vec{x}_i)| > \epsilon$  если условия верны, то  $i = i + 1$  и выполняется шаг 2, иначе итоговый вектор  $\vec{x} = x_{i+1}^{\vec{}}$ .

Обозначим через  $J(x)$   $m \times n$ -матрицу Якоби для  $f(x)$  и пусть  $G_i(x)$  — матрица Гессе для  $f_i(x)$ . Тогда выражения для градиента  $g(x)$  и матрицы Гессе  $G(x)$  функции (2.1) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) &= J(x)^T f(x); \\ G(x) &= J(x)^T J(x) + \sum_{i=1}^M f_i(x) G_i(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обозначим через  $x_k$  текущую оценку решения задачи минимизации функции (2.1), тогда ньютоновская система в силу (2.9) примет вид:

$$(J_k^T J_k + Q_k) p_k = -J_k^T f_k. \quad (2.10)$$

Её решением будет вектор  $p_N$  — ньютоновское направление. В случае алгоритма Ньютона-Гаусса, оно аппроксимируется решением системы

$$(J_k^T J_k) p_k = -J_k^T f_k. \quad (2.11)$$

Данная задача разрешима и включает только первые производные от  $f$ .

В алгоритме Левенберга-Марквардта направление поиска определяется, как решение системы уравнений вида:



$$(J_k^T J_k + \lambda_k I) p_k = -J_k^T f_k, \quad (2.12)$$

$\lambda_k$  - некоторое неотрицательное число. В этом методе шаг вдоль  $p_k$  всегда полагается единичным, т.е. очередная точка  $x_{k+1} = x_k + p_k$ . Монотонное убывание минимизируемой функции достигается за счет подбора «хороших» значений  $\lambda_k$ . При  $\lambda_k = 0$ , направление будет направлением Гаусса-Ньютона, когда  $\lambda_k \rightarrow \infty$  норма  $p_k$  стремится к нулю, и вектор  $p_k$  в пределе становится параллельным антиградиенту. Неравенство  $F(x_k + p_k) < F_k$  можно обеспечить выбрав  $\lambda_k$  достаточно большим. Однако при этом теряется информация о кривизне, и проявляются недостатки метода градиентного спуска — в места пологого наклона необходимо делать большие шаги, чем в случае с крутым наклоном. Марквардт ввел модификацию в алгоритм Левенберга, учитывающую кривизну

$$(J_k^T J_k + \lambda_k \text{diag}\{J^T(\vec{x}_k) J(\vec{x}_k)\}) p_k = -J_k^T f_k. \quad (2.13)$$

Затем с вектором  $p_N$  проводится процедура градиентного спуска.

Главный недостаток алгоритма Левенберга-Марквардта — сильная зависимость результатов от  $\vec{x}_0$ . В итоговом алгоритме в качестве начальных оценок используются метод перебора параметров аппроксимации и результаты модифицированного жадного алгоритма.

## 2.4.4 Тестирование алгоритмов

Исследованные алгоритмы были реализованы на языках octave (Левенберг-Марквардт, Прони), Python (Численный перебор параметров), LabVIEW (модификация жадного алгоритма). Алгоритмы были протестированы на 68 сериях измерений по 10 измерений в каждой серии. 34 серии были сгенерированы с помощью метода Монте-Карло, 34 с помощью генерации целевых функций.

Результаты тестирования представлены на графике (рис. 2.2)

На данном графике по оси абсцисс отображены номера серий измерений (от 0 до 33), по оси ординат — значения ошибок на данных при полученных параметрах экспонент.

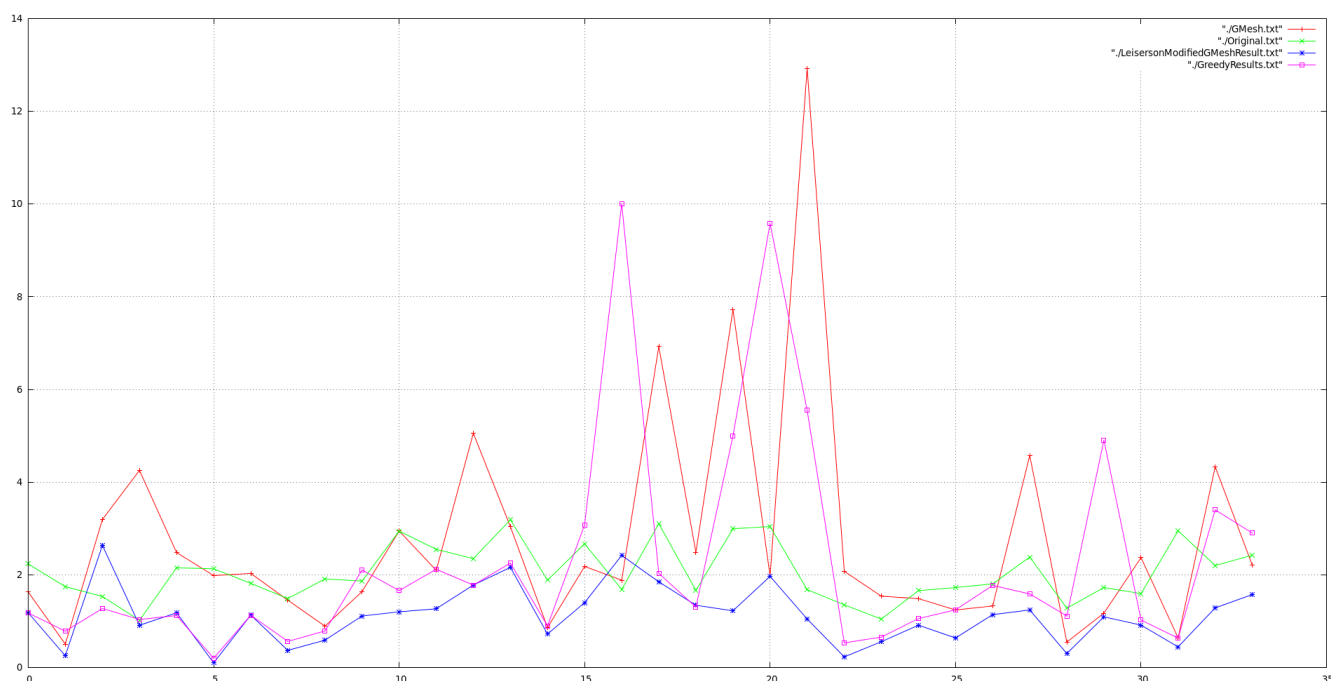


Рис. 2.2: Результаты тестирования на алгоритмах

На уровне около 2% находится график оригинальных экспонент без шума. В среднем, алгоритм Левенберга-Марквардта получает результат лучший, чем оригинальные экспоненты, однако на ряде точек перебор параметров и модификация жадного алгоритма показывают меньшую погрешность. По этой причине был предложен и реализован комбинированный алгоритм.

## 2.4.5 Комбинированный алгоритм

Предложенный комбинированный алгоритм состоит из двух частей:

В первой части вычисляются начальные оценки  $a_i, b_i$  параметров экспонент с помощью численного перебора и модификации жадного алгоритма. Далее вычисленные значения передаются в качестве первичных оценок в алгоритм Левенберга-Марквардта и модифицированный алгоритм Левенберга-Марквардта. Затем, из первичных оценок и результатов работы алгоритмов выбираются параметры экспонент, на которых норма (2.3) принимает минимальное значение, эти параметры возвращаются в качестве результата работы алгоритма (рис. 2.3).

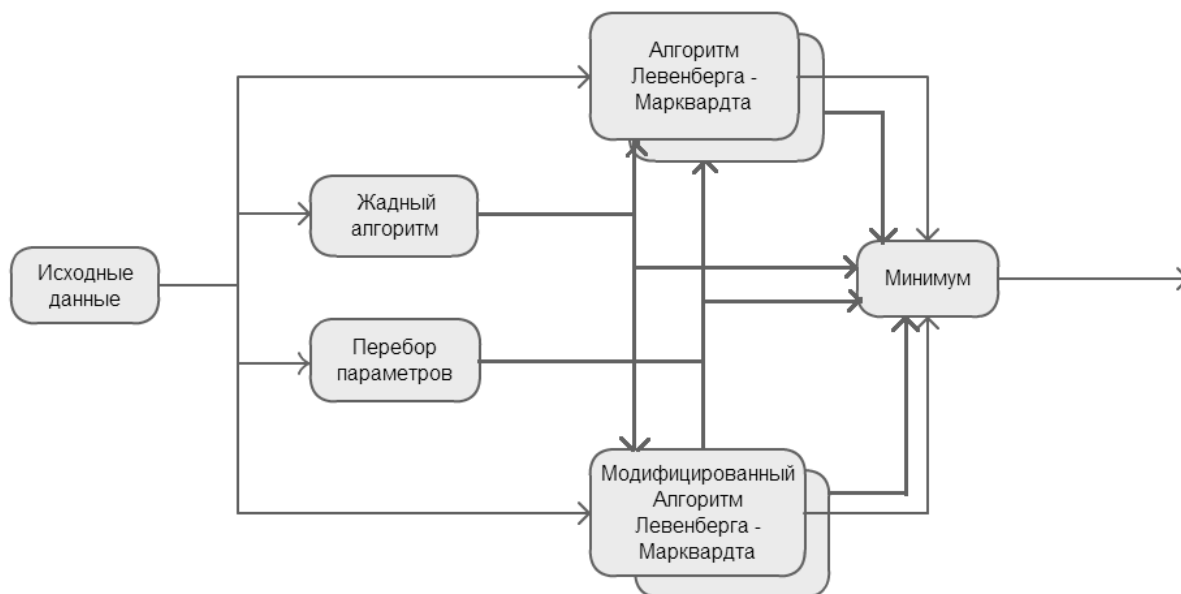


Рис. 2.3: Схема комбинированного алгоритма

## 2.5 Архитектура системы автоматизации обработки данных

На данный момент измерительная система состоит из погружаемой части плотногомера, блока управления и АРМ оператора. Измерительная часть плотногомера состоит из металлического кожуха, сцинтиллятора, фото-электронного умножителя и усилителя сигнала, соединенного посредством длинной линии с блоком управления. В блоке управления плотногомером находится кнопка запуска/сброса, встроенный таймер на 5 минут и счетчик мюонов с дисплеем.

Оператор системы собирает показания прибора и сохраняет их в файл, который передается на АРМ оператора. АРМ оператора — программный комплекс, установленный стационарном или мобильном компьютере. АРМ имеет два режима работы — режим тарировки, в котором доступны следующие операции:

1. Загрузка/модификация тарировочных данных;
2. Построение тарировочной кривой;
3. Ручная подстройка параметров;

#### 4. Сохранение тарировочной кривой.

В режиме измерения плотности грунта по заданым глубине и плотности потока мюонов определяется плотность грунта.

Построение тарировочных кривых по аппроксимационным данным выполняется с помощью комбинированного алгоритма описанного в секции [2.4.5](#).

В пилотном варианте управление измерением и спуск измерительной части прибора производится вручную, однако в следующей итерации разработки будет реализована и автоматизации управления плотномером. В этом варианте в измерительную систему добавляется регулирование высоты измерения, а управление производится через АРМ оператора, который соединен интерфейсом RS-432.

Данная архитектура обладает рядом преимуществ. Она позволяет учитывать погрешности при измерениях потока мюонов, используя время измерения. При определении плотности породы на заданной глубине, возможно использование совокупности предыдущих измерений и тарировочной кривой, что уменьшит время измерения на больших глубинах. Кроме того, становится возможна реализация автоматического режима измерений, когда пользователем задаются приемлемые значения плотности, погрешности и максимальная глубина, а АРМ оператора управляет двигателем и измерительной частью прибора для получения серии измерений плотности породы.

## Глава 3

# Реализация системы обработки данных

### 3.1 Комбинированный алгоритм

Программная реализация алгоритмов мюонного скважинного плотномера выполнена с использованием программного пакета LabVIEW, библиотеки, написанной на языке C++ и алгоритмах, основанных на градиентном спуске, реализованных на матричном языке octave [14, 15].

Язык octave обладает богатым функционалом и оптимизирован для матричных вычислений, которые возникают при реализации алгоритмов Левенберга-Марквардта и модифицированного алгоритма Левенберга-Марквардта. Алгоритмы принимают в качестве аргументов функцию и её матрицу Якоби. По условиям метода МНГНК число экспонент неизвестно, поэтому скрипты для octave, содержащие

- Целевую функцию;
- Матрицу Якоби;
- Аппроксимируемые данные;
- Начальные оценки для неизвестных коэффициентов аппроксимации

генерируется с помощью библиотеки, написанной на C++. В качестве начальных оценок для коэффициентов аппроксимации используются ре-

зультаты работы модификации жадного алгоритма и численного перебора параметров аппроксимируемой функции.

Библиотека является прослойкой между octave и LabVIEW, реализует метод перебора параметров по оцениваемой функции с помощью библиотеки параллельных вычислений OpenMP [16]. У коэффициентов  $a_i$  используется равномерный шаг  $[0..N/MAXSTEPS]$ , у  $b_i$  экспоненциальный  $[10 \exp^{(-10i)/MAXSTEPS}]$ , где  $i \in [-MAXSTEPS+1..1]$ . Данные шаги выбраны исходя из эвристического анализа – коэффициенты  $a_i$  не превышают максимальной интенсивности, а у коэффициентов  $b_i$  присутствует экспоненциальная гармоника, резко убывающая на первых нескольких метрах измерения.

C++ библиотека генерирует 4 скриптовых файла с различными вариантами запуска алгоритмов и начальных данных, запускает интерпретатор octave, сравнивает исходные данные с результатами выполнения алгоритмов и передает в интерфейс оператора параметры экспонент, на которых метод МНГНК получает минимальное значение ошибки.

В программе, написанной на LabVIEW библиотека представлена компонентом, который используется внутри цикла «Подстройки Параметров». В подстройке параметров используется модификация градиентного спуска для выбора наилучших коэффициентов  $b_i$ . По завершении оптимизации параметров, результаты передаются в C++ библиотеку и цикл впадает в состояние ожидания до тех пор, пока библиотека не вернет итоговые результаты комбинированного алгоритма.

Схема блока подстройки параметров и пример скрипта на octave приведены в Приложении А.

## 3.2 Интерфейс оператора

На (рис. 3.1) представлен интерфейс оператора по вводу и обработке тарифовочных данных. Тарифовочные данные вводятся таблично. После введения данных проводится контроль их корректности и проверяется условие на монотонность производной. При запуске начальной аппроксимации (кнопка «Аппроксимировать») отображается аппроксимационная

кривая с наименьшей погрешностью, график погрешности в зависимости от текущего параметра и значение погрешности. Аппроксимация выполнена с помощью модификации жадного алгоритма. При запуске комбинированного алгоритма (кнопка «Подстройка Параметров») отображается график изменения погрешности, найденные компоненты аппроксимирующей суммы экспонент и числовое значение погрешности. Корректировка настроек алгоритма начальной аппроксимации и комбинированного алгоритма производится через переключатели «Изменить настройки» и «изменить коэффициенты» соответственно. Переход на экран обработки измерений производится по кнопке «Перейти на другой экран». Действия оператора по изменению данных и их сохранению контролируются. По выходу из программы (кнопка «Конец работы») проверяется, есть ли несохраненные изменения, и в случае наличия таковых, оператору предлагается их сохранить.

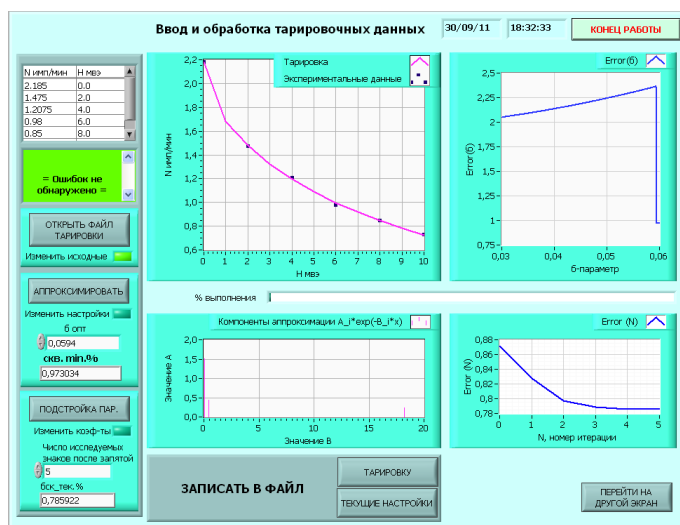


Рис. 3.1: Интерфейс оператора по вводу и обработке тарифовочных данных

Интерфейс оператора по обработке измерений (рис. 3.2) предоставляет возможность ввода измеренных данных, проверку их корректности, а также, графическое и табличное отображение результатов обработки. Введенные данные измерений и результат обработки можно сохранить в файле, а также, вывести на принтер (кнопка «Распечатать») или скопировать для экспорта в другое приложение (кнопка «Копировать в буфер обмена»).

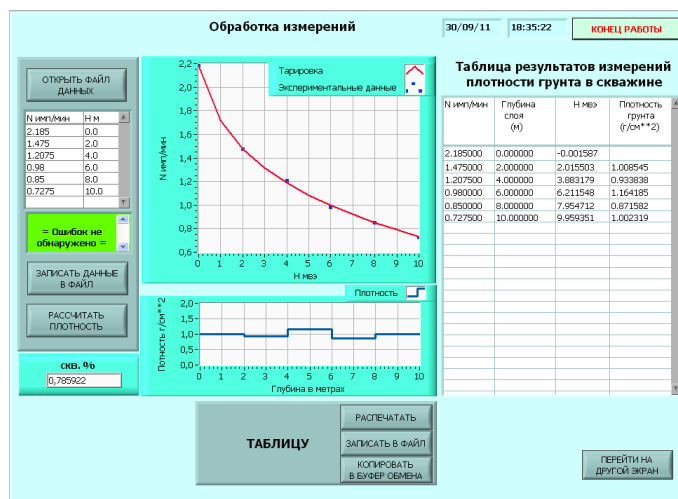


Рис. 3.2: Интерфейс оператора по обработке измеренных данных

При анализе структуры созданного ПО выявлена возможность более тесной интеграции с пультом управления. Это позволило бы автоматизировать ввод данных, их оперативный обсчет и управление временем измерений.

### 3.3 Метод определения неоднородностей в почве

При проведении серии измерений, мюонный плотномер погружается в скважину и измеряет плотность потока мюонов на разных глубинах. На результаты измерения влияют все предыдущие измеренные слои породы. Эта информация содержится в предыдущих измерениях и может быть использована для уменьшения погрешности текущего измерения или для пространственной локализации неоднородностей.

В данной секции рассматривается метод определения неоднородностей в почве на основе серии измерений.

Были приняты следующие ограничения модели:

- Неоднородностью поверхности (напр. строительной площадки) можно пренебречь, и использовать бесконечную плоскость;
- Плотность потока мюонов одинакова на всей поверхности площади;



- Поток мюонов ослабляется в  $\exp^{-r\rho}$  с увеличением пути, пройденного мюоном, где  $r$  — путь до детектора, а  $\rho$  — плотность породы
- Принимается приближение точечного детектора [17] и бесконечного источника мюонов;
- Задача имеет цилиндрическую симметрию.

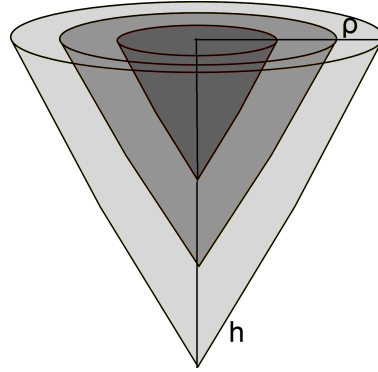


Рис. 3.3: Схематичное отображение измеряемых объемов

При заданных ограничениях можно оценить эффективный угол, который получает 95% измеренной величины потока мюонов

$$I(x) = 2\pi \int_0^{r_{eff}} \exp(-\rho\sqrt{r^2+h^2})r^2 dr \quad (3.1)$$

Данный интеграл не имеет аналитического решения и  $r_{eff}$  вместе с соответствующим ему  $\theta_{eff}$  может быть оценен численно для характерных глубин. Для  $h = 0$  величина  $\theta_{eff} = \pi/2 - \pi/12$ .

Можно оценить численно объем измеренной породы в виде конуса с образующим углом  $\theta_{eff}$ :  $V = \frac{1}{3}h^2 \cot \theta_{eff}$

Из величины интенсивности потока мюонов на заданной глубине, по тарировочной кривой можно получить плотность породы в заданном объеме. При серии измерений конусы оказываются вложенными друг в друга, при этом можно получить среднюю плотность в каждом из них. Вычитая массу и объем  $i$ -го конуса из  $i + 1$ -го получаем:

$$p_{i+1} = \frac{1}{3} \frac{\rho_{i+1} (h+1)^2 \cot \theta_{i+1} - \rho_i h^2 \cot \theta_i}{(h+1)^2 \cot \theta_{i+1} - h^2 \cot \theta_i} \quad (3.2)$$

Корректированные значения  $p_{i+1}$  показывают среднюю плотность между  $i$  и  $i + 1$ -ми конусами, что позволяет выявлять неоднородности и локализовать их в меньшем объеме. Однако, данный метод не позволяет определить где именно находится неоднородность, а только указать цилиндрически-симметричный слой, в котором следует проводить поиски неоднородности.

Метод может быть расширен на случай с несколькими сериями пространственно разделенных измерений. При наличии частичного перекрытия, перекрывающийся объем учитывается по несколько раз. Применяя аналогичную итерационную схему можно рассчитать среднюю плотность породы между вложенными конусами, а также в местах перекрытия, что избавляет измерения от цилиндрической симметрии. При попадании неоднородности в места перекрытия, её положение явно определяется, в других случаях — сокращается область поиска за счет области перекрытия.

# Заключение

Была разработана АРМ оператора переносного мюонного плотномера, позволяющий автоматически строить тарифовочные кривые с погрешностью аппроксимации на уровне 2%. Система позволяет определять по тарифовочным данным и измерению потока мюонов плотность породы в объеме.

Разработан комбинированный алгоритм, аппроксимирующий тарифовочные кривые и минимизирующий оценку Зюбина-Петухова. Оценен эффективный объем, в котором проводится измерение плотности грунта. Был разработан метод измерения плотности, использующий данные серии измерений с целью уменьшения погрешности и локализации неоднородностей.

На данный момент разработан пилотный вариант мюонного плотномера, в дальнейшем планируется: добавить автоматическое управление прибором и процессом измерения, реализовать метод поиска неоднородностей.

## Список публикаций по теме работы

1. Зюбин В. Е. , Сизов М. М. : «Алгоритм аппроксимации тарифовочных данных переносного плотномера» XVII Международная открытая научная конференция «Современные проблемы информатизации-2013»
2. Сизов М. М. : «Разработка алгоритма построения тарифовочной кривой для переносного мюонного плотномера» 51 Международная Научная Студенческая Конференция

# Литература

- [1] 5180-84 ГОСТ. “Грунты. Методы лабораторного определения физических характеристик.” // Москва. 1984.
- [2] “Основы нормирования и обеспечения требуемой степени уплотнения земляного полотна автомобильных дорог” // Государственный дорожный научно-исследовательский институт ФГУП «СОЮЗДОРНИИ» Москва. 2002.
- [3] “ Метод обнаружения поглощения гамма-квантов при прохождении их через азотосодержащее вещество” / Вострецов А. Г., Бурдаков А. В., Радченко С. Е. [и др.] // Автометрия. 2010. Т. 46. С. 22–29.
- [4] 23061-90 ГОСТ. “Грунты. Методы радиоизотопных измерений плотности и влажности.” // Москва. 1990.
- [5] Патент RU 2375695 С1. “Датчик мю-мезонного скважинного плотномера” / Миронов В. С., Петухов В. Д., Гензе П. А. [и др.] // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. 2008.
- [6] Зацепин Г. Т. “Ядерно-каскадный процесс и его роль в развитии широких атмосферных ливней”. Докл. АН СССР, 1949. Т. 67. с. 993–996.
- [7] Линник Ю. В. “Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений”. 1962.
- [8] Бондаренко В. М. “Использование космических лучей в геологии” / под ред. Проф. А. Г. Тархов. Недра, 1965. С. 18–19 and 62–65.

- [9] Kudryavtsev V. A. “Muon transport code: MUSIC home page” // <http://kudryavtsev.staff.shef.ac.uk/>.
- [10] Fuite J., Marsh R. E., Tuszynski J. A. “An Application of Prony’s Sum of Exponentials Method to Pharmacokinetic Data Analysis.” // Communications in computational physics. 2007. T. 2. C. 87–88.
- [11] Kung S. Y. “A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition” // 12th Asilomar Conf on Circuits, Systems and Comp.(Asilomar, CA). 1978. C. 705–714.
- [12] Zeiger H. P., McEwen A. J. “Approximate linear realizations of given dimension via Ho’s algorithm” // IEEE Trans. Automat. Cont. 1974. T. AC-19. c. 153.
- [13] Osborn M. R., Smyth G. K. “A modified Prony algorithm for exponential function fitting” // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995.
- [14] Страуструп Б. “Язык программирования C++”. Бином, 2011.
- [15] Eaton J. W. “GNU Octave” // <http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/index.html>.
- [16] “OpenMP Specifications” // <http://openmp.org/wp/openmp-specifications/>.
- [17] Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. “Введение в теорию прохождения частиц через вещество”. Атомиздат, 1978. С. 5–18.