Taller ecuaciones en diferencias

1) Una bomba de vacio elimina un tercio del aire restante en un Cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿Después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?

$$a_n = \frac{2}{3} a_{n-1}$$ → Esta ecuación permite calcular el aire restante después de un numero de acciones

$$a_n = K \cdot \frac{2}{3}^n$$

Ahora para encontrar el valor de n, para el cuál:

$$\frac{2}{3}^n = 1/1000000$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n = \ln(1/1000000)$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(1/1000000)$$

$$n = \frac{\ln(1/1000000)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$n \approx 34$ → Despues de aproximadamente 34 acciones hay 1/1000000 del aire inicial

2) Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situacion. Resuelvala y encuentre la población en 15 años asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Que tiempo tomara que la población alcance 750 millones?

Tasa: $\frac{25}{1000} = 0.025$

$$a_{n+1} = a_n + 0.025\, a_n$$

$$a_{n+1} = a_n(1 + 0.025)$$

Suponiendo que existe una solución de la forma:

$$a_n = (1+0.025)^n . a_0$$

sustituyendo esta solución en la ecuación:

$$a_{n+1} = a_n (1+0.025)^n$$

$$(1+0.025)^{n+1} . a_0 = (1+0.025)^n a_0 (1+0.025)$$

$$\cancel{(1+0.025)^n} . (1+0.025) . a_0 = \cancel{(1+0.025)^n} . a_0 (1+0.025)$$

$$(1+0.025) a_0 = (1+0.025) a_0$$

la suposición inicial es correcta con $a_0 = 200$

Entonces, la población en 15 años:

$$a_{15} = (1+0.025)^{15} . 200$$

$$a_{15} = 289.65 \text{ millones}$$

~ que tiempo tomara que la población alcance 750 millones?

$$(1+0.025)^n . 200 = 750$$

$$(1+0.025)^n = \frac{750}{200}$$

$$(1+0.025)^n = 3.75$$

$$\ln (1+0.025)^n = \ln (3.75)$$

$$n . \ln (1+0.025) = \ln (3.75)$$

$$n = \frac{\ln (3,75)}{\ln (1+0.025)}$$

$$n \approx 53,52 \text{ Años}$$

3) Resuelva

- $a_n = 4a_{n-1} - 1$ para $n \geq 2$.

Parte homogenea:

$$a_n = 4a_{n-1}$$

$$a_n^H = K . 4^n$$

Solucion particular propuesta:

$$a_n^P = B$$

Reemplazando en la ecuacion original:

$$K.4^n + B = 4(K.4^{n-1} + B) - 1$$
$$K 4^n + B = 4K 4^{n-1} + 4B - 1$$
$$K 4^n + B = 4K.4^n 4^{-1} + 4B - 1$$
$$K.4^n + B = \cancel{4}K.4^n . \frac{1}{\cancel{4}} + 4B - 1$$
$$\cancel{K 4^n} + B = \cancel{K 4^n} + 4B - 1$$
$$B = 4B - 1$$
$$B - 4B = -1$$
$$-3B = -1$$
$$B = \frac{1}{3}$$

Solucion general:

$$a_n = K.4^n + \frac{1}{3}$$

- $a_n = 3a_{n-1} + 2$ para $n \geq 2$

parte homogenea:

$a_n = 3a_{n-1}$

$a_n^H = K.3^n$

Solucion particular propuesta

$a_n^P = B$

Reemplazando en la ecuación original

$$K.3^n + B = 3(K.3^{n-1} + B) + 2$$
$$K.3^n + B = 3K.3^n.3^{-1} + 3B + 2$$
$$K.3^n + B = \cancel{3}K.3^n.\frac{1}{\cancel{3}} + 3B + 2$$
$$\cancel{K 3^n} + B = \cancel{K 3^n} + 3B + 2$$
$$B = 3B + 2$$
$$B - 3B = 2$$
$$-2B = 2$$
$$B = -1$$

Solucion general:

$$a_n = K \cdot 3^n - 1$$

4) Encuentre la solucion general para las siguientes ecuaciones

- $a_n + 4a_{n-1} + 3 = 0$ para $n \geq 1$

parte homogenea:

$a_n + 4a_{n-1} = 0$

$a_n = -4a_{n-1}$

$a_n^H = K \cdot -4^n$

solucion particular propuesta

$a_n^P = B$

Reemplazando en la ecuacion original.

$$K \cdot -4^n + B = -4(K \cdot -4^{n-1} + B) - 3$$

$$K \cdot -4^n + B = -4K \cdot -4^n \cdot -4^{-1} - 4B - 3$$

$$K \cdot -4^n + B = \cancel{-4}K \cdot -4^n \cdot \frac{1}{\cancel{-4}} - 4B - 3$$

$$\cancel{K \cdot -4^n} + B = \cancel{K \cdot -4^n} - 4B - 3$$

$$B = -4B - 3$$

$$B + 4B = -3$$

$$5B = -3$$

$$B = -3/5$$

Solucion general:

$$a_n = K \cdot -4^n - \frac{3}{5}$$

- $a_n + 2a_{n-1} - 13 = 0$

parte homogenea

$a_n = -2a_{n-1}$

$a_n^H = K \cdot -2^n$

solucion particular propuesta

$a_n^P = B$

Reemplazando en la ecuacion original:

$$K.-2^n+B = -2(K.-2^{n-1}+B)+13$$

$$K.-2^n+B = -2K.-2^n.-2^{-1}-2B+13$$

$$K.-2^n+B = -\cancel{2}K.-2^n.\frac{1}{-\cancel{2}} -2B+13$$

$$\cancel{K.-2^n}+B = \cancel{K.-2^n} -2B+13$$

$$B = -2B+13$$

$$B+2B = 13$$

$$3B = 13$$

$$B = \frac{13}{3}$$

Solucion general:

$$a_n = K.-2^n + \frac{13}{3}$$

5) Encuentre las soluciones particulares para:

- $a_n = 3a_{n-1} + 5$ para $n \geq 1$ $a_0 = 1$

parte homogenea:

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_n^H = K.3^n$$

solucion particular propuesta

$$a_n^P = B$$

Reemplazando en la ecuacion original

$$K.3^n+B = 3(K.3^{n-1}+B)+5$$

$$K.3^n+B = 3K.3^n.3^{-1}+3B+5$$

$$K.3^n+B = \cancel{3}K.3^n.\frac{1}{\cancel{3}}+3B+5$$

$$\cancel{K.3^n}+B = \cancel{K.3^n}+3B+5$$

$$B = 3B+5$$

$$-2B = 5$$

$$B = -\frac{5}{2}$$

Escaneado con CamScanner

Solucion general:

$$a_n = k\ 3^n - \frac{5}{2}$$

Solucion particular

$a_0 = 1$

$1 = k . 3^0 - \frac{5}{2}$

$1 = k - \frac{5}{2}$

$1 + \frac{5}{2} = k$

$\frac{7}{2} = k \longrightarrow a_n = \frac{7}{2} . 3^n - \frac{5}{2}$

- $a_n = -2a_{n-1} + 6$ para $n \geq 2$ $\quad a_1 = 3$

parte homogenea

$a_n = -2a_{n-1}$

$a_n^H = k . -2^n$

solucion particular propuesta

$a_n^P = B$

Reemplazando en la ecuacion original

$$k . -2^n + B = -2(k . -2^{n-1} + B) + 6$$

$$k . -2^n + B = -2k . -2^n . -2^{-1} - 2B + 6$$

$$k . -2^n + B = -\cancel{2}k . -2^n . \frac{1}{-\cancel{2}} - 2B + 6$$

$$\cancel{k . -2^n} + B = \cancel{k . -2^n} - 2B + 6$$

$$B = -2B + 6$$

$$B + 2B = 6$$

$$3B = 6$$

$$B = 6/3$$

$$B = 2$$

Solucion general:

$$a_n = k . -2^n + 2$$

solucion particular

$a_1 = 3$

$3 = k \cdot -2^1 + 2$

$3 = -2k + 2$

$3 - 2 = -2k$

$1 = -2k$

$-\frac{1}{2} = k \longrightarrow a_n = \frac{-1}{2} \cdot -2^n + 2$

6) Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a

7, 17, 37, 77, 157

$a_n = 2a_{n-1} + 3$ con $a_0 = 7$

parte homogenea

$a_n = 2a_{n-1}$

$a_n^H = k \cdot 2^n$

solucion particular propuesta

$a_n^P = B$

Reemplazando en la ecuación original

$(k \cdot 2^n) + B = 2(k \cdot 2^{n-1} + B) + 3$

$k \cdot 2^n + B = 2k \cdot 2^n \cdot 2^{-1} + 2B + 3$

$k \cdot 2^n + B = \cancel{2}k \cdot 2^n \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 2B + 3$

$\cancel{k \cdot 2^n} + B = \cancel{k \cdot 2^n} + 2B + 3$

$B = 2B + 3$

$B - 2B = 3$

$-1B = 3$

$B = \frac{-3}{1}$

$B = -3$

Solucion general:

$a_n = k \cdot 2^n - 3$

Solucion particular:

$$a_0 = 7$$

$$7 = K \cdot 2^0 - 3$$

$$7 = K - 3$$

$$7 + 3 = K$$

$$10 = K \longrightarrow a_n = 10 \cdot 2^n - 3$$

7) Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21% por año.

$$\text{Tasa} = \frac{21}{12} = 1.75$$

$$a_n = a_{n-1} + 0.0175\, a_{n-1} - C$$

$$a_n = a_{n-1}(1 + 0.0175) - C$$

$$a_n = 1.0175\, a_{n-1} - C$$

$$a_n = K^n a_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K - 1}$$

$$\longrightarrow a_n = 1.075^n \cdot a_0 - \frac{C(1{,}0175^n - 1)}{1.0175 - 1}$$

$$a_n = 1.0175^n \cdot a_0 - \frac{C \cdot 10.000\,(1.0175^n - 1)}{0.0175 \cdot 10.000}$$

$$a_n = 1.0175^n \cdot a_0 - \frac{10.000\, C\, [1{,}0175^n - 1]}{175}$$

$$a_n = 1.0175^n \cdot a_0 - 57{,}14C(1{,}0175^n - 1)$$

- $a_0 = 400$

  $a_{36} = 0$

$$0 = 1.0175^{36} \cdot 400 - 57{,}14\, C\, (1{,}0175^{36} - 1)$$

$$C = \frac{1.0175^{36} \cdot 400}{57{,}14\,(1{,}0175^{36} - 1)}$$

$$C \approx 15.07 \text{ millones de cuota mensual}$$

8) Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. las ordenes (uso de cafe) permanecen en 1600 toneladas por mes ¿Cuanto cafe se puede apilar despues de un periodo de 12 meses, despues de un periodo de 2 años?

Para calcular la cantidad de cafe apilada en un mes n, podemos usar la siguiente ecuación:

$$a_n = 2000(1+0.01)^n - 1600$$

$$a_0 = 400$$

Ahora, para conocer la cantidad de cafe apilado despues de un periodo de 12 meses y 2 años, sumamos los valores:

$$a_0 + \dots a_{12} \approx 6165 \text{ Toneladas}$$

$$a_0 + \dots a_{24} \approx 15.547 \text{ Toneladas}$$

9) la productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$$a_n = a_{n-1} + 0.05a_{n-1} + 100 \qquad a_1 = 2200$$

$$a_n = a_{n-1}(1.05) + 100$$

parte homogenea

$$a_n = a_{n-1}(1.05)$$

$$a_n^H = K \cdot 1.05^n$$

solución particular propuesta

$$a_n^P = B$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$K \cdot 1,05^n + B = 1,05(K \cdot 1,05^{n-1} + B) + 100$$

$$K \cdot 1,05^n + B = 1,05K \cdot 1,05^n \cdot 1,05^{-1} + 1,05B + 100$$

$$K \cdot 1,05^n + B = \cancel{1,05}K \cdot 1,05^n \cdot \frac{1}{\cancel{1,05}} + 1,05B + 100$$

$$\cancel{K \cdot 1,05^n} + B = \cancel{K \cdot 1,05^n} + 1,05B + 100$$

$$B = 1{,}05B + 100$$
$$B - 1{,}05B = 100$$
$$-0{,}05B = 100$$
$$B = -2000$$

solución general

$$a_n = K \cdot 1{,}05^n - 2000$$

solucion particular

$$a_1 = 2200$$
$$2200 = K \cdot 1{,}05^1 - 2000$$
$$2200 = 1{,}05K - 2000$$
$$K = 4000$$

Ahora, para calcular el porcentaje de mejora durante los siguientes 10 años:

$$a_{10} = 4515.57$$

$$\frac{4515.57 - 2000}{2000} = 1{,}25778 \times 100$$
$$= 125.77\%$$

porcentaje de mejora

10) Resuelva $a_n = 3a_{n-1} + n$ para $a_1 = 5$

parte homogenea

$$a_n = 3a_{n-1}$$
$$a_n^H = K \cdot 3^n$$

solucion particular propuesta

$$a_n^P = A_n + B$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$A_n + B = 3[A(n-1) + B] + n$$
$$An + B = 3A(n-1) + B + n$$
$$A_n + B = 3A_n - 3A + 3B + n$$
$$0 = 3A_n - 3A + 3B + n - An - B$$
$$0 = 2A_n + 2B - 3A + n$$
$$0 = n(2A+1) + 2B - 3A$$

$$2A + 1 = 0$$
$$2A = -1$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

$$2B - 3A = 0$$
$$2B - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$2B + \frac{3}{2} = 0$$
$$2B = -\frac{3}{2}$$
$$B = \frac{-3/2}{2}$$
$$B = -\frac{3}{4}$$

solucion general

$$a_n = K.3^n + \left(-\frac{1}{2}^n - \frac{3}{4}\right)$$

solucion particular

$$a_1 = 5$$
$$5 = K.3^1 + \left(-\frac{1}{2}.1 - \frac{3}{4}\right)$$
$$5 = 3K - \frac{5}{4}$$
$$K = \frac{25}{12} \longrightarrow a_n = \frac{25}{12}.3^n + \left(-\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right)$$

11) Encuentre la solucion general para:

- $a_n = a_{n-1} + 2^n$

parte homogenea

$$a_n = a_{n-1}$$
$$a_n^H = K$$

solución particular propuesta

$$a_n P = B.2^n$$

Reemplazando en la ecuación original

$$a_n - a_{n-1} = 2^n$$
$$B.2^n - B.2^{n-1} = 2^n$$
$$B.2^n - B.2^n.2^{-1} = 2^n$$
$$B.2^n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^n$$

$$B\cdot 2^n\left(\frac{1}{2}\right)=2^n$$

$$\frac{B\cdot 2^n}{2}=2^n$$

$$B\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$\frac{B\cdot \cancel{2^{n-1}}}{\cancel{2^{n-1}}}=\frac{2^n}{2^{n-1}}$$

$$B=\frac{2^n}{2^{n-1}}$$

$$B=2^{n-(n-1)}$$

$$B=2$$

solucion general

$$a_n=K+2\cdot 2^n$$

- $a_n=2a_{n-1}+n$

parte homogenea

$$a_n=2a_{n-1}$$

$$a_n^H=K\cdot 2^n$$

solucion particular propuesta

$$a_n^P=An+B$$

Reemplazando en la ecuacion original

$$An+B=2[A(n-1)+B]+n$$

$$An+B=2A(n-1)+2B+n$$

$$An+B=2An-2A+2B+n$$

$$0=2An-2A+2B+n-An-B$$

$$0=An+B-2A+n$$

$$0=n(A+1)+B-2A$$

$A + 1 = 0$
$A = -1$

$B - 2A = 0$
$B - 2(-1) = 0$
$B + 2 = 0$
$B = -2$

Solucion general

$$a_n = K \cdot 2^n + (-1 \cdot n - 2)$$
$$a_n = K \cdot 2^n - n - 2$$

12) Si $a_n = K a_{n-1} + 5$ y $a_1 = 4$ y $a_2 = 17$ encuentre los valores de K y a_6

$$4 = K a_{n-1} + 5$$
$$17 = K \cdot 4 + 5$$
$$17 = 4K + 5$$
$$17 - 5 = 4K$$
$$12 = 4K$$
$$\frac{12}{4} = K$$
$$\underline{3 = K} \longrightarrow a_n = 3 a_{n-1} + 5$$

parte homogenea

$$a_n = 3 a_{n-1}$$
$$a_n^H = K \cdot 3^n$$

solucion particular propuesta

$$a_n^P = B$$

Reemplazando en la ecuación original

$$K 3^n + B = 3[K \cdot 3^{n-1} + B] + 5$$
$$K \cdot 3^n + B = 3K \cdot 3^n \cdot 3^{-1} + 3B + 5$$
$$K \cdot 3^n + B = \cancel{3}K \cdot 3^n \cdot \frac{1}{\cancel{3}} + 3B + 5$$
$$\cancel{K 3^n} + B = \cancel{K 3^n} + 3B + 5$$

$$B = 3B + 5$$

$$B - 3B = 5$$

$$-2B = 5$$

$$B = \frac{-5}{2}$$

Solucion general

$$a_n = C3^n - \frac{5}{2}$$

Solucion particular

$$a_1 = 4$$

$$4 = C\,3^1 - \frac{5}{2}$$

$$4 = 3C - \frac{5}{2}$$

$$4 + \frac{5}{2} = 3C$$

$$\frac{13}{2} = 3C$$

$$\frac{\frac{13}{2}}{3} = C$$

$$\frac{13}{6} = C \longrightarrow a_n = \frac{13}{6} \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

Valor de a_6

$$a_6 = \frac{13}{6} \cdot 3^6 - \frac{5}{2}$$

$$a_6 = \frac{13}{6} \cdot 729 - \frac{5}{2}$$

$$a_6 = \frac{3159}{2} - \frac{5}{2}$$

$$a_6 = \underline{1577}$$

14) Investigue el limite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ si $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

polinomio caracteristico:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2 \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$$

raices reales diferentes, entonces:

$$a_n = K_1 \cdot 2^n + K_2 \cdot -1^n$$

evaluando el limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{K \cdot 2^n - K \cdot 1^n}{K \cdot 2^{n+1} - K \cdot 1^{n+1}}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{K \cdot 2^n - K \cdot 1}{K \cdot 2^{n+1} - K \cdot 1^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot K - K}{2^{n+1} \cdot K - K} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{K}(2^n - 1)}{\cancel{K}(2^{n+1} - 1)}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\cancel{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} \right)$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \text{entonces } \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

15) Encuentre el n-esimo término de la siguiente secuencia:

$$-3, 21, 3, 129, 147$$

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad \text{con} \quad a_0 = -3$$
$$a_1 = 21$$

polinomio característico:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$r_1 = 3 \qquad r_2 = -2 \qquad \text{raices reales diferentes}$$

solución general:

$$a_n = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot -2^n$$

solucion particular:

$$-3 = K_1 \cdot 3^0 + K_2 \cdot -2^0 \rightarrow K_1 + K_2 = -3$$
$$21 = K_1 \cdot 3^1 + K_2 \cdot -2^1 \rightarrow 3K_1 - 2K_2 = 21$$

$$K_1 = 3 \qquad K_2 = -6$$

entonces $a_n = \underline{3 \cdot 3^n - 6 \cdot -2^n}$

16) Resuelva $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$ dado $a_1 = 10$ y $a_2 = 28$. Evalue a_6

polinomio caracteristico

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$r_1 = \frac{6 + \sqrt{4}}{2} = 4 \qquad r_2 = \frac{6 - \sqrt{4}}{2} = 2$$

raices reales diferentes

solución general

$$a_n = K_1 \cdot 4^n + K_2 \cdot 2^n$$

Solucion particular

$$a_1 = 10 \rightarrow 10 = K_1 \cdot 4^1 + K_2 \cdot 2^1 \rightarrow 4K_1 + 2K_2 = 10$$
$$a_2 = 28 \rightarrow 28 = K_1 \cdot 4^2 + K_2 \cdot 2^2 \rightarrow 16K_1 + 4K_2 = 28$$
$$K_1 = 1 \qquad K_2 = 3$$

entonces $a_n = 4^n + 3 \cdot 2^n$

$$a_6 = 4^6 + 3 \cdot 2^6 = \underline{4288}$$

17) Encuentre la solucion particular para $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$ para $n \geq 1$, cuando $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$.

polinomio caracteristico

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$r_1 = -1 \qquad r_2 = -1$ · raices reales iguales.

Solucion general:

$$a_n = K_1 \cdot -1^n + K_2\, n \cdot -1^n$$

solucion particular.

$$a_1 = -1 \rightarrow -1 = K_1 \cdot -1^1 + K_2 \cdot 1 \cdot -1^1 \rightarrow -K_1 - K_2 = -1$$

$$a_2 = -2 \rightarrow -2 = K_1 \cdot -1^2 + K_2 \cdot 2 \cdot -1^2 \rightarrow K_1 + 2K_2 = -2$$

$$K_1 = 4 \qquad K_2 = -3$$

entonces:

$$a_n = 4 \cdot -1^n + (-3n) \cdot -1^n$$

$$a_n = -1^n\,(4 - 3n)$$

18) Encuentre la solucion general de la siguiente relacion de recurrencia

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = f(n)$$

Cuando $f(n) = 2$

- $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2$

Parte homogenea:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$

$r_1 = 3 \qquad r_2 = 2$

Raices reales diferentes.

$$a_n H = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot 2^n$$

Solucion particular propuesta:

$$a_n P = C$$

Reemplazando en la ecuacion original:

$$C - 5C + 6C = 2$$
$$2C = 2$$
$$C = 2/2$$
$$C = 1$$

solucion general

$$a_n = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot 2^n + 1$$

• Cuando $f(n) = n$

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = n$$

parte homogenea:

$$a_n H = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot 2^n$$

solucion particular propuesta.

$$a_n P = An + B$$

Sustituyendo:

$$An + B - 5[A(n-1) + B] + 6[A(n-2) + B] = n$$
$$An + B - 5A(n-1) - 5B + 6A(n-2) + 6B = n$$
$$An + B - 5An + 5A - 5B + 6An - 12A + 6B = n$$
$$2An(-7A + 2B) = n$$

$2An = n$	$2B - 7A = 0$
$2A = 1$	$B = \frac{7}{4}$
$A = \frac{1}{2}$	

$$a_n P = \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$$

solucion general

$$a_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 2^n + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$$

• Cuando $f(n) = 5^n$

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5^n$$

Parte homogenea:

$$a_n H = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 2^n$$

Solucion particular propuesta:

$$a_n P = B \cdot 5^n$$

sustituyendo:

$$B5^n - 5B5^{n-1} + 6B \cdot 5^{n-2} = 5^n$$

$$B5^n - \cancel{5}B \cdot 5^n \cdot \frac{1}{\cancel{5}} + 6B \cdot 5^n \cdot 5^{-2} = 5^n$$

$$B \cdot 5^n - B \cdot 5^n + 6B \cdot 5^n \cdot 5^{-2} = 5^n$$

$$B \cdot 5^n (1 - 1 + 6) \cdot 5^{-2} = 5^n$$

$$B \cdot 5^n (6) \cdot \frac{1}{25} = 5^n$$

$$\frac{B \cdot \cancel{5^n} \cdot \frac{6}{25}}{\cancel{5^n}} = \frac{5^n}{5^n}$$

$$B \cdot \frac{6}{25} = 1$$

$$B = \frac{25}{6}$$

solucion general

$$a_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 2^n + \frac{25}{6} 5^n$$

• Cuando $f(n) = 1 + n^2$

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 1 + n^2$$

parte homogenea:

$$a_n H = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot 2^n$$

solucion particular propuesta

$$a_n P = C + Dn + En^2$$

sustituyendo:

$$C + Dn + En^2 - 5[C + D(n-1) + E(n-1)^2] + 6[C + D(n-2) + E(n-2)^2] = 1 + n^2$$

$$C + Dn + En^2 - 5C - 5D(n-1) - 5E(n-1)^2 + 6C + 6D(n-2) + 6E(n-2)^2 = 1 + n^2$$

$$C + Dn + En^2 - 5C - 5Dn + 5D - 5E(n^2 - 2n + 1) + 6C + 6D - 12D + 6E(n^2 - 4n + 4)$$

$$C + Dn + En^2 - 5C - 5Dn + 5D - 5En^2 + 10En - 5E + 6C + 6Dn - 12D + 6En^2$$

$$-24En + 24E = 1 + n^2$$

$$2En^2 = n^2$$

$$2E = 1$$

$$E = \frac{1}{2}$$

$$2Dn - 14En = 0$$

$$n(2D - 14E) = 0$$

$$2D - 14E = 0$$

$$2D - 14 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$2D - 7 = 0$$

$$2D = 7$$

$$D = \frac{7}{2}$$

$$2C - 7D + 19E = 1$$

$$2C - 7 \cdot \frac{7}{2} + 19 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$2C - \frac{49}{2} + \frac{19}{2} = 1$$

$$2C - 15 = 1$$

$$2C = 16$$

$$C = 16/2$$

$$C = 8$$

Solucion general

$$a_n = K_1 \cdot 3^n + K_2 \cdot 2^n + 8 + \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

19) Resuelva la siguiente ecuación en diferencias utilizando la función generatriz.

$$a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

Dado $a_0 = 0$ y $a_1 = 20$, $n \geq 2$.

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$G(x) = 0 + 20x + (3a_1 - 4a_0)x^2 + (3a_2 - 4a_1)x^3 + \dots$$

$$G(x) = 20x + (3a_1 x^2 + 3a_2 x^3 + \dots) - (4a_0 x^2 + 4a_1 x^3 + \dots)$$

$$G(x) = 20x + 3x(a_1 x + a_2 x^2 + \dots) - 4x^2(a_0 + a_1 x + \dots)$$

$$G(x) = 20x + 3x[G(x) - a_0] - 4x^2 G(x)$$

$$G(x) = 20x + 3x\,G(x) - 4x^2 G(x)$$

$$G(x) = 20x + 3.G(x)^2 - 4G(x)^3$$

$$G(x) - 3G(x)^2 + 4G(x)^3 = 20x$$

$$G(x) = \frac{20x}{1 - 3x + 4x^2} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}$$

Raices: $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{7}}{8} i$, $\frac{3}{8} - \frac{i\sqrt{7}}{8}$

$$G(x) = \frac{\frac{3}{8} - \frac{i\sqrt{7}}{8}}{x - r_1} + \frac{\frac{3}{8} + \frac{i\sqrt{7}}{8}}{x - r_2}$$

• Usando la serie geometrica

$$a_n = \frac{3}{8} - \frac{i\sqrt{7}}{8} \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n + \frac{3}{8} + \frac{i\sqrt{7}}{8} \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n$$

20) Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$G(x) = 0 + 1x + (a_1 + a_0)x^2 + (a_2 + a_1)x^3 + \dots + (a_{n-1} + a_{n-2})x^n$$
$$G(x) = 1x + (a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots) + (a_0 x^2 + a_1 x^3 + \dots)$$
$$G(x) = 1x + x(a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + x^2(a_0 + a_1 x + \dots)$$
$$G(x) = x + x(G(x) - a_0) + x^2(G(x))$$
$$G(x) = x + x\,G(x) + x^2\,G(x)$$
$$G(x) = x + G(x)^2 + G(x)^3$$
$$G(x) - G(x)^2 - G(x)^3 = x$$
$$G(x)(1 - x - x^2) = x$$
$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - r_1 x} + \frac{B}{1 - r_2 x}$$

$$1 - x - x^2 = (1 - r_1 x)(1 - r_2 x) = 1 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 \cdot x^2$$

- $r_1 + r_2 = 1$
- $r_1 \cdot r_2 = -1$

entonces: $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$1 = (1 - r_2 x)A + (1 - r_1 x)B = A + B - (r_2 A + r_1 B)x$$

- $A + B = 1$
- $r_2 A + r_1 B = 0$

entonces $A = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ y $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$

Reemplazando en $G(x)$:

$$\frac{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}{1 - r_1 x} + \frac{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}{1 - r_2 x} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n$$

haciendo uso de la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
concluimos que:

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

21) Utilice el método de la funcion generatriz para resolver $a_n - 2a_{n-1} = 3^n$ para $n \geq 1$ dado $a_0 = 1$

$$n=1: \quad a_1 x^1 - 2a_0 x^1 = 3x$$

$$n=2: \quad a_2 x^2 - 2a_1 x^2 = 3^2 x^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^n$$

$$G(x) - a_0 - 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^n$$

$$G(x) - 1 - 2x - 2x\,G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^n$$