Matemáticas discretas II

Melissa Forero Narváez

14 de febrero de 2023

Tarea 1

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.
1. Según la tabla de multiplicación, la operación es asociativa.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Para la operación definida no se cumple la asociatividad de elementos ya que

$$\begin{aligned}(b * c) * d = d * d = b \\ b\,(c * d) = b * c = d\end{aligned}$$

2. La multiplicación de matrices cuadradas con entradas reales es asociativa.

$$\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in Mat_{nxn}(R)$$

La propiedad asociativa sostiene que

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ae+bg)\,i+(af+bh)\,k & (ae+bg)\,j+(af+bh)\,l \\ (ce+dg)\,i+(cf+dh)\,k & (ce+dg)\,j+(cf+dh)\,l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} eia+fja+gib+hkb & eja+fla+gjb+hlb \\ eic+fjc+gid+hkd & ejc+flc+gjd+hld \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ei+fj & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ei+fj)\,a+(gi+hk)\,b & (ej+fl)\,a+(gj+hl)\,b \\ (ei+fj)\,c+(gi+hk)\,d & (ej+fl)\,c+(gj+hl)\,d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} eia+fja+gib+hkb & eja+fla+gjb+hlb \\ eic+fjc+gid+hkd & ejc+flc+gjd+hld \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. La composición de funciones es asociativa

$$\text{Sean } f : A \to B, g : B \to C \text{ y } h : C \to D \text{ funciones}$$

$$h \circ (g \circ f) : A \to D = (h \circ g) \circ f : A \to D$$

Dado que $Dom\,(h \circ (g \circ f)) = A = Dom\,((h \circ g) \circ f)$ y $Cod\,(h \circ (g \circ f)) = B = Cod\,((h \circ g) \circ f)$ solo falta verificar:

$$\forall a \in A \quad h \circ (g \circ f)\,(a) = ((h \circ g) \circ f)\,(a)$$

$$h \circ (g \circ f)\,(a) = h\,(g \circ f\,(a)) = h\,(g\,(f\,(a))) = (h \circ g) \circ f\,(a) = (h \circ g) \circ f\,(a)$$

$$\text{Por tanto, } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

4. Las matrices invertibles 2x2 con entradas reales (Grupo lineal general) forman un grupo bajo el producto.

Cerradura

$$\text{GL2(R)} = \{A \in Mat_{2x2}(R) : det(A) \neq 0\}$$

$$\text{Sean A=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{B=} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$\text{A.B=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ac' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

$$\text{det(AB)= det(A).det(B)} \neq 0$$

Asociatividad

Como se demostro en el numeral 2 el producto matricial cumple la propiedad de ser asociativo.

Identidad

$$\text{Existe un elemento I} \in \text{GL2(R) tal que I.A = A I=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Inverso

$$\text{Sea A=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL2(R)}$$

$$\forall A \in \text{GL2(R)} \;\exists \quad A^{-1} \in \text{GL2(R) tal que A.}A^{-1}\text{= I}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.adj(A)$$

$$\text{det(A)= ad-bc}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}. \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. El conjunto de los números complejos bajo el producto es un grupo.

Cerradura

La multiplicación de dos números complejos da como resultado otro número complejo.

$$(a+bi)\,(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$$

Asociatividad

$$\begin{gathered}
\text{Sean x= a+bi, y= c+di, z= f+gi} \in C \\
xy\,(z) = ((ac-bd) + (ad+bc)\,i)\,(f+gi) \\
= ((ac-bd)\,f - (ad+bc)\,g) + ((ac-bd)\,g + (ad+bc)\,f)\,i \\
= acf - bdf - adg - bcg + (acg - bdg + adf + bcf)\,i \\
x\,(yz) = (a+bi)\,((c+di)\,(f+gi)) \\
= (a+bi)\,((cf-dg) + (cg+df)\,i) \\
= a\,(cf-dg) - b\,(cg+df) + a\,(cg+df) + b\,(cf-dg) \\
= acf - adg - bcg - bdf + acg + adf + bcf - bdg \\
\text{Entonces } xy\,(z) = x\,(yz)
\end{gathered}$$

Identidad

El elemento neutro o identidad en los números complejos está definido así:

$$\begin{aligned}
(a+bi) + (1+0i) &= a + 0i + bi + 0i \\
&= a+bi
\end{aligned}$$

Inverso

Sea z = a+bi un número complejo, su inverso está definido así:

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= \frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi} \\
&= \frac{a-bi}{a^2-bi^2} \\
&= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i
\end{aligned}$$