Matemáticas discretas II

Melissa Forero Narváez

01 de mayo de 2023

Subgrupos de un homomorfismo

1. Si $\theta : G \to H$ es un homomorfismo

$$\text{Ker}(\theta) : \{\text{g} \in \text{G: } \theta\text{g} = 1\}$$

$$\text{Img}(\theta) : \{\text{h} \in \text{H: } \theta\text{g} = \text{h } \forall\text{g} \in G\}$$

Mostrar que el $\ker(\theta)$ y $\text{Img}(\theta)$ son subgrupos.

Demostración

Para mostrar que los subconjuntos del kernel y la imagen son subgrupos, hay que verificar:

- Cerradura bajo la operación del grupo
- Identidad
- Inversos

Para el kernel

Cerradura:

$$\text{g1, g2} \in \text{Kernel}\,(\theta) \Rightarrow \text{g1g2} \in \text{Kernel}\,(\theta)$$

$$\theta\,(g1g2) = \theta\,(g1)\,\theta\,(g2) \text{ porque } \theta \text{ es un homomorfismo}$$

$$\theta\,(g1) = 1 \text{ y } \theta\,(g2) = 1 \text{ porque g1 y g2 estan en el kernel}$$

$$\theta\,(g1g2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Entonces g1g2 pertenece al Kernel(θ)

Identidad

El elemento neutro de G pertenece al Kernel(θ) ya que θ es un homomorfismo y preserva la operacion binaria. Sabemos que $\theta(1_G) = 1_H$, es decir, la imagen de la identidad de G es la identidad de H. Entonces, podemos decir que 1_G está en el kernel de θ:

$$\theta(1_G) = 1_H \Rightarrow 1_G \in \ker(\theta)$$

Inversos:

$$g \in \text{Kernel}\,(\theta) \Rightarrow g^{-1} \in \text{Kernel}\,(\theta)$$

Utilizando la propiedad de los homomorfismos donde la imagen de un inverso es el inverso de la imagen, debemos mostrar que $\theta\left(g^{-1}\right) = 1_H$. Sabemos que g esta en el Kernel $\Rightarrow \theta\,(g) = 1_H$, entonces:

$$\theta\left(g^{-1}\right) = [\theta\,(g)]^{-1} = 1_H^{-1} = 1_H$$

Para la imagen

Cerradura:

$$\mathrm{h1, h2} \in \mathrm{Img}\,(\theta) \Rightarrow \mathrm{h1h2} \in \mathrm{Img}\,(\theta)$$

Si h1 $= \theta\,(g1)$ y h2 $= \theta\,(g2)$, entonces:

$$h1h2 = \theta\,(g1)\,\theta\,(g2) = \theta\,(g1g2)$$

Entonces h1h2 pertenece a la imagen de θ ya que es la imagen de algún elemento g1g2 en G.

Identidad:

La identidad de H esta en la imagen de θ porque θ mapea la identidad de G a la identidad de H.

$$\theta(1_G) = 1_H$$

Entonces 1_H pertenece a la imagen de θ, ya que es la imagen de la identidad de G.

Inversos:

$$h \in \mathrm{Imagen}\,(\theta) \Rightarrow h^{-1} \in \mathrm{Imagen}\,(\theta)$$

Si tenemos un g $\in$ G, h $= \theta(g) \Rightarrow h^{-1} = \theta\left(g^{-1}\right)$. Entonces h^{-1} pertenece a la imagen de θ ya que es la imagen de algún elemento g^{-1} en G.

Subgrupo generado por un subconjunto

2. Sea X un subconjunto de un grupo G. Entonces existe un subgrupo mínimo de G que contiene a X.

Demostración

Empezamos definiendo H como una colección de todos los subgrupos de G que contienen al subconjunto X

$$\mathrm{H} = \{\mathrm{t} \mid \mathrm{t\ es\ subgrupo\ de\ G\ y\ } X \subseteq \mathrm{t}\}$$

Ahora, sabemos que la intersección de subgrupos es también un subgrupo de G.

$$\mathrm{K} = \cap\{\mathrm{t} \mid \mathrm{t\ es\ subgrupo\ de\ G\ y\ } X \subseteq \mathrm{t}\}$$

Por lo que K es subgrupo de G y como X esta en cada uno de estos subgrupos t entonces X $\subseteq$ K. Es decir, K es el subgrupo formado por los elementos que pertenecen a todos los subgrupos de G que contienen a X.

Si consideramos X $\subseteq$ S $\leq$ G $\Rightarrow$ S $\in$ H $\Rightarrow$ K $\subseteq$ S. Tenemos que, si un subgrupo S de G contiene a X, entonces todos los elementos de K, que es la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a X, también están en S.

Por lo tanto, K es el subgrupo mínimo de G que contiene a X, ya que no hay otro subgrupo que contenga a X que sea más pequeño que K.