# 1. Безкрайни числови редици – сходимост, свойства.

***Дефиниция* 1.** Нека $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – безкрайна числова редица.

1. Формалната сума: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(*)$ се нарича безкраен числов ред.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – **n**-та парциална сума на безкрайния числов ред $(*)$.

- $1, 2, 0, 0, \dots, 0, \dots$

  $1 + 2 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 3$

  $\Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 3, S_3 = 3, \dots, S_n = 3, \dots \longrightarrow 3$

- $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

  $\Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 2, \dots, S_n = n, \dots \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ е разходящ;

- $1, -1, 1, -1, \dots$

  $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

  $\Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ е разходящ.

***Дефиниция* 2.** Казваме, че безкрайният числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, ако $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ се нарича сума на безкрайния числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, в противен случай – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots = 2$

  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща;

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots, (q \in \mathbb{R})$

  $S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}(1 - q^n)$

  $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 - q}(1 - q^n) = \frac{1}{1 - q}(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ само при $|q| < 1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$;

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots = 1, \left(\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} (*)\right)$

  $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (*) = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} =$

$$1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

**Теорема 1.** (Необходимо условие за сходимост) Ако безкрайният числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Доказателство.* Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
$(n > 1) : a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ □

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$
  $a_n = (-1)^{n-1} \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{}} 0 \Rightarrow$ разходящ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{(*)}{>} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$
  $1 \le k < n, \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{n}} (*)$
  $0 < \sqrt{n} < S_n \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ е разходящ.

**Свойство 1.**

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Доказателство.* Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k \left( = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda S_n \right)$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходяща и $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е.:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
□

**Свойство 2.** Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

*Доказателство.* Нека $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\overline{S} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

$$\hat{S_n} = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + \overline{S_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{S_n} = \lim_{n\to\infty} (S_n + \overline{S_n}) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = S + \overline{S} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

□

**Свойство 3.** Безкрайният числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\iff$ $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, (m \in \mathbb{N})$ е сходящ.

*Доказателство.* Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\overline{S_p} = \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k$.

$(n > m) : S_n = S_m + \overline{S}_{n-m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n,$

тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow$ редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow \left\{\overline{S}_p\right\}_{p=1}^{\infty} = \{S_n - S_m\}_{p=1}^{\infty}$ е също сходяща

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ са сходящи едновременно.

□

**Свойство 4.** Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ също е сходящ, където $b_m$ се получава като групираме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в този ред, както е зададена, т.е.:

$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_1}$

$b_2 = a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \cdots + a_{p_2}$

и има същата сума както изходния ред.

*Доказателство.* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ и $\overline{S}_m = \sum_{p=1}^{m} b_p = \sum_{n=1}^{p_m} a_n = S_{p_m}$

$\{S_{p_m}\}_{m=1}^{\infty}$ е подредица на $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Подредицата $\{S_{p_m}\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\overline{S}_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща и има същата граница, както редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ е сходяща и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ – разходящ

$$\underbrace{1 + (-1)}_{b_1} + \underbrace{1 + (-1)}_{b_2} + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots \Rightarrow \text{сходящ}$$

**Теорема 2.** Безкрайният числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \longrightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

*Доказателство.* Нека $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Безкрайният числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$е сходящ $\iff$

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е сходящ} \overset{Cauchy}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \longrightarrow |\ S_{n+p} - S_n\ | < \varepsilon$$

$$|\ S_{n+p} - S_n\ | = |\ a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\ | < \varepsilon$$

□

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – разходящ

  Безкрайният числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ $\iff$

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall N\ \exists n_0 > N, \exists p_0 \in \mathbb{N} : |\ a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+p_0}\ | \geq \varepsilon_0$$

$$N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+N} > \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N} = \cancel{N}\frac{1}{2\cancel{N}} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0, \forall N\ \exists n_0 = N, p_0 = N \longrightarrow \left|\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+N}\right| =$$

$$= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+N} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ, $\left(a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$.