Логическо програмиране

Лектор: *Тинко Тинчев*

Теореми

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Теорема 1 (Еквивалентна замяна)**.** *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са съждителни формули. Нека $\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n$ също е съждителна формула. Нека I_0 е булева интерпретация.*

Тогава, ако

$$I(\varphi_1) = I(\psi_1), I(\varphi_2) = I(\psi_2), \ldots, I(\varphi_n) = I(\psi_n),$$

то

$$I(\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n) = I(\alpha_0\psi_1\alpha_1 \ldots \psi_n\alpha_n)$$

Следствие 1. *Нека $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1, \varphi_2 \models\!\mid \psi_2, \ldots, \varphi_n \models\!\mid \psi_n$. Нека $\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ е съждителна формула.*

Тогава

$$\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n \models\!\mid \alpha_0\psi_1\alpha_1 \ldots \psi_n\alpha_n$$

Теорема 2 (Алгоритъм за конюнкция на елементарни дизюнкции)**.** *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава като резултат конюнкция на елементарни дизюнкции ψ, така че $\varphi \models\!\mid \psi$. Процедура:*

1. *Елиминираме $\Leftrightarrow$, т.е. ако имаме формулата φ с индукция относно броя на $\Leftrightarrow$ във φ, доказваме че има формула φ', $\varphi \models\!\mid \varphi'$ и във φ' няма $\Leftrightarrow$.*

   Например: $\varphi = \alpha(\varphi_1' \Leftrightarrow \varphi_2)\beta, (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\varphi_1 \;\&\; \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \;\&\; \neg\varphi_2)$.

   Тогава $\varphi \models\!\mid \alpha((\varphi_1 \;\&\; \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \;\&\; \neg\varphi_2))\beta$ е формула с $n-1$ срещания на знака $\Leftrightarrow$.

2. *Елиминираме $\Rightarrow$ с индукция относно броя на буквите $\Rightarrow$ във φ.*

   Например: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

3. *Вкарваме $\neg$ навътре, докато не останат $\neg$ само пред съждителни променливи.*

Предикатно смятане от първи ред

Теорема 3 (Леополд Льовенхайм, Скулем, Белан)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане, в който има само предикатни символи и те са унарни(едноместни). Тогава има алгоритъм, който разпознава изпълнимите формули от езика $\mathcal{L}$.*

Теорема 4. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е предикатна формула, x – индивидна променлива. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x\varphi$.*

Следствие 2. *Нека $Var^{free}[\varphi] \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi}_{\text{затворена формула}}$*

Забележка. *Определимото множество трябва да е подмножество на съответна декартова степен на универсума.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Теорема 5 (Теорема за хомоморфизмите)**.** *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е формула без формално равенство и $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (т.е. свободните променливи на φ са измежду $x_1, x_2, \ldots, x_n$).*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$$

Теорема 6 (Теорема за изоморфизмите)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред (с или без формално равенство). Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури над $\mathcal{L}$ и h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$.*

Тогава за всяка формула φ, $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е в сила еквивалентността:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$$

Следствие 1. *Ако $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, то за всяка* ***затворена*** *формула φ е вярно $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.*

Следствие 2. *Нека $B \subseteq A^n$ е определимо в структурата $\mathcal{A}$, която е за език $\mathcal{L}$. Нека h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$. Тогава за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е изпълнено $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B \longleftrightarrow (h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) \in B$.*

Следствие 3. *Нека $B \subseteq A^n$ и h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$, такъв че за някоя n-торка $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ и $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$, но $(h(a_1), h(a_2), \dots h(a_n)) \not\in B$. Тогава B не е определимо с формула от $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$.*

Заместване на подформули с формули

Теорема 7 (Теорема за еквивалентната замяна)**.** *Нека $\alpha\varphi\beta$ е предикатна формула. Ако $\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \psi$, то $\alpha\varphi\beta \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha\psi\beta$.*

Нека $\varphi = \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ са предикатни формули. Нека $\varphi_1 \models\!\!\!\!\!\dashv \psi_1, \varphi_2 \models\!\!\!\!\!\dashv \psi_2, \dots, \varphi_n \models\!\!\!\!\!\dashv \psi_n$.

Тогава $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\!\!\!\!\dashv} \alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \dots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$.

Преименуване на свързани променливи

Теорема 8 (Теорема за варианта)**.** *Нека $x \neq y$ и нека формулата $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$.*

Тогава $Qx\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv Qy\varphi[x/y]$.

Пренексна нормална форма

Теорема 9. *Има алгоритъм, който по произволна предикатна формула φ от $\mathcal{L}$ дава ψ, такава че:*

1. $\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \psi$
2. *ψ е в пренексна нормална форма*
3. $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi]$
4. *φ и ψ са в един и същ език*

Логическо следване

Теорема 10 (Теорема за дедукцията)**.** $\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *е неизпълнимо множество.*

Скулемизация

Теорема 11.

1. *Нека φ е затворена формула в пренексна нормална форма. Тогава φ е изпълнима тогава и само тогава, когато φ^S е изпълнима, т.е. φ е неизпълнима тогава и само тогава, когато φ^S е неизпълнима.*

2. *Нека Γ е множество от затворени формули в пренексна нормална форма. Да означим с $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$. Тогава Γ^S е множество от затворени универсални формули и Γ^S е изпълнимо тогава и само тогава, когато Γ е изпълнимо, т.е. Γ^S е неизпълнимо тогава и само тогава, когато Γ е неизпълнимо.*

Ербранови структури

Безкванторни формули. Свободни ербранови структури

Теорема 12. *Нека Γ е множество от затворени универсални формули в език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *Γ има модел;*
2. *Γ има ербранов модел;*
3. *$CSI(\Gamma)$ има ербранов модел;*
4. *$CSI(\Gamma)$ има модел;*
5. *$CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо.*

Теорема 13 (Тюринг-Чърч, 1936)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред с поне един двуместен предикатен символ. Тогава няма алгоритъм, който по произволно дадена затворена формула φ от $\mathcal{L}$ да разпознава дали φ е предикатна тавтология.*

Еквивалентно, няма алгоритъм, който да разпознава дали φ е предикатна тавтология.

Забележка. $\models \varphi \longleftrightarrow \neg\varphi$ *е неизпълнима.*

Теорема 14. *Нека $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_k \Theta$, Θ е безкванторна, φ е затворена. Нека във φ няма функционални символи (без формално равенство).*

Тогава има алгоритъм, който разпознава дали φ е предикатна тавтология. Нещо повече, има алгоритъм, който в случай, че φ не е предикатна тавтология дава крайна структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \not\models \varphi$.

Съждителна резолюция

Правило на съждителната резолюция

Теорема 15 (Коректност на резолютивната изводимост)**.** *Нека S е множество от дизюнкти. Ако $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, то S е неизпълнимо.*

Следствие 1. *Ако $S \overset{r}{\vdash} \mathbb{D}$, то има крайно подмножество $S_0 \subseteq S$, такова че $S_0 \overset{r}{\vdash} \mathbb{D}$.*

Трансверзали за фамилии от множества

Теорема 16 (Теорема за минималната трансверзала)**.** *Нека A е фамилия от непразни крайни множества. Тогава A има минимална трансверзала.*

Теорема 17 (Пълнота на резолютивната изпълнимост)**.** *Нека S е множество от дозюнкти. Ако S е неизпълнимо, то $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$.*

Следствие 1 (Теорема за компактност за множества от дизюнкти)**.** *Нека S е множество от дизюнкти. Тогава S е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ има крайно $S_0 \subseteq S$, S_0 е неизпълнимо.*

Теорема 18 (Жак Ербран)**.** *Нека* Γ *е множество от затворени универсални формули от език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава следните са еквивалентни:*

1. Γ *е неизпълнимо;*
2. *Съществува крайно подмножество на* $CSI(\Gamma)$ *, което е булево неизпълнимо;*
3. *Съществува краен брой затворени частни случаи* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ *на формули от* Γ*, такива че* $\models \neg\Theta_1 \vee \neg\Theta_2 \vee \ldots \vee \neg\Theta_n$.