Логическо програмиране

Лектор: *Тинко Тинчев*

Дефиниции

Дефиниция 1 (Съждение)**.** *Нещо, което може да отъждествим до* ***вярно*** *или* ***невярно****.*
Елементарните съждения имат предварително зададена стойност.

Дефиниция 2 (Отрицание)**.** *Отрицание на съждението A променя неговата стойност на противоположната, т.е "не A" и пишем* $\neg A$*.*

- $H_{\neg}(T) = F$
- $H_{\neg}(F) = T$

Дефиниция 3 (Конюнкция)**.** *Конюнкция на съжденията A и B наричаме съждението "A и B" и пишем* $(A\&B)$*.*

- $H_{\&}(T, T) = T$
- $H_{\&}(T, F) = H_{\&}(F, T) = H_{\&}(F, F) = F$

Дефиниция 4 (Дизюнкция)**.** *Дизюнкция на съжденията A и B наричаме съждението "A или B" и пишем* $(A \vee B)$*.*

- $H_{\vee}(T, T) = H_{\vee}(T, F) = H_{\vee}(F, T) = T$
- $H_{\vee}(F, F) = F$

Дефиниция 5 (Импликация)**.** *Импликация на съжденията A и B наричаме съждението "ако A, то B" и пишем* $(A \Rightarrow B)$*.*

- $H_{\Rightarrow}(T, T) = H_{\Rightarrow}(F, T) = H_{\Rightarrow}(F, F) = T$
- $H_{\Rightarrow}(T, F) = F$

Дефиниция 6 (Еквивалентност)**.** *Еквивалентност на съжденията A и B наричаме съждението "A тогава и само тогава, когато B" и пишем* $(A \Leftrightarrow B)$*.*

- $H_{\Leftrightarrow}(T, T) = H_{\Leftrightarrow}(F, F) = T$
- $H_{\Leftrightarrow}(T, F) = H_{\Leftrightarrow}(F, T) = F$

Дефиниция 7 (Квантор за всеобщност)**.** *Квантор за всеобщност в даден свят за* φ *е съждението "за всяко* x *е в сила* φ*" и записваме* $(\forall x \varphi)$

Пример. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *– светът, в който работим.*
Тогава, $\forall a \varphi$ *е еквивалентно на* $\varphi(a_1)\&\varphi(a_2)\&\varphi(a_3)\&\varphi(a_4)\&\varphi(a_5)$*, тъй като светът е краен.*

Дефиниция 8 (Квантор за съществуване)**.** *Квантор за съществуване в даден свят за* φ *е съждението "съществува* x*, за което е в сила* φ*" и записваме* $(\exists x \varphi)$

Пример. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *– светът, в който работим.*
Тогава, $\exists a \varphi$ *е еквивалентно на* $\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \varphi(a_3) \vee \varphi(a_4) \vee \varphi(a_5)$*, тъй като светът е краен.*

Дефиниция 9 (Език на съждителното смятане)**.** *Езикът на съждителното смятане съдържа следните непразни множества от символи:*

- *Съждителни променливи (може и безкраен брой): съвкупност от букви и символи, които могат да бъдат оценени до верни/неверни в света, замисълът е те да означават елементарни съждения ($PVar$);*

- *Логически връзки:* $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *– букви (символи) за съждителните връзки;*

- *Помощни символи:* $(,)$.

Дефиниция 10 (Съждителна формула)**.** *Съждителната формула има следната структура:*

- *Съждителните променливи са съждителни формули;*

- *Ако φ е съждителна формула, то $\neg\varphi$ също е съждителна формула;*

- *Ако φ и ψ са съждителни формули, то $(\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ са съждителни формули.*

Формули са само нещата, които могат да се получат след краен брой прилагане на горните правила.

Дефиниция 11 (Индуктивен принцип за доказване на свойства на съждителни формули)**.** *Нека A е свойство и са в сила:*

- *всяка съждителна променлива има свойство A;*

- *ако φ е съждителна формула, която има свойството A, то $\neg\varphi$ също има свойството A;*

- *ако φ и ψ са съждителни формули, които имат свойството A, то $(\varphi\sigma\psi)$, където $\sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, също има свойството A.*

Тогава всяка съждителна формула има свойството A.

Дефиниция 12 (Еднозначен синтактичен анализ за формули)**.** *За всяка съждителна формула φ е в сила точно една от следните три възможности:*

- *$\varphi = P$, където P е съждителна променлива*

- *$\varphi = \neg\varphi_1$, където φ_1 е еднозначно определена съждителна формула*

- *$\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, където φ_1, φ_2 са еднозначно определени формули, а σ е еднозначно определена двувалентна логическа връзка измежду $\{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*

Семантика на съждителните формули

Дефиниция 13 (Съждителна (булева) интерпретация)**.** *Съждителна интерпретация (оценка на съждителните променливи) е изображение (функция) I_0 от съвкупността на съждителните променливи $PVar$ (propositional variables) в $\{T, F\}$, т.е. $I_0 : PVar \longrightarrow \{T, F\}$.*

$$I_0(P) \in \{T, F\}, P \in PVar$$

Дефиниция 14 (Вярност на формула. Булев модел за формула)**.** *Казваме, че* ***формулата φ е вярна*** *при булевата интерпретация I_0, ако*

$$I(\varphi) = T,$$

където I е единственото разширение на I_0 (от твърдение 1).

Пишем още, $I \models \varphi$ и казваме също така "I е модел на φ".

$$I_0 : PVar \to \{T, F\}$$

$$I : For \to \{T, F\}$$

Ако I не е булев модел за φ, пишем $I \not\models \varphi$.

Дефиниция 15 (Изпълнимост)**.** *Казваме, че формулата φ е **изпълнима**, ако има булева интерпретация I, която е модел за φ, т.е. $I(\varphi) = T$.*

*Има формули, които не са изпълними. Такива формули се наричат **неизпълними** формули. φ е **неизпълнима**, т.е. няма булева интерпретация I_0, за която $I(\varphi) = T$, т.е. за всяка булева интерпретация $I_0, I(\varphi) = F$.*

Дефиниция 16 (Булев модел за множество от формули)**.** *Нека Γ е множество от съждителни формули. Нека I е съждителна (булева) интерпретация.*

*Казваме, че **I е модел на Γ**, ако всеки път, когато $\varphi \in \Gamma$, то $I(\varphi) = T$.*

Бележим:

- $I \models \Gamma, I$ *е модел за* Γ
- $I \models \Gamma \longleftrightarrow I$ *е модел за всяка формула от* Γ
- $I \models \varphi \longleftrightarrow I \models \{\varphi\}$*, т.е.* φ *и* $\{\varphi\}$ *имат едни и същи модели*
- $I \models \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \leftrightarrow I(\varphi_1) = T, I(\varphi_2) = T, \ldots, I(\varphi_n) = T \leftrightarrow I((\varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n)) = T$

Забележка. *Ако има формула $\varphi \in \Gamma$, такава че $I \not\models \varphi$, т.е. $I(\varphi) = F$, то I не е модел за Γ, т.е. $I \not\models \Gamma$.*

Дефиниция 17 (Изпълнимост на множество от формули)**.** *Едно множество от формули Γ се нарича **изпълнимо**, ако Γ има модел. Ако кажем, че Γ е изпълнимо, то всяка формула от него също е изпълнима.*

*Γ е **неизпълнимо**, ако Γ не е изпълнимо, т.е. Γ няма модел.*

Дефиниция 18 (Съждителна тавтология)**.** *Една формула се нарича съждителна тавтология, ако е вярна при всяка булева интерпретация.*

- *φ е съждителна тавтология ,точно тогава, когато $\neg\varphi$ е неизпълнима формула;*
- *φ е неизпълнима точно тогава, когато $\neg\varphi$ е съждителна тавтология.*

Дефиниция 19. *Нека φ е съждителна формула. С $Var(\varphi)$ означаваме множеството на съждителните променливи, участващи във φ.*

Булева еквивалентност на съждителни формули

Дефиниция 20 (Логическо следване от формула)**.** *Нека φ и ψ са съждителни формули. Казваме, че ψ логически следва от φ, ако всеки модел на φ е модел на ψ, т.е. всеки път, когато I_0 е булева интерпретация, ако $I(\varphi) = T$, то $I(\psi) = T$. Пишем $\varphi \models \psi$.*

Забележка. *С $\varphi \models \psi$ ще означаваме "във всички светове, в които φ е вярно, ψ е вярно".*

Дефиниция 21 (Логическа еквивалентност на формули)**.** *Нека φ и ψ са съждителни формули. φ и ψ са логически еквивалентни, ако:*

$$\varphi \models \psi \text{ и } \psi \models \varphi \longleftrightarrow \text{за всяка булева интерпретация } I_0, I(\varphi) = I(\psi)$$

Пишем $\varphi \models\mid \psi$.

Забележка. *φ и ψ имат едни и същи булеви модели, ако са логически еквивалентни.*

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Дефиниция 22 (Едновременна замяна)**.** *Нека* φ *е съждителна формула и* $Var(\varphi) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$*, където* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *са различни съждителни променливи. Нека* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *са произволни съждителни формули.*

Тогава за $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n] : Var(\varphi) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$*,* $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ *е резултатът от едновременната замяна на всички срещания на буквите* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *във* φ *със съответните* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$*.*

Дефиниция 23. *Ако имаме две булеви интерпретации* I_0, J_0*, такива че* $I_0 \restriction Var(\varphi) = J_0 \restriction Var(\varphi)$*, то* $I(\varphi) = J(\varphi)$*.*

Дефиниция 24 (Литерал)**.** *Съждителен литерал ще наричаме формула, която е или съждителна променлива, или отрицание на съждителна променлива.*

Дефиниция 25 (Елементарна конюнкция)**.** *Елементарна конюнкция наричаме формула от вида* $\varepsilon_1 P_1 \ \& \ \varepsilon_2 P_2 \ \& \ \ldots \ \& \ \varepsilon_n P_n$*, където* $\varepsilon_i \in \{\varepsilon, \neg\}$*, а* $P_1, P_2, \ldots, P_n \in PVar$*.*

Дефиниция 26 (Елементарна дизюнкция)**.** *Елементарна дизюнкция наричаме формула от вида* $\varepsilon_1 P_1 \vee \varepsilon_2 P_2 \vee \ldots \vee \varepsilon_n P_n$*, където* $\varepsilon_i \in \{\varepsilon, \neg\}$*, а* $P_1, P_2, \ldots, P_n \in PVar$*. Множество от вида* $\{\varepsilon_1 P_1, \varepsilon_2 P_2, \ldots, \varepsilon_n P_n\}$ *ще наричаме* ***дизюнкти****.*

Индуктивна дефиниция:

- *всеки литерал е елементарна дизюнкция;*
- *ако* φ *е елементарна дизюнкция и* L *е литерал, то формулата* $(\varphi \vee L)$ *е също елементарна дизюнкция.*

Елементарните дизюнкции ще записваме без вътрешните скоби (заради асоциативността).

Дефиниция 27 (Конюнкция на елементарни дизюнкции)**.** *Индуктивна дефиниция:*

- *всяка елементарна дизюнкция е конюнкция на елементарни дизюнкции;*
- *ако* K *е конюнкция на елементарни дизюнкции,* E *е елементарна дизюнкция, то* $(K\&E)$ *е конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Дефиниция 28. *Нека* Γ *е множество от съждителни формули и* ψ *е съждителна формула. Казваме, че* ***от*** $\boldsymbol{\Gamma}$ ***логически следва*** $\boldsymbol{\psi}$*.* $\Gamma \models \psi$*, ако всеки модел на* Γ *е модел за* ψ*.*

Ако има модел на Γ*, който не е модел за* ψ*, то от* Γ *не следва логически* ψ*:* $\Gamma \not\models \psi$*. С други думи, има булева интерпретация* I_0*, такава че* $\varphi \in \Gamma \longrightarrow I(\varphi) = T \ \& \ I(\psi) = F$*.*

Предикатно смятане от първи ред

Дефиниция 29 (Език на предикатното смятане от първи ред)**.** *Език на предикатнот смятане е двойка от вида <логическа-част, нелогическа-част>. Логическата част ще е една и съща за всички езици на предикатното смятане от първи ред. Бележи се с* $\mathcal{L}$ *и съдържа:*

1. *Логическа част:*
   - ***индивидни променливи*** *(*Var*): съвкупност от букви за означаване на обекти. Индивидните променливи:*
     - *са номерирани с* $\mathbb{N} : x_0, x_1, \ldots$*;*

– *не са съждителни връзки.*

- *съждителни* ***логически връзки*** *(булеви операции): азбуката* $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- ***квантори****: буквите* $\forall, \exists$
- ***помощни символи****:* , ()

Забележка. *Азбуките на индивидните променливи, съждителните логически връзки и кванторите са винаги непразни.*

2. *Нелогическа част:*

- $\mathbb{C}$***onst***$_{\mathcal{L}}$***: индивидни константи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за имена на обектите (или означение за конкретен обект, като указател към обект);*
- $\mathbb{F}$***unc***$_{\mathcal{L}}$***: функционални символи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за означаване на функции:* $f, g, h, \ldots$.

  За всеки функционален символ има определена арност $(\#)$: $\#[f]$ *е брой на аргументите на* f *и представлява естествено число* > 0.
- $\mathbb{P}$***red***$_{\mathcal{L}}$***: предикатни символи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за означаване на първични свойства:* $p, q, r, \ldots$.

  Всеки предикатен символ има арност.

  Забележка. $\# : \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \cup \mathbb{P}red_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\doteq$ *:* ***формално равенство****. Може и да го няма.*

Забележка. $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}, \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$ *и* $\mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$ *може да бъдат и празни азбуки.*

Дефиниция 30 (Разширение)**.** *Нека* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *са езици на предикатното смятане от първи ред. Казваме, че* $\mathcal{L}_2$ *е разширение на* $\mathcal{L}_1$*, ако* $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}_2}$, $\mathbb{F}unc_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}_2}, \#_{\mathcal{L}_1}$ *и* $\#_{\mathcal{L}_2}$ *са едни и същи за функционални символи от* $\mathcal{L}_1$*, ако* $\mathcal{L}_1$ *е с формално равенство, то и* $\mathcal{L}_2$ *е с формално равенство,* $\mathbb{P}red_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{P}red_{\mathcal{L}_2}, \#_{\mathcal{L}_1}$ *и* $\#_{\mathcal{L}_2}$ *са едни и същи за предикатни символи от* $\mathcal{L}_1$.

Дефиниция 31. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език от първи ред. Ще дефинираме две множествва от формални думи в обединението на азбуките от* $\mathcal{L}$.

Термове: $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ *– означават обекти;*

Формули: $\mathbb{F}or_{\mathcal{L}}$ *– означават свойства.*

Дефиниция 32 (Термове)**.** *Термовете от езика* $\mathcal{L}$ *са думи за означаване на обекти.*
Индуктивна дефиниция на $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$*:*

- *индивидните константи са термове;*
- *индивидните променливи са термове;*
- *ако* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са термове,* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$*, то думата* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *също е терм.*

Дефиниция 33 (Атомарни формули от езика $\mathcal{L}$)**.**
$\mathbb{A}t\mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ *са думите от вида* $p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$*, където* $p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}, \#[p] = n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *– произволни термове от езика* $\mathcal{L}$.

Ако $\mathcal{L}$ *е език с* $\doteq$*, то има още един вид атомарни формули и това са думите от вида* $(\tau_1 \doteq \tau_2)$.

Дефиниция 34 (Формули)**.**
Индуктивна дефиниция на $\mathbb{F}or_{\mathcal{L}}$*:*

- *атормарните формули от* $\mathcal{L}$ *са формули от* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* φ *е формула от* $\mathcal{L}$*, то* $\neg\varphi$ *е също формула от* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* φ *и* ψ *са формули от* $\mathcal{L}$*, то* $(\varphi \,\&\, \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ *са също формули от* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* φ *е формула от* $\mathcal{L}$*,* x *е индивидна променлива, то* $\forall x\varphi$ *и* $\exists x\varphi$ *са също формули от* $\mathcal{L}$ *(отличително свойство на език от 1-ви ред).*

Дефиниция 35 (Индуктивен принцип за доказване на свойства на термове)**.**
Нека P *е свойство. Нека са в сила следните условия:*

- *всяка индивидна константа има свойството* P*;*
- *всяка индивидна променлива има свойството* P*;*
- *всеки път, когато* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са термове, които имат свойството* P *и* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$*, може да се твърди, че думата* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *също има свойството* P*.*

Тогава всеки терм τ *от езика* $\mathcal{L}$ *има свойството* P*.*
Означаваме: $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ *– множеството на термовете в езика* $\mathcal{L}$*.*

Дефиниция 36 (Еднозначен синтактичен анализ за термове)**.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е език на FOL(first-order logic). За всеки терм* τ *от* $\mathcal{L}$ *е в сила точно една от следните възможности:*

- τ *е индивидна константа;*
- τ *е индивидна променлива;*
- τ *е от вида* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$*, където* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са еднозначно определени термове и* f *е еднозначно определен функционален символ.*

Ако $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *и* $\tau = g(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$*, тогава* $f = g, n = k, \tau_1 = \varkappa_1, \tau_2 = \varkappa_2, \ldots, \tau_n = \varkappa_k$*.*
Никое собствено начало на терм не е собствен край на терм.

Алтернативна дефиниция: Нека τ *е терм,* a *е буква и* $\tau = \alpha a \beta$*. Ако* a *е функционален символ с арност* n*, то има еднозначно определени термове* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$*, такива че* $\beta = (\tau_1, \ldots, \tau_n)\beta_1$*. С всеки терм можем да свържем едно синтактично наредено дърво.*

Дефиниция 37. *Ако* τ *е терм, то* $Var(\tau) = \{x, y, z, \ldots\}$ *означаваме множеството на индивидните променливи, които участват в* τ*.*
Индуктивно можем да дефинираме променливите на терм, $\tau(Var(\tau))$*:*

- $\tau = c \longrightarrow Var(\tau) = \varnothing$*;*
- $\tau = x \longrightarrow Var(\tau) = \{x\}$*;*
- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \longrightarrow Var(\tau) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2) \cup \ldots \cup Var(\tau_n)$*.*

Забележка. *Удобно е да използваме следния запис:* $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n] : \tau$ *– терм,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– различни индивидни променливи участващи в* τ *и* $Var(\tau) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*.*

Дефиниция 38 (Затворен терм). *Много важна роля ще играят термовете, в които няма индивидни променливи, т.е. термовете* τ*, такива че* $Var(\tau) = \varnothing$*. Наричаме такива термове затворени (основни, базисни,* ***ground term****). При дървовидно построение има само индивидни константи по листата. Означаваме:* $\mathbf{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$ *– множеството на затворените термове в езика* $\mathcal{L}$ *и* $\mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}} = \varnothing \longleftrightarrow \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} = \varnothing$.

Дефиниция 39 (Индуктивна дефиниция на $\mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$).

- *индивидните константи са затворени термове;*
- *ако* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са затворени термове,* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$*, то* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *е затворен терм от езика* $\mathcal{L}$.

Дефиниция 40 (Подтерм). *Казваме, че термът* τ *е подтерм на терма* $\varkappa$*, ако* $\varkappa = \alpha\tau\beta$*, където* α *и* β *са думи.*

Ако $\varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$*, то* τ *е подтерм на някой от термовете* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$.

Ако $\varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$ *и* τ *е подтерм на* $\varkappa, \varkappa = \alpha\tau\beta$*, то за някое* $i, 1 \leq i \leq k, \varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}, \alpha'\tau\beta', \varkappa_{i+1}, \ldots, \varkappa_k), \alpha = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}, \alpha', \beta = \beta', \varkappa_{i+1}, \ldots, \varkappa_k)$.

Пишем $Subt(\tau)$.

Дефиниция 41 (Индуктивна дефиниция на $Subt(\tau)$). *С индукция относно построението на* τ *дефинираме* $Subt(\tau)$ *по следния начин:*

- $\tau = c \longrightarrow Subt(\tau) = \{c\}$;
- $\tau = x \longrightarrow Subt(\tau) = \{x\}$;
- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \longrightarrow Subt(\tau) = \{\tau\} \cup Subt(\tau_1) \cup Subt(\tau_2) \cup \ldots \cup Subt(\tau_n)$.

Дефиниция 42 (Заместване на индивидни променливи с термове в термове). *Нека* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни индивидни променливи, а* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са произволни термове от езика* $\mathcal{L}$.

С $\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]$ *ще означаваме думата, която се получава от* τ *при едновременната замяна на* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *съответно с* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

Дефиниция 43 (Индуктивна дефиниция на заместването). *Нека* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни индивидни променливи и* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *– произволни термове.*

- $c[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = c$;
- x:

$$\left.\begin{array}{l} -\ x = x_i, 1 \leq i \leq n \longrightarrow x[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = \tau_i; \\ -\ x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \longrightarrow x[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = x. \end{array}\right\} \text{(ih)}$$

- $f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = f(\varkappa_1[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}], \varkappa_2[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}], \ldots, \varkappa_n[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}])$ *и използваме (ih) за* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$.

Така $\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]$ *е терм от езика* $\mathcal{L}$.

Семантика на език от първи ред

Дефиниция 44 (Структура за език от първи ред). *Нека* $\mathcal{L}$ *е език от първи ред. Структура за* $\mathcal{L}$ *ще наричаме наредена двойка от вида* $< A, \mathbb{I} >$*, където:*

- $A \neq \varnothing, A$ *– универсиум на структурата;*
- $\mathbb{I}$ *е интерпретация на* $\mathcal{L}$ *в* A*;*

- $\mathbb{I}(c) \in A$ *за всяка индивидна константа* $c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$*, може* $c_1 \neq c_2$*, но* $c_1^{\mathcal{A}} = c_2^{\mathcal{A}}$*;*

- $\mathbb{I}(f) : A^{\#[f]} \longrightarrow A$ *за всеки функционален символ* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$*,* $Dom(f) = A^{\#[f]}$ *– тотална;*

- $\mathbb{I}(p) \subseteq A^{\#[p]}$ *– множество от n-торки, където* $n = \#[p], p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$*, може* $p^{\mathcal{A}} = \varnothing$ *или* $p^{\mathcal{A}} = A^{\#[p]}$.

Означение: $\mathcal{A} =< A, I >, |\mathcal{A}| = A$

Забележка. *Вместо* $\mathbb{I}(c)$ *ще пишем* $c^{\mathcal{A}}$*, вместо* $\mathbb{I}(f)$ *–* $f^{\mathcal{A}}$ *и вместо* $\mathbb{I}(p)$ *–* $p^{\mathcal{A}}$*: интерпретации в структурата* $\mathcal{A}$.

Забележка. *За да може да кажем какво означава един терм, трябва да кажем какво означават променливите в него.*

Дефиниция 45 (Оценка)**.** *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура за езика* $\mathcal{L}$*. Нека универсумът на* $\mathcal{A}$ *е* A*. Оценката на индивидните променливи наричаме изображение* $\nu : Var \longrightarrow A$.

Дефиниция 46 (Модифицирана оценка)**.** *Нека* $x \in Var, a \in A$*. Тогава модифицирана оценка в точка* x *с* a *ще наричаме* $v_a^x(y) = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$.

Дефиниция 47 (Оценка в структура $\mathcal{A}$ (Тарски))**.**
Нека $\mathcal{A} =< A, \mathbb{I} >$ *е структура за FOL* $\mathcal{L}$*. Нека* ν *е оценка на индивидните променливи в* $\mathcal{A}$*. Индуктивно дефинираме за всеки терм* $\tau \in \mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ *стойност на* τ *в* $\mathcal{A}$ *при оценка* ν $(\tau^{\mathcal{A}}[\nu])$.

- $\tau = c, c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \longrightarrow c^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons c^{\mathcal{A}}$*;*

- $\tau = x, x \in Var \longrightarrow x^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons \nu(x)$*;*

- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \#[f] = n, f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \longrightarrow \tau^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons f^{\mathcal{A}}(\tau_1^{\mathcal{A}}[\nu], \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu], \ldots, \tau_n^{\mathcal{A}}[\nu])$.

Забележка. *Означаваме:* $\tau^{\mathcal{A}}[\nu]$ *или* $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu]$.

Забележка. *Тази дефиниция е коректна заради еднозначния синтактичен анализ на термове.*

Дефиниция 48 (Стойност на предикатна формула в структура при дадена оценка)**.** *Нека* φ *е формула,* $\mathcal{A}$ *е структура,* ν *е оценка в структурата* $\mathcal{A}$*. С индукция по построение на формулите дефинираме* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] \in \{T, F\}$*. (Трябва ни и еднозначен синтактичен анализ):*

- φ *е атомарна:*
  - $\varphi = p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$*:*
    $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons < \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu], \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu], \ldots, \tau_n^{\mathcal{A}}[\nu] > \in p^{\mathcal{A}}$.
    Елементите на универсума означени с $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *имат свойството означено с* p.
  - $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$*:*
    $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|(\tau_1 \doteq \tau_2)\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu]$

- $\varphi = \neg\varphi_1 : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = H_{\neg}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu])$

- $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = H_{\sigma}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu])$

- $\varphi = \forall x \psi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\forall x\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \forall a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = T$,
  където $v_a^x[y] = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$
- $\varphi = \exists x \psi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \exists a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = T$,
  където $v_a^x[y] = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$

Забележка. *Ако $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, то пишем $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ и четем "в $\mathcal{A}$, при оценката ν, е вярна формулата φ" и за $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = F$ ще пишем $\mathcal{A} \not\models_\nu \varphi$ и казваме "в $\mathcal{A}$, при оценката ν, е невярна формулата φ".*

Дефиниция 49. *Нека φ – формула и $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \dots x_n\}$.*

Тогава ще пишем $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, където наредбата $x_1, x_2, \dots, x_n$ е фиксирана. Вместо да пишем $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$, където $\nu(x_1) = a_1, \nu(x_2) = a_2, \dots \nu(x_n) = a_n$, ще пишем $\varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]$, където $a_1, a_2, \dots a_n$ е фиксирана наредба от n от света.

Вместо $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$ имаме $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$, т.е. $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]$.

Така всяка формула $\varphi[x_1, x_2, \dots x_n]$ определя множеството от тези n-торки $\{< a_1, a_2, \dots a_n > | a_1, a_2, \dots, a_n \in A, \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]\} \leftrightharpoons \mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]}$. Всички множества в една структура, които са от този вид, са определими.

За множеството $\mathcal{D}_\varphi$ ще казваме, че е определимо с φ в $\mathcal{A}$.

$C \subseteq A^n$ е определимо в $\mathcal{A}$, ако $C = \mathcal{D}_\varphi$ за някои φ.

Дефиниция 50 (Вярна формула)**.** *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е формула. Казваме, че $\mathcal{A} \models \varphi$ ("в $\mathcal{A}$ е вярна φ"), ако за всяка оценка ν в $\mathcal{A}, \varphi$ е вярна: $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, и записваме $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Забележка. *Има структури, формули и оценки ν_1, ν_2, такива че:*
$\mathcal{A} \models_{\nu_1} \varphi$, $\mathcal{A} \not\models_{\nu_2} \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_2} \neg\varphi$

Забележка. *Ако $\mathcal{A} \not\models \varphi$ има оценка ν_1 в $\mathcal{A}$, за която $\mathcal{A} \not\models_{\nu_1} \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_1} \neg\varphi$.*

Забележка. *$\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, ако φ е затворена, но за произволна формула φ от $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \not\models \varphi$ не следва $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, защото може и за $\neg\varphi$ да съществува оценка ν_1, за която $\mathcal{A} \not\models_{\nu_1} \neg\varphi$.*

Дефиниция 51 (Валидна формула)**.** *Казваме, че φ е валидна (общовалидна) формула в структурата $\mathcal{A}$, ако $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Дефиниция 52 (Затворена формула)**.** *Една формула φ се нарича затворена, ако няма свободни променливи, т.е. $Var^{free}(\varphi) = \varnothing$ (говори за света).*

Забележка. *Ако φ е затворена, то е вярно $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.*

Дефиниция 53 (Изпълнима формула)**.** *Формулата φ е изпълнима, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка ν, такива че $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, тогава $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Забележка. *Няма задължение различните индивидни константи да бъдат интерпретирани в структурата като различни обекти, могат да съвпадат, $c^{\mathcal{A}} \in A$.*

Дефиниция 54 (Изпълнимо множество от формули)**.** *Едно множество от предикатни формули Γ е изпълнимо, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка ν, такива че за всяка формула $\varphi \in \Gamma, \mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Казваме, че Γ е неизпълнимо, ако Γ не е изпълнимо.

Забележка. *$\varnothing$ е изпълнимо за всяка структура и всяка оценка.*

Забележка. *Множеството от всички формули не е изпълнимо, тъй като в такова множество за някоя формула φ, $\neg\varphi$ също е от множеството.*

Дефиниция 55 (Предикатна тавтология)**.** *Казваме, че φ е предикатна тавтология (общовалидна), ако за всяка структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \models \varphi$. Означаваме със $\models \varphi$.*

Дефиниция 56 (Подформула)**.** *Казваме, че φ е подформула на ψ, ако има думи α и β, такива че $\psi = \alpha\varphi\beta$. Всяка такава двойка α, β определя едно конкретно участие на φ в ψ.*

Дефиниция 57 (Индуктивна дефиниция на подформула)**.** *Нека φ е формула. Със $SubFor(\varphi)$ ще означаваме множеството от всички подформули на φ.*

- *ако φ е атомарна, то $SubFor(\varphi) = \{\varphi\}$;*
- *$SubFor(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SubFor(\varphi)$;*
- *$SubFor((\varphi\sigma\psi)) = \{(\varphi\sigma\psi)\} \cup SubFor(\varphi) \cup SubFor(\psi), \sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$;*
- *$SubFor(Qx\varphi) = \{Qx\varphi\} \cup SubFor(\varphi), Q \in \{\forall, \exists\}$.*

Дефиниция 58. *Нека φ е предикатна формула, a е съждителна връзка или квантор, $\varphi = \alpha a\beta$.*

- *ако $a = \neg \longrightarrow$ има единствена формула φ_1, такава че $\beta = \varphi_1\beta_1$;*
- *ако $a \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \longrightarrow$ има единствени формули φ_1, φ_2, такива че $\alpha = \alpha_1(\varphi_1$, $\beta = \varphi_2)\beta_1$;*
- *ако $a \in \{\forall, \exists\} \longrightarrow$ има единствена индивидна променлива x и единствена формула φ_1, такива че $\beta = x\varphi_1\beta_1$.*

Дефиниция 59 (Област на действие на квантор)**.** *Нека φ е предикатна формула, Q е квантор, т.е. $Q \in \{\forall, \exists\}$, и $\varphi = \alpha Q\beta$ е конкретно участие на Q във φ.*

*Тогава първата буква на β е индивидна променлива и казваме, че това участие на Q във φ е **квантор по тази променлива**. Тогава има единствена индивидна променлива x и предикатна формула ψ, такива че $\beta = x\psi\beta'$, т.е. $\varphi = \alpha Qx\psi\beta'$.*

*Участието на $x\psi$ във φ се нарича **област на действие** на участието на Q във φ.*

Дефиниция 60 (Свободно и свързано участие на индивидна променлива в предикатна формула)**.**

Едно участие на променлива в предикатна формула се нарича свободно участие в тази формула, ако то не е в област на действие на квантор по тази променлива.

Едно участие на променлива в предикатна формула се нарича свързано участие в тази формула, ако то е в област на действи на квантор по тази променлива.

Забележка. *Свързаните участия на индивидните променливи са в някакъв смисъл "анонимни" участия., т.е. името на променливата има значение само от синтактична гледна точка.*

Дефиниция 61 (Свободни и свързани индивидни променливи в предникатна формула)**.**

Една индивидна променлива се нарича свързана променлива на формула φ, ако тя има поне едно участие във φ, което е свързано: $Var^{bd}(\varphi)$.

Една индивидна променлива се нарича свободна променлива за формула φ, ако тя има поне едно участие във φ, което е свободно: $V^{free}(\varphi)$.

Забележка. *Една променлива може да бъде, както свободна, така и свързана за φ.*

Забележка. *Свободните променливи са важни, с φ определяме свойство на свободните променливи, дали дадена n-торка има свойството φ.*

Дефиниция 62. *Индуктивна дефиниция на $Var^{bd}(\varphi)$ и $Var^{free}(\varphi)$:*

- $Var^{bd}(p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)) = \varnothing; Var^{free}(p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2) \cup \ldots Var(\tau_n)$
  $Var^{bd}((\tau_1 \doteq \tau_2)) = \varnothing; Var^{free}((\tau_1 \doteq \tau_2)) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2)$
- $Var^{bd}(\neg\varphi) = Var^{bd}(\varphi); Var^{free}(\neg\varphi) = Var^{free}(\varphi)$
  $Var^{bd}((\varphi\sigma\psi)) = Var^{bd}(\varphi) \cup Var^{bd}(\psi); Var^{free}((\varphi\sigma\psi)) = Var^{free}(\varphi) \cup Var^{free}(\psi)$,
  $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- $Var^{bd}(Qx\varphi) = Var^{bd}(\varphi) \cup \{x\}; Var^{free}(Qx\varphi) = Var^{free}(\varphi) \setminus \{x\}, Q \in \{\forall, \exists\}$

Дефиниция 63 (Безкванторна формула)**.** *Една формула φ се нарича безкванторна, ако в нея няма срещане на $\forall, \exists$.*

Безкванторните формули може да ги дефинираме индуктивно така:

- *атомарните формули са безкванторни*
- *ако φ е безкванторна, то $\neg\varphi$ също е безкванторна*
- *ако φ и ψ са безкванторни, то $(\varphi\sigma\psi), \sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*

Дефиниция 64. *Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са различни индивидни променливи, $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогава ще пишем $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$, и $\nu_j(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n, j = 1, 2$, и $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2], \mathcal{A} \models_{\nu_1} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_2} \varphi$. Тогава вместо $\mathcal{A} \models_{\nu} \varphi$ и $\nu(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n$ ще пишем $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.

Дефиниция 65. *$Def^{\mathcal{A}}(\varphi) \leftrightharpoons \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]\}$ е определимо множество в $\mathcal{A}$ с φ.*

Дефиниция 66 (Определимо множество с формула)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език и $\mathcal{A}$ е структура на $\mathcal{L}$. Нека $B \subseteq A^n$ за някое n. Казваме, че B е определимо в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$, ако $\exists\varphi$ от $\mathcal{L}, \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, такава че $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in B$, за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Дефиниция 67 (Хомоморфизъм)**.** *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за езика $\mathcal{L}$. Нека $h : A \longrightarrow B$.*

Казваме, че h е хомоморфизъм от $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$, ако са в сила:

- *$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ за всяка индивидна константа c;*
- *$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)), \#(f) = n, f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$,*
  $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$;
- *$< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in p^{\mathcal{B}}, \#(p) = n, p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$,*
  $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

*Казваме, че $\mathcal{B}$ е **хомоморфен образ** на $\mathcal{A}$ при h, ако $h[A] = B$.*

Дефиниция 68 (Изоморфно влагане)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$ и $h : A \longrightarrow B$. Казваме, че h **е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$**, ако h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и h е инективна функция, т.е. имаме на лице следните условия:*

1. h *е инекция* $(a \neq b \longrightarrow h(a) \neq h(b))$

2. $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}, \forall c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$

3. $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$, *където* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$, *произволни* $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$

4. $< a_1, a_2, \dots, a_n > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n) > \in p^{\mathcal{B}}$, *където* $p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}, \#[p] = n$, *произволни* $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$

Дефиниция 69 (Изоморфизъм). ***Изоморфизъм на*** $\mathcal{A}$ ***върху*** $\mathcal{B}$ *ще наричаме изоморфно влагане* h *на* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{B}$*, такова че* $\mathcal{B}$ *е хомоморфен образ на* $\mathcal{A}$ $(h[A] = B)$*, т.е.* h *е хомоморфизъм на* A *върху* B *и е биекция. Ако има изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$*, ще казваме, че* $\mathcal{A}$ ***и*** $\mathcal{B}$ ***са изоморфни*** *и пишем* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Забележка. *Дефиницията е коректна, защото ако* h *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$*, то* h^{-1} *е изоморфизъм на* $\mathcal{B}$ *върху* $\mathcal{A}$ *и* h^{-1} *е биекция на* B *върху* A, $h^{-1}(c^{\mathcal{B}}) = c^{\mathcal{A}}$, $h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2, \dots, b_n)) = f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n))$.

Значи, ако $h : A \xrightarrow{\cong} B$*, то* $h^{-1} : B \xrightarrow{\cong} A$.

Ако две структури $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *са изоморфни, ще пишем* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Дефиниция 70 (Автоморфизъм). *Изоморфизмите на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{A}$ *образуват група относно* $Id_{\mathcal{A}}, ^{-1}, \circ$ *и се наричат автоморфизми,* $Aut(\mathcal{A})$ *– група на автоморфизмите:*

- $Id_{\mathcal{A}}$ *е автоморфизъм в* $\mathcal{A}$ *;*
- *Ако* h *е автоморфизъм в* $\mathcal{A}$*, то* h^{-1} *е автоморфизъм в* $\mathcal{A}$*;*
- *Ако* h_1 *и* h_2 *са автоморфизми в* $\mathcal{A}$*, то* $h_1 \circ h_2$ *също автоморфизъм в* $\mathcal{A}$.

Забележка. *Тези структури, за които* $Aut(*)$ *съдържа само един елемент – неутралния, т.е. имат единствен автоморфизъм относно* $Id_{\mathcal{A}}$ *– се наричат твърди.*

Пример. $< \mathbb{N}, \leq >$ *е твърда структура, но* $< \mathbb{Z}, \leq >$ *не е, тъй като за всяко* $a \in \mathbb{Z}$ *изображението* $h_a(m) = m + a$ *е автоморфизъм в* $< \mathbb{Z}, \leq >$.

Дефиниция 71 (Универсална формула). *Формулите от вида* $\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$ *е безкванторна, се наричат универсални формули.*

За $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$*, където* ψ *е безкванторна, е вярно, че* $\mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)] \longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$.

Дефиниция 72 (Екзистенциална формула). *Формулите от вида* $\exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n \psi$ *е безкванторна, се наричат универсални формули.*

За $\varphi = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n \psi$*, където* ψ *е безкванторна, е вярно, че* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.

Логически еквивалентни формули

Дефиниция 73 (Логически еквивалентни формули). *Казваме, че* φ *и* ψ *са логически еквивалентни* $(\varphi \models\!\!\!\dashv \psi)$*, ако всеки път, когато* $\mathcal{A}$ *е структура и* ν *е оценква в* $\mathcal{A}$*, имаме* $\mathcal{A} \models_{\nu} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{\nu} \psi$*. Или записано по друг начин:* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$.

Заместване на подформули с формули

Дефиниция 74. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура. Казваме, че предикатните формули от езика* $\mathcal{L}$ φ *и* ψ *са еквивалентни в* $\mathcal{A}$, $\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\!\!\!\dashv} \psi$*, ако за всяка оценка* ν *в* $\mathcal{A}$ *е изпълнено* $\mathcal{A} \models_{\nu} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{\nu} \psi$.
$\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\!\!\!\dashv} \psi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Заместване на индивидни променливи с термове

Дефиниция 75 (Допустима замяна). *Нека φ е предикатна формула, x е индивидна променлива, τ е терм. Резултатът от едновременната замяна на всички свободни участия на x във φ с τ ще означаваме с $\varphi[x/\tau]$.*

Казваме, че едновременната замяна на свободните участия на x във $\varphi, \varphi[x/\tau]$, е допустима замяна, ако никое свободно участие на x във φ не е в област на действие на квантор по променлива участваща в τ.

Забележка. *Ако $x \not\in Var^{free}(\varphi)$, то за всеки терм $\tau \varphi[x/\tau]$ е допустима.*

Забележка. *Ако τ е затворен терм, то за всяко φ и всяко $x \varphi[x/\tau]$ е допустима замяна.*

Преименуване на свързани променливи

Дефиниция 76 (Вариант). *Казваме, че $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$, ако:*

- *$\varphi[x/y]$ е допустима (т.е. свободните участия на x във φ не са в област на действие на квантор по y);*
- *$y \not\in Var^{free}[\varphi]$.*

Пренексна нормална форма

Дефиниция 77. *Казваме, че φ е в **пренексна нормална форма (ПНФ)**, ако $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\Theta$, където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ са квантори, Θ е безкванторна формула, $n \geq 0$.*

*Думата $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n$ се нарича **кванторен префикс** на φ, а Θ – **матрица** на φ.*

Ако всичките $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ са $\forall$, то казваме, че φ е универсална.

Ако всичките $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ са $\exists$, то казваме, че φ е екзистенциална.

Логическо следване

Дефиниция 78 (Секвенциално следване). *Нека $\Gamma \cup \{\psi\}$ е множество от предикатни формули. Казваме, че от Γ логически следва $\psi(\Gamma \models \psi)$, ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура и ν е оценка в $\mathcal{A}$ от $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ за всяко $\varphi \in \Gamma$ следва, че $\mathcal{A} \models_\nu \psi$.*

Дефиниция 79 (Глобално следване). *Казваме, че от Γ глобално (моделно) следва ψ $(\Gamma \models^g \psi)$, ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура, ако за всяка $\varphi \in \Gamma, \mathcal{A} \models \varphi$, то $\mathcal{A} \models \psi$.*

Скулемизация

Дефиниция 80 (Скулемизация). *Алгоритъм, който по дадено множество от затворени формули Γ дава множество от затворени формули Γ^S, такова че Γ е изпълнимо тогава и само тогава, когато Γ^S е изпълнимо и Γ е неизпълнимо тогава и само тогава, когато Γ^S е неизпълнимо.*

Това преобразуване е поточково, т.е. $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$.

$\Gamma \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *е неизпълнимо* $\longleftrightarrow \Gamma^S \cup \{(\neg\psi)^S\}$ *е неизпълнимо.*

Дефиниция 81 (Скулемова нормална форма). *Ако φ е затворена и е в пренексна нормална форма, то φ^S е затворена и универсална, но в разширение на езика.*

φ^S ще наричаме Скулемова нормална форма на φ.

Дефиниция 82 (Алгоритъм за скулемизация). *Ще дефинираме едностъпкова скулемизация (от φ ще получаваме φ^S):*

- φ^S *е затворена;*
- φ^S *е в пренексна нормална форма;*
- φ^S *ще има един квантор за* $\exists$ *по-малко от* φ *(ако във* φ *има* $\exists$*).*

Нека $\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \Theta$ *– затворена формула,* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *са различни индивидни променливи,* $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ *са квантори. Тогава* φ_S*:*

1. *Ако* $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \forall$*, то* $\varphi_S \models \varphi$*;*
2. *Ако* $Q_1 = \exists$*, т.е.* $\varphi = \exists x \psi$ $(\psi \leftrightharpoons Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \Theta)$*, то* $\varphi^S \leftrightharpoons \psi[x/c_\varphi]$*, където* c_φ *е нова индивидна променлива.*
3. *Ако* $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_k = \forall, Q_{k+1} = \exists$*, т.е.* $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \dots \Theta$*, то* $\varphi_S \leftrightharpoons \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k (Q_{k+2} x_{k+2} \dots Q_n x_n)[x_{k+1}/f_\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)]$*, където* f_φ *е нов за езика функционален символ с арност* k*.*

   Ако в кванторния префикс има точно $m > 0$ *квантора* $\exists$*, то* $\varphi^S \leftrightharpoons \underbrace{\varphi_{SSS\dots}}_{m \text{ пъти}}$

Затворени универсални формули

Дефиниция 83 (Затворен частен случай)**.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е език, в който има поне една индивидна константа. Нека* $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \Theta$ *е затворена формула,* Θ *е безкванторна формула и* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *са различни индивидни променливи.*

Нека $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ *са произволни затворени термове от* $\mathcal{L}$*. Формулата* $\Theta[x_1/\tau_1, x_2/\tau_2, \dots, x_n/\tau_n]$ *ще наричаме затворен частен случай на* $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \Theta$*. Множеството на всички затворени частни случаи на универсална затворена формула* φ *ще означаваме със* $CSI(\varphi)$*, Closed substitution instances, т.е.* $CSI(\varphi) \leftrightharpoons \{\Theta[x_1/\tau_1, x_2/\tau_2, \dots, x_n/\tau_n] : \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}}\}$*.*

Дефиниция 84. *Нека* Δ *е множество от безкванторни формули от* $\mathcal{L}$*. Можем да разгледаме формулите от* Δ *като съждителни формули над множеството от съждителни променливи* $\mathbb{A}t_{\mathcal{L}}$*.*

Нека $\mathcal{A}$ *е структура,* ν *оценка в* $\mathcal{A}$*. За всяка формула* $\chi \in \mathbb{A}t_{\mathcal{L}}$ *дефинираме* $I_{\mathcal{A},\nu}(\chi) = \|\chi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$*. Тогава за всяка безкванторна формула* φ *е изпълнено* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu}(\varphi) = T$*. Тогава* $\mathcal{A} \models_\nu \Delta \longrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \Delta$*.*

Ербранови структури

Дефиниция 85 (Ербранова структура)**.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език. Една структура* $\mathcal{H}$ *за езика* $\mathcal{L}$ *се нарича ербранова структура, ако:*

- $\mathcal{H} = \mathcal{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$ *– универсумът е множеството от затворените термове от езика* $\mathcal{L}$*;*
- $c^{\mathcal{H}} = c$ *за всяка индивидна константа от* $\mathcal{L}$*;*
- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = f(\tau_1^{\mathcal{H}}, \tau_2^{\mathcal{H}}, \dots, \tau_n^{\mathcal{H}})$ *за всеки функционален символ* $f, \#[f] = n$*, за произволни* $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$

Забележка. $\mathcal{L}$ *има поне една ербранова структура* $\longleftrightarrow \mathcal{T}^{cl}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing \longleftrightarrow \mathcal{L}$ *има поне една индивидна константа.*

Забележка. *Едно множество от безкванторни формули е изпълнено* $\longleftrightarrow$ *то е изпълнено в ербранова структура.*

Свободни ербранови структури

Дефиниция 86 (Свободна ербранова структура)**.** *Една структура $\mathcal{H}$ се нарича свободна ербранова структура за езика $\mathcal{L}$, ако:*

- $\mathcal{H} = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *– универсумът е множеството от всички термове от* $\mathcal{L}$
- $c^{\mathcal{H}} \leftrightharpoons c$*, за всяка индивидна константа* $c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$
- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$*, за всеки* n*-арен функционален символ* f *и за всеки* n *терма.*

Съждителна резолюция

Дефиниция 87. *Нека* φ *е съждителна формула и* $\varphi = \psi_1 \& \psi_2 \& \ldots \& \psi_n$*, където* ψ_i *са елементарни дизюнкции, тъй като* $\Theta \vee \Theta \models\mid \Theta$*, на всяка елементарна дизюнкция* ψ *ще съпоставим крайното множество от литералите (т.е.* P *или* $\neg P$*), които участват във формулата* ψ*.*

$\psi \longrightarrow \mathbb{D}_\psi$ *– крайно множество от литерали.*

$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k$ *– дизюнкция от литерали.*

$I \models L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k \longleftrightarrow \exists i, 1 \leq i \leq k, I \models L_i$.

Следователно за едно крайно множество от литерали от $\mathbb{D}_\psi, I \models \mathbb{D}_\psi \longleftrightarrow$ *има литерал* $L \in \mathbb{D}_\psi, I \models L$*. Така* $I \models \psi \longleftrightarrow I \models \mathbb{D}_\psi$*.*

Дефиниция 88 (Дизюнкт)**.** *Дизюнкт* $\mathbb{D}$ *ще наричаме крайно множество от литерали,* I *е булева интерпретация. Казваме, че* $I \models \mathbb{D}$*, ако съществува* $L \in \mathbb{D}, I \models L$*.*

ψ *е елементарна дизюнкция, следователно* $\mathbb{D}_\psi$ *е дизюнкт,* $I \models \psi \longleftrightarrow I \models \mathbb{D}_\psi$*. Ако* $\mathbb{D} \neq \varnothing$ *и* $\mathbb{D}$ *е дизюнкт, то има формула* ψ*, такава че* $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\psi$*.*

Забележка. *Има само един дизюнкт, който не е от вида* $\mathbb{D}_\psi$ *за някоя елементарна дизюнкция* ψ*. Това е празното множество от литерали. Този дизюнкт ще наричаме "празен дизюнкт" и ще го означаваме с* $\blacksquare$*.*

Забележка. *Нека* I *е булева интерпретация.* $\blacksquare$ *не е верен за всяка булева интерпретация.* $\blacksquare$ *е неизпълним – няма модел. Всеки дизюнкт, различен от* $\blacksquare$ *има поне един модел.*

Дефиниция 89 (Тавтология)**.** *Нека казваме за един дизюнкт* $\mathbb{D}$*, че е тавтология, ако всеки път, когато* I *е булева интерпретация,* $I \models \mathbb{D}$*.*

$\mathbb{D}$ *е тавтология* $\longleftrightarrow$ *има променлива* $P : P \in \mathbb{D}$ *и* $\neg P \in \mathbb{D}$*.*

Дефиниция 90 (Дуален литерал)**.** *Нека* L *е литерал. Дуален на* L *литерал ще наричаме*

$$L^{\partial} = \begin{cases} P, & \text{ако } L = P \\ \neg P, & \text{ако } L = \neg P \end{cases}$$

Дефиниция 91 (Модел)**.** *Казваме, че* I *е модел за* S*, където* S *е множество от дизюнкти, ако за всеки дизюнкт* $\mathbb{D} \in S, I \models \mathbb{D}$*. Така,* $I \models \varphi \longleftrightarrow I \models S_\varphi$*. За всяка булева интерпретация* $I, I \models \varnothing$*.* S *може и да е безкрайно.*

Нека Δ *е множество от съждителни формули,* I *е булева интерпретация,* $I \models \Delta \longleftrightarrow \forall \varphi \in \Delta, I \models \varphi$*. За всяка булева интерпретация* $I, I \models \Delta \longleftrightarrow \bigcup\limits_{\varphi \in \Delta} S_\varphi$*.*

Забележка. Δ *е изпълнимо* $\longleftrightarrow S_\Delta$ *е изпълнимо. Ако* $\blacksquare \in S$*, то* S *е неизпълнимо.*

Правило на съждителната резолюция

Дефиниция 92. *Нека $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ са дизюнкти, а L е литерал.*

Казваме, че правилото за съждителната резолюция е приложимо към двойката $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ относно L, ако $L \in \mathbb{D}_1$ и $L^\partial \in \mathbb{D}$.

Бележим $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.

Забележка. *Ако $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ са дизюнкти и L е литерал, то алгоритмично разпознаваемо е дали $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.*

Резултат от прилагането на правилото за резолюцията към $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ относно L имаме само когато правилото е приложимо и този резултат е $\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) \leftrightharpoons \{\mathbb{D}_1 \setminus \{L\} \cup \{\mathbb{D}_2 \setminus \{L^\partial\}\}$.

Дефиниция 93 (Резолвента)**.** *$\mathbb{D}$ е резолвента на $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$, ако има литерал $L : \mathbb{D} = \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.*

Дефиниция 94 (Резолютивен извод)**.** *Нека S е множество от дизюнкти. Резолютивен извод от S наричаме крайна редица от дизюнкти $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_n$: всеки неин член е или от S, или е резолвента на два предходни члена.*

Дефиниция 95. *Нека S е множество от дизюнкти и $\mathbb{D}$ е дизюнкт. Казваме, че $\mathbb{D}$ е резолютивно изводим от S, ако има резолютивен извод от S, чийто последен член е $\mathbb{D}$, т.е. има крайна редица $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_n$, такава че тя е резолютивен извод и $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}$.*

Пишем $S \overset{r}{\vdash} D$.

Забележка. *Нека S е множество от дизюнкти, I е булева интерпретация и $S \overset{r}{\vdash} D$. Тогава, ако $I \models S$, то $I \models \mathbb{D}$.*

Трансверзали за фамилии от множества

Дефиниция 96 (Трансверзала)**.** *Нека A е множество, чиито елементи са множества. A е фамилия от множества. Казваме, че едно множество Y е трансверзала за A, ако за всеки елемент $x \in A, Y \cap x = \varnothing$.*

Дефиниция 97 (Минимална трансверсала)**.** *Нека A е фамилия от множества. За едно множество Y казваме, че е минимална трансверзала за A, ако:*

- *Y е трансверзала за A;*
- *Ако $Y' \subseteq Y$ и Y' е трансверзала, то $Y' = Y$.*

Хорнови дизюнкти

Дефиниция 98 (Хорнов дизюнкт)**.** *Един съждителен дизюнкт $\mathbb{D}$ се нарича хорнов, ако съдържа най-много един позитивен литерал.*

Дефиниция 99 (Факт)**.** *$\{P\}$, където P е позитивен литерал, т.е. съждителна променлива или атомарна формула. Дизюнкти от този вид се наричат факти.*

Дефиниция 100 (Правило)**.** *$\{P, \neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}, n \geq 1$ – правило.*

$P : -Q_1, Q_2, \dots, Q_n$.

$P \vee \neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_n \models\mid \neg(Q_1 \& Q_2 \& \dots Q_n) \vee P \models\mid Q_1 \& Q_n \& \dots \& Q_n \Rightarrow P$.

Дефиниция 101 (Цели)**.** $\{\neg Q_1, \neg Q_2 \dots, \neg Q_n\}, n \geq 1$.

Дефиниция 102 (Хорнова програма)**.** *Хорнова програма е крайно множество от правила и факти.*

Дефиниция 103. *Нека* $I : PVar \longrightarrow \{T, F\}$. *Нека съпоставим* $A_I = \{P \mid I(P) = T\} \subseteq PVar$.

Обратно, ако A *е множество от съждителни променливи, то на* A *съпоставяме характеристичната ѝ функция* $I(P) = \begin{cases} T, P \in A \\ F, P \not\in A \end{cases}$.

Ако на A *съпоставим* I_A *и на* I_A *съпоставим* A_{I_A}, *ще получим* $A = A_{I_A}$. *Аналогично,* $I = I_{A_I}$.

В множеството на всички булеви интерпретации дефинираме частична наредба:

$$I \preccurlyeq J \leftrightharpoons A_I \subseteq A_J$$

Изоморфни влагания. Хомоморфизми и изоморфизми.

Дефиниция 104. *Нека* $A_0 \subseteq A^n$ *и нека* A_0 *е определимо. Нека* h *е автоморфизъм в структурата* $\mathcal{A}$.

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ *е изпълнено*

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0 \Leftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in A_0$$

Дефиниция 105. *Нека* h *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$ *и* φ *– формула.*

Ако $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$ *и* φ *е затворена, то* $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.

Дефиниция 106. *Нека* $A_0 \subseteq A^n$ *и* h *е автоморфизъм в структурата* $\mathcal{A}$.

Ако $\exists < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0$, *такива че* $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0 \in A_0$, *но* $< h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in A_0 \not\in A_0$, *то* A_0 *не е определимо множество.*

Пример: $< \mathbb{N}, \leq >$.

Дефиниция 107 (Подструктура)**.** *Нека* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *са структури за* $\mathcal{L}$, *казваме че* $\mathcal{A}$ *е подструктура на* $\mathcal{B}$, *ако* Id_A *е изоморфно влагане на* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{B}$, *т.е.:*

- $A \subseteq B$
- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$
- $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *такива че на* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *действа изоморфно влагане* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$
- $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{B}}$, *за* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$

Пример: $< \mathbb{Q}, \leq >$ *за* $< \mathbb{R}, \leq >$

Дефиниция 108. *Нека* $\mathcal{L}$ *е език без формално равенство,* $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$, $\mathcal{H}$ *е ербранова структура за* $\mathcal{L}$, *а* $\mathcal{H}^{free}$ *– свободна ербранова структура.*

1. *За* $\mathcal{H}$ *– ербранова структура, тогава* $\exists H^{free}$ *– свободна ербранова структура, за която* $\mathcal{H}$ *е подструктура.*
2. *За* $\forall H^{free}$ *– свободни ербранови структури* $\exists \mathcal{H}$ *– ербранова структура , такава че* $\mathcal{H}$ *е подструктура на* $\mathcal{H}^{free}$

Дефиниция 109. *Нека* $\mathcal{A}$ *е подструктура на* $\mathcal{B}$:

1. *Нека* $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *и* φ *е безкванторна, тогава за произволни* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$
2. *Нека* $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *и* φ *е универсална формула, тогава* $\mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$ *за* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$

3. *Нека* $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *и* φ *е екзистенциална формула, тогава* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$ *за* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$

Дефиниция 110 (Логическа еквивалентност на формули)**.** *Нека* φ *и* ψ *са предикатни формули.*

Казваме, че φ *и* ψ *са логически еквивалентни и записваме* $\varphi \models\!\mid \psi$*, ако за всяка структура* $\mathcal{A}$ *и за всяка оценка* ν *имаме, че* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\nu \psi$*.*

$\varphi \models\!\mid \psi \longleftrightarrow$ *във всяка структура* φ *и* ψ *определят едни и същи множества,* φ *и* ψ *имат свободни променливи между* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*.*

$\varphi \models\!\mid \psi \longleftrightarrow \models (\varphi \Leftrightarrow \psi)$

Дефиниция 111 (Предикатна тавтология)**.** *Една предикатна формула* φ *се нарича предикатна тавтология, ако за* $\forall \mathcal{A}$ *– структура и за* $\forall \nu$ *– оценка в* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$*, т.е.* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}} = T$*.*

$H_{\Leftrightarrow}(l_1, l_2) = T \longleftrightarrow l_1 = l_2$

Дефиниция 112. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* φ *и* ψ *са предикатни формули. Казваме, че* φ *и* ψ *са логически еквивалентни в* $\mathcal{A}$*,* $\varphi \models\!\mid_{\mathcal{A}} \psi$*, ако за* $\forall \nu$ *– оценка в* $\mathcal{A}$ *е в сила* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$*.*

Дефиниция 113 (Заместване на индивидни променливи и предикатни формули)**.** *Нека* x *е индивидна променлива,* τ *е терм. С* $\varphi[{}^x/_\tau]$ *ще означаваме резултата от едновременната замяна на всички свободни участия на* x *във* φ *с* τ*.*

Казваме, че замяната е ***допустима****, ако свободните участия на* x *във* φ *не са в област на действие на квантор по променлива от* τ*.*

Забележка. *Нека* φ *е безкванторна. Тогава за всяко* x *и всеки терм* $\tau\varphi[{}^x/_\tau]$ *е допустима.*

Забележка. *Ако* τ *е затворен терм, то за всяка формула* φ *и всяко* $x\varphi[{}^x/_\tau$ *е допустима.*

Дефиниция 114 (Преименуване на свързани променливи)**.** *Нека* φ *е предикатна формула,* $x \neq z, Q \in \{\forall, \exists\}$*.*

Казваме, че формулта $Qz[\varphi[{}^x/_z]]$ *е получена от* $Qx\varphi$ *с преименуване, ако са изпълнени условията:*

- $\varphi[{}^x/_z]$ *е допустима замяна (свободните участия на* x *във* φ *не са в област на действие на* Q *по* z*)*
- $z \notin Var^{free}[\varphi]$

Свойства

Булева еквивалентност на съждителни формули

Свойство 1 (Логическа еквивалентност)**.**

1. *$\varphi \models\mid \varphi$;*
2. *$\varphi \models\mid \psi \to \psi \models\mid \varphi$ - симетричност;*
3. *$\varphi \models\mid \psi, \psi \models\mid \chi \to \varphi \models\mid \chi$ – транзитивност;*

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ \varphi \models\mid \varphi' \to \neg\varphi \models\mid \neg\varphi'; \\ 5.\ \varphi \models\mid \varphi', \psi \models\mid \psi' \to (\varphi\sigma\psi) \models\mid (\varphi'\sigma\psi'), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}. \end{array}\right\} \textit{устойчивост на съждителните съюзи}$$

Доказателство.

4. Нека $\varphi \models\mid \varphi'$, т.е. за всяка булева интерпретация I, $I(\varphi) = I(\varphi')$.

   Нека J_0 е булева интерпретация - произволна, тогава $J(\varphi) = J(\varphi')$ и $J(\neg\varphi) = H_\neg(J(\varphi)) = H_\neg(J(\varphi')) = J(\neg\varphi')$.

   Значи, за всяка булева интерпретация I, $I(\neg\varphi) = I(\neg\varphi')$, т.е. $\neg\varphi \models\mid \neg\varphi'$.

5. Нека I_0 е булева интерпретация.

   Тогава, тъй като $\varphi \models\mid \varphi'$, имаме $I(\varphi) = I(\varphi')$, и от $\psi \models\mid \psi'$ имаме $I(\psi) = I(\psi')$.

   Значи $I(\varphi\sigma\psi) = H_\sigma(I(\varphi), I(\psi)) = H_\sigma(I(\varphi'), I(\psi')) = I(\varphi'\sigma\psi')$.

   Следователно $(\varphi\sigma\psi) \models\mid (\varphi'\sigma\psi')$.

□

Забележка. *Формулите образуват алгебрична система и $\models\mid$ разбива това множество на класове, за които алгебричните операции са съгласувани.*

Свойство 2 (Полезни еквивалентности)**.**

1. *$(\varphi \vee \varphi) \models\mid \varphi$, $(\varphi \,\&\, \varphi) \models\mid \varphi$ – идемпотентност на $\vee, \&$;*
2. *$(\varphi \vee \psi) \models\mid (\psi \vee \varphi), (\varphi \,\&\, \psi) \models\mid (\psi \,\&\, \varphi)$ – комутативност на $\vee, \&$;*
3. *$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \models\mid ((\varphi \vee \psi) \vee \chi), (\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)) \models\mid ((\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi)$ – асоциативност на $\vee, \&$;*

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ (\varphi \vee (\psi \,\&\, \chi)) \models\mid ((\varphi \vee \psi) \,\&\, (\varphi \vee \chi)); \\ 5.\ (\varphi \,\&\, (\psi \vee \chi)) \models\mid ((\varphi \,\&\, \psi) \vee (\varphi \,\&\, \chi)); \end{array}\right\} \textit{дистрибутивен закон за } \vee, \&$$

6. *$\neg\neg\varphi \models\mid \varphi$ – класическа логика: двойното отрицание пада;*

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ \neg(\varphi \vee \psi) \models\mid (\neg\varphi \,\&\, \neg\psi); \\ 8.\ \neg(\varphi \,\&\, \psi) \models\mid (\neg\varphi \vee \neg\psi); \end{array}\right\} \textit{де Морган}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ (\varphi \Rightarrow \psi) \models\mid (\neg\varphi \vee \psi); \\ 10.\ (\varphi \Rightarrow \psi) \models\mid (\varphi \,\&\, \neg\psi) \\ 11.\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \models\mid ((\varphi \,\&\, \psi) \vee (\neg\varphi \,\&\, \neg\psi)); \\ 12.\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \models\mid ((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)); \end{array}\right\} \textit{абревиатури за } \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

13. *Нека φ е съждителна тавтология, тогава за всяка формула ψ имаме следните логически еквивалентности:*

    - $(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\!\dashv \varphi$;
    - $(\varphi \;\&\; \psi) \models\!\!\!\!\dashv \psi$.

Доказателство.

9. $\Rightarrow$) Нека I_0 е произволна булева интерпретация.
   Нека $I(\varphi \Rightarrow \psi) = F = H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi))$. Следователно $I(\varphi) = T, I(\psi) = F, I(\neg\varphi) = H_{\neg}(\varphi) = F$.
   Така $I(\neg\varphi) = I(\psi) = F$. Следователно $H_{\vee}(I(\neg\varphi), I(\psi)) = F = I((\neg\varphi \vee \psi))$.

   $\Leftarrow$) Нека $I((\neg\varphi \vee \psi)) = F$.
   Тогава $H_{\vee}(I(\neg\varphi), I(\psi)) = F$. Значи $I(\neg\varphi) = I(\psi) = F$. $I(\neg\varphi) = H_{\neg}(\varphi) = F$, следователно $I(\varphi) = T$.
   Следователно $H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi)) = F = I((\varphi \Rightarrow \psi))$.

□

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Свойство 3.

1. *$\varphi \models \psi$ тогава и само тогава, когато $\varphi \Rightarrow \psi$ е булева тавтология;*

2. *ако φ е противоречие, то за всяка формула ψ, $\varphi \models \psi$;*

3. *ако ψ е съждителна тавтология, то за всяка формула φ, $\varphi \models \psi$;*

4. *ако φ не е противоречие и ψ не е тавтология, и $\varphi \models \psi$, то φ и ψ имат поне една обща съждителна променлива.*

Доказателство.

1. $\Rightarrow$) Допускаме, че $\varphi \Rightarrow \psi$ не е булева тавтология.
   Тогава има булева интерпретация I_0, при която $I_0 \not\models \varphi \Rightarrow \psi$. Нека I_0 е такава булева интерпретация.
   Тогава $I(\varphi) = T$ и $I(\psi) = F$. От $I(\varphi) = T$ следва $I \models \varphi$. Но $\varphi \models \psi$. Следователно $I \models \varphi$, т.е. $I(\psi) = T$. Противоречие.

   $\Leftarrow$) Обратно, нека $\varphi \Rightarrow \psi$ е булева тавтология. Да допуснем, че $\varphi \models \psi$. Нека I_0 е булева интерпретация, за която $I_0 \models \varphi, I_0 \not\models \psi$.
   Тогава $I(\varphi) = T$ и $I(\psi) = F$. Следователно $I((\varphi \Rightarrow \psi)) = H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi)) = F$. Значи $\varphi \Rightarrow \psi$ не е булева тавтология. Противоречие.

   Забележка. *$\varnothing \models \varphi$ тогава и само тогава, когато φ е съждителна тавтология. Вместо $\varnothing \models \varphi$, пишем $\models \varphi$.*

   $\Rightarrow$) Нека $\models \varphi$. Нека I_0 е произволна булева интерпретация. Тогава I_0 е модел на $\varnothing$. От това, че I_0 е модел за $\varnothing$ получаваме, че I_0 е модел за φ, т.е. φ е съждителна тавтология.

   $\Leftarrow$) Обратно, нека φ е съждителна тавтология. Нека I_0 е произволен модел за $\varnothing$. Тъй като φ е съждителна тавтология, $I(\varphi) = T$. Така всеки модел на празното множество е модел на φ.

4. Тъй като φ не е противоречие, тогава избираме $I_0 : I(\varphi) = T$ и тъй като ψ не е тавтология, тогава избираме булева интерпретация $J_0 : J(\psi) = F$.

   Дефинираме $K_0(P) = \begin{cases} I_0(P), \text{ако } P \text{ участва във } \varphi; \\ J_0(P), \text{ако } P \text{ не участва във } \varphi. \end{cases}$

   Тогава за всяко $P \in Var(\varphi), K_0(P) = I_0(P)$. Следователно $K(\varphi) = I(\varphi) = T$.

   Да допуснем, че φ и ψ нямат общи променливи. Тогава за всяка променлива P, която участва в ψ, P не участва във φ. Следователно, $K_0(P) = J_0(P)$. Следователно $K(\psi) = J(\psi) = F$.

   Тогава $K(\varphi) = T, K(\psi) = F$, но $\varphi \models \psi$. Противоречие. Следователно допускането е невярно.

$\square$

Забележка. *Можем да разглеждаме едновременно модели за* $\varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_n$ *и* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Свойство 4 (Логическо следване)**.**

1. $\psi \in \Gamma \longrightarrow \Gamma \models \psi$;
2. *Нека* Γ *и* Δ *са множества от съждителни формули. Нека всеки път, когато* $\varphi \in \Delta, \Gamma \models \varphi$*. Нека* $\Delta \models \psi$*. Тогава* $\Gamma \models \psi$*;*
3. $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *и* $\Gamma' \models \psi \longrightarrow \Gamma \models \varphi$ *– монотонност;*
4. *Семантична дедукция: От* $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$*. Означаваме:* $\Gamma, \varphi \models \psi$*, т.е. с добавянето на аксиомата* φ *към* Γ*,* Γ *става модел за* ψ*.*
5. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi \longleftrightarrow \models (\varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ldots \& \ \varphi_n) \Rightarrow \psi$
6. $\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *е неизпълнимо множество*
7. *Компактност на логическото следване:*
   $\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow$ *има крайно* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0 \models \varphi \models\!\!\!\dashv \Gamma$ *е неизпълнимо* $\longleftrightarrow$ *има крайно* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0$ *е неизпълнимо* $\models\!\!\!\dashv \Gamma$ *е изпълнимо* $\longleftrightarrow$ *всяко крайно* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0$ *е изпълнимо.*
8. $\varnothing \models \psi \longleftrightarrow \models \psi$ *– вярна при всяка булева интерпретация (тавтология).*
9. *Ако* Γ *е неизпълнимо, то за всяка формула* $\psi, \Gamma \models \psi$ *(от лъжата следва всичко).*
10. *Нека* $\models \psi$*, тогава за всяко множество* $\Gamma, \Gamma \models \psi$*.*

Доказателство.

3. Нека $\Gamma' \subseteq \Gamma$ и $\Gamma' \models \varphi$. Нека I_0 е произволен модел на $\Gamma, I_0 \models \Gamma$. т.е. ако $\psi \in \Gamma \rightarrow I(\psi) = T$, $I_0 \models \psi$. Нека $\psi \in \Gamma'$, тогава $\psi \in \Gamma$, значи $I_0 \models \psi$. С други думи, $I_0 \in \Gamma'$. Но $\Gamma' \models \varphi$, поради което $I_0 \models \varphi$. Тъй като I_0 е произволен модел на $\Gamma, \Gamma \models \varphi$.

4. $\Rightarrow$) (Достатъчност) $\Gamma, \varphi \models \psi$. Нека I_0 е произволен модел за Γ.

1-ви случай: Нека $I_0 \models \varphi$. Тогава $I_0 \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, но $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Следователно $I_0 \models \psi$.

2-ри случай: Нека $I_0 \not\models \varphi$, т.е. $I(\varphi) = F$. Тогава $H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi)) = T$, значи $I((\varphi \Rightarrow \psi)) = T$. Следователно $I_0 \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Така и в двата случая $I_0 \models \varphi \Rightarrow \psi$. Значи $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$.

$\Leftarrow$) (Необходимост) Нека $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$. Нека I_0 е модел за $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Тогава за всяка формула $\chi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ имаме $I(\chi) = T$. В частност, $\chi \in \Gamma$ влече $I(\chi) = T$, т.е. $I_0 \models \Gamma$. Ако $\chi = \varphi$, то $I(\varphi) = T$. Значи $I(\varphi \Rightarrow \psi) = T$, $I(\varphi) = T$ и $H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi)) = T$. Следователно $I(\psi) = T$, т.е. $I \models \psi$.

Следователно $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

6. $\Rightarrow$) (Достатъчност) Нека $\Gamma \models \varphi$. Да допуснем, че $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо. Тогава това множество има модел. Нека $I_0 \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Следователно $I_0 \models \Gamma$ и $I_0 \models \neg\varphi$. Значи $I(\neg\varphi) = T$, но $I(\neg\varphi) = H_{\neg}(I(\varphi))$, следователно $I(\varphi) = F$, но от $\Gamma \models \varphi$ следва, че $I_0 \models \varphi$ и $I(\varphi) = T$. Противоречие.

   $\Leftarrow$) (Необходимост) Нека $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо. Нека I_0 е произволен модел на Γ. Тъй като $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ няма модел следва, че $I_0 \not\models \neg\varphi$, т.е. $I_0 \models \varphi$. I_0 е произволен модел на Γ, поради което $\Gamma \models \varphi$.

$\square$

Предикатно смятане от първи ред

Свойство 5. *Ако φ е затворена формула, то $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$*

Забележка. *$\mathcal{A} \not\models \varphi$ и оценка ν, за която $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, тогава за всяка оценка ω е в сила $\mathcal{A} \models_\omega \neg\varphi, \mathcal{A} \models \neg\varphi$.*

Забележка. *Винаги е вярно едно от двете $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ или $\mathcal{A} \models_\nu \neg\varphi$, но $\underline{\mathcal{A} \models \varphi}$ <u>или</u> $\underline{\mathcal{A} \models \neg\varphi}$ <u>е вярно само ако формулата</u> $\underline{\varphi}$ <u>е затворена</u>.*

Семантика на език от първи ред

Свойство 6.

- $\mathcal{A} \models_\nu p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \leftrightharpoons < \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n > \in p^{\mathcal{A}}$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\tau_1 \doteq \tau_2) \leftrightharpoons \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu]$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \neg\varphi \leftrightharpoons \mathcal{A} \not\models \varphi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \& \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *и* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *или* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \Rightarrow \psi) \leftrightharpoons$ *ако* $\mathcal{A} \models \varphi$, *то* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \Leftrightarrow \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *тогава и само тогава, когато* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \forall x \varphi \leftrightharpoons$ *за всяко* $a \in A, \mathcal{A} \models_{\nu_a^x} \varphi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \exists x \varphi \leftrightharpoons$ *съществува* $a \in A, \mathcal{A} \models_{\nu_a^x} \varphi$;

Свойство 7.

- *$\varnothing$ е определимо във всяка структура при всеки език: $\varphi[x], \varphi \& \neg\varphi$ определя $\varnothing$;*
- *A е определимо във всяка структура при всеки език: $\varphi[x], \varphi \vee \neg\varphi$ определя A;*
- *A^2 е определимо във всяка структура при всеки език: $\varphi[x], \varphi[x, y], \varphi \vee \neg\varphi$ определя A^2;*

- *ако B е определимо и $B \subseteq A^n$, то $A^n \setminus B$ е също определимо.*

  $< a_1, a_2, \dots, a_n > \in B \longleftrightarrow A \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$

  $A \not\models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow < a_1, a_2, \dots, a_n > \not\in B \longleftrightarrow < a_1, a_2, \dots, a_n > \not\in A^n \setminus B$

- *ако $B_1, B_2 \subseteq A^n$ са определими, то $B_1 \cup B_2, B1 \cap B2, B1 \setminus B_2, B_1 \Delta B_2$ също са определими.*

  Щом B_1 е определимо, т.е. $\exists \varphi[x_1, x_2, \dots x_n]$, която определя B_1 и щом B_2 е определимо, т.е. $\exists \psi[x_1, x_2, \dots x_n]$, която определя B_2.

  Тогава $(\varphi \vee \psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ определя $B_1 \cup B_2$, $(\varphi \& \psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ определя $B_1 \cap B_2$, $(\varphi \& \neg\psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ определя $B_1 \setminus B_2$, $[(\varphi \& \neg\psi) \vee (\neg\varphi \& \psi)][x_1, x_2, \dots x_n]$ определя $B_1 \Delta B_2$.

  Ако $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \varnothing$ и $\psi'[y_1, y_2, \dots, y_n]$ определя B_2, то $\varphi \vee \psi'$ определя $(B_1 \times A^n) \cup (B_2 \times A^n)$.

Хомоморфизми и изоморфизми.

Свойство 8 (Изоморфизъм)**.**

- *$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, ако h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, то h^{-1} е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{A}$*

- *$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \cong \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$, нека h_1, h_2 са изоморфизми съответно на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$ и на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{C}$. Тогава $h(a) = h_1 \circ h_2 = h_2(h_1(a))$ е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{C}$.*

- *$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}, Id_{\mathcal{A}}$ е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{A}$*

Доказателство.

- Нека $h : A \longrightarrow B$ е биекция. Тогава $h^{-1} : B \longrightarrow A$ също е биекция. Значи:

  - $b_1 = h(a_1), a_i \in A$;
  - $f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2, \dots, b_n) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) = h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$
    $= h(f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n)))$

  Следователно $h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2, \dots, b_n)) = h^{-1}(h(f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n)))) =$
  $= f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n))$

  Ще покажем, че е вярно $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in p^{\mathcal{B}} \longleftrightarrow (h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n)) \in p^{\mathcal{A}}$.

  Тъй като h е биекция, то $b_1 = h(a_1), b_2 = h(a_2), \dots, b_n = h(a_n)$ за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Тогава $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in p^{\mathcal{B}} \longleftrightarrow (h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)) \in p^{\mathcal{B}} \overset{\text{хом.}}{\longleftrightarrow} (a_1, a_2, \dots, a_n) \in p^{\mathcal{A}}$ $\longleftrightarrow (h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \dots, h^{-1}(b_n)) \in p^{\mathcal{A}}$.

$\square$

Свойство 9 (Автоморфизъм)**.** *Ако $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ и h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, то h се нарича автоморфизъм в $\mathcal{A}$.*

- *$Id_{\mathcal{A}}$ е автоморфизъм;*

- *h е автоморфизъм, то h^{-1} е автоморфизъм;*

- *h_1 и h_2 са автоморфизми в $\mathcal{A}$, то $h_2 \circ h_1$ е автоморфизъм в $\mathcal{A}$.*

Логически еквивалентни формули

Свойство 10. *Верни са всички еквивалентности за съждителни формули.*

- $\exists x\varphi \models\!\mid \neg\forall x\neg\varphi$
- $\forall x\varphi \models\!\mid \neg\exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \models\!\mid \forall x\neg\varphi$
- $\neg\forall x\varphi \models\!\mid \exists x\neg\varphi$
- $\forall(\varphi\&\psi) \models\!\mid \forall x\varphi\&\forall x\psi$
- $\exists x(\varphi \vee \psi) \models\!\mid (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$
- $\forall(\varphi \vee \psi) \not\models\!\mid (\forall\varphi \vee \forall\psi)$
- $\exists(\varphi\&\psi) \not\models\!\mid (\exists\varphi\&\exists\psi)$
- *Нека* $x \not\in Var^{free}[\varphi]$. *Тогава* $\forall x(\varphi \vee \psi) \models\!\mid \forall x\varphi \vee \psi$, $\exists x(\varphi\&\psi) \models\!\mid \exists x\varphi\&\psi, (\mathcal{A} \models_\nu \exists x\psi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\nu \psi)$;
- *Нека* $x \not\in Var^{free}[\varphi]$. *Тогава* $\varphi \models\!\mid \forall x\varphi, \varphi \models\!\mid \exists x\varphi$ *и* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu^x_a]$ *за* $\nu, a \in A$.

Преименуване на свързани променливи

Свойство 11. *Ако* $Qy\varphi[x/y]$ *е вариант на* $Qx\varphi$, *то* $Qx\varphi$ *е вариант на* $Qy\varphi[x/y]$.

Логическо следване

Свойство 12.

- *Ако* $\varphi \in \Gamma$, *то* $\Gamma \models \varphi$;
- *Ако* $\Gamma \subseteq \Delta$ *и* $\Gamma \models \varphi$, *то* $\Delta \models \varphi$;
- $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$;
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi \longleftrightarrow (\varphi_1\&\varphi_2\&\dots\&\varphi_n) \Rightarrow \psi$.

Затворени универсални формули

Свойство 13.

- *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура, в която е вярна затворената универсална формула* φ. *Тогава в* $\mathcal{A}$ *е верен всеки затворен частен случай на* φ.
- *Ако* Γ *е множество от затворени универсални формули, то* $CSI(\Gamma) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\varphi\in\Gamma} CSI(\varphi)$
- $\mathcal{A} \models \Gamma \longrightarrow \mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$.

Съждителна резолюция

Правило на съждителната резолюция

Свойство 14.

- *Ако* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_n$ *е резолютивен извод от* S *и* $k \leq n$, *то* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *също е резолютивен извод;*
- *Ако* α *и* β *са резолютивни изводи от* S, *то* α, β *също е резолютивен извод от* S;
- *Ако* S *е разпознаваемо (рекурсивно) множество и* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е крайна редица от дизюнкти, то можем алгоритмично да разпознаем дали* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е рекурсивен извод от* S;
- *Нека* I *е булева интерпретация,* S *е множество от дизюнкти и* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е резолютивен извод от* S. *Ако* $I \models S$, *то за всяко* $k \leq n, I \models \mathbb{D}_k$.

Трансверзали за фамилии от множества

Свойство 15. *A има трансверзала* $\longleftrightarrow$ *за всяко множество* $x \in A, x \neq \varnothing$.

Хорнови дизюнкти

Свойство 16.

- *Ако* $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$ *са хорнови дизюнкти и* $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$, *то* $\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$ *е също хорнов дизюнкт;*
- *Нека* S *е множество от хорнови дизюнкти и* $\blacksquare \not\in S$. *Ако* S *е неизпълнимо, то* S *съдържа поне един факт и поне една цел;*
- *Ако* S *е хорнова програма, то* S *има модел.*

Свойство 17 (Формално равенство)**.**

- $\forall x Eq(x, x)$;
- $\forall x \forall y (Eq(x, y) \Leftrightarrow Eq(y, x))$;
- $\forall x \forall y \forall z ((Eq(x, y) \& Eq(y, z)) \Rightarrow Eq(x, z)$;
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x'_1 \ldots \forall x'_n (Eq(x_1, x'_1) \& \ldots \& Eq(x_n, x'_n)) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(x'_1, \ldots, x'_n))$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x'_1 \ldots \forall x'_n (Eq(x_1, x'_1) \& \ldots \& Eq(x_n, x'_n)) \Rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow p(x'_1, \ldots, x'_n))$

Твърдения

Семантика на съждителните формули

Твърдение 1. *Всяка съждителна интерпретация I_0 може по единствен начин да се разшири до изображение I от съвкупността на всички съждителни формули в $\{T, F\}$.*

Има единствено изображение $I : \{\varphi \mid \varphi$ е съждителна формула $\} \to \{T, F\}$

- *за всяка съждителна променлива $P, I(P) = I_0(P)$;*
- *за всяка съждителна формула $\varphi, I(\neg\varphi) = H_\neg(I(\varphi))$;*
- *за всеки две съждителни формули φ и $\psi, I((\varphi\sigma\psi)) = H_\sigma(I(\varphi), I(\psi)), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.*

Следва от ***еднозначния синтактичен анализ*** *на съждителните функции.*

Доказателство. Приложение на еднозначния синтактичен анализ – индукция относно построението на съждителните формули.

Ако I и I' удовлетворяват написаните условия, то те съвпадат. Непосредствено от индуктивния принцип и еднозначния синтактичен анализ.

□

Твърдение 2. *Ако $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ и Γ_2 е изпълнимо, то Γ_1 също е изпълнимо.*

Доказателство. Наистина, ако I е булев модел за Γ_2, то за всяка формула $\varphi \in \Gamma_2, I \models \varphi$. В частност, за всяко $\varphi \in \Gamma_1, I \models \varphi$. Значи ако $I \models \Gamma_2$, то $I \models \Gamma_1$. Следователно Γ_1 е изпълнимо. □

Твърдение 3. *Ако $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ и Γ_1 е неизпълнимо, то Γ_2 също е неизпълнимо.*

Твърдение 4. *φ е съждителна тавтология, т.е. всяка булева интерпретация е модел за φ, тогава и само тогава, когато $\neg\varphi$ е противоречие.*

Доказателство.

$\Rightarrow$) (Достатъчност) Нека φ е съждителна тавтология.

Нека I_0 е произволна булева интерпретация. Тогава $I_0 \models \varphi$, т.е. $I(\varphi) = T$. Следователно $I(\neg\varphi) = H_\neg(I(\varphi)) = H_\neg(T) = F$, т.е. $I_0 \not\models \neg\varphi$.

$\Leftarrow$) (Необходимост) Нека $\neg\varphi$ е противоречие.

Нека I_0 е произволна булева интерпретация. Тъй като $\neg\varphi$ е произволна, $I(\neg\varphi) = F$. $F = I(\neg\varphi) = H_\neg(I(\varphi))$. Следователно $I(\varphi) = T$. I_0 е произволна, следователно φ е тавтология.

□

Твърдение 5. *Нека φ е съждителна формула. Нека I_0 и J_0 са булеви интерпретации.*

Ако за всяка съждителна променлива P, участваща лингвистично във φ, т.е. $P \in Var(\varphi)$, $I_0(P) = J_0(P)$, то $I(\varphi) = J(\varphi)$.

Доказателство. Доказателство с индукция по построението на φ:

- Нека φ е съждителна променлива, P.

  Тогава $Var(\varphi) = \{P\}$. Нека I_0 и J_0 са булеви интерпретации, удовлетворяващи условието за всяка променлива от $Var(\varphi)$, I_0 и J_0 съвпадат.

  Тогава $I(\varphi) = I(P) = I_0(P) = J_0(P) = J(P) = J(\varphi)$.

- Нека $\varphi = \neg\psi$, като за ψ твърдението е вярно.

  Значи всеки път, когато I_0 и J_0 са булеви интерпретации, такива че за всяка съждителна променлива $P \in Var(\varphi)$, $I_0(P) = J_0(P)$, то $I(\psi) = J(\psi)$.

  Нека I_0 и J_0 са булеви интерпретации и за всяко $P \in Var(\psi)$ имаме $I_0(P) = J_0(P)$. $Var(\varphi) = Var(\neg\psi) = Var(\psi)$. Следователно, за всяка $P \in Var(\varphi), I_0(P) = J_0(P)$. От индукционното предположение следва $I(\psi) = J(\psi)$.

  Следователно $H_\neg(I(\psi)) = H_\neg(J(\psi))$, т.е. $I(\neg\varphi) = J(\neg\varphi)$.

- Нека $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

  Нека I_0 и J_0 са булеви интерпретации, такива че $I_0(P) = J_0(P)$ всеки път, когато $P \in Var(\varphi), Var(\varphi) = Var(\varphi_1) \cup Var(\varphi_2)$.

  За всяко $P \in Var(\varphi_1)$ имаме $I_0(P) = J_0(P)$. Прилагаме индукционното предположение за φ_1, I_0, J_0 и получаваме $I(\varphi_1) = J(\varphi_1)$.

  За всяко $P \in Var(\varphi_2)$ имаме $I_0(P) = J_0(P)$. Прилагаме индукционното предположение за φ_2, I_0, J_0 и получаваме $I(\varphi_2) = J(\varphi_2)$.

  Тогава $I(\varphi) = I(\varphi_1 \sigma \varphi_2) = H_\sigma(I(\varphi_1), I(\varphi_2)) = H_\sigma(J(\varphi_1), J(\varphi_2)) = J(\varphi_1 \sigma \varphi_2) = J(\varphi)$.

□

Следствие 1. *Проблемите за изпълнимост и тавтологичност на съждителни формули са разрешими, т.е. има алгоритъм, който по дадена произволна формула φ разпознават дали φ е изпълнима и съответно дали е тавтология.*

Доказателство. $Var(\varphi)$ е крайно множество, $Var(\varphi) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Последователно подреждаме редица с дължина n от $\{T, F\}$. За всяка такава редица $a_1, a_2, \dots, a_n$ смятаме стойността на φ при $I(P_i) = a_i, 1 \leq i \leq n$. Спираме тогава, когато получим .

Така имаме алгоритъм за разпознаване на изпълнимост. □

Забележка. *Пробелмът за изпълнимост на съждителна формула е NP-пълен.*

Твърдение 6. *Дизюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Твърдение 7. *Конюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Булева еквивалентност на съждителни формули

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Твърдение 8. *Ако $\varphi[P_1, P_2, \dots, P_n], P_1, P_2, \dots, P_n$ – различни съждителни променливи и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са произволни съждителни формули, то $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е също съждителна формула.*

Твърдение 9. *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ са съждителни формули и $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ е съждителна формула, то $\alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \dots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$ също е съждителна формула.*

Доказателство. Избираме променливи $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – различни и не се срещат във $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$; $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Тогава думата $\alpha_0 Q_1 \alpha_1 Q_2 \dots \alpha_{n-1} Q_n \alpha_n =: \varphi$ е съждителна формула и $\varphi[P_1, P_2, \dots, P_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$. От тук може да получим чрез едновременна замяна

$\varphi[{}^{P_1}/_{P_1}, {}^{P_2}/_{P_2}, \dots, {}^{P_k}/_{P_k}, {}^{Q_1}/_{\varphi_1}, {}^{Q_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{Q_n}/_{\varphi_n}] = \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ и
$\varphi[{}^{P_1}/_{P_1}, {}^{P_2}/_{P_2}, \dots, {}^{P_k}/_{P_k}, {}^{Q_1}/_{\psi_1}, {}^{Q_2}/_{\psi_2}, \dots, {}^{Q_n}/_{\psi_n}] = \alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \dots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$.

Следователно, ако $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ е съждителна формула, то и $\alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \dots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$ също е съждителна формула. □

Твърдение 10. *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава винаги като резултат формула ψ, такава че:*

- $\varphi \models\!\mid \psi$
- *в ψ няма срещания на $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$*

Доказателство.

- ако φ е съждителна променлива, то $\psi = \varphi$.
- ако $\varphi = \neg\varphi$ и има алгоритъм за φ_1, който дава като резултат ψ_1, така че $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1$, и в ψ_1 няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

  Тогава $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1 \longrightarrow \neg\varphi_1 \models\!\mid \neg\psi_1$. В ψ_1 няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, следователно $\psi = \neg\psi_1$, също няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- $\varphi = (\varphi_1\sigma\varphi_2), \sigma \in \{\vee, \&\}$ и има алгоритъм за φ_1 и φ_2, който дава като резултат ψ_1 и ψ_2.

  Тогава от $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1$, $\varphi_2 \models\!\mid \psi_2$ следва, че $(\varphi_1\sigma\varphi_2) \models\!\mid (\psi_1\sigma\psi_2)$ и в $(\psi_1\sigma\psi_2)$ няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ и има алгоритъм за φ_1 и φ_2, който дава като резултат ψ_1 и ψ_2.

  Тогава $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ и $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2) \models\!\mid (\neg\psi_1 \vee \psi_2)$.

  Следователно може да считаме, че $(\neg\psi_1 \vee \psi_2)$ е резултат от алгоритъма.
- $\varphi = (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ и има алгоритъм за φ_1 и φ_2, който дава като резултат ψ_1 и ψ_2.

  Тогава $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2)$ и $(\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2) \models\!\mid (\psi_1\&\psi_2) \vee (\neg\psi_1\&\neg\psi_2)$.

  Следователно може да считаме, че $(\psi_1\&\psi_2) \vee (\neg\psi_1\&\neg\psi_2)$ е резултат от алгоритъма.

□

Твърдение 11. *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава винаги като резултат формула ψ, такава че:*

- $\varphi \models\!\mid \psi$
- *в ψ няма срещания на $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$*
- *всяко срещане на $\neg$ е от вида $\neg P, P \in PVar$.*

Доказателство. От твърдение 10 получаваме ψ, такова че $\varphi \models\!\mid \psi$ и в ψ няма срещане на $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

- ако $\psi \in PVar$, то твърдението е изпълнено.
- ако $\psi = \neg\psi'$:
  - ако $\psi' = \neg\psi''$, то $\psi = \neg\neg\psi'' \models\!\mid \psi''$
  - ако $\psi' = (\psi_1\&\psi_2)$, то $\neg\psi' \models\!\mid \neg(\psi_1\&\psi_2) \models\!\mid (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$
  - ако $\psi' = (\psi_1 \vee \psi_2)$, то $\neg\psi' \models\!\mid \neg(\psi_1 \vee \psi_2) \models\!\mid (\neg\psi_1\&\neg\psi_2)$

□

Твърдение 12. *Има алгоритъм, който на φ съпоставя $\psi = \psi_1 \ \& \ \psi_2 \ \& \ \dots \ \& \ \psi_n$, където $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ са елементарни дизюнкции.*

Твърдение 13. *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са съждителни формули. Нека φ е съждителна формула, такава че $\varphi \models\mid \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \varphi_n\alpha_n$.*

Казваме, че сме отбелязали някои конкретни участия на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ във φ. Нека $\varphi_1', \varphi_2', \dots, \varphi_n'$ са съждителни формули.

Да разгледаме думата $\alpha_0\varphi_1'\alpha_1\varphi_2' \dots \varphi_n'\alpha_n$. Тази дума е съждителна формула.

Доказателство. Доказателството използва **еднозначен синтактичен анализ** и индукция по построението на φ. Вземаме твърдението за истина на доверие. □

Твърдение 14. *Нека I е булева интерпретация, такава че $I(\varphi_1) = I(\varphi_1'), \dots, I(\varphi_n) = I(\varphi_n')$. Тогава $I(\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \dots \varphi_n\alpha_n) = I(\alpha_0\varphi_1'\alpha_1 \dots \varphi_n'\alpha_n)$.*

Твърдение 15. *Нека φ е съждителна формула, в която не участват $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Тогава алгоритмично можем да намерим формула φ', такава че $\varphi \models\mid \varphi'$ и $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ не участват във φ' и във φ' отрицанието се среща само пред съждителни променливи.*

Например: $\varphi' \Rightarrow \alpha\neg\beta \to \beta = P\beta'$.

Предикатно смятане от първи ред

Твърдение 16. *Нека $\mathcal{L}_2$ е разширение на $\mathcal{L}_1$. Тогава всеки терм от $\mathcal{L}_1$ е терм от $\mathcal{L}_2$.*

Доказателство. С индукция по построението на термовете. □

Твърдение 17. *За всеки два терма τ и $\varkappa$ е в сила еквивалентността: τ е подтерм на $\varkappa \longleftrightarrow \tau \in Subt(\varkappa)$.*

Семантика на език от първи ред

Твърдение 18. *Нека $\mathcal{A}$ е крайна структура и са зададени интерпретации на нелогическите символи. Тогава има алгоритъм, който по дадена формула φ разпознава дали формулата е вярна или не.*

Следствие 1. *Има алгоритъм, който по дадена формула φ разпознава дали в крайна структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \models \varphi$.*

Твърдение 19. *Ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и за всяка индивидна променлива x, участваща във $\varphi, \nu_1(x) = \nu_2(x)$, то $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Твърдение 20. *Нека $\mathcal{A}$ е структура. Тогава за всяка формула φ е в сила следното: ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.*

Доказателство. Индукция по построението на φ:

- $\varphi = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$. Нека $1 \leq i \leq n$, $Var^{free}(\tau_i) \subseteq Var^{free}(\varphi)$.

  Следователно $\nu_1|Var(\tau_i) = \nu_2|Var(\tau_i), \tau_i^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau_i^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] &\longleftrightarrow < \tau_1[\nu_1], \tau_2[\nu_1], \dots, \tau_n[\nu_1] > \in p^{\mathcal{A}} \\ &\longleftrightarrow < \tau_1[\nu_2], \tau_2[\nu_2], \dots, \tau_n[\nu_2] > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \|p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[\nu_2] \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\varphi_1$ и за φ_1 твърдението е вярно. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$. Тъй като $Var^{free}(\varphi) = Var^{free}(\varphi_1)$, имаме $\nu_1|Var^{free}(\varphi_1) = \nu_2|Var^{free}(\varphi_1)$.

  Следователно $\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$ (ih). Тогава $H_\neg(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_1]) = H_\neg(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_2])$, т.е. $\|\neg\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\neg\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

- $\varphi = (\varphi_1\sigma\varphi_2), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ и за φ_1 и φ_2 твърдението е вярно. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$, $Var^{free}(\varphi) = Var^{free}(\varphi_1) \cup Var^{free}(\varphi_2)$, т.е. $Var^{free}(\varphi_1) \subseteq Var^{free}(\varphi)$ и $Var^{free}(\varphi_2) \subseteq Var^{free}(\varphi)$.

  Значи $\nu_1|Var^{free}(\varphi_j) = \nu_2|Var^{free}(\varphi_j), j = 1, 2$. Ето защо можем да приложим (ih) за φ и ν_1, ν_2. Така $\|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

  $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = H_\sigma(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_1], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu_1]) = H_\sigma(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu_2], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]) = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

- $\varphi = Qx\psi, Q \in \{\forall, \exists\}$ и за ψ твърдението е вярно. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$. Нека a е произволен елемент на A. Разглеждаме оценките ${\nu_1}^x_a$ и ${\nu_2}^x_a$. $Var^{free}(\psi) \subseteq Var^{free}(\varphi) \cup \{x\}$. Нека $y \in Var^{free}(\psi)$. Тогава:

  (а) $y = x$, следователно ${\nu_1}^x_a(y) = a = {\nu_2}^x_a(y)$;

  (б) $y \neq x$, следователно $y \in Var^{free}(\varphi), \nu_1(y) = \nu_2(y)$, следователно ${\nu_1}^x_a(y) = {\nu_2}^x_a(y)$.

  Тогава за всяко $y \in Var^{free}(\psi), {\nu_1}^x_a(y) = {\nu_2}^x_a(y)$. Прилагаме (ih) към ψ за ${\nu_1}^x_a$ и ${\nu_2}^x_a$. $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_1}^x_a] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_2}^x_a]$.

  (а) ако $Q = \forall$. Нека $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = T$. Тогава за всяко $a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_1}^x_a] = T$. Следователно за всяко $a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_2}^x_a] = T$. Значи $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = T$. Аналогично от $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = T$ следва $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2] = T$, т.е. $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

  (б) ако $Q = \exists$. Нека $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = T$. Тогава има $a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_1}^x_a] = T$. Така има $a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[{\nu_2}^x_a] = T$. Аналогично $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2] = T$ влече $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = T$. Следователно $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

$\square$

Твърдение 21. *Нека φ е формула, x е индивидна променлива, $\mathcal{A}$ е структура за езика, в който е φ. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x\varphi$.*

Доказателство.

$\Rightarrow$) Нека в $\mathcal{A}$ е вярна формулата φ, т.е. $\mathcal{A} \models \varphi$, т.е. за всяка оценка ν в $\mathcal{A}, \mathcal{A} \models_\nu \varphi$.

Нека ω е произволна оценка в $\mathcal{A}$. Нека $a \in A$. Да разгледаме ω^x_a. Тогава $\mathcal{A} \models_{\omega^x_a} \varphi$. Следователно $\mathcal{A} \models_\omega \forall x\varphi$. Следователно $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.

$\Leftarrow$) Обратно, нека $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$, т.е. за всяка оценка ν и всяко $a \in A, \mathcal{A} \models_{\nu^x_a} \varphi$. Нека ω е произволна оценка в $\mathcal{A}, \nu \leftrightharpoons \omega^x_{\nu(x)}$. За $\mathcal{A} \models_{\omega^x_{\nu(x)}} \varphi$, т.е. $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$. Но $\nu = \omega$, т.е. $\mathcal{A} \models_\omega \varphi$. Така имаме, че $\mathcal{A} \models \varphi$.

$\square$

Следствие 2. *Нека $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са различни, т.е. $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Тогава $\forall x_1\forall x_2 \ldots \forall x_n\varphi$ е затворена формула. Следователно $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x_1\forall x_2 \ldots \forall x_n\varphi$.*

Твърдение 22. *Нека $B \subseteq A^n$ е определимо. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са различни индивидни променливи. Тогава има формула $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, която определя B.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Твърдение 23. *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека τ е терм и $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено

$$h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]) = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$$

Доказателство. Индукция по построението на τ:

- $\tau = c$

  $h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]) = h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}} = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$

- $\tau = x$

  $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, следователно $x = x_i$ за някое $i, 1 \leq i \leq n$ и значи $x^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] = a_i$. Тогава $h(x^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]) = h(a_i) = x^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$.

- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ и за $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ твърдението е вярно.

  $tau[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, следователно за всяко $i, 1 \leq i \leq n, \tau_i[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

  Тогава индукционното предположение е изпълнено за τ_i: $h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, x_n]\!]) =$
  $= h(f^{\mathcal{A}}(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!], \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!], \ldots, \tau_n^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!])) =$
  $= f^{\mathcal{B}}(h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]), h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]), \ldots, h(\tau_n^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!])) =$
  $= f^{\mathcal{B}}(\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!], \ldots, \tau_n^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!])) =$
  $= \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$.

$\square$

Твърдение 24. *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$. Нека φ е без формално равенство.*

1. *Ако φ е безкванторна, то $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$, за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*

2. *Ако $\varphi = \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна, то за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено $\mathcal{A} \models \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \psi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \psi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$.*

3. *Ако $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \psi$, ψ е безкванторна. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*

   Тогава $\mathcal{B} \models \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \psi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!] \longrightarrow \mathcal{A} \models \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \psi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.

Твърдение 25. *Нека h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е безкванторна формула, и $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (т.е. свободните променливи на φ са измежду $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но φ е безкванторна и значи, че всички променливи на $\varphi \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$).*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$$

Следствие 1. *Нека h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е формула и $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$:

1. *Ако φ е екзистенциална и $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$, то $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$*

2. *Ако φ е универсална и $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$, то $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.*

Твърдение 26. *С помощта на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и използвайки $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ построяваме формула φ.*

Нека $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1, \varphi_2 \models\!\mid \psi_2, \ldots, \varphi_n \models\!\mid \psi_n$. Тогава използвайки същата конструкция получаваме формула ψ.

Твърдим, че φ и ψ са логически еквивалентни.

Твърдение 27. *Нека* Θ *е съждителна формула и* $\Theta[p_1, p_2, \ldots, p_n]$, *където* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – *съждителни променливи.*

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *са предикатни формули. Тогава, ако* $\varphi_1 \models\mid \psi_1, \varphi_2 \models\mid \psi_2, \ldots \varphi_n \models\mid \psi_n$, *то* $\Theta[{}^{p_1}/_{\varphi_1}, {}^{p_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{p_n}/_{\varphi_n}] \models\mid \Theta[{}^{p_1}/_{\psi_1}, {}^{p_2}/_{\psi_2}, \ldots, {}^{p_n}/_{\psi_n}]$.

Твърдение 28. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* φ *и* ψ *са предикатни формули. Нека* φ *е логически еквивалентна с* ψ *в структурата* $\mathcal{A}$.

Всеки път, когато $\alpha\varphi\beta$ *е предикатна формула, е в сила* $\alpha\varphi\beta \models\mid_{\mathcal{A}} \alpha\psi\beta$ *(конкретно участие на* φ *заместено с* ψ*).*

Твърдение 29. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* x *е индивидна променлива,* τ *е терм,* φ *е предикатна формула. Нека замяната* $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ *е допустима замяна.*

Всеки път, когато ν *и* ω *са оценки в* $\mathcal{A}$, *удовлетворяващи условията:*

- $\nu(x) = \tau^{\mathcal{A}}[\omega]$
- $\nu(y) = \omega(y), \forall y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$

е в сила $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[\omega]$.

Хомоморфизми и изоморфизми.

Твърдение 30. *Нека* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни индивидни променливи,* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ – *термове. Нека* $\mathcal{A}$ *е структура. Нека* τ *е терм от езика* $\mathcal{L}$ *и оценките* ν_1 *и* ν_2 *в* $\mathcal{A}$ *удовлетворяват следните условия:*

- *за всяка индивидна променлива* $y, y \in Var(\tau) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \nu_1(y) = \nu_2(y)$;
- *за всяко* $i, 1 \leq i \leq n, \nu_1(x_i) = \varkappa^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau[{}^{x_1}/_{\varkappa_1}, {}^{x_2}/_{\varkappa_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\varkappa_n}]^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

Следствие 1. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* τ *е терм. Нека* ν_1 *и* ν_2 *са оценки в* $\mathcal{A}$, *такива че* $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ *за всяка индивидна променлива* $x, x \in Var[\tau]$. *Тогава* $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

Следствие 2. *Нека* τ *е затворен терм* $(Var[\tau] = \varnothing)$. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура. Тогава за всеки две оценки* ν_1 *и* ν_2 *в* $\mathcal{A}$, $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau^{\mathcal{A}}[\nu_2]$, *т.е. затворените термове в структура не зависят от нищо и имат една и съща стойност за коя да е оценка в структурата.*

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни променливи,* $Var[\tau] \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Такъв терм означаваме с* $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *(променливите на* τ *са измежду* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*).*

Нека ν_1 *и* ν_2 *са оценки в* $\mathcal{A}$. *Тогава* $\tau^{\mathcal{A}}$ *зависи само от* $\nu_1(x_1), \nu_1(x_2), \ldots, \nu_1(x_n)$ *и* $\nu_2(x_1), \nu_2(x_2), \ldots, \nu_2(x_n)$, $\nu_1[x_i] = \nu_2[x_i], 1 \leq i \leq n$. $\tau^{\mathcal{A}}[v_1] = \tau^{\mathcal{A}}[v_2] \longleftrightarrow \tau[\nu_1(x_1), \nu_1(x_2), \ldots, \nu_1(x_n)] = \tau[\nu_2(x_1), \nu_2(x_2), \ldots, \nu_2(x_n)]$. *Такъв терм означаваме с* $\tau[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$, *където* $a_i = \nu_j(x_i), j = 1, 2, 1 \leq i \leq n$. *Всеки терм* τ *с фиксирана наредба от променливи* $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n], \tau : A^n \longrightarrow A, \tau[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$. *Всеки полином поражда функция.*

Твърдение 31. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура за* $\mathcal{L}$. *Нека* φ *е предикатна формула. Нека* ν_1 *и* ν_2 *са оценки в* $\mathcal{A}$, *такива че за всяка свободна променлива* $y \in Var^{free}[\varphi], \nu_1(y) = \nu_2(y)$. *Тогава* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

Забележка. *Формулите без свободна променлива говорят за света като цяло.*

Заместване на подформули с формули

Твърдение 32. *Нека φ е съждителна формула и $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са предикатни формули.*

С $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ означаваме резултата от едновременната замяна на P_1 с φ_1, P_2 с φ_2, ..., P_n с φ_n. Думата $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е предикатна формула.

Твърдение 33. *Нека $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n]$ е съждителна формула и нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са предикатни формули.*

Нека I_0 е булева интерпретация, а $\mathcal{A}$ е структура над $\mathcal{L}$ и ν е оценка. Ако $I_0(P_1) = \|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], I_0(P_2) = \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu], \ldots, I_0(P_n) = \|\varphi_n\|^{\mathcal{A}}[\nu]$, то $I(\varphi) = \|\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\|^{\mathcal{A}}[\nu]$

Следствие 1. *Ако φ е тавтология, то $\models \varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$. Казваме, че φ е тавтология по съждителни причини.*

Следствие 2. *Нека φ' и φ'' са съждителни формули и $\varphi' \models\!\dashv \varphi''$.*

Нека $\varphi'[P_1, P_2, \ldots, P_n], \varphi''[P_1, P_2, \ldots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са произволни предикатни формули от $\mathcal{L}$. Тогава $\varphi'[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] \models\!\dashv \varphi''[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$

Твърдение 34. *Нека $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са произволни съждителни формули и I_0 е булева интерпретация, такава че $I(\varphi_1) = I(\psi_i), i = 1, \ldots, n$. Тогава $I(\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]) = I(\varphi[{}^{P_1}/_{\psi_1}, {}^{P_2}/_{\psi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\psi_n}])$.*

Твърдение 35. *Нека φ е предикатна формула от вида $\varphi = \alpha\varphi'\beta$, където φ' е предикатна формула от същия език. Нека $\mathcal{A}$ е структура. Нека φ'' е предикатна формула, такава че $\varphi' \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \varphi''$. Тогава $\alpha\varphi'\beta \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \alpha\varphi''\beta$.*

Твърдение 36. *Нека $\varphi = \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са предикатни формули. Нека $\mathcal{A}$ е структура и $\varphi_1 \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \psi_1, \varphi_2 \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \psi_2, \ldots, \varphi_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \psi_n$.*

Тогава $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\dashv} \alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \ldots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$.

Заместване на индивидни променливи с термове

Твърдение 37. *Нека ν, ω са оценки в $\mathcal{A}$ и е изпълнено $\nu(x_1) = \tau_i^{\mathcal{A}}[\omega], 1 \leq i \leq n$. Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[\nu]$*

Твърдение 38. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е формула, x е индивидна променлива, τ е терм и $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима замяна.*

Нека ν и ω са оценки в $\mathcal{A}$. Ако

$$\nu(x) = \tau^{\mathcal{A}}[\omega]$$
$$\nu(y) = \omega(y), \forall y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$$

Тогава $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[\omega]$, т.е. $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\omega \varphi[{}^{x}/_{\tau}]$.

Твърдение 39. *Нека φ е предикатна формула и замяната $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима. Тогава*

$$\models \forall x\varphi \Rightarrow \varphi[{}^{x}/_{\tau}]$$
$$\models \varphi[{}^{x}/_{\tau}] \Rightarrow \exists x\varphi$$

Преименуване на свързани променливи

Логическо следване

Твърдение 40. *Нека* $\Gamma \models \psi$. *За всяко* $\varphi \in \Gamma, x \not\in Var^{free}[\varphi]$. *Тогава* $\Gamma \models \forall x \psi$.

Твърдение 41. *Ако* $\Gamma \models \psi$, *то* $\Gamma \models^g \psi$.

Твърдение 42. *Нека* Γ *е множество от затворени формули. Ако* $\Gamma \models^g \psi$, *то* $\Gamma \models \psi$. *Значи, ако* Γ *е множество от затворени формули, то* $\Gamma \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \models^g \psi$.

Скулемизация

Твърдение 43. *Нека* φ *е затворена формула в пренексна нормална форма.*

Тогава $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$. *Следователно* $\models \varphi^S \Rightarrow \varphi$.

Твърдение 44. *Нека* φ *е затворена формула в пренексна нормална форма,* $\mathcal{A}$ *е структура за езика* $\mathcal{L}$ *и в* $\mathcal{A}$ *е вярна* φ. *Тогава има обогатяване* $\mathcal{A}_S$ *на* $\mathcal{A}$ *до структура в разширения език, такова че* $\mathcal{A}_S \models \varphi_S$.

Следователно $\mathcal{A} \models \varphi$ *влече, че има обогатяване* $\mathcal{A}_S$ *на* $\mathcal{A}, \mathcal{A}^S \models \varphi^S$.

Затворени универсални формули

Твърдение 45. *Нека* Γ *е множество от затворени универсални формули. Нека* $\mathcal{A}$ *е структура, такава че за всяко* $a \in A$ *съществува затворен терм* τ_a, *за който* $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$.

Тогава $\mathcal{A} \models \Gamma \longleftrightarrow CSI(\Gamma)$.

Твърдение 46. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура. За всяко* $a \in \mathcal{A}$ *има затворен терм* τ_a, *такъв че* $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$. *Тогава* $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$.

Така, ако $\mathcal{A}$ *има горното свойство, то* $\mathcal{A} \models \Gamma \longleftrightarrow \mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$.

Ербранови структури

Твърдение 47. *За всеки затворен терм* τ *и за всяка ербранова структура* $\mathcal{H}$, $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.

Твърдение 48. *Един език* $\mathcal{L}$ *има ербранова структура* $\longleftrightarrow \mathrm{T}_{\mathcal{L}}^{cl} \neq \varnothing \longleftrightarrow \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.

Твърдение 49. *За всеки затворен терм* τ *е изпълнено, че* $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.

Твърдение 50. *Нека* Γ *е множество от затворени формули в език с* $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$. *Тогава за всяка ербранова структура* $\mathcal{H}$ *на* $\mathcal{L}, \mathcal{H} \models \Gamma \longleftrightarrow \mathcal{H} \models CSI(\Gamma)$.

Безкванторни формули

Твърдение 51. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура и* ν *е оценка в* $\mathcal{A}$. *Тогава дефинираме булева интерпретация* $I_{\mathcal{A},\nu} : I_{\mathcal{A},\nu}(\Theta) \leftrightharpoons \|\Theta\|^{\mathcal{A}}[\nu]$ *за всяка атомарна формула* Θ.

За всяка безкванторна $\varphi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = I_{\mathcal{A},\nu}(\varphi)$, *т.е.* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \varphi$. *Така, ако* Δ *е множество от безкванторни формули,* $\mathcal{A} \models_\nu \Delta \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \Delta$. *Ако* Δ *е изпълнимо, то* Δ *е булево изпълнимо.*

Твърдение 52. *Нека* Γ *е множество от безкванторни формули от езика* $\mathcal{L}$. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* ν *е оценка и всички формули от* Γ *са верни в* $\mathcal{A}$ *при* ν, *т.е.* $\mathcal{A} \models_\nu \Gamma$.

Да разгледаме булевите интерпретации $I_{\mathcal{A},\nu}$ *на атомарните формули, дефинирани така за* φ *– атомарна,* $I_{\mathcal{A},\nu}[\varphi] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$.

Тогава $I_{\mathcal{A},\nu} \models \Gamma$ *(булев модел за* Γ*).*

Следствие 1. *Нека Γ е множество от безкванторни формули. Ако Γ е изпълнимо, то Γ има булев модел, т.е. е булево изпълнимо.*

Твърдение 53. *Нека Δ е множество от безкванторни формули в език без формално равенство. Тогава Δ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ Δ е булево изпълнимо.*

Забележка. *Интерпретацията на формалното равенство в ербранова структура е "графичното" равенство на термове.*

Така, ако Δ е множество от затворени формули без формално равенство. Δ е булево изпълнимо $\longleftrightarrow$ Δ има ербранов модел.

Твърдение 54. *Γ има модел $\longleftrightarrow$ $CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо, следователно Γ е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ $CSI(\Gamma)$ е булево неизпълнимо.*

Следствие 1.

1. *Нека Γ е множество от затворени универсални формули в език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава има алгоритъм, който спира работа точно тогава, когато Γ е неизпълнимо и работи до безкрай, когато Γ е изпълнимо.*

2. *Ако допълнително в езика няма функционални символи, то има алгоритъм, който винаги завършва работа за краен брой стъпки и разпознава дали Γ е изпълнимо.*

Забележка. *Тъй като в езика няма функционални символи, затворените термове са само индивидните константи. Но Γ е крайно множество, следователно индивидните константи, които имат значение, са краен брой. Следователно $CSI(\Gamma)$ е крайно.*

Свободни ербранови структури

Твърдение 55. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура за езика $\mathcal{L}$ и ν е оценка в $\mathcal{H}$. Тогава за всеки терм τ, $\tau^{\mathcal{H}}[\nu] = \tau[{}^{x_1}/_{\nu(x_1)}, {}^{x_2}/_{\nu(x_2)}, \ldots, {}^{x_n}/_{\nu(x_n)}]$, където $Var[\tau] \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Следствие 1. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура и разгледаме оценките Id_{Var}.*

За всеки терм $\tau, \tau^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = \tau$.

Следствие 2. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура и ν е оценка в $\mathcal{H}$.*

За всеки затворен терм τ (терм, в който няма променливи), $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.

$(\tau_1 \doteq \tau_2)^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = T \longleftrightarrow \tau_1^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = \tau_2^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] \longleftrightarrow \tau_1 = \tau_2$ (ще разглеждаме езици без формално равенство).

Твърдение 56. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език без формално равенство. Нека Γ е множество от безкванторни формули от $\mathcal{L}$.*

Ако Γ е булево изпълнимо, то Γ е изпълнимо.

Твърдение 57. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език без формално равенство. Нека Γ е множество от безкванторни формули от $\mathcal{L}$.*

Тогава Γ е булево изпълнимо $\longleftrightarrow$ Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ Γ е изпълнимо в свободна ербранова структура.

Съждителна резолюция

Твърдение 58. *Нека $\mathbb{D}$ е дизюнкт. $\mathbb{D}$ е тавтология, ако има два дуални литерали $L, L^{\partial} \in \mathbb{D}$.*

Твърдение 59. *Нека $\mathbb{D}$ е дизюнкт. $\mathbb{D}$ е изпълним $\longleftrightarrow$ $\mathbb{D} \neq \blacksquare$.*

Правило на съждителната резолюция

Твърдение 60. *Нека I е булева интерпретация, $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ са дизюнкти, а L е литерал и $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.*

Ако $I \models \{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2\}$, то $I \models \{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)\}$.

Твърдение 61. *Ако дизюнктът $\mathbb{D} = \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)\}, I \models \mathbb{D}_1$ и $I \models \mathbb{D}_2$, то $I \models \mathbb{D}$.*

Трансверзали за фамилии от множества

Твърдение 62. *Нека A е фамилия от множества и Y е трансверзала за A. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *Y е минимална трансверзала;*
2. *Всеки път, когато $Y_0 \subset Y$, то е в сила, че Y_0 не е трансверзала;*
3. *За всяко $a \in Y, Y \setminus \{a\}$ не е трансверзала за A;*
4. *За всеки елемент $a \in Y$ съществува $x \in A$, такова че $Y \cap x = \{a\}$.*

Твърдение 63. *Ако A е фамилия от непразни множества, то не винаги A има минимална трансверзала.*

Твърдение 64. *Нека S е множество от дизюнкти, което е затворено относно правилото за резолюцията, т.е. $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \in S$ и $\mathbb{D}$ е резолвента на $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2 \longrightarrow \mathbb{D} \in S$.*

Ако $\blacksquare \not\in S$, то S е изпълнимо.

Твърдение 65. *Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо.*

Хорнови дизюнкти

Твърдение 66. *Нека S е множество от хорнови дизюнкти. Нека M е непразно множество от модели на S.*

Тогава има модел $I_M \models S$, такъв че за всяка $I \in M, I_M \preccurlyeq I$.

Следствие 1. *Нека S е множество от правила и факти. Тогава S има най-малък модел I_m, т.е. $I_m \models S$ и за всеки модел I на $S, I_m \preccurlyeq I$.*

Твърдение 67. *Нека S е множество от правила и факти и C – множество от цели, S и C са непразни, $S \cup C$ е неизпълнимо.*

Тогава съществува крайно $S_0 \subseteq S$ и цел $G \in C$, такива че $S_0 \cup \{G\}$ е неизпълнимо.

Твърдение 68. *Ако $\mathcal{L}$ е език без формално равенство, Γ е множество от затворени формули. Γ е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ съществува крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ – неизпълнимо.*

Твърдение 69. *Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ всяко крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ е изпълнимо.*

Леми

Лема 1. *Дизюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Лема 2. *Конюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Теореми

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Теорема 1 (Еквивалентна замяна)**.** *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са съждителни формули. Нека $\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n$ също е съждителна формула. Нека I_0 е булева интерпретация.*

Тогава, ако

$$I(\varphi_1) = I(\psi_1), I(\varphi_2) = I(\psi_2), \ldots, I(\varphi_n) = I(\psi_n),$$

то

$$I(\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n) = I(\alpha_0\psi_1\alpha_1 \ldots \psi_n\alpha_n)$$

Доказателство. С индукция относно построението на $\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n$. □

Следствие 1. *Нека $\varphi_1 \models\!\mid \psi_1, \varphi_2 \models\!\mid \psi_2, \ldots, \varphi_n \models\!\mid \psi_n$. Нека $\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ е съждителна формула.*

Тогава

$$\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \ldots \varphi_n\alpha_n \models\!\mid \alpha_0\psi_1\alpha_1 \ldots \psi_n\alpha_n$$

Теорема 2 (Алгоритъм за конюнкция на елементарни дизюнкции)**.** *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава като резултат конюнкция на елементарни дизюнкции ψ, така че $\varphi \models\!\mid \psi$. Процедура:*

1. *Елиминираме $\Leftrightarrow$, т.е. ако имаме формулата φ с индукция относно броя на $\Leftrightarrow$ във φ, доказваме че има формула φ', $\varphi \models\!\mid \varphi'$ и във φ' няма $\Leftrightarrow$.*

   Например: $\varphi = \alpha(\varphi_1' \Leftrightarrow \varphi_2)\beta, (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\varphi_1 \;\&\; \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \;\&\; \neg\varphi_2)$.

   Тогава $\varphi \models\!\mid \alpha((\varphi_1 \;\&\; \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \;\&\; \neg\varphi_2))\beta$ е формула с $n-1$ срещания на знака $\Leftrightarrow$.

2. *Елиминираме $\Rightarrow$ с индукция относно броя на буквите $\Rightarrow$ във φ.*

   Например: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \models\!\mid (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

3. *Вкарваме $\neg$ навътре, докато не останат $\neg$ само пред съждителни променливи.*

Предикатно смятане от първи ред

Теорема 3 (Леополд Льовенхайм, Скулем, Белан)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане, в който има само предикатни символи и те са унарни(едноместни). Тогава има алгоритъм, който разпознава изпълнимите формули от езика $\mathcal{L}$.*

Теорема 4. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е предикатна формула, x – индивидна променлива. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x\varphi$.*

Следствие 2. *Нека $Var^{free}[\varphi] \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi}_{\text{затворена формула}}$*

Забележка. *Определимото множество трябва да е подмножество на съответна декартова степен на универсума.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Теорема 5 (Теорема за хомоморфизмите)**.** *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е формула без формално равенство и $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (т.е. свободните променливи на φ са измежду $x_1, x_2, \dots, x_n$).*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е изпълнено

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$$

Доказателство. Индукция по построението на формулата φ:

- $\varphi = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$

  $\mathcal{A} \models p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow (\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!], \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!], \dots,$ $\tau_n^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]) \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow (h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]), h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]), \dots,$ $h(\tau_n^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!])) \in p^{\mathcal{B}} \longleftrightarrow (\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n), \tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!],$ $\dots, \tau_n^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]) \in p^{\mathcal{B}}$

- $\varphi = \neg\varphi_1$ и за φ_1 твърдението е вярно. $\varphi[x_1, x_2, \dots x_n]$, следователно $\varphi_1[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

  $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi_1[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \not\models \varphi_1[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!] \longleftrightarrow$ $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.

- $\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$ и за φ_1 и φ_2 твърдението е вярно. $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, следователно $\varphi_i[x_1, x_2, \dots, x_n], i = 1, 2$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

  (ih): $\mathcal{A} \models \varphi_i[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi_i[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$

  $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_1[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \& \varphi_2[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow$
  $\longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi_1[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!] \& \varphi_2[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!] \longleftrightarrow$
  $\longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$

  Забележка. *Аналогично за $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.*

- $\varphi = \exists x\psi$ и за ψ твърдението е вярно. $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, следователно $\psi[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

  $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Тогава съществува $a \in A : \mathcal{A} \models \psi[\![a, a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Тогава $\mathcal{B} \models \psi[\![h(a), h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.

  Нека $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$. Тогава има $b \in B : \mathcal{B} \models \varphi[\![b, h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!], h$ е сюрекция. Следователно има $a \in A : h(a) = b$ и значи $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a), h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.

  От (ih) следва, че $\mathcal{A} \models \psi[\![a, a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$.

- $\varphi = \forall x\psi$ и за ψ твърдението е вярно. $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, следователно $\psi[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

  $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Нека a е произволен елемент на A. Тогава $\mathcal{A} \models \psi[\![a, a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Нека $b \in B$. Избираме $a \in A, h(a) = b$. Тогава $\mathcal{B} \models \psi[\![h(a), h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$, значи $\mathcal{B} \models \psi[\![b, h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$. Тогава $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a), h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.

  $\mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Нека $a \in A$. Тогава $h(a) \in B$. Следователно $\mathcal{B} \models \psi[\![h(a), h(a_1), h(a_2),$ $\dots, h(a_n)]\!]$.

  От (ih) следва, че $\mathcal{A} \models \psi[\![a, a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$.

$\square$

Теорема 6 (Теорема за изоморфизмите)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред (с или без формално равенство). Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури над $\mathcal{L}$ и h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$.*

Тогава за всяка формула φ, $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е в сила еквивалентността:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$$

Доказателство. От доказателството на твърдение (5) е достатъчно да проверим верността на $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$ само за атомарните формули.

Нека $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ е атомарна.

- $\varphi = p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ – вече е доказано в доказателството на твърдение (5);
- $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$

  Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

  – Ако $\mathcal{A} \models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$, то $\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.
  $h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]) = \tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!] = \tau_2^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!] =$
  $= h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!])$.
  Следователно $\mathcal{B} \models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$

  – Нека $\mathcal{A} \not\models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$, тогава $\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \neq \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.
  h е инективна, следователно $h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]) \neq h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!])$, и значи $\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!] \neq \tau_2^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$

$\square$

Следствие 1. *Ако $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, то за всяка* ***затворена*** *формула φ е вярно $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.*

Следствие 2. *Нека $B \subseteq A^n$ е определимо в структурата $\mathcal{A}$, която е за език $\mathcal{L}$. Нека h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$. Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B \longleftrightarrow (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) \in B$.*

Следствие 3. *Нека $B \subseteq A^n$ и h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$, такъв че за някоя n-торка $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$, но $(h(a_1), h(a_2), \ldots h(a_n)) \notin B$. Тогава B не е определимо с формула от $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$.*

Заместване на подформули с формули

Теорема 7 (Теорема за еквивалентната замяна)**.** *Нека $\alpha\varphi\beta$ е предикатна формула. Ако $\varphi \models\!\!\!\!\!\!= \psi$, то $\alpha\varphi\beta \models\!\!\!\!\!\!= \alpha\psi\beta$.*

Нека $\varphi = \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са предикатни формули. Нека $\varphi_1 \models\!\!\!\!\!\!= \psi_1, \varphi_2 \models\!\!\!\!\!\!= \psi_2, \ldots, \varphi_n \models\!\!\!\!\!\!= \psi_n$.

Тогава $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\!\!\!\!\!=} \alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \ldots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$.

Преименуване на свързани променливи

Теорема 8 (Теорема за варианта)**.** *Нека $x \neq y$ и нека формулата $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$.*

Тогава $Qx\varphi \models\!\!\!\!\!\!= Qy\varphi[x/y]$.

Пренексна нормална форма

Теорема 9. *Има алгоритъм, който по произволна предикатна формула φ от $\mathcal{L}$ дава ψ, такава че:*

1. $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$
2. *ψ е в пренексна нормална форма*
3. $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi]$
4. *φ и ψ са в един и същ език*

Логическо следване

Теорема 10 (Теорема за дедукцията)**.** $\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *е неизпълнимо множество.*

Доказателство.

$\Rightarrow$) (Достатъчност) Нека $\Gamma \models \varphi$. Да допуснем, че $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо. Тогава това множество има модел. Нека $I_0 \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Следователно $I_0 \models \Gamma$ и $I_0 \models \neg\varphi$. Значи $I(\neg\varphi) = T$, но $I(\neg\varphi) = H_{\neg}(I(\varphi))$, следователно $I(\varphi) = F$, но от $\Gamma \models \varphi$ следва, че $I_0 \models \varphi$ и $I(\varphi) = T$. Противоречие.

$\Leftarrow$) (Необходимост) Нека $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо. Нека I_0 е произволен модел на Γ. Тъй като $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ няма модел следва, че $I_0 \not\models \neg\varphi$, т.е. $I_0 \models \varphi$. I_0 е произволен модел на Γ, поради което $\Gamma \models \varphi$.

□

Скулемизация

Теорема 11.

1. *Нека φ е затворена формула в пренексна нормална форма. Тогава φ е изпълнима тогава и само тогава, когато φ^S е изпълнима, т.е. φ е неизпълнима тогава и само тогава, когато φ^S е неизпълнима.*
2. *Нека Γ е множество от затворени формули в пренексна нормална форма. Да означим с $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$. Тогава Γ^S е множество от затворени универсални формули и Γ^S е изпълнимо тогава и само тогава, когато Γ е изпълнимо, т.е. Γ^S е неизпълнимо тогава и само тогава, когато Γ е неизпълнимо.*

Ербранови структури

Безкванторни формули. Свободни ербранови структури

Теорема 12. *Нека Γ е множество от затворени универсални формули в език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *Γ има модел;*
2. *Γ има ербранов модел;*
3. *$CSI(\Gamma)$ има ербранов модел;*
4. *$CSI(\Gamma)$ има модел;*

5. $CSI(\Gamma)$ *е булево изпълнимо.*

Теорема 13 (Тюринг-Чърч, 1936)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред с поне един двуместен предикатен символ. Тогава няма алгоритъм, който по произволно дадена затворена формула φ от $\mathcal{L}$ да разпознава дали φ е предикатна тавтология.*

Еквивалентно, няма алгоритъм, който да разпознава дали φ е предикатна тавтология.

Забележка. $\models \varphi \longleftrightarrow \neg\varphi$ *е неизпълнима.*

Теорема 14. *Нека $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_k \Theta$, Θ е безкванторна, φ е затворена. Нека във φ няма функционални символи (без формално равенство).*

Тогава има алгоритъм, който разпознава дали φ е предикатна тавтология. Нещо повече, има алгоритъм, който в случай, че φ не е предикатна тавтология дава крайна структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \not\models \varphi$.

Съждителна резолюция

Правило на съждителната резолюция

Теорема 15 (Коректност на резолютивната изводимост)**.** *Нека S е множество от дизюнкти. Ако $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, то S е неизпълнимо.*

Следствие 1. *Ако $S \overset{r}{\vdash} \mathbb{D}$, то има крайно подмножество $S_0 \subseteq S$, такова че $S_0 \overset{r}{\vdash} \mathbb{D}$.*

Трансверзали за фамилии от множества

Теорема 16 (Теорема за минималната трансверзала)**.** *Нека A е фамилия от непразни крайни множества. Тогава A има минимална трансверзала.*

Теорема 17 (Пълнота на резолютивната изпълнимост)**.** *Нека S е множество от дозюнкти. Ако S е неизпълнимо, то $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$.*

Следствие 1 (Теорема за компактност за множества от дизюнкти)**.** *Нека S е множество от дизюнкти. Тогава S е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ има крайно $S_0 \subseteq S$, S_0 е неизпълнимо.*

Теорема 18 (Жак Ербран)**.** *Нека Γ е множество от затворени универсални формули от език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава следните са еквивалентни:*

1. Γ *е неизпълнимо;*

2. *Съществува крайно подмножество на $CSI(\Gamma)$, което е булево неизпълнимо;*

3. *Съществува краен брой затворени частни случаи $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ на формули от Γ, такива че $\models \neg\Theta_1 \vee \neg\Theta_2 \vee \dots \vee \neg\Theta_n$.*