Логическо програмиране

Лектор: *Тинко Тинчев*

Свойства

Булева еквивалентност на съждителни формули

Свойство 1 (Логическа еквивалентност)**.**

1. *$\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$;*
2. *$\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \psi \to \psi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$ - симетричност;*
3. *$\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \psi, \psi \vDash\!\!\!\!\dashv \chi \to \varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \chi$ – транзитивност;*

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & \varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi' \to \neg\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \neg\varphi'; \\ 5. & \varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi', \psi \vDash\!\!\!\!\dashv \psi' \to (\varphi\sigma\psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\varphi'\sigma\psi'), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}. \end{array}\right\} \textit{устойчивост на съждителните съюзи}$$

Забележка. *Формулите образуват алгебрична система и $\vDash\!\!\!\!\dashv$ разбива това множество на класове, за които алгебричните операции са съгласувани.*

Свойство 2 (Полезни еквивалентности)**.**

1. *$(\varphi \vee \varphi) \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$, $(\varphi \;\&\; \varphi) \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$ – идемпотентност на $\vee, \&$;*
2. *$(\varphi \vee \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\psi \vee \varphi), (\varphi \;\&\; \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\psi \;\&\; \varphi)$ – комутативност на $\vee, \&$;*
3. *$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \vee \psi) \vee \chi), (\varphi \;\&\; (\psi \;\&\; \chi)) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \;\&\; \psi) \;\&\; \chi)$ – асоциативност на $\vee, \&$;*

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & (\varphi \vee (\psi \;\&\; \chi)) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \vee \psi) \;\&\; (\varphi \vee \chi)); \\ 5. & (\varphi \;\&\; (\psi \vee \chi)) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \;\&\; \psi) \vee (\varphi \;\&\; \chi)); \end{array}\right\} \textit{дистрибутивен закон за } \vee, \&$$

6. *$\neg\neg\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$ – класическа логика: двойното отрицание пада;*

$$\left.\begin{array}{ll} 7. & \neg(\varphi \vee \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\neg\varphi \;\&\; \neg\psi); \\ 8. & \neg(\varphi \;\&\; \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\neg\varphi \vee \neg\psi); \end{array}\right\} \textit{де Морган}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 9. & (\varphi \Rightarrow \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\neg\varphi \vee \psi); \\ 10. & (\varphi \Rightarrow \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv (\varphi \;\&\; \neg\psi) \\ 11. & (\varphi \Leftrightarrow \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \;\&\; \psi) \vee (\neg\varphi \;\&\; \neg\psi)); \\ 12. & (\varphi \Leftrightarrow \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv ((\varphi \Rightarrow \psi) \;\&\; (\psi \Rightarrow \varphi)); \end{array}\right\} \textit{абревиатури за } \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

13. *Нека φ е съждителна тавтология, тогава за всяка формула ψ имаме следните логически еквивалентности:*
    - *$(\varphi \vee \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi$;*
    - *$(\varphi \;\&\; \psi) \vDash\!\!\!\!\dashv \psi$.*

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Свойство 3.

1. *$\varphi \models \psi$ тогава и само тогава, когато $\varphi \Rightarrow \psi$ е булева тавтология;*

2. *ако φ е противоречие, то за всяка формула ψ, $\varphi \models \psi$;*

3. *ако ψ е съждителна тавтология, то за всяка формула φ, $\varphi \models \psi$;*

4. *ако φ не е противоречие и ψ не е тавтология, и $\varphi \models \psi$, то φ и ψ имат поне една обща съждителна променлива.*

Забележка. *Можем да разглеждаме едновременно модели за $\varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ \dots \ \& \ \varphi_n$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.*

Свойство 4 (Логическо следване)**.**

1. *$\psi \in \Gamma \longrightarrow \Gamma \models \psi$;*

2. *Нека Γ и Δ са множества от съждителни формули. Нека всеки път, когато $\varphi \in \Delta, \Gamma \models \varphi$. Нека $\Delta \models \psi$. Тогава $\Gamma \models \psi$;*

3. *$\Gamma' \subseteq \Gamma$ и $\Gamma' \models \psi \longrightarrow \Gamma \models \varphi$ – монотонност;*

4. *Семантична дедукция: От $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$. Означаваме: $\Gamma, \varphi \models \psi$, т.е. с добавянето на аксиомата φ към Γ, Γ става модел за ψ.*

5. *$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi \longleftrightarrow \models (\varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \dots \& \ \varphi_n) \Rightarrow \psi$*

6. *$\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо множество*

7. *Компактност на логическото следване:*
   $\Gamma \models \varphi \longleftrightarrow$ има крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0 \models \varphi \models\!\!\!\mid \Gamma$ е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ има крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0$ е неизпълнимо $\models\!\!\!\mid \Gamma$ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ всяко крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0$ е изпълнимо.

8. *$\varnothing \models \psi \longleftrightarrow \models \psi$ – вярна при всяка булева интерпретация (тавтология).*

9. *Ако Γ е неизпълнимо, то за всяка формула $\psi, \Gamma \models \psi$ (от лъжата следва всичко).*

10. *Нека $\models \psi$, тогава за всяко множество $\Gamma, \Gamma \models \psi$.*

Предикатно смятане от първи ред

Свойство 5. *Ако φ е затворена формула, то $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$*

Забележка. *$\mathcal{A} \not\models \varphi$ и оценка ν, за която $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, тогава за всяка оценка ω е в сила $\mathcal{A} \models_\omega \neg\varphi, \mathcal{A} \models \neg\varphi$.*

Забележка. *Винаги е вярно едно от двете $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ или $\mathcal{A} \models_\nu \neg\varphi$, но $\underline{\mathcal{A} \models \varphi \text{ или } \mathcal{A} \models \neg\varphi}$ е вярно само ако формулата φ е затворена.*

Семантика на език от първи ред

Свойство 6.

- $\mathcal{A} \models_\nu p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \leftrightharpoons < \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n > \in p^{\mathcal{A}}$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\tau_1 \doteq \tau_2) \leftrightharpoons \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu]$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \neg\varphi \leftrightharpoons \mathcal{A} \not\models \varphi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \& \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *и* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *или* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \Rightarrow \psi) \leftrightharpoons$ *ако* $\mathcal{A} \models \varphi$, *то* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu (\varphi \Leftrightarrow \psi) \leftrightharpoons \mathcal{A} \models \varphi$ *тогава и само тогава, когато* $\mathcal{A} \models \psi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \forall x \varphi \leftrightharpoons$ *за всяко* $a \in A, \mathcal{A} \models_{\nu_a^x} \varphi$;
- $\mathcal{A} \models_\nu \exists x \varphi \leftrightharpoons$ *съществува* $a \in A, \mathcal{A} \models_{\nu_a^x} \varphi$;

Свойство 7.

- $\varnothing$ *е определимо във всяка структура при всеки език:* $\varphi[x], \varphi \& \neg\varphi$ *определя* $\varnothing$;
- A *е определимо във всяка структура при всеки език:* $\varphi[x], \varphi \vee \neg\varphi$ *определя* A;
- A^2 *е определимо във всяка структура при всеки език:* $\varphi[x], \varphi[x, y], \varphi \vee \neg\varphi$ *определя* A^2;
- *ако* B *е определимо и* $B \subseteq A^n$, *то* $A^n \setminus B$ *е също определимо.*
  $< a_1, a_2, \dots, a_n > \in B \longleftrightarrow A \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$
  $A \not\models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow < a_1, a_2, \dots, a_n > \not\in B \longleftrightarrow < a_1, a_2, \dots, a_n > \not\in A^n \setminus B$
- *ако* $B_1, B_2 \subseteq A^n$ *са определими, то* $B_1 \cup B_2, B1 \cap B2, B1 \setminus B_2, B_1 \Delta B_2$ *също са определими.* *Щом* B_1 *е определимо, т.е.* $\exists \varphi[x_1, x_2, \dots x_n]$, *която определя* B_1 *и щом* B_2 *е определимо, т.е.* $\exists \psi[x_1, x_2, \dots x_n]$, *която определя* B_2.

  Тогава $(\varphi \vee \psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ *определя* $B_1 \cup B_2$, $(\varphi \& \psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ *определя* $B_1 \cap B_2$, $(\varphi \& \neg\psi)[x_1, x_2, \dots x_n]$ *определя* $B_1 \setminus B_2$, $[(\varphi \& \neg\psi) \vee (\neg\varphi \& \psi)][x_1, x_2, \dots x_n]$ *определя* $B_1 \Delta B_2$.

  Ако $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \varnothing$ *и* $\psi'[y_1, y_2, \dots, y_n]$ *определя* B_2, *то* $\varphi \vee \psi'$ *определя* $(B_1 \times A^n) \cup (B_2 \times A^n)$.

Хомоморфизми и изоморфизми.

Свойство 8 (Изоморфизъм)**.**

- $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, *ако* h *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$, *то* h^{-1} *е изоморфизъм на* $\mathcal{B}$ *върху* $\mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *и* $\mathcal{B} \cong \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$, *нека* h_1, h_2 *са изоморфизми съответно на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$ *и на* $\mathcal{B}$ *върху* $\mathcal{C}$. *Тогава* $h(a) = h_1 \circ h_2 = h_2(h_1(a))$ *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}, Id_{\mathcal{A}}$ *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{A}$

Свойство 9 (Автоморфизъм)**.** *Ако* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ *и* h *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$, *то* h *се нарича автоморфизъм в* $\mathcal{A}$.

- $Id_{\mathcal{A}}$ *е автоморфизъм;*
- h *е автоморфизъм, то* h^{-1} *е автоморфизъм;*
- h_1 *и* h_2 *са автоморфизми в* $\mathcal{A}$, *то* $h_2 \circ h_1$ *е автоморфизъм в* $\mathcal{A}$.

Логически еквивалентни формули

Свойство 10. *Верни са всички еквивалентности за съждителни формули.*

- $\exists x\varphi \models\!\!\!\!\dashv \neg\forall x\neg\varphi$
- $\forall x\varphi \models\!\!\!\!\dashv \neg\exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \models\!\!\!\!\dashv \forall x\neg\varphi$
- $\neg\forall x\varphi \models\!\!\!\!\dashv \exists x\neg\varphi$
- $\forall(\varphi\&\psi) \models\!\!\!\!\dashv \forall x\varphi\&\forall x\psi$
- $\exists x(\varphi\vee\psi) \models\!\!\!\!\dashv (\exists x\varphi\vee\exists x\psi)$
- $\forall(\varphi\vee\psi) \not\models\!\!\!\!\dashv (\forall\varphi\vee\forall\psi)$
- $\exists(\varphi\&\psi) \not\models\!\!\!\!\dashv (\exists\varphi\&\exists\psi)$
- *Нека* $x\not\in Var^{free}[\varphi]$. *Тогава* $\forall x(\varphi\vee\psi) \models\!\!\!\!\dashv \forall x\varphi\vee\psi$, $\exists x(\varphi\&\psi) \models\!\!\!\!\dashv \exists x\varphi\&\psi, (\mathcal{A}\models_\nu \exists x\psi \longleftrightarrow \mathcal{A}\models_\nu \psi)$;
- *Нека* $x\not\in Var^{free}[\varphi]$. *Тогава* $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \forall x\varphi, \varphi \models\!\!\!\!\dashv \exists x\varphi$ *и* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu^x_a]$ *за* $\nu, a\in A$.

Преименуване на свързани променливи

Свойство 11. *Ако* $Qy\varphi[{}^x/{}_y]$ *е вариант на* $Qx\varphi$, *то* $Qx\varphi$ *е вариант на* $Qy\varphi[{}^x/{}_y]$.

Логическо следване

Свойство 12.

- *Ако* $\varphi\in\Gamma$, *то* $\Gamma\models\varphi$;
- *Ако* $\Gamma\subseteq\Delta$ *и* $\Gamma\models\varphi$, *то* $\Delta\models\varphi$;
- $\Gamma\cup\{\varphi\}\models\psi \longleftrightarrow \Gamma\models\varphi\Rightarrow\psi$;
- $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\models\psi \longleftrightarrow (\varphi_1\&\varphi_2\&\ldots\&\varphi_n)\Rightarrow\psi$.

Затворени универсални формули

Свойство 13.

- *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура, в която е вярна затворената универсална формула* φ. *Тогава в* $\mathcal{A}$ *е верен всеки затворен частен случай на* φ.
- *Ако* Γ *е множество от затворени универсални формули, то* $CSI(\Gamma) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\varphi\in\Gamma} CSI(\varphi)$
- $\mathcal{A}\models\Gamma \longrightarrow \mathcal{A}\models CSI(\Gamma)$.

Съждителна резолюция

Правило на съждителната резолюция

Свойство 14.

- *Ако* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_n$ *е резолютивен извод от* S *и* $k \leq n$, *то* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *също е резолютивен извод;*
- *Ако* α *и* β *са резолютивни изводи от* S, *то* α, β *също е резолютивен извод от* S*;*
- *Ако* S *е разпознаваемо (рекурсивно) множество и* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е крайна редица от дизюнкти, то можем алгоритмично да разпознаем дали* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е рекурсивен извод от* S*;*
- *Нека* I *е булева интерпретация,* S *е множество от дизюнкти и* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_k$ *е резолютивен извод от* S. *Ако* $I \models S$, *то за всяко* $k \leq n, I \models \mathbb{D}_k$.

Трансверзали за фамилии от множества

Свойство 15. *A има трансверзала* $\longleftrightarrow$ *за всяко множество* $x \in A, x \neq \varnothing$.

Хорнови дизюнкти

Свойство 16.

- *Ако* $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$ *са хорнови дизюнкти и* $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$, *то* $\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$ *е също хорнов дизюнкт;*
- *Нека* S *е множество от хорнови дизюнкти и* $\blacksquare \not\in S$. *Ако* S *е неизпълнимо, то* S *съдържа поне един факт и поне една цел;*
- *Ако* S *е хорнова програма, то* S *има модел.*

Свойство 17 (Формално равенство)**.**

- $\forall x Eq(x, x)$*;*
- $\forall x \forall y (Eq(x, y) \Leftrightarrow Eq(y, x))$*;*
- $\forall x \forall y \forall z ((Eq(x, y) \& Eq(y, z)) \Rightarrow Eq(x, z)$*;*
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x'_1 \ldots \forall x'_n (Eq(x_1, x'_1) \& \ldots \& Eq(x_n, x'_n)) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(x'_1, \ldots, x'_n))$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x'_1 \ldots \forall x'_n (Eq(x_1, x'_1) \& \ldots \& Eq(x_n, x'_n)) \Rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow p(x'_1, \ldots, x'_n))$