Логическо програмиране

Лектор: *Тинко Тинчев*

Твърдения

Семантика на съждителните формули

Твърдение 1. *Всяка съждителна интерпретация I_0 може по единствен начин да се разшири до изображение I от съвкупността на всички съждителни формули в $\{T, F\}$.*

Има единствено изображение $I : \{\varphi \mid \varphi$ е съждителна формула $\} \to \{T, F\}$

- *за всяка съждителна променлива $P, I(P) = I_0(P)$;*
- *за всяка съждителна формула $\varphi, I(\neg\varphi) = H_\neg(I(\varphi))$;*
- *за всеки две съждителни формули φ и $\psi, I((\varphi\sigma\psi)) = H_\sigma(I(\varphi), I(\psi)), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.*

*Следва от **еднозначния синтактичен анализ** на съждителните функции.*

Твърдение 2. *Ако $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ и Γ_2 е изпълнимо, то Γ_1 също е изпълнимо.*

Твърдение 3. *Ако $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ и Γ_1 е неизпълнимо, то Γ_2 също е неизпълнимо.*

Твърдение 4. *φ е съждителна тавтология, т.е. всяка булева интерпретация е модел за φ, тогава и само тогава, когато $\neg\varphi$ е противоречие.*

Твърдение 5. *Нека φ е съждителна формула. Нека I_0 и J_0 са булеви интерпретации.*

Ако за всяка съждителна променлива P, участваща лингвистично във φ, т.е. $P \in Var(\varphi)$, $I_0(P) = J_0(P)$, то $I(\varphi) = J(\varphi)$.

Следствие 1. *Проблемите за изпълнимост и тавтологичност на съждителни формули са разрешими, т.е. има алгоритъм, който по дадена произволна формула φ разпознават дали φ е изпълнима и сътоветно дали е тавтология.*

Забележка. *Пробелмът за изпълнимост на съждителна формула е NP-пълен.*

Твърдение 6. *Дизюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Твърдение 7. *Конюнкция на две формули, които са конюнкции на елементарни дизюнкции е еквивалентна с конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Булева еквивалентност на съждителни формули

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Твърдение 8. *Ако $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n], P_1, P_2, \ldots, P_n$ – различни съждителни променливи и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са произволни съждителни формули, то $\varphi[^{P_1}/_{\varphi_1}, ^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, ^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е също съждителна формула.*

Твърдение 9. *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са съждителни формули и $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \ldots \alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ е съждителна формула, то $\alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2 \ldots \alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$ също е съждителна формула.*

Твърдение 10. *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава винаги като резултат формула ψ, такава че:*

- *$\varphi \models\!\mid \psi$*
- *в ψ няма срещания на $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$*

Твърдение 11. *Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава винаги като резултат формула ψ, такава че:*

- $\varphi \models\!\mid \psi$
- *в ψ няма срещания на $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$*
- *всяко срещане на $\neg$ е от вида $\neg P, P \in PVar$.*

Твърдение 12. *Има алгоритъм, който на φ съпоставя $\psi = \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, където $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ са елементарни дизюнкции.*

Твърдение 13. *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са съждителни формули. Нека φ е съждителна формула, такава че $\varphi \models\!\mid \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2 \dots \varphi_n\alpha_n$.*

Казваме, че сме отбелязали някои конкретни участия на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ във φ. Нека $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ са съждителни формули.

Да разгледаме думата $\alpha_0\varphi'_1\alpha_1\varphi'_2 \dots \varphi'_n\alpha_n$. Тази дума е съждителна формула.

Доказателство. Доказателството използва **еднозначен синтактичен анализ** и индукция по построението на φ. Вземаме твърдението за истина на доверие. □

Твърдение 14. *Нека I е булева интерпретация, такава че $I(\varphi_1) = I(\varphi'_1), \dots, I(\varphi_n) = I(\varphi'_n)$. Тогава $I(\alpha_0\varphi_1\alpha_1 \dots \varphi_n\alpha_n) = I(\alpha_0\varphi'_1\alpha_1 \dots \varphi'_n\alpha_n)$.*

Твърдение 15. *Нека φ е съждителна формула, в която не участват $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Тогава алгоритмично можем да намерим формула φ', такава че $\varphi \models\!\mid \varphi'$ и $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ не участват във φ' и във φ' отрицанието се среща само пред съждителни променливи.*

Например: $\varphi' \Rightarrow \alpha\neg\beta \rightarrow \beta = P\beta'$.

Предикатно смятане от първи ред

Твърдение 16. *Нека $\mathcal{L}_2$ е разширение на $\mathcal{L}_1$. Тогава всеки терм от $\mathcal{L}_1$ е терм от $\mathcal{L}_2$.*

Доказателство. С индукция по построението на термовете. □

Твърдение 17. *За всеки два терма τ и $\varkappa$ е в сила еквивалентността: τ е подтерм на $\varkappa \longleftrightarrow \tau \in Subt(\varkappa)$.*

Семантика на език от първи ред

Твърдение 18. *Нека $\mathcal{A}$ е крайна структура и са зададени интерпретации на нелогическите символи. Тогава има алгоритъм, който по дадена формула φ разпознава дали формулата е вярна или не.*

Следствие 1. *Има алгоритъм, който по дадена формула φ разпознава дали в крайна структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \models \varphi$.*

Твърдение 19. *Ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и за всяка индивидна променлива x, участваща във $\varphi, \nu_1(x) = \nu_2(x)$, то $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Твърдение 20. *Нека $\mathcal{A}$ е структура. Тогава за всяка формула φ е в сила следното: ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $\nu_1|Var^{free}(\varphi) = \nu_2|Var^{free}(\varphi)$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.*

Твърдение 21. *Нека φ е формула, x е индивидна променлива, $\mathcal{A}$ е структура за езика, в който е φ. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x\varphi$.*

Следствие 2. *Нека $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни, т.е. $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Тогава $\forall x_1\forall x_2 \dots \forall x_n\varphi$ е затворена формула. Следователно $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \forall x_1\forall x_2 \dots \forall x_n\varphi$.*

Твърдение 22. *Нека $B \subseteq A^n$ е определимо. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи. Тогава има формула $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, която определя B.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Твърдение 23. *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека τ е терм и $\tau[x_1, x_2, \dots, x_n]$.*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е изпълнено

$$h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]) = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$$

Твърдение 24. *Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$. Нека φ е без формално равенство.*

1. *Ако φ е безкванторна, то $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$, за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.*

2. *Ако $\varphi = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна, то за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е изпълнено $\mathcal{A} \models \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n \psi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n \psi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$.*

3. *Ако $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$, ψ е безкванторна. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.*

   Тогава $\mathcal{B} \models \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!] \longrightarrow \mathcal{A} \models \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$.

Твърдение 25. *Нека h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е безкванторна формула, и $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (т.е. свободните променливи на φ са измежду $x_1, x_2, \dots, x_n$, но φ е безкванторна и значи, че всички променливи на $\varphi \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$).*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ е изпълнено

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$$

Следствие 1. *Нека h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е формула и $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$.*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$:

1. *Ако φ е екзистенциална и $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$, то $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$*

2. *Ако φ е универсална и $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n)]\!]$, то $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$.*

Твърдение 26. *С помощта на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и използвайки $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ построяваме формула φ.*

Нека $\varphi_1 \models\!\!\mid \psi_1, \varphi_2 \models\!\!\mid \psi_2, \dots, \varphi_n \models\!\!\mid \psi_n$. Тогава използвайки същата конструкция получаваме формула ψ.

Твърдим, че φ и ψ са логически еквивалентни.

Твърдение 27. *Нека Θ е съждителна формула и $\Theta[p_1, p_2, \dots, p_n]$, където $p_1, p_2, \dots, p_n$ – съждителни променливи.*

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ са предикатни формули. Тогава, ако $\varphi_1 \models\!\!\mid \psi_1, \varphi_2 \models\!\!\mid \psi_2, \dots \varphi_n \models\!\!\mid \psi_n$, то $\Theta[{}^{p_1}/_{\varphi_1}, {}^{p_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{p_n}/_{\varphi_n}] \models\!\!\mid \Theta[{}^{p_1}/_{\psi_1}, {}^{p_2}/_{\psi_2}, \dots, {}^{p_n}/_{\psi_n}]$.

Твърдение 28. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ и ψ са предикатни формули. Нека φ е логически еквивалентна с ψ в структурата $\mathcal{A}$.*

Всеки път, когато $\alpha\varphi\beta$ е предикатна формула, е в сила $\alpha\varphi\beta \models\!\!\mid_{\mathcal{A}} \alpha\psi\beta$ (конкретно участие на φ заместено с ψ).

Твърдение 29. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, x е индивидна променлива, τ е терм, φ е предикатна формула. Нека замяната $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима замяна.*

Всеки път, когато ν и ω са оценки в $\mathcal{A}$, удовлетворяващи условията:

- $\nu(x) = \tau^{\mathcal{A}}[\omega]$
- $\nu(y) = \omega(y), \forall y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$

е в сила $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[\omega]$.

Хомоморфизми и изоморфизми.

Твърдение 30. *Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи, $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ – термове. Нека $\mathcal{A}$ е структура. Нека τ е терм от езика $\mathcal{L}$ и оценките ν_1 и ν_2 в $\mathcal{A}$ удовлетворяват следните условия:*

- *за всяка индивидна променлива $y, y \in Var(\tau) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \nu_1(y) = \nu_2(y)$;*
- *за всяко $i, 1 \leq i \leq n, \nu_1(x_i) = \varkappa^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.*

Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau[{}^{x_1}/_{\varkappa_1}, {}^{x_2}/_{\varkappa_2}, \dots, {}^{x_n}/_{\varkappa_n}]^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.

Следствие 1. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, τ е терм. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$, такива че $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ за всяка индивидна променлива $x, x \in Var[\tau]$. Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.*

Следствие 2. *Нека τ е затворен терм ($Var[\tau] = \varnothing$). Нека $\mathcal{A}$ е структура. Тогава за всеки две оценки ν_1 и ν_2 в $\mathcal{A}$, $\tau^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \tau^{\mathcal{A}}[\nu_2]$, т.е. затворените термове в структура не зависят от нищо и имат една и съща стойност за коя да е оценка в структурата.*

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни променливи, $Var[\tau] \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Такъв терм означаваме с $\tau[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (променливите на τ са измежду $x_1, x_2, \dots, x_n$).

Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$. Тогава $\tau^{\mathcal{A}}$ зависи само от $\nu_1(x_1), \nu_1(x_2), \dots, \nu_1(x_n)$ и $\nu_2(x_1), \nu_2(x_2), \dots, \nu_2(x_n)$, $\nu_1[x_i] = \nu_2[x_i], 1 \leq i \leq n$. $\tau^{\mathcal{A}}[v_1] = \tau^{\mathcal{A}}[v_2] \longleftrightarrow \tau[\nu_1(x_1), \nu_1(x_2), \dots, \nu_1(x_n)] = \tau[\nu_2(x_1), \nu_2(x_2), \dots, \nu_2(x_n)]$. Такъв терм означаваме с $\tau[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$, където $a_i = \nu_j(x_i), j = 1, 2, 1 \leq i \leq n$. Всеки терм τ с фиксирана наредба от променливи $\tau[x_1, x_2, \dots, x_n], \tau : A^n \longrightarrow A, \tau[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$. Всеки полином поражда функция.

Твърдение 31. *Нека $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$. Нека φ е предикатна формула. Нека ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$, такива че за всяка свободна променлива $y \in Var^{free}[\varphi], \nu_1(y) = \nu_2(y)$. Тогава $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2]$.*

Забележка. *Формулите без свободна променлива говорят за света като цяло.*

Заместване на подформули с формули

Твърдение 32. *Нека φ е съждителна формула и $\varphi[P_1, P_2, \dots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са предикатни формули.*

С $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ означаваме резултата от едновременната замяна на P_1 с φ_1, P_2 с φ_2, ..., P_n с φ_n. Думата $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е предикатна формула.

Твърдение 33. *Нека $\varphi[P_1, P_2, \dots, P_n]$ е съждителна формула и нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са предикатни формули.*

Нека I_0 е булева интерпретация, а $\mathcal{A}$ е структура над $\mathcal{L}$ и ν е оценка. Ако $I_0(P_1) = \|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], I_0(P_2) = \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu], \dots, I_0(P_n) = \|\varphi_n\|^{\mathcal{A}}[\nu]$, то $I(\varphi) = \|\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\|^{\mathcal{A}}[\nu]$

Следствие 1. *Ако φ е тавтология, то $\models \varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$. Казваме, че φ е тавтология по съждителни причини.*

Следствие 2. *Нека φ' и φ'' са съждителни формули и $\varphi' \models\!\!\mid \varphi''$.*

Нека $\varphi'[P_1, P_2, \dots, P_n], \varphi''[P_1, P_2, \dots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са произволни предикатни формули от $\mathcal{L}$. Тогава $\varphi'[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] \models\!\!\mid \varphi''[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$

Твърдение 34. *Нека $\varphi[P_1, P_2, \dots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ са произволни съждителни формули и I_0 е булева интерпретация, такава че $I(\varphi_1) = I(\psi_i), i = 1, \dots, n$. Тогава $I(\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]) = I(\varphi[{}^{P_1}/_{\psi_1}, {}^{P_2}/_{\psi_2}, \dots, {}^{P_n}/_{\psi_n}])$.*

Твърдение 35. *Нека φ е предикатна формула от вида $\varphi = \alpha\varphi'\beta$, където φ' е предикатна формула от същия език. Нека $\mathcal{A}$ е структура. Нека φ'' е предикатна формула, такава че $\varphi' \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \varphi''$. Тогава $\alpha\varphi'\beta \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \alpha\varphi''\beta$.*

Твърдение 36. *Нека $\varphi = \alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2\ldots\alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са предикатни формули. Нека $\mathcal{A}$ е структура и $\varphi_1 \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \psi_1, \varphi_2 \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \psi_2, \ldots, \varphi_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \psi_n$.*

Тогава $\alpha_0\varphi_1\alpha_1\varphi_2\ldots\alpha_{n-1}\varphi_n\alpha_n \overset{\mathcal{A}}{\models\!\mid} \alpha_0\psi_1\alpha_1\psi_2\ldots\alpha_{n-1}\psi_n\alpha_n$.

Заместване на индивидни променливи с термове

Твърдение 37. *Нека ν, ω са оценки в $\mathcal{A}$ и е изпълнено $\nu(x_1) = \tau_i^{\mathcal{A}}[\omega], 1 \leq i \leq n$. Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[\nu]$*

Твърдение 38. *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е формула, x е индивидна променлива, τ е терм и $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима замяна.*

Нека ν и ω са оценки в $\mathcal{A}$. Ако

$$\nu(x) = \tau^{\mathcal{A}}[\omega]$$
$$\nu(y) = \omega(y), \forall y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$$

Тогава $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[\omega]$, т.е. $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\omega \varphi[{}^{x}/_{\tau}]$.

Твърдение 39. *Нека φ е предикатна формула и замяната $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима. Тогава*

$$\models \forall x\varphi \Rightarrow \varphi[{}^{x}/_{\tau}]$$
$$\models \varphi[{}^{x}/_{\tau}] \Rightarrow \exists x\varphi$$

Преименуване на свързани променливи

Логическо следване

Твърдение 40. *Нека $\Gamma \models \psi$. За всяко $\varphi \in \Gamma, x \notin Var^{free}[\varphi]$. Тогава $\Gamma \models \forall x\psi$.*

Твърдение 41. *Ако $\Gamma \models \psi$, то $\Gamma \models^g \psi$.*

Твърдение 42. *Нека Γ е множество от затворени формули. Ако $\Gamma \models^g \psi$, то $\Gamma \models \psi$. Значи, ако Γ е множество от затворени формули, то $\Gamma \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \models^g \psi$.*

Скулемизация

Твърдение 43. *Нека φ е затворена формула в пренексна нормална форма.*

Тогава $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$. Следователно $\models \varphi^S \Rightarrow \varphi$.

Твърдение 44. *Нека φ е затворена формула в пренексна нормална форма, $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$ и в $\mathcal{A}$ е вярна φ. Тогава има обогатяване $\mathcal{A}_S$ на $\mathcal{A}$ до структура в разширения език, такова че $\mathcal{A}_S \models \varphi_S$.*

Следователно $\mathcal{A} \models \varphi$ влече, че има обогатяване $\mathcal{A}_S$ на $\mathcal{A}, \mathcal{A}^S \models \varphi^S$.

Затворени универсални формули

Твърдение 45. *Нека Γ е множество от затворени универсални формули. Нека $\mathcal{A}$ е структура, такава че за всяко $a \in A$ съществува затворен терм τ_a, за който $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$.*

Тогава $\mathcal{A} \models \Gamma \longleftrightarrow CSI(\Gamma)$.

Твърдение 46. *Нека $\mathcal{A}$ е структура. За всяко $a \in \mathcal{A}$ има затворен терм τ_a, такъв че $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$. Тогава $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$.*

Така, ако $\mathcal{A}$ има горното свойство, то $\mathcal{A} \models \Gamma \longleftrightarrow \mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$.

Ербранови структури

Твърдение 47. *За всеки затворен терм τ и за всяка ербранова структура $\mathcal{H}$, $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.*

Твърдение 48. *Един език $\mathcal{L}$ има ербранова структура $\longleftrightarrow \mathrm{T}_{\mathcal{L}}^{cl} \neq \varnothing \longleftrightarrow \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.*

Твърдение 49. *За всеки затворен терм τ е изпълнено, че $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.*

Твърдение 50. *Нека Γ е множество от затворени формули в език с $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$. Тогава за всяка ербранова структура $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}, \mathcal{H} \models \Gamma \longleftrightarrow \mathcal{H} \models CSI(\Gamma)$.*

Безкванторни формули

Твърдение 51. *Нека $\mathcal{A}$ е структура и ν е оценка в $\mathcal{A}$. Тогава дефинираме булева интерпретация $I_{\mathcal{A},\nu} : I_{\mathcal{A},\nu}(\Theta) \leftrightharpoons \|\Theta\|^{\mathcal{A}}[\nu]$ за всяка атомарна формула Θ.*

За всяка безкванторна $\varphi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = I_{\mathcal{A},\nu}(\varphi)$, т.е. $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \varphi$. Така, ако Δ е множество от безкванторни формули, $\mathcal{A} \models_\nu \Delta \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \Delta$. Ако Δ е изпълнимо, то Δ е булево изпълнимо.

Твърдение 52. *Нека Γ е множество от безкванторни формули от езика $\mathcal{L}$. Нека $\mathcal{A}$ е структура, ν е оценка и всички формули от Γ са верни в $\mathcal{A}$ при ν, т.е. $\mathcal{A} \models_\nu \Gamma$.*

Да разгледаме булевите интерпретации $I_{\mathcal{A},\nu}$ на атомарните формули, дефинирани така за φ – атомарна, $I_{\mathcal{A},\nu}[\varphi] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$.

Тогава $I_{\mathcal{A},\nu} \models \Gamma$ (булев модел за Γ).

Следствие 1. *Нека Γ е множество от безкванторни формули. Ако Γ е изпълнимо, то Γ има булев модел, т.е. е булево изпълнимо.*

Твърдение 53. *Нека Δ е множество от безкванторни формули в език без формално равенство. Тогава Δ е изпълнимо $\longleftrightarrow \Delta$ е булево изпълнимо.*

Забележка. *Интерпретацията на формалното равенство в ербранова структура е "графичното" равенство на термове.*

Така, ако Δ е множество от затворени формули без формално равенство. Δ е булево изпълнимо $\longleftrightarrow \Delta$ има ербранов модел.

Твърдение 54. *Γ има модел $\longleftrightarrow CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо, следователно Γ е неизпълнимо $\longleftrightarrow CSI(\Gamma)$ е булево неизпълнимо.*

Следствие 1.

1. *Нека Γ е множество от затворени универсални формули в език с поне една индивидна константа и без формално равенство. Тогава има алгоритъм, който спира работа точно тогава, когато Γ е неизпълнимо и работи до безкрай, когато Γ е изпълнимо.*

2. *Ако допълнително в езика няма функционални символи, то има алгоритъм, който винаги завършва работа за краен брой стъпки и разпознава дали Γ е изпълнимо.*

Забележка. *Тъй като в езика няма функционални символи, затворените термове са само индивидните константи. Но Γ е крайно множество, следователно индивидните константи, които имат значение, са краен брой. Следователно $CSI(\Gamma)$ е крайно.*

Свободни ербранови структури

Твърдение 55. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура за езика $\mathcal{L}$ и ν е оценка в $\mathcal{H}$. Тогава за всеки терм τ, $\tau^{\mathcal{H}}[\nu] = \tau[{}^{x_1}/_{\nu(x_1)}, {}^{x_2}/_{\nu(x_2)}, \dots, {}^{x_n}/_{\nu(x_n)}]$, където $Var[\tau] \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.*

Следствие 1. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура и разгледаме оценките Id_{Var}.*
За всеки терм $\tau, \tau^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = \tau$.

Следствие 2. *Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура и ν е оценка в $\mathcal{H}$.*
За всеки затворен терм τ (терм, в който няма променливи), $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.
$(\tau_1 \doteq \tau_2)^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = T \longleftrightarrow \tau_1^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] = \tau_2^{\mathcal{H}}[Id_{Var}] \longleftrightarrow \tau_1 = \tau_2$ (ще разглеждаме езици без формално равенство).

Твърдение 56. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език без формално равенство. Нека Γ е множество от безкванторни формули от $\mathcal{L}$.*
Ако Γ е булево изпълнимо, то Γ е изпълнимо.

Твърдение 57. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език без формално равенство. Нека Γ е множество от безкванторни формули от $\mathcal{L}$.*
Тогава Γ е булево изпълнимо $\longleftrightarrow$ Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ Γ е изпълнимо в свободна ербранова структура.

Съждителна резолюция

Твърдение 58. *Нека $\mathbb{D}$ е дизюнкт. $\mathbb{D}$ е тавтология, ако има два дуални литерали $L, L^{\partial} \in \mathbb{D}$.*

Твърдение 59. *Нека $\mathbb{D}$ е дизюнкт. $\mathbb{D}$ е изпълним $\longleftrightarrow \mathbb{D} \neq \blacksquare$.*

Правило на съждителната резолюция

Твърдение 60. *Нека I е булева интерпретация, $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ са дизюнкти, а L е литерал и $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.*
Ако $I \models \{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2\}$, то $I \models \{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)\}$.

Твърдение 61. *Ако дизюнктът $\mathbb{D} = \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)\}, I \models \mathbb{D}_1$ и $I \models \mathbb{D}_2$, то $I \models \mathbb{D}$.*

Трансверзали за фамилии от множества

Твърдение 62. *Нека A е фамилия от множества и Y е трансверзала за A. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *Y е минимална трансверзала;*
2. *Всеки път, когато $Y_0 \subset Y$, то е в сила, че Y_0 не е трансверзала;*
3. *За всяко $a \in Y, Y \setminus \{a\}$ не е трансверзала за A;*
4. *За всеки елемент $a \in Y$ съществува $x \in A$, такова че $Y \cap x = \{a\}$.*

Твърдение 63. *Ако A е фамилия от непразни множества, то не винаги A има минимална трансверзала.*

Твърдение 64. *Нека S е множество от дизюнкти, което е затворено относно правилото за резолюцията, т.е. $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \in S$ и $\mathbb{D}$ е резолвента на $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2 \longrightarrow \mathbb{D} \in S$.*

Ако $\blacksquare \not\in S$, то S е изпълнимо.

Твърдение 65. *Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо.*

Хорнови дизюнкти

Твърдение 66. *Нека S е множество от хорнови дизюнкти. Нека M е непразно множество от модели на S.*

Тогава има модел $I_M \models S$, такъв че за всяка $I \in M, I_M \preccurlyeq I$.

Следствие 1. *Нека S е множество от правила и факти. Тогава S има най-малък модел I_m, т.е. $I_m \models S$ и за всеки модел I на $S, I_m \preccurlyeq I$.*

Твърдение 67. *Нека S е множество от правила и факти и C – множество от цели, S и C са непразни, $S \cup C$ е неизпълнимо.*

Тогава съществува крайно $S_0 \subseteq S$ и цел $G \in C$, такива че $S_0 \cup \{G\}$ е неизпълнимо.

Твърдение 68. *Ако $\mathcal{L}$ е език без формално равенство, Γ е множество от затворени формули. Γ е неизпълнимо $\longleftrightarrow$ съществува крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ – неизпълнимо.*

Твърдение 69. *Γ е изпълнимо $\longleftrightarrow$ всяко крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ е изпълнимо.*