Логическо програмиране

Лектор: *Тинко Тинчев*

Дефиниции

Дефиниция 1 (Съждение)**.** *Нещо, което може да отъждествим до* ***вярно*** *или* ***невярно****.*
Елементарните съждения имат предварително зададена стойност.

Дефиниция 2 (Отрицание)**.** *Отрицание на съждението A променя неговата стойност на противоположната, т.е "не A" и пишем* $\neg A$*.*

- $H_{\neg}(T) = F$
- $H_{\neg}(F) = T$

Дефиниция 3 (Конюнкция)**.** *Конюнкция на съжденията A и B наричаме съждението "A и B" и пишем* $(A\&B)$*.*

- $H_{\&}(T, T) = T$
- $H_{\&}(T, F) = H_{\&}(F, T) = H_{\&}(F, F) = F$

Дефиниция 4 (Дизюнкция)**.** *Дизюнкция на съжденията A и B наричаме съждението "A или B" и пишем* $(A \vee B)$*.*

- $H_{\vee}(T, T) = H_{\vee}(T, F) = H_{\vee}(F, T) = T$
- $H_{\vee}(F, F) = F$

Дефиниция 5 (Импликация)**.** *Импликация на съжденията A и B наричаме съждението "ако A, то B" и пишем* $(A \Rightarrow B)$*.*

- $H_{\Rightarrow}(T, T) = H_{\Rightarrow}(F, T) = H_{\Rightarrow}(F, F) = T$
- $H_{\Rightarrow}(T, F) = F$

Дефиниция 6 (Еквивалентност)**.** *Еквивалентност на съжденията A и B наричаме съждението "A тогава и само тогава, когато B" и пишем* $(A \Leftrightarrow B)$*.*

- $H_{\Leftrightarrow}(T, T) = H_{\Leftrightarrow}(F, F) = T$
- $H_{\Leftrightarrow}(T, F) = H_{\Leftrightarrow}(F, T) = F$

Дефиниция 7 (Квантор за всеобщност)**.** *Квантор за всеобщност в даден свят за* φ *е съждението "за всяко* x *е в сила* φ*" и записваме* $(\forall x \varphi)$

Пример. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *– светът, в който работим.*
Тогава, $\forall a \varphi$ *е еквивалентно на* $\varphi(a_1)\&\varphi(a_2)\&\varphi(a_3)\&\varphi(a_4)\&\varphi(a_5)$*, тъй като светът е краен.*

Дефиниция 8 (Квантор за съществуване)**.** *Квантор за съществуване в даден свят за* φ *е съждението "съществува* x*, за което е в сила* φ*" и записваме* $(\exists x \varphi)$

Пример. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *– светът, в който работим.*
Тогава, $\exists a \varphi$ *е еквивалентно на* $\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \varphi(a_3) \vee \varphi(a_4) \vee \varphi(a_5)$*, тъй като светът е краен.*

Дефиниция 9 (Език на съждителното смятане)**.** *Езикът на съждителното смятане съдържа следните непразни множества от символи:*

- *Съждителни променливи (може и безкраен брой): съвкупност от букви и символи, които могат да бъдат оценени до верни/неверни в света, замисълът е те да означават елементарни съждения ($PVar$);*
- *Логически връзки: $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – букви (символи) за съждителните връзки;*
- *Помощни символи:* $($, $)$.

Дефиниция 10 (Съждителна формула)**.** *Съждителната формула има следната структура:*

- *Съждителните променливи са съждителни формули;*
- *Ако φ е съждителна формула, то $\neg\varphi$ също е съждителна формула;*
- *Ако φ и ψ са съждителни формули, то $(\varphi\&\psi), (\varphi\vee\psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ са съждителни формули.*

Формули са само нещата, които могат да се получат след краен брой прилагане на горните правила.

Дефиниция 11 (Индуктивен принцип за доказване на свойства на съждителни формули)**.** *Нека A е свойство и са в сила:*

- *всяка съждителна променлива има свойство A;*
- *ако φ е съждителна формула, която има свойството A, то $\neg\varphi$ също има свойството A;*
- *ако φ и ψ са съждителни формули, които имат свойството A, то $(\varphi\sigma\psi)$, където $\sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, също има свойството A.*

Тогава всяка съждителна формула има свойството A.

Дефиниция 12 (Еднозначен синтактичен анализ за формули)**.** *За всяка съждителна формула φ е в сила точно една от следните три възможности:*

- *$\varphi = P$, където P е съждителна променлива*
- *$\varphi = \neg\varphi_1$, където φ_1 е еднозначно определена съждителна формула*
- *$\varphi = (\varphi_1\sigma\varphi_2)$, където φ_1, φ_2 са еднозначно определени формули, а σ е еднозначно определена двувалентна логическа връзка измежду $\{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*

Семантика на съждителните формули

Дефиниция 13 (Съждителна (булева) интерпретация)**.** *Съждителна интерпретация (оценка на съждителните променливи) е изображение (функция) I_0 от съвкупността на съждителните променливи $PVar$ (propositional variables) в $\{T, F\}$, т.е. $I_0 : PVar \longrightarrow \{T, F\}$.*

$$I_0(P) \in \{T, F\}, P \in PVar$$

Дефиниция 14 (Вярност на формула. Булев модел за формула)**.** *Казваме, че **формулата φ е вярна** при булевата интерпретация I_0, ако*

$$I(\varphi) = T,$$

където I е единственото разширение на I_0 (от твърдение 1).

Пишем още, $I \models \varphi$ и казваме също така "I е модел на φ".

$$I_0 : PVar \to \{T, F\}$$

$$I : For \to \{T, F\}$$

Ако I не е булев модел за φ, пишем $I \not\models \varphi$.

Дефиниция 15 (Изпълнимост)**.** *Казваме, че формулата φ е **изпълнима**, ако има булева интерпретация I, която е модел за φ, т.е. $I(\varphi) = T$.*

*Има формули, които не са изпълними. Такива формули се наричат **неизпълними** формули. φ е **неизпълнима**, т.е. няма булева интерпретация I_0, за която $I(\varphi) = T$, т.е. за всяка булева интерпретация $I_0, I(\varphi) = F$.*

Дефиниция 16 (Булев модел за множество от формули)**.** *Нека Γ е множество от съждителни формули. Нека I е съждителна (булева) интерпретация.*

*Казваме, че **I е модел на Γ**, ако всеки път, когато $\varphi \in \Gamma$, то $I(\varphi) = T$.*

Бележим:

- $I \models \Gamma, I$ *е модел за* Γ
- $I \models \Gamma \longleftrightarrow I$ *е модел за всяка формула от* Γ
- $I \models \varphi \longleftrightarrow I \models \{\varphi\}$*, т.е. φ и $\{\varphi\}$ имат едни и същи модели*
- $I \models \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \leftrightarrow I(\varphi_1) = T, I(\varphi_2) = T, \ldots, I(\varphi_n) = T \leftrightarrow I((\varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n)) = T$

Забележка. *Ако има формула $\varphi \in \Gamma$, такава че $I \not\models \varphi$, т.е. $I(\varphi) = F$, то I не е модел за Γ, т.е. $I \not\models \Gamma$.*

Дефиниция 17 (Изпълнимост на множество от формули)**.** *Едно множество от формули Γ се нарича **изпълнимо**, ако Γ има модел. Ако кажем, че Γ е изпълнимо, то всяка формула от него също е изпълнима.*

*Γ е **неизпълнимо**, ако Γ не е изпълнимо, т.е. Γ няма модел.*

Дефиниция 18 (Съждителна тавтология)**.** *Една формула се нарича съждителна тавтология, ако е вярна при всяка булева интерпретация.*

- *φ е съждителна тавтология ,точно тогава, когато $\neg\varphi$ е неизпълнима формула;*
- *φ е неизпълнима точно тогава, когато $\neg\varphi$ е съждителна тавтология.*

Дефиниция 19. *Нека φ е съждителна формула. С $Var(\varphi)$ означаваме множеството на съждителните променливи, участващи във φ.*

Булева еквивалентност на съждителни формули

Дефиниция 20 (Логическо следване от формула)**.** *Нека φ и ψ са съждителни формули. Казваме, че ψ логически следва от φ, ако всеки модел на φ е модел на ψ, т.е. всеки път, когато I_0 е булева интерпретация, ако $I(\varphi) = T$, то $I(\psi) = T$. Пишем $\varphi \models \psi$.*

Забележка. *С $\varphi \models \psi$ ще означаваме "във всички светове, в които φ е вярно, ψ е вярно".*

Дефиниция 21 (Логическа еквивалентност на формули)**.** *Нека φ и ψ са съждителни формули. φ и ψ са логически еквивалентни, ако:*

$$\varphi \models \psi \text{ и } \psi \models \varphi \longleftrightarrow \text{за всяка булева интерпретация } I_0, I(\varphi) = I(\psi)$$

Пишем $\varphi \models\!\mid \psi$.

Забележка. *φ и ψ имат едни и същи булеви модели, ако са логически еквивалентни.*

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Дефиниция 22 (Едновременна замяна)**.** *Нека φ е съждителна формула и $Var(\varphi) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, където $P_1, P_2, \ldots, P_n$ са различни съждителни променливи. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са произволни съждителни формули.*

Тогава за $\varphi[P_1, P_2, \ldots, P_n] : Var(\varphi) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, \ldots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е резултатът от едновременната замяна на всички срещания на буквите $P_1, P_2, \ldots, P_n$ във φ със съответните $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Дефиниция 23. *Ако имаме две булеви интерпретации I_0, J_0, такива че $I_0 \restriction Var(\varphi) = J_0 \restriction Var(\varphi)$, то $I(\varphi) = J(\varphi)$.*

Дефиниция 24 (Литерал)**.** *Съждителен литерал ще наричаме формула, която е или съждителна променлива, или отрицание на съждителна променлива.*

Дефиниция 25 (Елементарна конюнкция)**.** *Елементарна конюнкция наричаме формула от вида $\varepsilon_1 P_1 \ \& \ \varepsilon_2 P_2 \ \& \ \ldots \ \& \ \varepsilon_n P_n$, където $\varepsilon_i \in \{\varepsilon, \neg\}$, а $P_1, P_2, \ldots, P_n \in PVar$.*

Дефиниция 26 (Елементарна дизюнкция)**.** *Елементарна дизюнкция наричаме формула от вида $\varepsilon_1 P_1 \vee \varepsilon_2 P_2 \vee \ldots \vee \varepsilon_n P_n$, където $\varepsilon_i \in \{\varepsilon, \neg\}$, а $P_1, P_2, \ldots, P_n \in PVar$. Множество от вида $\{\varepsilon_1 P_1, \varepsilon_2 P_2, \ldots, \varepsilon_n P_n\}$ ще наричаме **дизюнкти**.*

Индуктивна дефиниция:

- *всеки литерал е елементарна дизюнкция;*
- *ако φ е елементарна дизюнкция и L е литерал, то формулата $(\varphi \vee L)$ е също елементарна дизюнкция.*

Елементарните дизюнкции ще записваме без вътрешните скоби (заради асоциативността).

Дефиниция 27 (Конюнкция на елементарни дизюнкции)**.** *Индуктивна дефиниция:*

- *всяка елементарна дизюнкция е конюнкция на елементарни дизюнкции;*
- *ако K е конюнкция на елементарни дизюнкции, E е елементарна дизюнкция, то $(K\&E)$ е конюнкция на елементарни дизюнкции.*

Дефиниция 28. *Нека Γ е множество от съждителни формули и ψ е съждителна формула. Казваме, че **от Γ логически следва ψ**. $\Gamma \models \psi$, ако всеки модел на Γ е модел за ψ.*

Ако има модел на Γ, който не е модел за ψ, то от Γ не следва логически ψ: $\Gamma \not\models \psi$. С други думи, има булева интерпретация I_0, такава че $\varphi \in \Gamma \longrightarrow I(\varphi) = T \ \& \ I(\psi) = F$.

Предикатно смятане от първи ред

Дефиниция 29 (Език на предикатното смятане от първи ред)**.** *Език на предикатнот смятане е двойка от вида <логическа-част, нелогическа-част>. Логическата част ще е една и съща за всички езици на предикатното смятане от първи ред. Бележи се с $\mathcal{L}$ и съдържа:*

1. *Логическа част:*
   - ***индивидни променливи** (Var): съвкупност от букви за означаване на обекти. Индивидните променливи:*
     - *са номерирани с $\mathbb{N} : x_0, x_1, \ldots$;*

– *не са съждителни връзки.*

- *съждителни* ***логически връзки*** *(булеви операции): азбуката* $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- ***квантори:*** *буквите* $\forall, \exists$
- ***помощни символи:*** , ()

Забележка. *Азбуките на индивидните променливи, съждителните логически връзки и кванторите са винаги непразни.*

2. *Нелогическа част:*

- $\mathbb{C}$***onst***$_{\mathcal{L}}$***: индивидни константи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за имена на обектите (или означение за конкретен обект, като указател към обект);*
- $\mathbb{F}$***unc***$_{\mathcal{L}}$***: функционални символи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за означаване на функции:* $f, g, h, \ldots$.

  За всеки функционален символ има определена арност (#) : $\#[f]$ *е брой на аргументите на* f *и представлява естествено число* > 0.
- $\mathbb{P}$***red***$_{\mathcal{L}}$***: предикатни символи за езика*** $\mathcal{L}$*, т.е. съвкупност от букви за означаване на първични свойства:* $p, q, r, \ldots$.

  Всеки предикатен символ има арност.

  Забележка. $\# : \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \cup \mathbb{P}red_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\doteq$ ***: формално равенство***. *Може и да го няма.*

Забележка. $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}, \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$ *и* $\mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$ *може да бъдат и празни азбуки.*

Дефиниция 30 (Разширение)**.** *Нека* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *са езици на предикатното смятане от първи ред. Казваме, че* $\mathcal{L}_2$ *е разширение на* $\mathcal{L}_1$*, ако* $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}_2}$, $\mathbb{F}unc_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}_2}, \#_{\mathcal{L}_1}$ *и* $\#_{\mathcal{L}_2}$ *са едни и същи за функционални символи от* $\mathcal{L}_1$*, ако* $\mathcal{L}_1$ *е с формално равенство, то и* $\mathcal{L}_2$ *е с формално равенство,* $\mathbb{P}red_{\mathcal{L}_1} \subseteq \mathbb{P}red_{\mathcal{L}_2}, \#_{\mathcal{L}_1}$ *и* $\#_{\mathcal{L}_2}$ *са едни и същи за предикатни символи от* $\mathcal{L}_1$.

Дефиниция 31. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език от първи ред. Ще дефинираме две множествва от формални думи в обединението на азбуките от* $\mathcal{L}$.

Термове: $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ *– означават обекти;*

Формули: $\mathbb{F}or_{\mathcal{L}}$ *– означават свойства.*

Дефиниция 32 (Термове)**.** *Термовете от езика* $\mathcal{L}$ *са думи за означаване на обекти.*
Индуктивна дефиниция на $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$*:*

- *индивидните константи са термове;*
- *индивидните променливи са термове;*
- *ако* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са термове,* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$*, то думата* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *също е терм.*

Дефиниция 33 (Атомарни формули от езика $\mathcal{L}$)**.**
$\mathbb{A}t\mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ *са думите от вида* $p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$*, където* $p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}, \#[p] = n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *– произволни термове от езика* $\mathcal{L}$.

Ако $\mathcal{L}$ *е език с* $\doteq$*, то има още един вид атомарни формули и това са думите от вида* $(\tau_1 \doteq \tau_2)$.

Дефиниция 34 (Формули).

Индуктивна дефиниция на $\mathbb{F}or_{\mathcal{L}}$:

- *атормарните формули от $\mathcal{L}$ са формули от $\mathcal{L}$;*
- *ако φ е формула от $\mathcal{L}$, то $\neg\varphi$ е също формула от $\mathcal{L}$;*
- *ако φ и ψ са формули от $\mathcal{L}$, то $(\varphi \;\&\; \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ са също формули от $\mathcal{L}$;*
- *ако φ е формула от $\mathcal{L}$, x е индивидна променлива, то $\forall x\varphi$ и $\exists x\varphi$ са също формули от $\mathcal{L}$ (отличително свойство на език от 1-ви ред).*

Дефиниция 35 (Индуктивен принцип за доказване на свойства на термове).

Нека P е свойство. Нека са в сила следните условия:

- *всяка индивидна константа има свойството P;*
- *всяка индивидна променлива има свойството P;*
- *всеки път, когато $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са термове, които имат свойството P и $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$, може да се твърди, че думата $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ също има свойството P.*

Тогава всеки терм τ от езика $\mathcal{L}$ има свойството P.
Означаваме: $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ – множеството на термовете в езика $\mathcal{L}$.

Дефиниция 36 (Еднозначен синтактичен анализ за термове). *Нека $\mathcal{L}$ е език на FOL(first-order logic). За всеки терм τ от $\mathcal{L}$ е в сила точно една от следните възможности:*

- *τ е индивидна константа;*
- *τ е индивидна променлива;*
- *τ е от вида $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, където $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ са еднозначно определени термове и f е еднозначно определен функционален символ.*

Ако $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ и $\tau = g(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$, тогава $f = g, n = k, \tau_1 = \varkappa_1, \tau_2 = \varkappa_2, \ldots, \tau_n = \varkappa_k$.

Никое собствено начало на терм не е собствен край на терм.

Алтернативна дефиниция: Нека τ е терм, a е буква и $\tau = \alpha a \beta$. Ако a е функционален символ с арност n, то има еднозначно определени термове $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, такива че $\beta = (\tau_1, \ldots, \tau_n)\beta_1$. С всеки терм можем да свържем едно синтактично наредено дърво.

Дефиниция 37. *Ако τ е терм, то $Var(\tau) = \{x, y, z, \ldots\}$ означаваме множеството на индивидните променливи, които участват в τ.*

Индуктивно можем да дефинираме променливите на терм, $\tau(Var(\tau))$:

- *$\tau = c \longrightarrow Var(\tau) = \varnothing$;*
- *$\tau = x \longrightarrow Var(\tau) = \{x\}$;*
- *$\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \longrightarrow Var(\tau) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2) \cup \ldots \cup Var(\tau_n)$.*

Забележка. *Удобно е да използваме следния запис: $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n] : \tau$ – терм, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различни индивидни променливи участващи в τ и $Var(\tau) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Дефиниция 38 (Затворен терм). *Много важна роля ще играят термовете, в които няма индивидни променливи, т.е. термовете* τ, *такива че* $Var(\tau) = \varnothing$. *Наричаме такива термове затворени (основни, базисни,* ***ground term****). При дървовидно построение има само индивидни константи по листата. Означаваме:* $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^{cl}$ *– множеството на затворените термове в езика* $\mathcal{L}$ *и* $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}^{cl} = \varnothing \longleftrightarrow \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} = \varnothing$.

Дефиниция 39 (Индуктивна дефиниция на $\mathrm{T}_{\mathcal{L}}^{cl}$).

- *индивидните константи са затворени термове;*
- *ако* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са затворени термове,* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$, *то* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *е затворен терм от езика* $\mathcal{L}$.

Дефиниция 40 (Подтерм). *Казваме, че термът* τ *е подтерм на терма* $\varkappa$, *ако* $\varkappa = \alpha\tau\beta$, *където* α *и* β *са думи.*

Ако $\varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$, *то* τ *е подтерм на някой от термовете* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$.

Ако $\varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$ *и* τ *е подтерм на* $\varkappa, \varkappa = \alpha\tau\beta$, *то за някое* $i, 1 \le i \le k, \varkappa = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}, \alpha'\tau\beta', \varkappa_{i+1}, \ldots, \varkappa_k), \alpha = f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}, \alpha', \beta = \beta', \varkappa_{i+1}, \ldots, \varkappa_k)$.

Пишем $Subt(\tau)$.

Дефиниция 41 (Индуктивна дефиниция на $Subt(\tau)$). *С индукция относно построението на* τ *дефинираме* $Subt(\tau)$ *по следния начин:*

- $\tau = c \longrightarrow Subt(\tau) = \{c\}$;
- $\tau = x \longrightarrow Subt(\tau) = \{x\}$;
- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \longrightarrow Subt(\tau) = \{\tau\} \cup Subt(\tau_1) \cup Subt(\tau_2) \cup \ldots \cup Subt(\tau_n)$.

Дефиниция 42 (Заместване на индивидни променливи с термове в термове). *Нека* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни индивидни променливи, а* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *са произволни термове от езика* $\mathcal{L}$.

С $\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]$ *ще означаваме думата, която се получава от* τ *при едновременната замяна на* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *съответно с* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

Дефиниция 43 (Индуктивна дефиниция на заместването). *Нека* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са различни индивидни променливи и* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *– произволни термове.*

- $c[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = c$;
- x:

$$\left.\begin{array}{l} -\ x = x_i, 1 \le i \le n \longrightarrow x[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = \tau_i; \\ -\ x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \longrightarrow x[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = x. \end{array}\right\} \text{(ih)}$$

- $f(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] = f(\varkappa_1[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}], \varkappa_2[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}], \ldots, \varkappa_n[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}])$ *и използваме (ih) за* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$.

Така $\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, {}^{x_2}/_{\tau_2}, \ldots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]$ *е терм от езика* $\mathcal{L}$.

Семантика на език от първи ред

Дефиниция 44 (Структура за език от първи ред). *Нека* $\mathcal{L}$ *е език от първи ред. Структура за* $\mathcal{L}$ *ще наричаме наредена двойка от вида* $< A, \mathbb{I} >$, *където:*

- $A \neq \varnothing, A$ *– универсиум на структурата;*
- $\mathbb{I}$ *е интерпретация на* $\mathcal{L}$ *в* A*;*

- $\mathbb{I}(c) \in A$ *за всяка индивидна константа* $c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$*, може* $c_1 \neq c_2$*, но* $c_1^{\mathcal{A}} = c_2^{\mathcal{A}}$*;*
- $\mathbb{I}(f) : A^{\#[f]} \longrightarrow A$ *за всеки функционален символ* $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$*,* $Dom(f) = A^{\#[f]}$ *– тотална;*
- $\mathbb{I}(p) \subseteq A^{\#[p]}$ *– множество от n-торки, където* $n = \#[p], p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$*, може* $p^{\mathcal{A}} = \varnothing$ *или* $p^{\mathcal{A}} = A^{\#[p]}$.

Означение: $\mathcal{A} =< A, I >, |\mathcal{A}| = A$

Забележка. *Вместо* $\mathbb{I}(c)$ *ще пишем* $c^{\mathcal{A}}$*, вместо* $\mathbb{I}(f)$ *–* $f^{\mathcal{A}}$ *и вместо* $\mathbb{I}(p)$ *–* $p^{\mathcal{A}}$*: интерпретации в структурата* $\mathcal{A}$*.*

Забележка. *За да може да кажем какво означава един терм, трябва да кажем какво означават променливите в него.*

Дефиниция 45 (Оценка)**.** *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура за езика* $\mathcal{L}$*. Нека универсумът на* $\mathcal{A}$ *е* A*. Оценката на индивидните променливи наричаме изображение* $\nu : Var \longrightarrow A$*.*

Дефиниция 46 (Модифицирана оценка)**.** *Нека* $x \in Var, a \in A$*. Тогава модифицирана оценка в точка* x *с* a *ще наричаме* $v_a^x(y) = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$.

Дефиниция 47 (Оценка в структура $\mathcal{A}$ (Тарски))**.**
Нека $\mathcal{A} =< A, \mathbb{I} >$ *е структура за FOL* $\mathcal{L}$*. Нека* ν *е оценка на индивидните променливи в* $\mathcal{A}$*. Индуктивно дефинираме за всеки терм* $\tau \in \mathrm{T}_{\mathcal{L}}$ *стойност на* τ *в* $\mathcal{A}$ *при оценка* ν $(\tau^{\mathcal{A}}[\nu])$*.*

- $\tau = c, c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \longrightarrow c^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons c^{\mathcal{A}}$*;*
- $\tau = x, x \in Var \longrightarrow x^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons \nu(x)$*;*
- $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \#[f] = n, f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \longrightarrow \tau^{\mathcal{A}}[\nu] \leftrightharpoons f^{\mathcal{A}}(\tau_1^{\mathcal{A}}[\nu], \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu], \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[\nu])$.

Забележка. *Означаваме:* $\tau^{\mathcal{A}}[\nu]$ *или* $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu]$*.*

Забележка. *Тази дефиниция е коректна заради еднозначния синтактичен анализ на термове.*

Дефиниция 48 (Стойност на предикатна формула в структура при дадена оценка)**.** *Нека* φ *е формула,* $\mathcal{A}$ *е структура,* ν *е оценка в структурата* $\mathcal{A}$*. С индукция по построение на формулите дефинираме* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] \in \{T, F\}$*. (Трябва ни и еднозначен синтактичен анализ):*

- φ *е атомарна:*
  - $\varphi = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$*:*
    $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons < \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu], \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu], \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[\nu] > \in p^{\mathcal{A}}$.
    Елементите на универсума означени с $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ *имат свойството означено с* p*.*
  - $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$*:*
    $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|(\tau_1 \doteq \tau_2)\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \tau_1^{\mathcal{A}}[\nu] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\nu]$
- $\varphi = \neg\varphi_1 : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = H_{\neg}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu])$
- $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = H_{\sigma}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu])$

- $\varphi = \forall x\psi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\forall x\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \forall a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = T$,
  където $v_a^x[y] = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$
- $\varphi = \exists x\psi : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T \leftrightharpoons \exists a \in A, \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = T$,
  където $v_a^x[y] = \begin{cases} a, & y = x \\ \nu(y), & y \neq x \end{cases}$

Забележка. *Ако $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, то пишем $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ и четем "в $\mathcal{A}$, при оценката ν, е вярна формулата φ" и за $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = F$ ще пишем $\mathcal{A} \not\models_\nu \varphi$ и казваме "в $\mathcal{A}$, при оценката ν, е невярна формулата φ".*

Дефиниция 49. *Нека φ – формула и $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \dots x_n\}$.*

Тогава ще пишем $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$, където наредбата $x_1, x_2, \dots, x_n$ е фиксирана. Вместо да пишем $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$, където $\nu(x_1) = a_1, \nu(x_2) = a_2, \dots \nu(x_n) = a_n$, ще пишем $\varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]$, където $a_1, a_2, \dots a_n$ е фиксирана наредба от n от света.

Вместо $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$ имаме $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$, т.е. $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]$.

Така всяка формула $\varphi[x_1, x_2, \dots x_n]$ определя множеството от тези n-торки $\{< a_1, a_2, \dots a_n > | a_1, a_2, \dots, a_n \in A, \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots a_n]\!]\} \leftrightharpoons \mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]}$. Всички множества в една структура, които са от този вид, са определими.

За множеството $\mathcal{D}_\varphi$ ще казваме, че е определимо с φ в $\mathcal{A}$.

$C \subseteq A^n$ е определимо в $\mathcal{A}$, ако $C = \mathcal{D}_\varphi$ за някои φ.

Дефиниция 50 (Вярна формула)**.** *Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е формула. Казваме, че $\mathcal{A} \models \varphi$ ("в $\mathcal{A}$ е вярна φ"), ако за всяка оценка ν в $\mathcal{A}, \varphi$ е вярна: $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, и записваме $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Забележка. *Има структури, формули и оценки ν_1, ν_2, такива че:*
$\mathcal{A} \models_{\nu_1} \varphi$, $\mathcal{A} \not\models_{\nu_2} \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_2} \neg\varphi$

Забележка. *Ако $\mathcal{A} \not\models \varphi$ има оценка ν_1 в $\mathcal{A}$, за която $\mathcal{A} \not\models_{\nu_1} \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_1} \neg\varphi$.*

Забележка. *$\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, ако φ е затворена, но за произволна формула φ от $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \not\models \varphi$ не следва $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, защото може и за $\neg\varphi$ да съществува оценка ν_1, за която $\mathcal{A} \not\models_{\nu_1} \neg\varphi$.*

Дефиниция 51 (Валидна формула)**.** *Казваме, че φ е валидна (общовалидна) формула в структурата $\mathcal{A}$, ако $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Дефиниция 52 (Затворена формула)**.** *Една формула φ се нарича затворена, ако няма свободни променливи, т.е. $Var^{free}(\varphi) = \varnothing$ (говори за света).*

Забележка. *Ако φ е затворена, то е вярно $\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.*

Дефиниция 53 (Изпълнима формула)**.** *Формулата φ е изпълнима, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка ν, такива че $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = T$, тогава $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Забележка. *Няма задължение различните индивидни константи да бъдат интерпретирани в структурата като различни обекти, могат да съвпадат, $c^{\mathcal{A}} \in A$.*

Дефиниция 54 (Изпълнимо множество от формули)**.** *Едно множество от предикатни формули Γ е изпълнимо, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка ν, такива че за всяка формула $\varphi \in \Gamma, \mathcal{A} \models_\nu \varphi$.*

Казваме, че Γ е неизпълнимо, ако Γ не е изпълнимо.

Забележка. *$\varnothing$ е изпълнимо за всяка структура и всяка оценка.*

Забележка. *Множеството от всички формули не е изпълнимо, тъй като в такова множество за някоя формула φ, $\neg\varphi$ също е от множеството.*

Дефиниция 55 (Предикатна тавтология)**.** *Казваме, че φ е предикатна тавтология (общовалидна), ако за всяка структура $\mathcal{A}, \mathcal{A} \models \varphi$. Означаваме със $\models \varphi$.*

Дефиниция 56 (Подформула)**.** *Казваме, че φ е подформула на ψ, ако има думи α и β, такива че $\psi = \alpha\varphi\beta$. Всяка такава двойка α, β определя едно конкретно участие на φ в ψ.*

Дефиниция 57 (Индуктивна дефиниция на подформула)**.** *Нека φ е формула. Със $SubFor(\varphi)$ ще означаваме множеството от всички подформули на φ.*

- *ако φ е атомарна, то $SubFor(\varphi) = \{\varphi\}$;*
- $SubFor(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SubFor(\varphi)$;
- $SubFor((\varphi\sigma\psi)) = \{(\varphi\sigma\psi)\} \cup SubFor(\varphi) \cup SubFor(\psi), \sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$;
- $SubFor(Qx\varphi) = \{Qx\varphi\} \cup SubFor(\varphi), Q \in \{\forall, \exists\}$.

Дефиниция 58. *Нека φ е предикатна формула, a е съждителна връзка или квантор, $\varphi = \alpha a\beta$.*

- *ако $a = \neg \longrightarrow$ има единствена формула φ_1, такава че $\beta = \varphi_1\beta_1$;*
- *ако $a \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \longrightarrow$ има единствени формули φ_1, φ_2, такива че $\alpha = \alpha_1(\varphi_1$, $\beta = \varphi_2)\beta_1$;*
- *ако $a \in \{\forall, \exists\} \longrightarrow$ има единствена индивидна променлива x и единствена формула φ_1, такива че $\beta = x\varphi_1\beta_1$.*

Дефиниция 59 (Област на действие на квантор)**.** *Нека φ е предикатна формула, Q е квантор, т.е. $Q \in \{\forall, \exists\}$, и $\varphi = \alpha Q\beta$ е конкретно участие на Q във φ.*

*Тогава първата буква на β е индивидна променлива и казваме, че това участие на Q във φ е **квантор по тази променлива**. Тогава има единствена индивидна променлива x и предикатна формула ψ, такива че $\beta = x\psi\beta'$, т.е. $\varphi = \alpha Qx\psi\beta'$.*

*Участието на $x\psi$ във φ се нарича **област на действие** на участието на Q във φ.*

Дефиниция 60 (Свободно и свързано участие на индивидна променлива в предикатна формула)**.**

Едно участие на променлива в предикатна формула се нарича свободно участие в тази формула, ако то не е в област на действие на квантор по тази променлива.

Едно участие на променлива в предикатна формула се нарича свързано участие в тази формула, ако то е в област на действи на квантор по тази променлива.

Забележка. *Свързаните участия на индивидните променливи са в някакъв смисъл "анонимни" участия., т.е. името на променливата има значение само от синтактична гледна точка.*

Дефиниция 61 (Свободни и свързани индивидни променливи в предникатна формула)**.**

Една индивидна променлива се нарича свързана променлива на формула φ, ако тя има поне едно участие във φ, което е свързано: $Var^{bd}(\varphi)$.

Една индивидна променлива се нарича свободна променлива за формула φ, ако тя има поне едно участие във φ, което е свободно: $V^{free}(\varphi)$.

Забележка. *Една променлива може да бъде, както свободна, така и свързана за φ.*

Забележка. *Свободните променливи са важни, с φ определяме свойство на свободните променливи, дали дадена n-торка има свойството φ.*

Дефиниция 62. *Индуктивна дефиниция на $Var^{bd}(\varphi)$ и $Var^{free}(\varphi)$:*

- $Var^{bd}(p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)) = \varnothing; Var^{free}(p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2) \cup \ldots Var(\tau_n)$
  $Var^{bd}((\tau_1 \doteq \tau_2)) = \varnothing; Var^{free}((\tau_1 \doteq \tau_2)) = Var(\tau_1) \cup Var(\tau_2)$
- $Var^{bd}(\neg\varphi) = Var^{bd}(\varphi); Var^{free}(\neg\varphi) = Var^{free}(\varphi)$
  $Var^{bd}((\varphi\sigma\psi)) = Var^{bd}(\varphi) \cup Var^{bd}(\psi); Var^{free}((\varphi\sigma\psi)) = Var^{free}(\varphi) \cup Var^{free}(\psi)$,
  $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- $Var^{bd}(Qx\varphi) = Var^{bd}(\varphi) \cup \{x\}; Var^{free}(Qx\varphi) = Var^{free}(\varphi) \setminus \{x\}, Q \in \{\forall, \exists\}$

Дефиниция 63 (Безкванторна формула)**.** *Една формула φ се нарича безкванторна, ако в нея няма срещане на $\forall, \exists$.*

Безкванторните формули може да ги дефинираме индуктивно така:

- *атомарните формули са безкванторни*
- *ако φ е безкванторна, то $\neg\varphi$ също е безкванторна*
- *ако φ и ψ са безкванторни, то $(\varphi\sigma\psi), \sigma \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*

Дефиниция 64. *Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са различни индивидни променливи, $Var^{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогава ще пишем $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Ако ν_1 и ν_2 са оценки в $\mathcal{A}$, и $\nu_j(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n, j = 1, 2,$ и $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu_2], \mathcal{A} \models_{\nu_1} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{\nu_2} \varphi$. Тогава вместо $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ и $\nu(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n$ ще пишем $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.

Дефиниция 65. *$Def^{\mathcal{A}}(\varphi) \leftrightharpoons \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]\}$ е определимо множество в $\mathcal{A}$ с φ.*

Дефиниция 66 (Определимо множество с формула)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език и $\mathcal{A}$ е структура на $\mathcal{L}$. Нека $B \subseteq A^n$ за някое n. Казваме, че B е определимо в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$, ако $\exists\varphi$ от $\mathcal{L}, \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, такава че $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in B$, за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*

Хомоморфизми и изоморфизми.

Дефиниция 67 (Хомоморфизъм)**.** *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за езика $\mathcal{L}$. Нека $h : A \longrightarrow B$.*

Казваме, че h е хомоморфизъм от $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$, ако са в сила:

- $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ *за всяка индивидна константа c;*
- $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)), \#(f) = n, f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}$,
  $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$;
- $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in p^{\mathcal{B}}, \#(p) = n, p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}$,
  $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Казваме, че $\mathcal{B}$ е ***хомоморфен образ*** *на $\mathcal{A}$ при h, ако $h[A] = B$.*

Дефиниция 68 (Изоморфно влагане)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$ и $h : A \longrightarrow B$. Казваме, че h* ***е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$****, ако h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и h е инективна функция, т.е. имаме на лице следните условия:*

1. *h е инекция ($a \neq b \longrightarrow h(a) \neq h(b)$)*

2. *$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}, \forall c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$*

3. *$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, където $f \in \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}}, \#[f] = n$, произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*

4. *$< a_1, a_2, \ldots, a_n >\in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) >\in p^{\mathcal{B}}$, където $p \in \mathbb{P}red_{\mathcal{L}}, \#[p] = n$, произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*

Дефиниция 69 (Изоморфизъм)**.** ***Изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$*** *ще наричаме изоморфно влагане h на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, такова че $\mathcal{B}$ е хомоморфен образ на $\mathcal{A}$ ($h[A] = B$), т.е. h е хомоморфизъм на A върху B и е биекция. Ако има изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, ще казваме, че* ***$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са изоморфни*** *и пишем $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Забележка. *Дефиницията е коректна, защото ако h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, то h^{-1} е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{A}$ и h^{-1} е биекция на B върху A, $h^{-1}(c^{\mathcal{B}}) = c^{\mathcal{A}}$, $h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)) = f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), h^{-1}(b_2), \ldots, h^{-1}(b_n))$.*

Значи, ако $h : A \xrightarrow{\cong} B$, то $h^{-1} : B \xrightarrow{\cong} A$.

Ако две структури $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са изоморфни, ще пишем $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Дефиниция 70 (Автоморфизъм)**.** *Изоморфизмите на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{A}$ образуват група относно $Id_{\mathcal{A}}, ^{-1}, \circ$ и се наричат автоморфизми, $Aut(\mathcal{A})$ – група на автоморфизмите:*

- *$Id_{\mathcal{A}}$ е автоморфизъм в $\mathcal{A}$;*
- *Ако h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$, то h^{-1} е автоморфизъм в $\mathcal{A}$;*
- *Ако h_1 и h_2 са автоморфизми в $\mathcal{A}$, то $h_1 \circ h_2$е също автоморфизъм в $\mathcal{A}$.*

Забележка. *Тези структури, за които $Aut(*)$ съдържа само един елемент – неутралния, т.е. имат единствен автоморфизъм относно $Id_{\mathcal{A}}$ – се наричат твърди.*

Пример. *$< \mathbb{N}, \leq >$ е твърда структура, но $< \mathbb{Z}, \leq >$ не е, тъй като за всяко $a \in \mathbb{Z}$ изображението $h_a(m) = m + a$ е автоморфизъм в $< \mathbb{Z}, \leq >$.*

Дефиниция 71 (Универсална формула)**.** *Формулите от вида $\forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \psi$ е безкванторна, се наричат универсални формули.*

За $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \psi$, където ψ е безкванторна, е вярно, че $\mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)] \longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$.

Дефиниция 72 (Екзистенциална формула)**.** *Формулите от вида $\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \psi$ е безкванторна, се наричат универсални формули.*

За $\varphi = \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна, е вярно, че $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$.

Логически еквивалентни формули

Дефиниция 73 (Логически еквивалентни формули)**.** *Казваме, че φ и ψ са логически еквивалентни ($\varphi \models\mid \psi$), ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура и ν е оценква в $\mathcal{A}$, имаме $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\nu \psi$. Или записано по друг начин: $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$.*

Заместване на подформули с формули

Дефиниция 74. *Нека $\mathcal{A}$ е структура. Казваме, че предикатните формули от езика $\mathcal{L}$ φ и ψ са еквивалентни в $\mathcal{A}$, $\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\mid} \psi$, ако за всяка оценка ν в $\mathcal{A}$ е изпълнено $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\nu \psi$. $\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\mid} \psi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \psi$.*

Заместване на индивидни променливи с термове

Дефиниция 75 (Допустима замяна)**.** *Нека φ е предикатна формула, x е индивидна променлива, τ е терм. Резултатът от едновременната замяна на всички свободни участия на x във φ с τ ще означаваме с $\varphi[x/\tau]$.*

Казваме, че едновременната замяна на свободните участия на x във $\varphi, \varphi[x/\tau]$, е допустима замяна, ако никое свободно участие на x във φ не е в област на действие на квантор по променлива участваща в τ.

Забележка. *Ако $x \not\in Var^{free}(\varphi)$, то за всеки терм $\tau \varphi[x/\tau]$ е допустима.*

Забележка. *Ако τ е затворен терм, то за всяко φ и всяко $x \varphi[x/\tau]$ е допустима замяна.*

Преименуване на свързани променливи

Дефиниция 76 (Вариант)**.** *Казваме, че $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$, ако:*

- *$\varphi[x/y]$ е допустима (т.е. свободните участия на x във φ не са в област на действие на квантор по y);*
- *$y \not\in Var^{free}[\varphi]$.*

Пренексна нормална форма

Дефиниция 77. *Казваме, че φ е в* ***пренексна нормална форма (ПНФ)****, ако $\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \Theta$, където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ са квантори, Θ е безкванторна формула, $n \geq 0$.*

Думата $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ се нарича ***кванторен префикс*** *на φ, а Θ –* ***матрица*** *на φ.*

Ако всичките $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ са $\forall$, то казваме, че φ е универсална.

Ако всичките $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ са $\exists$, то казваме, че φ е екзистенциална.

Логическо следване

Дефиниция 78 (Секвенциално следване)**.** *Нека $\Gamma \cup \{\psi\}$ е множество от предикатни формули. Казваме, че от Γ логически следва $\psi (\Gamma \models \psi)$, ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура и ν е оценка в $\mathcal{A}$ от $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$ за всяко $\varphi \in \Gamma$ следва, че $\mathcal{A} \models_\nu \psi$.*

Дефиниция 79 (Глобално следване)**.** *Казваме, че от Γ глобално (моделно) следва ψ $(\Gamma \models^g \psi)$, ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура, ако за всяка $\varphi \in \Gamma, \mathcal{A} \models \varphi$, то $\mathcal{A} \models \psi$.*

Скулемизация

Дефиниция 80 (Скулемизация)**.** *Алгоритъм, който по дадено множество от затворени формули Γ дава множество от затворени формули Γ^S, такова че Γ е изпълнимо тогава и само тогава, когато Γ^S е изпълнимо и Γ е неизпълнимо тогава и само тогава, когато Γ^S е неизпълнимо.*

Това преобразуване е поточково, т.е. $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$.

$\Gamma \models \psi \longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ е неизпълнимо $\longleftrightarrow \Gamma^S \cup \{(\neg\psi)^S\}$ е неизпълнимо.

Дефиниция 81 (Скулемова нормална форма)**.** *Ако φ е затворена и е в пренексна нормална форма, то φ^S е затворена и универсална, но в разширение на езика.*

φ^S ще наричаме Скулемова нормална форма на φ.

Дефиниция 82 (Алгоритъм за скулемизация)**.** *Ще дефинираме едностъпкова скулемизация (от φ ще получаваме φ^S):*

- φ^S *е затворена;*

- φ^S *е в пренексна нормална форма;*

- φ^S *ще има един квантор за* $\exists$ *по-малко от* φ *(ако във* φ *има* $\exists$*).*

Нека $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\Theta$ *– затворена формула,* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *са различни индивидни променливи,* $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ *са квантори. Тогава* φ_S*:*

1. *Ако* $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \forall$*, то* $\varphi_S \models \varphi$*;*

2. *Ако* $Q_1 = \exists$*, т.е.* $\varphi = \exists x\psi$ $(\psi \leftrightharpoons Q_2x_2\dots Q_nx_n\Theta)$*, то* $\varphi^S \leftrightharpoons \psi[x/c_\varphi]$*, където* c_φ *е нова индивидна променлива.*

3. *Ако* $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_k = \forall, Q_{k+1} = \exists$*, т.е.* $\varphi = \forall x_1\forall x_2\dots\forall x_k\exists x_{k+1}\dots\Theta$*, то* $\varphi_S \leftrightharpoons \forall x_1\forall x_2\dots\forall x_k(Q_{k+2}x_{k+2}\dots Q_nx_n)[x_{k+1}/f_\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)]$*, където* f_φ *е нов за езика функционален символ с арност* k*.*

   Ако в кванторния префикс има точно $m > 0$ *квантора* $\exists$*, то* $\varphi^S \leftrightharpoons \underbrace{\varphi_{SSS\dots}}_{m \text{ пъти}}$

Затворени универсални формули

Дефиниция 83 (Затворен частен случай)**.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е език, в който има поне една индивидна константа. Нека* $\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_n\Theta$ *е затворена формула,* Θ *е безкванторна формула и* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *са различни индивидни променливи.*

Нека $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ *са произволни затворени термове от* $\mathcal{L}$*. Формулата* $\Theta[x_1/\tau_1, x_2/\tau_2, \dots, x_n/\tau_n]$ *ще наричаме затворен частен случай на* $\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_n\Theta$*. Множеството на всички затворени частни случаи на универсална затворена формула* φ *ще означаваме със* $CSI(\varphi)$*, Closed substitution instances, т.е.* $CSI(\varphi) \leftrightharpoons \{\Theta[x_1/\tau_1, x_2/\tau_2, \dots, x_n/\tau_n] : \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}}\}$*.*

Дефиниция 84. *Нека* Δ *е множество от безкванторни формули от* $\mathcal{L}$*. Можем да разгледаме формулите от* Δ *като съждителни формули над множеството от съждителни променливи* $\mathbb{A}t_{\mathcal{L}}$*.*

Нека $\mathcal{A}$ *е структура,* ν *оценка в* $\mathcal{A}$*. За всяка формула* $\chi \in \mathbb{A}t_{\mathcal{L}}$ *дефинираме* $I_{\mathcal{A},\nu}(\chi) = \|\chi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$*. Тогава за всяка безкванторна формула* φ *е изпълнено* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow I_{\mathcal{A},\nu}(\varphi) = T$*. Тогава* $\mathcal{A} \models_\nu \Delta \longrightarrow I_{\mathcal{A},\nu} \models \Delta$*.*

Ербранови структури

Дефиниция 85 (Ербранова структура)**.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език. Една структура* $\mathcal{H}$ *за езика* $\mathcal{L}$ *се нарича ербранова структура, ако:*

- $\mathcal{H} = \mathcal{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$ *– универсумът е множеството от затворените термове от езика* $\mathcal{L}$*;*

- $c^{\mathcal{H}} = c$ *за всяка индивидна константа от* $\mathcal{L}$*;*

- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = f(\tau_1^{\mathcal{H}}, \tau_2^{\mathcal{H}}, \dots, \tau_n^{\mathcal{H}})$ *за всеки функционален символ* $f, \#[f] = n$*, за произволни* $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathrm{T}^{cl}_{\mathcal{L}}$

Забележка. $\mathcal{L}$ *има поне една ербранова структура* $\longleftrightarrow$ $\mathcal{T}^{cl}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$ $\longleftrightarrow$ $\mathcal{L}$ *има поне една индивидна константа.*

Забележка. *Едно множество от безкванторни формули е изпълнено* $\longleftrightarrow$ *то е изпълнено в ербранова структура.*

Свободни ербранови структури

Дефиниция 86 (Свободна ербранова структура)**.** *Една структура $\mathcal{H}$ се нарича свободна ербранова структура за езика $\mathcal{L}$, ако:*

- $\mathcal{H} = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *– универсумът е множеството от всички термове от* $\mathcal{L}$
- $c^{\mathcal{H}} \leftrightharpoons c$, *за всяка индивидна константа* $c \in \mathbb{C}onst_{\mathcal{L}}$
- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, *за всеки n-арен функционален символ f и за всеки n терма.*

Съждителна резолюция

Дефиниция 87. *Нека φ е съждителна формула и $\varphi = \psi_1 \& \psi_2 \& \ldots \& \psi_n$, където ψ_i са елементарни дизюнкции, тъй като $\Theta \vee \Theta \models\mid \Theta$, на всяка елементарна дизюнкция ψ ще съпоставим крайното множество от литералите (т.е. P или $\neg P$), които участват във формулата ψ.*

$\psi \longrightarrow \mathbb{D}_\psi$ *– крайно множество от литерали.*

$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k$ *– дизюнкция от литерали.*

$I \models L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k \longleftrightarrow \exists i, 1 \leq i \leq k, I \models L_i$.

Следователно за едно крайно множество от литерали от $\mathbb{D}_\psi, I \models \mathbb{D}_\psi \longleftrightarrow$ има литерал $L \in \mathbb{D}_\psi, I \models L$. Така $I \models \psi \longleftrightarrow I \models \mathbb{D}_\psi$.

Дефиниция 88 (Дизюнкт)**.** *Дизюнкт $\mathbb{D}$ ще наричаме крайно множество от литерали, I е булева интерпретация. Казваме, че $I \models \mathbb{D}$, ако съществува $L \in \mathbb{D}, I \models L$.*

ψ е елементарна дизюнкция, следователно $\mathbb{D}_\psi$ е дизюнкт, $I \models \psi \longleftrightarrow I \models \mathbb{D}_\psi$. Ако $\mathbb{D} \neq \varnothing$ и $\mathbb{D}$ е дизюнкт, то има формула ψ, такава че $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\psi$.

Забележка. *Има само един дизюнкт, който не е от вида $\mathbb{D}_\psi$ за някоя елементарна дизюнкция ψ. Това е празното множество от литерали. Този дизюнкт ще наричаме "празен дизюнкт" и ще го означаваме с $\blacksquare$.*

Забележка. *Нека I е булева интерпретация. $\blacksquare$ не е верен за всяка булева интерпретация. $\blacksquare$ е неизпълним – няма модел. Всеки дизюнкт, различен от $\blacksquare$ има поне един модел.*

Дефиниция 89 (Тавтология)**.** *Нека казваме за един дизюнкт $\mathbb{D}$, че е тавтология, ако всеки път, когато I е булева интерпретация, $I \models \mathbb{D}$.*

$\mathbb{D}$ е тавтология $\longleftrightarrow$ има променлива $P : P \in \mathbb{D}$ и $\neg P \in \mathbb{D}$.

Дефиниция 90 (Дуален литерал)**.** *Нека L е литерал. Дуален на L литерал ще наричаме*
$$L^\partial = \begin{cases} P, & \text{ако } L = P \\ \neg P, & \text{ако } L = \neg P \end{cases}$$

Дефиниция 91 (Модел)**.** *Казваме, че I е модел за S, където S е множество от дизюнкти, ако за всеки дизюнкт $\mathbb{D} \in S, I \models \mathbb{D}$. Така, $I \models \varphi \longleftrightarrow I \models S_\varphi$. За всяка булева интерпретация $I, I \models \varnothing$. S може и да е безкрайно.*

Нека Δ е множество от съждителни формули, I е булева интерпретация, $I \models \Delta \longleftrightarrow \forall \varphi \in \Delta, I \models \varphi$. За всяка булева интерпретация $I, I \models \Delta \longleftrightarrow \bigcup\limits_{\varphi \in \Delta} S_\varphi$.

Забележка. *Δ е изпълнимо $\longleftrightarrow S_\Delta$ е изпълнимо. Ако $\blacksquare \in S$, то S е неизпълнимо.*

Правило на съждителната резолюция

Дефиниция 92. *Нека* $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$ *са дизюнкти, а* L *е литерал.*

Казваме, че правилото за съждителната резолюция е приложимо към двойката $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ *относно* L*, ако* $L \in \mathbb{D}_1$ *и* $L^\partial \in \mathbb{D}$.

Бележим $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.

Забележка. *Ако* $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$ *са дизюнкти и* L *е литерал, то алгоритмично разпознаваемо е дали* $!\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.

Резултат от прилагането на правилото за резолюцията към $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$ *относно* L *имаме само когато правилото е приложимо и този резултат е* $\mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) \leftrightharpoons \{\mathbb{D}_1 \backslash \{L\} \cup \{\mathbb{D}_2 \backslash \{L^\partial\}\}$.

Дефиниция 93 (Резолвента)**.** $\mathbb{D}$ *е резолвента на* $\mathbb{D}_1$ *и* $\mathbb{D}_2$*, ако има литерал* $L : \mathbb{D} = \mathcal{R}_L(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2)$.

Дефиниция 94 (Резолютивен извод)**.** *Нека* S *е множество от дизюнкти. Резолютивен извод от* S *наричаме крайна редица от дизюнкти* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_n$ *: всеки неин член е или от* S*, или е резолвента на два предходни члена.*

Дефиниция 95. *Нека* S *е множество от дизюнкти и* $\mathbb{D}$ *е дизюнкт. Казваме, че* $\mathbb{D}$ *е резолютивно изводим от* S*, ако има резолютивен извод от* S*, чийто последен член е* $\mathbb{D}$*, т.е. има крайна редица* $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_n$*, такава че тя е резолютивен извод и* $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}$.

Пишем $S \overset{r}{\vdash} D$.

Забележка. *Нека* S *е множество от дизюнкти,* I *е булева интерпретация и* $S \overset{r}{\vdash} D$*. Тогава, ако* $I \models S$*, то* $I \models \mathbb{D}$.

Трансверзали за фамилии от множества

Дефиниция 96 (Трансверзала)**.** *Нека* A *е множество, чиито елементи са множества.* A *е фамилия от множества. Казваме, че едно множество* Y *е трансверзала за* A*, ако за всеки елемент* $x \in A, Y \cap x = \varnothing$.

Дефиниция 97 (Минимална трансверсала)**.** *Нека* A *е фамилия от множества. За едно множество* Y *казваме, че е минимална трансверзала за* A*, ако:*

- Y *е трансверзала за* A*;*
- *Ако* $Y' \subseteq Y$ *и* Y' *е трансверзала, то* $Y' = Y$.

Хорнови дизюнкти

Дефиниция 98 (Хорнов дизюнкт)**.** *Един съждителен дизюнкт* $\mathbb{D}$ *се нарича хорнов, ако съдържа най-много един позитивен литерал.*

Дефиниция 99 (Факт)**.** $\{P\}$*, където* P *е позитивен литерал, т.е. съждителна променлива или атомарна формула. Дизюнкти от този вид се наричат факти.*

Дефиниция 100 (Правило)**.** $\{P, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_n\}, n \geq 1$ *– правило.*

$P : -Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

$P \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n \models\!\!\!\mid \neg(Q_1 \& Q_2 \& \ldots Q_n) \vee P \models\!\!\!\mid Q_1 \& Q_n \& \ldots \& Q_n \Rightarrow P$.

Дефиниция 101 (Цели)**.** $\{\neg Q_1, \neg Q_2 \ldots, \neg Q_n\}, n \geq 1$.

Дефиниция 102 (Хорнова програма)**.** *Хорнова програма е крайно множество от правила и факти.*

Дефиниция 103. *Нека $I : PVar \longrightarrow \{T, F\}$. Нека съпоставим $A_I = \{P \mid I(P) = T\} \subseteq PVar$.*

Обратно, ако A е множество от съждителни променливи, то на A съпоставяме характеристичната ѝ функция $I(P) = \begin{cases} T, P \in A \\ F, P \not\in A \end{cases}$.

Ако на A съпоставим I_A и на I_A съпоставим A_{I_A}, ще получим $A = A_{I_A}$. Аналогично, $I = I_{A_I}$.

В множеството на всички булеви интерпретации дефинираме частична наредба:

$$I \preccurlyeq J \leftrightharpoons A_I \subseteq A_J$$

Изоморфни влагания. Хомоморфизми и изоморфизми.

Дефиниция 104. *Нека $A_0 \subseteq A^n$ и нека A_0 е определимо. Нека h е автоморфизъм в структурата $\mathcal{A}$.*

Тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ е изпълнено

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0 \Leftrightarrow < h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in A_0$$

Дефиниция 105. *Нека h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$ и φ – формула.*

Ако $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!]$ и φ е затворена, то $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.

Дефиниция 106. *Нека $A_0 \subseteq A^n$ и h е автоморфизъм в структурата $\mathcal{A}$.*

Ако $\exists < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0$, такива че $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in A_0 \in A_0$, но $< h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n) > \in A_0 \not\in A_0$, то A_0 не е определимо множество.

Пример: $< \mathbb{N}, \leq >$.

Дефиниция 107 (Подструктура). *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$, казваме че $\mathcal{A}$ е подструктура на $\mathcal{B}$, ако Id_A е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, т.е.:*

- $A \subseteq B$
- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$
- $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *такива че на $a_1, a_2, \ldots, a_n$ действа изоморфно влагане $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*
- $< a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < a_1, a_2, \ldots, a_n > \in p^{\mathcal{B}}$, *за $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*

Пример: $< \mathbb{Q}, \leq >$ за $< \mathbb{R}, \leq >$

Дефиниция 108. *Нека $\mathcal{L}$ е език без формално равенство, $\mathbb{C}onst_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$, $\mathcal{H}$ е ербранова структура за $\mathcal{L}$, а $\mathcal{H}^{free}$ – свободна ербранова структура.*

1. *За $\mathcal{H}$ – ербранова структура, тогава $\exists H^{free}$ – свободна ербранова структура, за която $\mathcal{H}$ е подструктура.*
2. *За $\forall H^{free}$ – свободни ербранови структури $\exists \mathcal{H}$ – ербранова структура , такава че $\mathcal{H}$ е подструктура на $\mathcal{H}^{free}$*

Дефиниция 109. *Нека $\mathcal{A}$ е подструктура на $\mathcal{B}$:*

1. *Нека $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и φ е безкванторна, тогава за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$*
2. *Нека $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и φ е универсална формула, тогава $\mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!]$ за $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*

3. *Нека* $\varphi[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *и* φ *е екзистенциална формула, тогава* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!] \longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, a_2, \dots, a_n]\!]$ *за* $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$

Дефиниция 110 (Логическа еквивалентност на формули)**.** *Нека* φ *и* ψ *са предикатни формули.*

Казваме, че φ *и* ψ *са логически еквивалентни и записваме* $\varphi \models\!\mid \psi$*, ако за всяка структура* $\mathcal{A}$ *и за всяка оценка* ν *имаме, че* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_\nu \psi$*.*

$\varphi \models\!\mid \psi \longleftrightarrow$ *във всяка структура* φ *и* ψ *определят едни и същи множества,* φ *и* ψ *имат свободни променливи между* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$*.*

$\varphi \models\!\mid \psi \longleftrightarrow \models (\varphi \Leftrightarrow \psi)$

Дефиниция 111 (Предикатна тавтология)**.** *Една предикатна формула* φ *се нарича предикатна тавтология, ако за* $\forall \mathcal{A}$ *– структура и за* $\forall \nu$ *– оценка в* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{A} \models_\nu \varphi$*, т.е.* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}} = T$*.*

$H_{\Leftrightarrow}(l_1, l_2) = T \longleftrightarrow l_1 = l_2$

Дефиниция 112. *Нека* $\mathcal{A}$ *е структура,* φ *и* ψ *са предикатни формули. Казваме, че* φ *и* ψ *са логически еквивалентни в* $\mathcal{A}$*,* $\varphi \models\!\mid_{\mathcal{A}} \psi$*, ако за* $\forall \nu$ *– оценка в* $\mathcal{A}$ *е в сила* $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu]$*.*

Дефиниция 113 (Заместване на индивидни променливи и предикатни формули)**.** *Нека* x *е индивидна променлива,* τ *е терм. С* $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ *ще означаваме резултата от едновременната замяна на всички свободни участия на* x *във* φ *с* τ*.*

Казваме, че замяната е ***допустима****, ако свободните участия на* x *във* φ *не са в област на действие на квантор по променлива от* τ*.*

Забележка. *Нека* φ *е безкванторна. Тогава за всяко* x *и всеки терм* $\tau\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ *е допустима.*

Забележка. *Ако* τ *е затворен терм, то за всяка формула* φ *и всяко* $x\varphi[{}^{x}/_{\tau}$ *е допустима.*

Дефиниция 114 (Преименуване на свързани променливи)**.** *Нека* φ *е предикатна формула,* $x \neq z, Q \in \{\forall, \exists\}$*.*

Казваме, че формулта $Qz[\varphi[{}^{x}/_{z}]]$ *е получена от* $Qx\varphi$ *с преименуване, ако са изпълнени условията:*

- $\varphi[{}^{x}/_{z}]$ *е допустима замяна (свободните участия на* x *във* φ *не са в област на действие на* Q *по* z*)*
- $z \not\in Var^{free}[\varphi]$