1. จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยของเมทริกซ์

eigen vector

eigenvalue

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

characteristic equation

Triangular Matrix

$$Ax = \lambda x$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 1$$

$$(\lambda - A)x = 0 \qquad \lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad R_1 + R_3 \to R_3$$

$$-x_3 = 0, \quad x_3 = 0$$

$$-x_2 - 4x_3 = 0$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = t$$

$$x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3$$

$$(\lambda - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$2x_3 = 0, \quad x_3 = 0$$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = t$$

$$x = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

$$x_3 = -x_1$$

$$-2x_3 = x_2$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = -2t$$

$$x_1 = -t$$

$$x = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. จงตรวจสอบว่า A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้โดยการคำนวณ $P^{-1}AP$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -R_1 + R_2 \to R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \frac{1}{5}R_2 \to R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \quad 4R_2 + R_1 \to R_1$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$