mfit lecture by caveZ

"Linear Algebra"

Matrix Addition

* ต้องขนาด m×n ทั้งสองตัวถึงจะบวกได้

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

Matrix Multiplication

ex.

$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$

ต้องเหมือนกัน

ขนาดของ A×B

แล้วมาบวกกัน

* นอน × ตั้ง (ทั้ง column ไปเรื่อยๆ)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-12 & -2+3 \\ -12+8 & 8-2 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \#$$

Matrix Properties

Addition and Scalar Multiplication

$A + B = B + A$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$(cd)A = c(dA)$
$1A = A$
$c(A + B) = cA + cB$
$(c + d)A = cA + dA$

Matrix Multiplication

$A(BC) = (AB)C$
$A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + BC$
* $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

ระวังจะแจกแจงเข้าไป

* สมบัติคล้ายๆจำนวนจริงทั่วไปเลย

Transpose

A^T ; A Transposed

- สลับจาก $\text{Matrix}_{m\times n} \rightarrow \text{Matrix}_{n\times m}$; สลับสมาชิกแถวนอนกับแถวตั้ง

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

Transpose Properties

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = c(A)^T$
4. $\boxed{(AB)^T = (B^T A^T)}$

Inverse Matrix Properties

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{k\ \text{พจน์}}$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$, $A \neq 0$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

*พลาดบ่อย

Minors and Cofactors

ex. การหา minor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(หา minor ตัวไหนให้ขีด row, column ของตัวที่จะหาทิ้งไปแล้ว det ตัวที่เหลือ)

หา cofactor โดย

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

ex. $C_{21} = (-1)^{3} \cdot M_{21} = -M_{21}$

(จะมี pattern ของมันอยู่)

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

3 × 3 matrix

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

4 × 4 matrix

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrix

Find Determinant; Det by using Cofactors

หา det ได้ก็จะต้องเป็น square matrix

- หา row หรือ column มา 1 แถว/หลัก
- หาผลรวมของ cofactor · element ตัวที่เลือกมา เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ex. เลือก col 2

ไปหา minor มาอีกที

$$\det(A) = 2(C_{12}) + (-1)(C_{22}) + 0(C_{32})$$

* ถ้าอยากหาไวๆ ก็เลือก row/col ที่ element เป็น 0 เยอะๆ

* จะ Matrices 4×4, 5×5, 6×6 ก็ใช้วิธีนี้

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

เลือก row

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

เลือก col

Definition

Find Determinant using ต่อหลัก method

เพิ่ม col1, col2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{matrix}$$

คูณลง − คูณขึ้น $= (0 + 16 - 12) - (-4 + 0 + 6)$

$= 4 + 4 - 6 = 2$ #

Properties of Determinants

A และ B เป็น square matrices ขนาด $n \times n$

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det(cA_{n\times n}) = c^n \cdot \det(A)$
3. A หา Inverse (เป็น nonsingular) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$
4. ถ้า A เป็น invertible $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
5. $\det(A) = \det(A^T)$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)}$$

Adjont

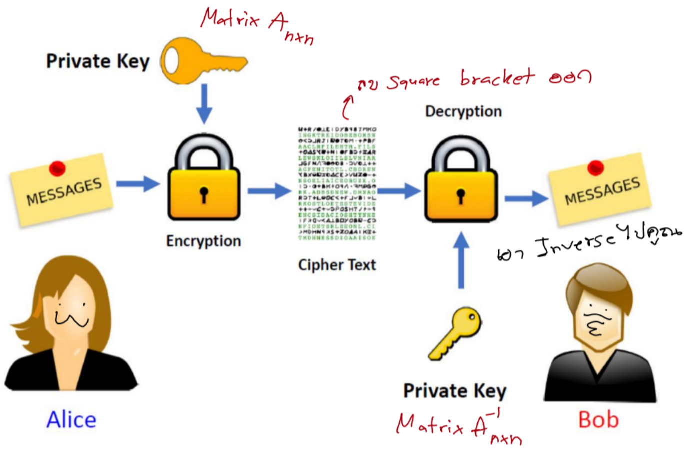
เขียน Matrix ในรูป Cofactors

แล้ว transpose

จะได้ Adjoint

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}. \xrightarrow{\text{transpose}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrix Encryption



0 = _	14 = N
1 = A	15 = O
2 = B	16 = P
3 = C	17 = Q
4 = D	18 = R
5 = E	19 = S
6 = F	20 = T
7 = G	21 = U
8 = H	22 = V
9 = I	23 = W
10 = J	24 = X
11 = K	25 = Y
12 = L	26 = Z
13 = M	

ใช้มา

"HELLZ"

จะแบ่งยังไงก็ดู ขนาด Matrix A

$[8\ 5\ 12][12\ 15\ 26]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Key}$$

$$[8\ 5\ 12]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [15\ -23\ -17]$$

$$[12\ 15\ 0]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [-3\ -9\ 69]$$

Cipher text

15 -23 -17 -3 -9 69

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Key
เหมือนเดิมจะแบ่ง Cipher ไงก็ดู Key

$$[15\ -23\ -17]\cdot A^{-1} = [8\ 5\ 12]$$

$$[-3\ -9\ 0]\cdot A^{-1} = [12\ 15\ 0]$$

แปลงเป็น Alphabet

"HELLO"

Linear Equation

ต้องอยู่ใน Form นี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Linear equation

ไม่มี
- ผลคูณ
- รากของตัวแปร
- ตัวแปรที่เกี่ยวกับ
  - > Trigonometric func.
  - > Exponential func.
  - > Log. func.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{เป็น}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin x_1 + 10x_2 &= 10 \\ \log x_2 + 10x_1 &= 0 \\ xy + z &= 1 \\ \sqrt{x} + 10y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ไม่เป็น}$$

Cramer's Rule

$$x_1 = \frac{\det(x_1)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{\det(x_2)}{\det(A)} \quad , \quad x_3 = \frac{\det(x_3)}{\det(A)}$$

$\det(A)$ = det ของ coefficient matrix

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x \quad\quad + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 10$$

อยากหา x ไขนให้ constant ไปแทน
เป็นสัมประสิทธิ์ตรงนั้น

$$x = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Row-echelon form; REF and Reduced row-echelon form; RREF

RULES for REF

1. แถวที่สมาชิกเป็น 0 หมด ต้องอยู่ล่างสุด
2. แถวที่ไม่ได้เป็น 0 หมด, สมาชิกตัวแรกจะเป็น 1 ; leading one
3. แถวต่อไปจาก 1 ด้านบน, 1 ตัวต่อไปจะอยู่ด้านขวา

more RREF สมาชิกด้านบน/ล่าง leading one จะต้องเป็น 0 หมด

แนว column

ex.

REF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementary Row Operation

1. สลับสองแถวใดๆ ($R_1 \leftrightarrow R_2$)
2. คูณด้วย nonzero constant ($\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$)
3. บวกแถวหนึ่ง (ที่คูณ/ไม่คูณด้วย const.) กับอีกแถว ให้เกิดเป็นแถวใหม่ ($\frac{1}{3}R_1 + R_2 \rightarrow R_2$)

Gaussian elimination & Gauss-Jordan elimination

Gaussian ใช้ REF

Gauss-Jordan ใช้ RREF

- เขียนสมการในรูป augmented matrix
- ใช้ elementary row operation ทำให้อยู่รูป REF หรือ RREF
- แทนค่าย้อนกลับ
- ได้คำตอบ

Find An Inverse Matrix used Gauss-Jordan

$$\left[A \mid \overset{\text{Identity Matrix}}{I_n} \right] \underset{\text{Row oper.}}{\overset{\text{Elementary}}{\sim}} \left[I_n \mid \overset{A^{-1}}{B} \right]$$

The key is $AB = BA = I_n$

คูณด้วย B ทั้งสองข้างก็ได้เป็น

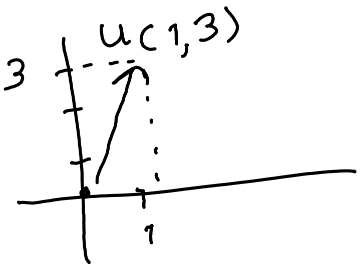
$$\left[\overset{\cdot B}{A} \mid \overset{\cdot B}{I_n} \right] = \left[AB \mid I_n B \right] = \left[I_n \mid B \right]$$

Vector

เขียนในรูป $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{u(u_1, u_2)}$

$u = (1, 3)$ หมายถึง vector ที่ลากจุด origin ไป $(1,3)$



$u(2,6) \quad v(1,8)$

$3u = (6,18)$

$u + v = (3,14)$

Vector Addition and Scalar Multiplication Properties

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is a vector in the plane. — Closure under addition
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Commutative property of addition การสลับที่การบวก
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Associative property of addition
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ เอกลักษณ์การบวก — Additive identity property
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ตัวผกผันการบวก — Additive inverse property
6. $c\mathbf{u}$ is a vector in the plane. — Closure under scalar multiplication
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Distributive property
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Distributive property
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ — Associative property of multiplication เปลี่ยนกลุ่มการคูณ
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ — Multiplicative identity property

Vector in R^n

R^n หมายถึง ปริภูมิ มิติ ของ vector นั้นๆ

ex. R^3 จะต้องมี (x_1, x_2, x_3)

หรือ R^n มี $(x_1, x_2 \dots x_n)$

Length of a Vector

Vector norm $\|v\| \to \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (สำหรับ R^2)

$\hookrightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ (สำหรับ R^3)

$\hookrightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}$ (สำหรับ R^n)

c is const.

$$\boxed{\|cv\| = |c| \cdot \|v\|}$$

Unit Vector ; เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$u = \dfrac{v}{\|v\|}$ (u หาจากเหลือขนาดจะเท่ากับ 1, ทิศทางเดียวกับ v)

unit vector

Dot Product

Definition

The **dot product** of $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ and $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ is the *scalar* quantity

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$ * คำตอบที่ได้จะเป็น ~~Vector~~ Scalar

Dot Product Properties

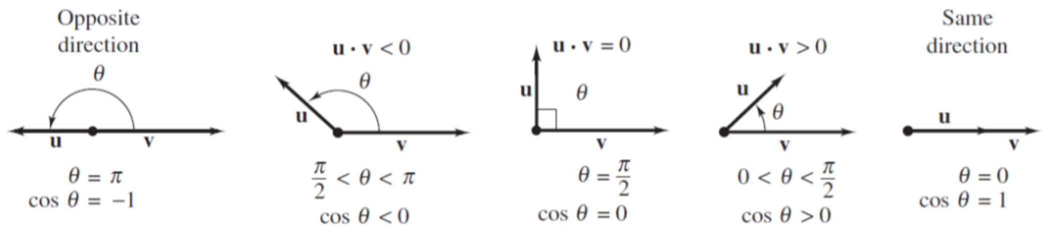
1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$ ระวังเผลอไปแจกแจง
4. $v \cdot v = \|v\|^2$ เพราะ $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2$
5. $v \cdot v \geq 0$, $v \cdot v = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = 0$

The Angle Between Two Vectors in R^n

$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$

REMARK: The angle between the zero vector and another vector is not defined.

$u \cdot v = 0$ แสดงว่าตั้งฉาก (Orthogonal)



* Vector 0 ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์

Cross Product

$\boxed{u \times v \neq v \times u}$

- คำตอบได้เป็น Vector

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}, \quad v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

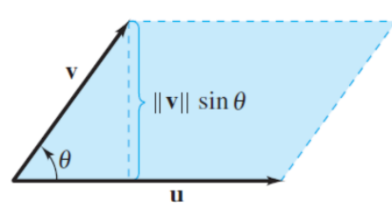
หาโดยใช้ Dertiminant

$\boxed{\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta}$

Cross Product Properties

1. $u \times v = -(v \times u)$
2. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
3. $c(u \times v) = cu \times v = u \times cv$
4. $u \times 0 = 0 \times u = 0$
5. $u \times u = 0$
6. $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$ แจกแจงไม่ได้ ***

$$\text{Area} = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{\text{Base}}\ \underbrace{\|\mathbf{v}\| \sin\theta}_{\text{Height}} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$



Vector Space

Let V be a set on which two operations (**vector addition** and **scalar multiplication**) are defined. If the listed axioms are satisfied for every **u**, **v**, and **w** in V and every scalar (real number) c and d, then V is called a **vector space.**

ตัวแปร V คือ Vector Space ขึ้นกับเรากำหนดว่าเป็นอะไร

Addition Property

- $u+v$ is in V. Closure under addition
- $u+v=v+u$ Commutative
- $(u+v)+w=u+(v+w)$ Associative
- V มี vector 0 ที่ทำให้ $u+0=u$ Additive Identity
- $u+(-u)=0$ Additive Inverse

Scalar Multiplication Property

cu is in V. Closure under scalar multiplication

$c(u+v)=cu+cv$ Distributive

$(c+d)u=cu+cd$ Distributive

$c(du)=(cd)u$ Associative

$1(u)=u$ Scalar Identity

ex. Matrices ขนาด 2×3 เป็น Vector Space

$$u=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$2\cdot u=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$ ยังเป็น Matrix 2×3 (มี Closure)

$$u+v=\begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} \\ b_{21}+d_{21} & b_{22}+d_{22} & b_{23}+d_{23} \end{bmatrix}$$ ยังเป็น Matrix 2×3 (มี Closure)

keyword

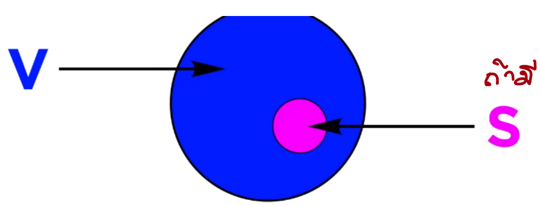
- Polynomial of Degree 2 or less เป็น Vector Space
- Polynomial of Degree 2 ไม่เป็น (ลอง Prove ดู)
- $c(x_1,x_2)=(cx_1,0)$ ไม่เป็น → $1(1,1)=(1,0)$

→ $1\cdot u=u$ (ไม่ satisfied)

Subspace

A nonempty subset W of a vector space V is called a **subspace** of V if W is a vector space under the operations of addition and scalar multiplication defined in V.

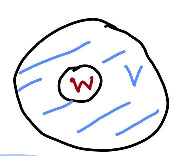
(ของ space ที่ subspace นั้นกำหนด)



if S is closed then it is a vector space and it is therefore a subspace of V

ถ้ามีสมบัติปิดตรงทุกประการ S จะเป็น subspace ของ V ด้วย

W. เป็น subspace อีกที



Test for Subspace

1. u and v in W. u+v ก็ต้อง in W.
2. u in W. c is any scalar. cu ก็ต้อง in W.

ex. XZ plane เป็น subspace ของ R^3 (XYZ plane)

ex. Singular Matrices (noninvertible) ไม่เป็น subspace ของ $M_{2,2}$ เพราะขาดสมบัติปิดการบวก

Linear Combination

** selected vectors in the space

ex. $S = \{(1,0,1),(2,0,1),(1,1,1)\}$ etc.

A vector $\mathbf{v}$ in a vector space V is called a **linear combination** of the vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ in V if $\mathbf{v}$ can be written in the form

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k,$$ ผลรวมเชิงเส้น

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are scalars.

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1,3,1)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(0,1,2)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(1,0,-5)}\},$$

$\mathbf{v}_1$ is a linear combination of $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_3$ because

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 3(0,1,2) + (1,0,-5)$$
$$= (1,3,1).$$

Equating corresponding components yields the system of linear equations below.

$$\begin{aligned} c_1 \qquad - c_3 &= 1 \\ 2c_1 + c_2 \qquad &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1 \end{aligned}$$

Using Gauss-Jordan elimination, you can show that this system has an infinite number of solutions, each of the form

$$c_1 = 1 + t, \quad c_2 = -1 - 2t, \quad c_3 = t.$$

ถ้า infinite เราก็แทน t ไปเลย (หา linear combination ได้)

To obtain one solution, you could let $t = 1$. Then $c_3 = 1$, $c_2 = -3$, and $c_1 = 2$, and you have

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

ขึ้นกับเราจะแทน t เป็นอะไร

The augmented matrix of this system row reduces to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

w เขียนในรูป linear combination ไม่ได้

From the third row you can conclude that the system of equations is inconsistent, and that means that there is no solution. Consequently, **w** *cannot* be written as a linear combination of $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, and $\mathbf{v}_3$.

ไม่สามารถหาคำตอบของสมการได้

→ เขียนเป็น Linear combination ไม่ได้

Linear Dependence AND Linear Independence

A set of vectors $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ in a vector space V is called **linearly independent** if the vector equation

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$ ← Result สุดท้ายเป็น 0

has only the trivial solution, $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$. If there are also nontrivial solutions, then S is called **linearly dependent.**

($v = c_1v_1 + c_2v_2$) etc.

มันเลยเขียนในรูป linear combination ไม่ได้

เพราะพอแทนในสมการหายหมด

สรุป ถ้ามี trivial sol. อันเดียวคือ $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ → Linear Independence

ถ้ามี nontrivial sol. → Linear Dependence

Test for linearly dependence/Independence

Let $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ be a set of vectors in a vector space V. To determine whether S is linearly independent or linearly dependent, perform the following steps.

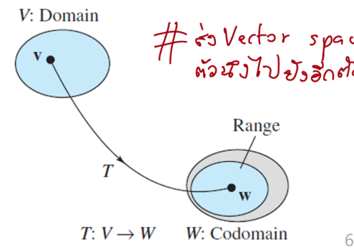
1. From the vector equation $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, write a homogeneous system of linear equations in the variables $c_1, c_2, \ldots,$ and c_k.
2. Use Gaussian elimination to determine whether the system has a unique solution.
3. If the system has only the trivial solution, $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$, then the set S is linearly independent. If the system also has nontrivial solutions, then S is linearly dependent.

Linear Transformation

we could go from a matrix to a vector

อันนี้เป็น vector space

linear transformation เป็นเหมือน function หนึ่งที่แปลงจาก vector ตัวหนึ่ง เป็นอีกตัวหนึ่ง แต่ค่าที่ได้อาจจะไม่ได้ เป็น vector เหมือนเดิม เช่น Matrix 2x2 อาจจะแปลงไปเป็น scalar ก็ได้



ส่ง vector space ตัวหนึ่งไปยังอีกตัว

ส่ง/แปลง

A function that maps a vector space V into a vector space W is denoted by

$T: V \to W$.

ส่ง vector space หนึ่งไปอีก vector space หนึ่ง

$T(V) = W$

ค่าใน vector space นั้นๆ

$\boxed{\begin{array}{l} W \text{ จะเป็น image ของ } V \\ V \text{ จะเป็น preimage ของ } W \end{array}}$

ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

เราก็จะหา image/preimage ต่อ

Definition of Linear Transformation

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(cu) = cT(u)$

verify สองข้อนี้ ถึงจะเป็น linear transformation

ex. Functions that are not linear transformation

1) $f(x) = \sin$ ไม่เป็น linear transformation จาก $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sin(x_1 + x_2) \neq \sin x_1 + \sin x_2$

คืออ่านเหมือน T ที่เป็น function ตัวแปลงค่า

2) $f(x) = x^2$

$f(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$

3) $f(x) = x + 1$

$f(x_1 + x_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{x \text{ ก้อนหนึ่ง}} + 1$

แต่ $f(x_1) + f(x_2)$

$= x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2$

Properties

1. $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, for all $\mathbf{v}$ — **Zero transformation** ($T: V \to W$) การแปลงศูนย์
2. $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, for all $\mathbf{v}$ — **Identity transformation** ($T: V \to V$) การแปลงเอกลักษณ์

Let T be a linear transformation from V into W, where $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are in V. Then the following properties are true.

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
3. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$
4. If $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, linear combination

   then

$$T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n)$$
$$= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n).$$

Linear Transformation Defined by Matrix

R^n คือเวกเตอร์มิติ n ก็ได้เมทริกซ์ขนาด $n \times 1$
R^m ก็ $m \times 1$ (ดูแค่ row)

เขียนในรูป Matrix คูณกับ Vector

$$T(v) = Av$$

$T: R^n \to R^m$ defined by $T(v) = Av$

R ที่นี่เราหมายถึง VECTOR นะ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad T: R^2 \to R^3$$

ใช้ Matrix มาก็ต้องตอบได้ว่าแปลงไปแบบไหน

แบบ Matrix จะอ่านง่ายกว่า

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ประยุกต์สำหรับ การแปลงการแปลง หนึ่ง เช่น สร้าง Matrix A ไว้สำหรับ การ Rotating ของแกน

Which representation of $T: R^3 \to R^3$ is better,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_2 + 4x_3)$$

or

แบบล่างอ่านง่ายกว่า

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{3\times 1}? = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{3\times 1} \; R^3$$

ฐาน

Standard Basis for R^n

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

ได้เวกเตอร์ 3 มิติมาอยู่ดี

$$(x_1 - 2x_2 + 5x_3, 2x_1 + 3x_3, 4x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

สุดท้ายพอคูณก็ได้ตัวเดียวกัน

หรือจะมองในรูป coefficient matrix ก็ได้

A คือ เมทริกซ์มาตรฐาน Standard Matrix หาได้จาก

$$A = [T(e_1) \vdots T(e_2) \vdots \ldots \vdots T(e_n)]$$

เอา $T(e_n)$ มาต่อกัน

Let $T: R^n \to R^m$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Then the $m \times n$ matrix whose n columns correspond (สอดคล้อง) to $T(\mathbf{e}_i)$,

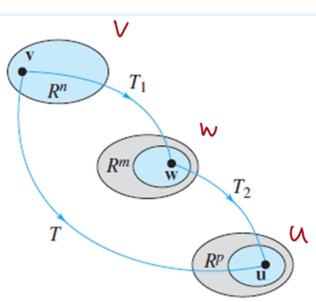
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

is such that $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ for every $\mathbf{v}$ in R^n. A is called the **standard matrix** for T.

ex. $T: R^2 \to R^2$

$$A = [Te_1 \vdots Te_2]$$

Composition of Linear Transformation



Composition of Transformations

$T_1: R^n \cdot R^m$

$T_2 \cdot R^m : R^p$

$T: R^n \cdot R^p$ defined by $T(v) = T_2(T_1(v))$

และ $T' = T_1 \circ T_2$, $A' = A_1 A_2$

standard Matrix ตัวนี้เท่ากับ $A = A_2 A_1$

(T_2 ประกอบกับ T_1)

$T = T_2 \circ T_1$ เขียนอีกแบบ

(T-Prime not Inverse of T) $T' = T_1 \circ T_2$

Inverse Linear Transformation

Key***

If $T_1: R^n \to R^n$ and $T_2: R^n \to R^n$ are linear transformations such that for every $\mathbf{v}$ in R^n

$$T_2(T_1(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{and} \quad T_1(T_2(\mathbf{v})) = \mathbf{v}, \qquad T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$$

then T_2 is called the **inverse** of T_1, and T_1 is said to be **invertible.**

$$T_2(T_1(v)) = T_1(T_2(v)) = v \quad , \quad T_2 = T_1^{-1}$$

หมายถึง Inverse

ex.

$$T(1,4,-5) = (2,3,1)$$
$$T^{-1}(2,3,1) = (1,4,-5)$$

Image

** พูดง่ายๆ คือยกเลิกการ mapping แล้วกลับไปเป็น preimage

ได้ Preimage กลับมา (under T)

Inverse of Linear Transformation Condition

T is invertible if only if

Let $T: R^n \to R^n$ be a linear transformation with standard matrix A. Then the following conditions are equivalent.

1. T is invertible.
2. T is an isomorphism. การแปลงถอดแบบ
3. A is invertible.

And, if T is invertible with standard matrix A, then the standard matrix for T^{-1} is A^{-1}.

ถ้า T เป็นฟังก์ชันแบบ หนึ่งต่อหนึ่ง $T(u)=T(v)$ injective

Matrix มาตรฐาน

ทั่วถึง $T(v)=W$ subjective

$$T^{-1} = A^{-1}v$$

หา T^{-1} ต้องหา A มาก่อน แล้วหา A^{-1} อีกที

A basis for the eigenspace corresponding to $\lambda_1 = 1$ is

$B_1 = \{(0, 1, 0, 0), (-2, 0, 2, 1)\}$. Basis for $\lambda_1 = 1$

For $\lambda_2 = 2$ and $\lambda_3 = 3$, follow the same pattern to obtain the eigenspace bases

$B_2 = \{(0, 5, 1, 0)\}$ Basis for $\lambda_2 = 2$

$B_3 = \{(0, -5, 0, 1)\}$. Basis for $\lambda_3 = 3$

Eigenspace

In other words, the set of all eigenvectors of a given eigenvalue λ, together with the zero vector, is a subspace of R^n. This special subspace of R^n is called the **eigenspace** of λ.

เป็นเซตของ eigen vector ทั้งหมด รวมกับ vector zero

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Eigenspace} = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$$

basis

อาจจะเขียน B_1 คือ basis ของค่า λ_1 อะไรแบบนี้

Eigenvector and Eigenvalue

ไม่งั้นคูณไม่ได้

(ส่วน row ก็ขึ้นกับ A)

↳ คำว่า Vector ต้องอยู่รูปนี้ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{A}_{\text{Matrix}} \overbrace{x = \underbrace{\lambda}_{\text{Eigenvalue}} x}^{\text{Eigenvector}}$$

ex. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

NOTE: Eigenvector (x) can't be $\vec{0}$

A เป็น squre matrix $n \times n$

ทำให้ characteristic equation มี degree $= n$, ค่าของ λ ที่มากสุดเลยเป็น n (อาจน้อยกว่าได้)

Eigenvalue

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

↳ Produced characteristic equation (สมการลักษณะเฉพาะ)

Eigenvector

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

↳ ฟอร์มแบบนี้

Proof

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda)x = 0$$

If

$$\cancel{(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)}x = (A - \lambda)^{-1}0$$

$$x = 0$$

(ซึ่งไม่ตรงกับที่เรานิยามไว้)

∴ $(A - \lambda)$ เลย noninvertible แสดงว่า det ก็เลย $= 0$

(I คูณเพิ่มได้)

$$|A - \lambda I| = 0 \ \#$$

Key

* Each eigenvalue has its own eigenvector

Diagonalization

"For a square matrix A, does there exist an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal?"

$D = P^{-1}AP$, $PDP^{-1} = A$

Diagonal Matrix

P คือ eigenvector ของ A มาต่อกัน

P is said to diagonalize A

- A has unique eigenvalues

$$B = P^{-1}AP$$

A กับ B similar กัน (เพราะมี eigenvalues ค่าเดียวกัน)

D made of eigenvalues

P made of eigenvectors

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$X = [\vec{x}_1 : \vec{x}_2 : \vec{x}_3 \dots \vec{x}_n]$$