Boolean Algebra

Lecture 2

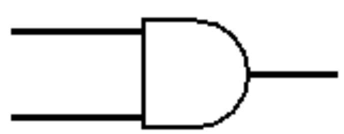
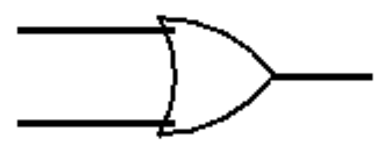
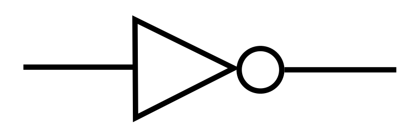
Outline

- Logic gates and Boolean expressions
- Boolean algebra

Boolean Expressions

- เรา ใช้ประโยคสัญลักษณ์บูลีน ในการบรรยายฟังก์ชันตรรก (Logic Functions)
- ฟังก์ชันตรรก ใดๆก็ตาม สามารถเขียนและสร้างโดย ใช้เกท AND, OR, และ NOT
- Basic Boolean Operations:
  - AND $A \cdot B$
  - OR $A + B$
  - NOT $\overline{A}$

Basic Gates

	AND	OR	NOT
Boolean	$A \bullet B$	$A + B$	$\overline{A}$
Logic gate			

Truth Table

AND

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

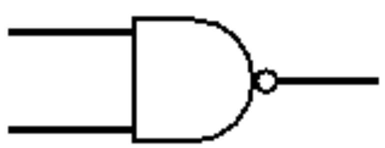
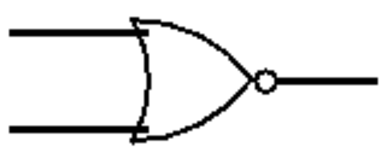
OR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

A	Y
0	1
1	0

Other Logic Gates

	NAND	NOR
Boolean	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A + B}$
Logic gate		

Truth Table

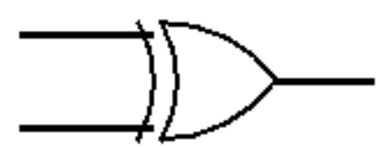
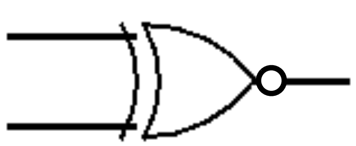
NAND:

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR:

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Other Logic Gates

	XOR	XNOR
Boolean	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
Logic gate		

Truth Table

XOR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Boolean to others: Ex 1

$$Y = (A \cdot B) + C$$

A	B	C	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Boolean to others: Ex 2

$$Y = AB + A\overline{B}C$$

A	B	C	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Boolean to others: Ex 3

$$Y = (A + B)(\overline{B} + \overline{C})$$

A	B	C	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Equivalent Equations

- พิจารณาสมการบูลีน 2 สมการนี้
  - $Z_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
  - $Z_2 = AB\overline{C} + \overline{(AB)}C$
- เขียน Schematic Diagram และตารางค่าความจริงของสมการบูลีนทั้งสอง

Equivalent Equations

$$Z_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

4column
with OR GATE

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	Z_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

AND $A \cdot B$ OR $A + B$ NOT $\overline{A}$

$$Z_2 = AB\overline{C} + (\overline{AB})C$$

A	B	C	$AB\overline{C}$	$(\overline{AB})C$	Z_2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

Output ของ Z_1 และ Z_2 เหมือนกัน

- สมการเขียนได้หลายแบบ แต่ผลลัพธ์
- ถ้าเป็นไปได้เขียนให้สั้นสุด

Boolean Minimization

- ฟังก์ชันตรรกเดียวกันสามารถเขียนได้หลายรูปแบบของสมการบูลีน
- การลดรูปสมการมีข้อดีคือ
  - ช่วยลดจำนวนเกทที่ใช้
  - ประหยัดพื้นที่ของวงจร
  - ประหยัดต้นทุน

Boolean Algebra พีชคณิตบูลีน

- ในการจัดการสมการบูลีน เราจำเป็นต้องมีกฎ
- กฎเหล่านี้เกี่ยวข้องกับข้อกำหนดต่างๆ ของตัวแปรตรรก (Logic Variables) ซึ่งจะกำหนดว่าเราสามารถทำอะไรกับตัวแปรตรรกได้บ้าง
- ทฤษฎีพีชคณิตบูลีนนี้ถูกคิดค้นโดย George Boole ในปี ค.ศ. 1854

Boolean Algebra

- พีชคณิตบูลีนประกอบไปด้วย
  - เซตของตัวแปรตรรก S
  - Binary operators 2 ตัวคือ AND และ OR
  - Unary operator 1 ตัวคือ NOT

    (Operator ที่ทำกับตัวเอง)

Laws and Properties

1. สมบัติปิด (Closure): For every A, B in S

ยังเป็น 0 กับ 1 อยู่

(i) $A + B \in S$

(ii) $AB \in S$

2. กฎการสลับที่ (Commutative):

(i) $A + B = B + A$

(ii) $AB = BA$

Laws and Properties

3. กฎการจัดหมู่ (Associative):

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A(BC) = (AB)C$

4. กฎการกระจาย (Distributive):

(i) $A + BC = (A + B)(A + C)$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$

Laws and Properties

5. เอกลักษณ์ (Identities):

(i) $A + 0 = A$ $\quad$ $A + 1 = 1$

(ii) $A \cdot 1 = A$ $\quad$ $A \cdot 0 = 0$

6. ส่วนกลับ (Complements):

(i) $\overline{(\overline{A})} = A$

(ii) $A + \overline{A} = 1$

(iii) $A\overline{A} = 0$

Laws and Properties

7. Self Operation:

(i) $A + A = A$

(ii) $A \cdot A = A$

8. กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's Laws):

กระจาย Inverse แล้วเปลี่ยนเครื่องหมาย

(i) $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

(ii) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

Useful Laws

9. $AB + A\overline{B} = A$

10. $A + AB = A$

11. $A + \overline{A}B = A + B$

9) $AB + A\overline{B} = A$

L.H.S: $AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B})$

$= A \cdot 1$

$= A$ #

10) $A + AB = A$

L.H.S: $A + AB = A \cdot 1 + AB$

$= A(1 + B)$

$= A \cdot 1$

$= A$ #

11) $A + \overline{A}B = A + B$

L.H.S: $A + \overline{A}B = A(\overline{B} + B) + \overline{A}B$

$= A\overline{B} + AB + \overline{A}B$

$= A\overline{B} + (\underbrace{\cancel{A + \overline{A}}}_{1})B$

$= A\overline{B} + B$

Haven't proved yet..

Minimization: Ex 1

$$Y = (A + \overline{B})B$$

$= AB + \overline{B}B$

$= AB + 0$

$= AB$ #

Minimization: Ex 2

* หา Term ที่ตัวร่วมเดียวกัน

$$Y = B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$

$$= B\overline{C} + \underbrace{\cancel{(\overline{A} + A)}}_{1}BC$$

$$= B\overline{C} + BC$$

$$= B\underbrace{\cancel{(\overline{C} + C)}}_{1}$$

$$= B \quad \#$$

Minimization: Ex 3

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\underbrace{\cancel{(\overline{D}+D)}}_{1} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\underbrace{\cancel{(\overline{D}+D)}}_{1}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C}$$

$$= (\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,B)\,\overline{C}$$

$$= (\overline{A}\,\underbrace{\cancel{(\overline{B}+B)}}_{1})\,\overline{C}$$

$$= \overline{A}\,\overline{C} \;\#\; \checkmark$$

Minimization: Ex 4

4 inputs

$$Y = (\overbrace{\bar{A} + BC}^{Z} + D)(\overbrace{\bar{A} + BC}^{Z} + \bar{D})$$

$$= (Z + D)(Z + \bar{D})$$

$$= Z + (\underbrace{\cancel{D\bar{D}}}_{0})$$

$$= \bar{A} + BC$$

#

$$= (\bar{A} + BC) + (\overset{0}{\cancel{D \cdot \bar{D}}})$$

$$= \bar{A} + BC$$