Boolean Minimization

Lecture 4

Outline

- Karnaugh-map
- Circuit design

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$F = B$

Karnaugh Map

Input

B \ A	0	1
0	0	0
1	1	1

output

Input

ใน ⊞ คือ output

Karnaugh Map

$F = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} = \overline{B}(\overline{A} + A) = \overline{B}$

- Karnaugh Map (K-map) อาศัยการจัดเรียงตารางค่าความจริง ในรูปแบบ ใหม่ ซึ่งทำ ให้สามารถลดรูปโดยอาศัยคุณสมบัติการคอมพลีเมนต์ได้ง่ายขึ้น

- ตัวอย่างของ K-map แบบ 2 ตัวแปร

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B \ A	0	1
0	1	1
1	0	0

จาใน K-Map

Output => 1 ในรูป 2^n

(2, 4, 8, 16, ..)

Examples of K-Map

Column ติดกันจะต้องต่างกัน
1 bit

A B

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

3-variable K-map

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

4-variable K-map

Using K-Map

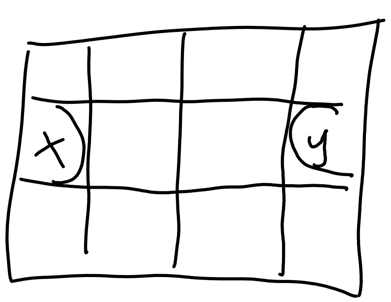
- ถ้ามี 1 เหมือนกัน A
  ถ้ามี 0 เหมือนกัน $\overline{A}$

- หาช่องใน K-map ที่มีลอจิก 1 ติดกัน ต้องใช้ให้หมดที่เป็นไปได้
- จำนวนช่องที่ใช้ลดรูปต้องมีขนาด 2, 4, 8, ... เท่านั้น
- กรุ๊ปด้วยจำนวนกลุ่มให้น้อยที่สุด (ให้สมาชิกเยอะ)
  (Term จะได้น้อย,
  มีแบบนี้หลายกลุ่มได้)
- ตัวอย่าง

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B \ A	0	1
0	1	1
1	0	0

$$F = \overline{B}$$



สามารถข้าม cell แบบนี้ได้

1. ห้าม Group ทะแยง 2. Group overlapped กันได้

Using K-Map (2)

- ตัวอย่าง

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

4 ช่องนี้ A เป็น 1 หมดเลย
งั้นใส่ 1

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

ดูว่าอะไรเป็น 1 เหมือนกัน

$$F = A + BC$$

Example

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = BC + AC + AB$$

$$= AB + AC + BC$$

Example (2)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

รวมช่องกันได้ เพราะต่างกัน 1 Bit

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

$$F = AC + \bar{B}\bar{C}$$

Example (3)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$F \quad =$$

Example (4)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$F =$$

Don't Cares

- การใช้ประโยชน์จาก don't cares

- ตัวอย่าง

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	x
1	1	1	x

don't cares

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	x	1
1	0	1	x	0

$$F = BC + A\overline{C}$$

Example (5)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

$$F =$$

Example (6)

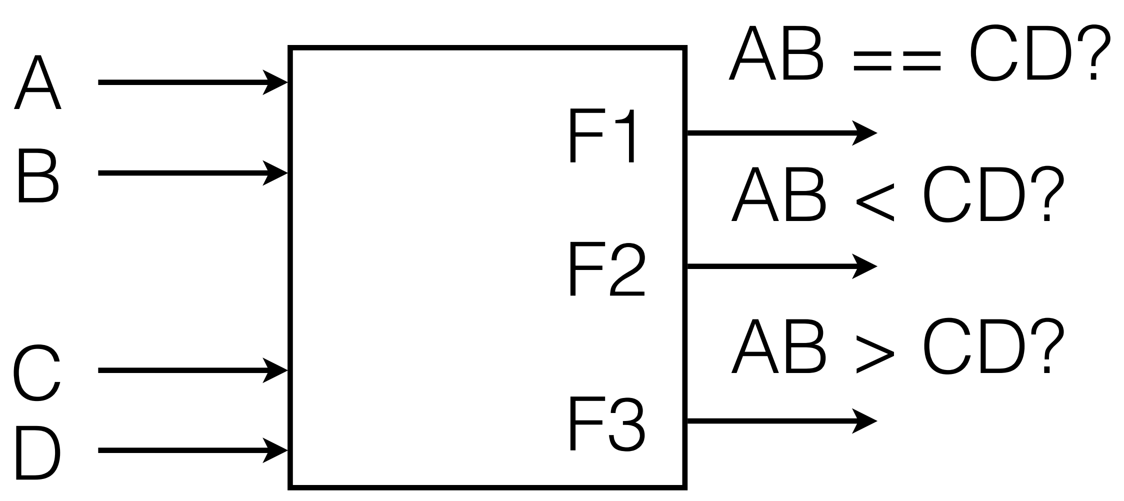
A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	x
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	x	x	1
01	1	1	x	0
11	0	1	x	1
10	1	1	x	0

$$F =$$

Circuit Design

- ตัวอย่าง: ออกแบบ Two-bit Comparator
- Input Spec:
  - 2-bit input จำนวน 2 ตัว (AB, CD)
- Output Spec:
  - F1 เช็คว่า AB == CD
  - F2 เช็คว่า AB < CD
  - F3 เช็คว่า AB > CD



Two-bit Comparator

A	B	C	D	F1	F2	F3
0	0	0	0	1		
0	0	0	1	0		
0	0	1	0	0		
0	0	1	1	0		
0	1	0	0	0		
0	1	0	1	1		
0	1	1	0	0		
0	1	1	1	0		
1	0	0	0	0		
1	0	0	1	0		
1	0	1	0	1		
1	0	1	1	0		
1	1	0	0	0		
1	1	0	1	0		
1	1	1	0	0		
1	1	1	1	1		

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$F_1 \quad =$$

Two-bit Comparator (2)

A	B	C	D	F1	F2	F3
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$F_2 \quad =$$

Two-bit Comparator (3)

A	B	C	D	F1	F2	F3
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

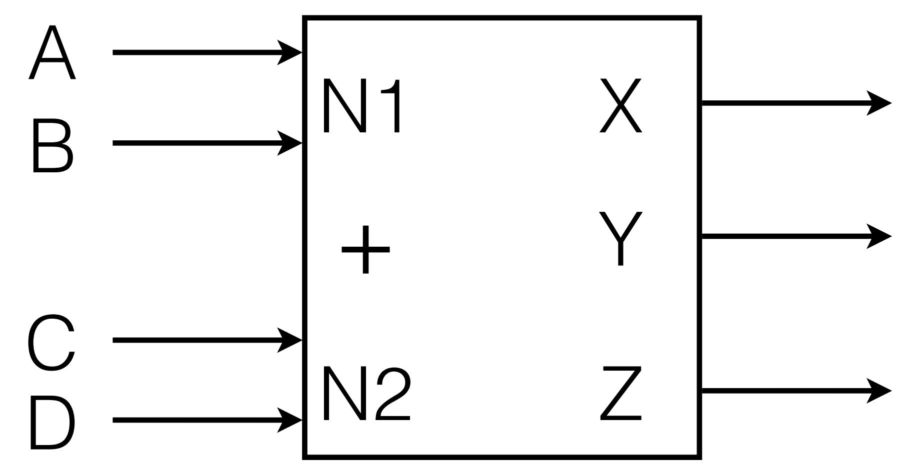
$$F_3 \quad =$$

Two-Bit Comparator (4)

- Schematic Diagram

Two-Bit Binary Adder

- ตัวอย่าง ออกแบบ Two-bit Binary Adder
- Input Spec
    - 2-bit input จำนวน 2 ตัว (AB, CD)
- Output Spec
    - 3-bit binary (XYZ)



Two-bit Binary Adder (2)

→ Binary 3-bit อีกที

A	B	C	D	X	Y	Z
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$X =$$

Two-bit Binary Adder (3)

A	B	C	D	X	Y	Z
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$Y =$$

Two-bit Binary Adder (4)

A	B	C	D	X	Y	Z
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$Z \quad =$$

5-Variable K-map

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	x
0	0	1	0	1	1	x
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	x
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	x
0	1	1	1	1	1	x

A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	x
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

A = 0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

A = 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

5-Variable K-map (2)

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	x
0	0	1	0	1	1	x
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	x
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	x
0	1	1	1	1	1	x

A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	x
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

A = 0

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	x	x	1
01	0	x	1	0
11	0	1	x	1
10	0	1	x	1

A = 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1	1	x	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1