1. ให้ V เป็นเซตของพหุนามดีกรี 4 ทั้งหมดที่มีการดำเนินการมาตรฐาน
   จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

$V = P_4$

$p(x) = 3x^4 + 2x$

$q(x) = -3x^4 + 1$

$p(x) + q(x) = 2x + 1$

สรุป V ไม่เป็น Vector space
เพราะไม่มีสมบัติปิด ภายใต้การบวก

|

2. ให้ $V = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ ที่มีการดำเนินการมาตรฐานใน R^2

จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

$A = (5, 5)$

$-A = (-5, -5)$

ไม่เป็น Vector space เพราะไม่มีสมบัติ ภายใต้การคูณ

3. ให้ W เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$

และ $V = M_{2,2}$

จงตรวจสอบว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V หรือไม่

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

$5A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

W เป็น subspace ของ V

4. ให้ $S=\{(6,2,1),(-1,3,2)\}$

จงพิจารณาว่า S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

$$c_1(6,2,1)+c_2(-1,3,2)$$

$$=(6c_1-c_2,\ 2c_1+3c_2,\ c_1+2c_2)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1+(-6R_3)\to R_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -13 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad -2R_3+(R_2)\to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -13 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{-1}{13}R_1\to R_1 \\ -R_2\to R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1-R_2\to R_1$$

$$\boxed{\begin{matrix} c_1+2c_2=0,\ c_1 \\ c_2=0 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3\leftrightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็น Independent

5. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $M_{4,1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

$$S = \left\{ \overset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 + R_3 = R_3 \\ \frac{1}{2} R_4 = R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 - R_4 \to R_4 \\ \frac{1}{2} R_4 \to R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 - R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} R_3 - R_4 = R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} R_3 \to R_3 \\ \frac{1}{2} R_4 \to R_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

$$c_3 + c_4 = 0 \quad , \quad c_3 = 0$$

$$c_2 + 3c_3 + c_4 = 0 \quad , \quad c_2 = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

เป็น Independent