mfit lecture by caveZ

Matrix Addition

* ต้องขนาด $m \times n$ ทั้งสองตัวถึงจะบวกได้

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

Matrix Multiplication

ex.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$$

ต้องเหมือนกัน

ขนาดของ $A \times B$

แล้วมาบวกกัน

* นอน × ตั้ง (ทั้ง column ไปเรื่อยๆ)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-12 & -2+3 \\ -12+8 & 8-2 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

Matrix Properties

Addition and Scalar Multiplication

$A + B = B + A$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$(cd)A = c(dA)$
$1A = A$
$c(A + B) = cA + cB$
$(c + d)A = cA + dA$

Matrix Multiplication

$A(BC) = (AB)C$
$A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + BC$
* $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

ระวังจะแจกแจงเข้าไป

* สมบัติคล้ายๆ จำนวนจริงทั่วไปเลย

Transpose

A^T ; A Transposed

- สลับจาก $Matrix_{m \times n} \rightarrow Matrix_{n \times m}$; สลับสมาชิกแนวนอนกับแนวตั้ง

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

Transpose Properties

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = c(A)^T$
4. $(AB)^T = (B^T A^T)$

Inverse Matrix Properties

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1} A^{-1} A^{-1} \dots A^{-1}}_{k \text{ พจน์}}$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$, $A \neq 0$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ★ พลาดบ่อย

Minors and Cofactors

ex. การหา minor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(หา minor ตัวไหนให้ขีด row, column ของตัวที่จะหาทิ้งไป แล้ว det ตัวที่เหลือ)

หา cofactor โดย

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

ex. $C_{21} = (-1)^{3} \cdot M_{21} = -M_{21}$

(จะมี pattern ของมันอยู่)

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

3 × 3 matrix

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

4 × 4 matrix

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

n × n matrix

Find Determinant; Det by using Cofactors

หา det ได้ก็จะต้องเป็น square matrix

- หา row หรือ column มา 1 แถว/หลัก
- หาผลรวมของ cofactor·element ตัวที่เลือกมา เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ex. เลือก col 2

ไปหา minor มาอีกที

$$\det(A) = 2(C_{12}) + (-1)(C_{22}) + 0(C_{32})$$

* ถ้าอยากหาไวๆ ก็เลือก row/col ที่ element เป็น 0 เยอะๆ

* จะ Matrices 4×4, 5×5, 6×6 ก็ใช้วิธีนี้

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

เลือก row

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

เลือก col

Definition

Find Determinant using ต่อหลัก method

เพิ่ม col1, col2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{matrix}$$

คูณลง - คูณขึ้น $= (0 + 16 - 12) - (-4 + 0 + 6)$

$= 4 + 4 - 6 = 2$ #

Properties of Determinants

A และ B เป็น square matrices ขนาด $n \times n$

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det(cA_{n \times n}) = c^n \cdot \det(A)$
3. A หา Inverse (เป็น nonsingular) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$
4. ถ้า A เป็น invertible $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
5. $\det(A) = \det(A^T)$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)}$$

Adjont

เขียน Matrix ในรูป Cofactors

แล้ว transpose

จะได้ Adjoint

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}. \xrightarrow{\text{transpose}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrix Encryption

? ไม่แน่ใจออกสอบป่าว

Linear Equation

ต้องอยู่ใน Form นี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Linear equation

ไม่มี
- ผลคูณ
- รากของตัวแปร
- ตัวแปรที่เกี่ยวกับ
  - > Trigonometric func.
  - > Exponential func.
  - > Log. func.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \text{เป็น}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x_1 + 10x_2 = 10 \\ \log x_2 + 10x_1 = 0 \\ xy + z = 1 \\ \sqrt{x} + 10y = 2 \end{array}\right\} \text{ไม่เป็น}$$

Cramer's Rule

$$x_1 = \frac{\det(X_1)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{\det(X_2)}{\det(A)} \quad , \quad x_3 = \frac{\det(X_3)}{\det(A)}$$

$\det(A)$ = det ของ coefficient matrix

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x \qquad\quad + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 10$$

อยากหา x ให้นำ constant ไปแทน
เป็นสัมประสิทธิ์ตรงนั้น

$$x = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Row-echelon form; REF
and Reduced row-echelon form; RREF

RULES for REF

1. แถวที่สมาชิกเป็น 0 หมด ต้องอยู่ล่างสุด
2. แถวที่ไม่ได้เป็น 0 หมด, สมาชิกตัวแรกจะเป็น 1 ; leading one
3. แถวต่อไปจาก 1 ด้านบน, 1 ตัว ตัวต่อไปจะอยู่ด้านขวา

แนว column

more RREF สมาชิกด้านบน/ล่าง leading one จะต้องเป็น 0 หมด

ex.

REF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementary Row Operation

1. สลับสองแถวใดๆ ($R_1 \leftrightarrow R_2$)
2. คูณด้วย nonzero constant ($\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$)
3. บวกแถวหนึ่ง (ที่คูณ/ไม่คูณด้วย const.) กับอีกแถว ให้เกิดเป็นแถวใหม่ ($\frac{1}{3}R_1 + R_2 \rightarrow R_2$)

Gaussian elimination & Gauss-Jordan elimination

Gaussian ใช้ REF

Gauss-Jordan ใช้ RREF

- เขียนสมการในรูป augmented matrix
- ใช้ elementary row operation ทำให้อยู่รูป REF หรือ RREF
- แทนค่าย้อนกลับ
- ได้คำตอบ

Find An Inverse Matrix used Gauss-Jordan

$$\left[A \,\middle|\, \overset{\text{Identity Matrix}}{I_n}\right] \overset{\text{Elementary}}{\underset{\text{Row oper.}}{\sim}} \left[I_n \,\middle|\, \overset{A^{-1}}{B}\right]$$

The key is $AB = BA = I_n$

คูณด้วย B ทั้งสองข้างก็ได้เป็น

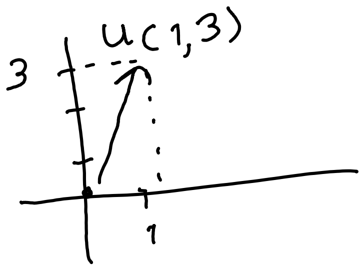
$$\left[\overset{\cdot B}{A} \,\middle|\, \overset{\cdot B}{I_n}\right] = \left[AB \,\middle|\, I_nB\right] = \left[I_n \,\middle|\, B\right]$$

Vector

เขียนในรูป $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{u(u_1, u_2)}$

$u = (1, 3)$ หมายถึง vector ที่ลากจุด origin ไป $(1, 3)$



$u(2,6)$ $v(1,8)$

$3u = (6, 18)$

$u + v = (3, 14)$

Vector Addition and Scalar Multiplication Properties

1. **u** + **v** is a vector in the plane.	Closure under addition
2. **u** + **v** = **v** + **u**	Commutative property of addition การสลับที่การบวก
3. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)	Associative property of addition
4. **u** + **0** = **u** เอกลักษณ์การบวก	Additive identity property
5. **u** + (−**u**) = **0** ตัวผกผันการบวก	Additive inverse property
6. *c***u** is a vector in the plane.	Closure under scalar multiplication
7. *c*(**u** + **v**) = *c***u** + *c***v**	Distributive property
8. (*c* + *d*)**u** = *c***u** + *d***u**	Distributive property เปลี่ยนกลุ่มการคูณ
9. *c*(*d***u**) = (*cd*)**u**	Associative property of multiplication
10. 1(**u**) = **u**	Multiplicative identity property

Vector in R^n

R^n หมายถึง ปริภูมิ มิติ ของ vector นั้นๆ

ex. R^3 จะต้องมี (x_1, x_2, x_3)

หรือ R^n มี $(x_1, x_2 \dots x_n)$

Length of a Vector

Vector norm $\|v\| \to \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (สำหรับ R^2)

$\hookrightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ (สำหรับ R^3)

$\hookrightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}$ (สำหรับ R^n)

c is const.

$$\boxed{\|cV\| = |c| \cdot \|V\|}$$

Unit Vector ; เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$u = \frac{V}{\|V\|}$ (u หามาเพื่อขนาดจะเท่ากับ 1, ทิศทางเดียวกับ v)

unit vector

Dot Product

Definition

The **dot product** of **u** = $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ and **v** = $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ is the *scalar* quantity

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

* คำตอบที่ได้จะเป็น Vector

Dot Product Properties

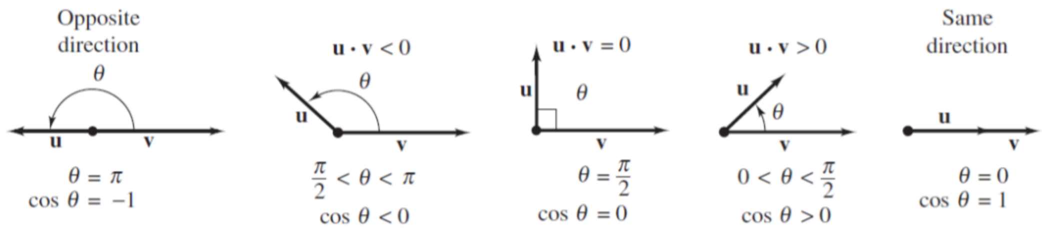
1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$ ระวังเผลอไปแจกแจง
4. $v \cdot v = \|v\|^2$ เพราะ $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2$
5. $v \cdot v \geq 0$, $v \cdot v = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = 0$

The Angle Between Two Vectors in R^n

$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$

REMARK: The angle between the zero vector and another vector is not defined.

$u \cdot v = 0$ แสดงว่าตั้งฉาก (Orthogonal)



* Vector 0 ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์

Cross Product

$\boxed{u \times v \neq v \times u}$

- คำตอบได้เป็น Vector

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} , \quad v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

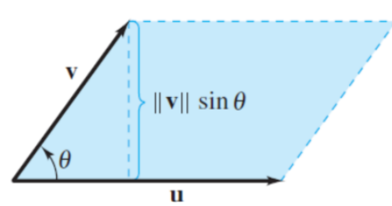
หาโดยใช้ Dertiminant

$$\boxed{\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta}$$

Cross Product Properties

1. $u \times v = -(v \times u)$
2. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
3. $c(u \times v) = cu \times v = u \times cv$
4. $u \times 0 = 0 \times u = 0$
5. $u \times u = 0$
6. $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$ แจกแจงไม่ได้ ***

$$\text{Area} = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{\text{Base}} \underbrace{\|\mathbf{v}\| \sin\theta}_{\text{Height}} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$



Vector Space

Let V be a set on which two operations (**vector addition** and **scalar multiplication**) are defined. If the listed axioms are satisfied for every **u**, **v**, and **w** in V and every scalar (real number) c and d, then V is called a **vector space.**

ตัวแปร V คือ Vector Space ขึ้นกับเรากำหนดว่าเป็นอะไร

Addition Property

- $u+v$ is in V. Closure under addition
- $u+v=v+u$ Commutative
- $(u+v)+w=u+(v+w)$ Associative
- V มี vector 0 ที่ทำให้ $u+0=u$ Additive Identity
- $u+(-u)=0$ Additive Inverse

Scalar Multiplication Property

cu is in V. Closure under scalar multiplication

$c(u+v)=cu+cv$ Distributive

$(c+d)u=cu+cd$ Distributive

$c(du)=(cd)u$ Associative

$1(u)=u$ Scalar Identity

ex. Matrices ขนาด 2×3 เป็น Vector Space

$$u=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

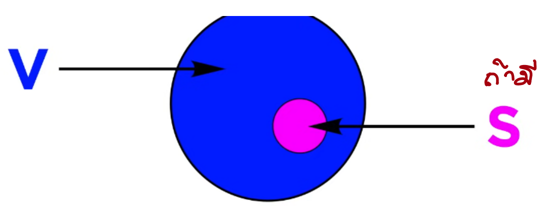
$$2\cdot u=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$ ยังเป็น Matrix 2×3 (มี Closure)

$$u+v=\begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} \\ b_{21}+d_{21} & b_{22}+d_{22} & b_{23}+d_{23} \end{bmatrix}$$ ยังเป็น Matrix 2×3 (มี Closure)

- Polynomial of Degree 2 or less ← keyword — เป็น Vector Space
- Polynomial of Degree 2 ไม่เป็น (ลอง Prove ดู)
- $c(x_1,x_2)=(cx_1,0)$ ไม่เป็น → $1(1,1)=(1,0)$ → $1\cdot u=u$ (ไม่ satisfied)

Subspace

A nonempty subset W of a vector space V is called a **subspace** of V if W is a vector space under the operations of addition and scalar multiplication defined in V.



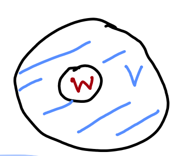
if S is closed then it is a vector space and it is therefore a subspace of V

ถ้ามี สมบัติปิด ตรงทุกประการ (ของ space ที่ subspace นั้นกำหนด) S จะเป็น subspace ของ V ด้วย

ex. XZ plane เป็น subspace ของ R^3 (XYZ plane)

ex. Singular Matrices (noninvertible) ไม่เป็น subspace ของ $M_{2,2}$ เพราะ ขาดสมบัติปิดการบวก

W. เป็น subspace อีกที



Test for Subspace

1. u and v in W. $u+v$ ก็ต้อง in W.
2. u in W. c is any scalar. cu ก็ต้อง in W.

Linear Combination

Eigenvector and Eigenvalue

ไม่งั้นคูณไม่ได้

Eigenvector

(ส่วน row ก็ขึ้นกับ A)

↳ คำว่า Vector ต้องอยู่รูปนี้

$$Ax = \lambda x$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Matrix

↳ Eigenvalue

ex. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

NOTE: Eigenvector (x) can't be $\vec{0}$

A เป็น squre matrix $n \times n$ ทำให้ characteristic equation มี degree $= n$, ค่าของ λ ที่มากสุดเลยเป็น n (อาจน้อยกว่าได้)

Eigenvalue

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

↳ Produced characteristic equation

Eigenvector

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Proof

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda)x = 0$$

If

$$(A-\lambda)^{-1}\cancel{(A-\lambda)}x = (A-\lambda)^{-1}0$$

$$x = 0$$

(ซึ่งไม่ตรงกับที่เรานิยามไว้)

(I คูณเพิ่มได้)

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \#$$

$\therefore$ $(A - \lambda)$ เลย noninvertible แสดงว่า det ก็เลย $= 0$

Key

* Each eigenvalue has its own eigenvector

Diagonalization

Book Page 435