1. ใช้ฟังก์ชันเพื่อหา (a) ภาพ (image) ของ $\mathbf{v}$ และ (b) บุพภาพ (preimage) ของ $\mathbf{w}$

$T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$, $\mathbf{v} = (-3,4)$, $\mathbf{w} = (-3,19)$

$T(V) = (V_1 + V_2, V_1 - V_2)$

$T(-3,4) = (1, -7)$

$T(V) = (1, -7)$

$T(W) = (W_1 + W_2, W_1 - W_2)$

$(-3, 19) = (w_1 + w_2, w_1 - w_2)$

$w_1 + w_2 = -3 \longrightarrow 1$

$w_1 - w_2 = 19 \longrightarrow 2$

$2w_1 = 16$

$w_1 = 8, w_2 = -11$

2. การแปลงเชิงเส้น $T: R^n \to R^m$ ถูกกำหนดโดย $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ จงหาขนาด (มิติ) ของ R^n และ R^m

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$v_{4\times 1}$

$T: R^4 \to R^3$

Find A

3. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T

$$T(x, y, z) = (3z + 2y, 4x - 11z)$$

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

4. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการประกอบ $T = T_2 \circ T_1$ และ $T' = T_1 \circ T_2$

$T_1: R^2 \to R^2, T_1(x,y) = (x-2y, 2x+3y)$

$T_2: R^2 \to R^2, T_2(x,y) = (2x, x-y)$

$$T_1(e_1) = T_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T_1(e_2) = T_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T_2(e_1) = T_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T_2(e_2) = T_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1-2 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A' = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 2 \\ 4+3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

5. จงพิจารณาว่าการแปลงเชิงเส้นหาตัวผกผันได้หรือไม่ ถ้าหาได้ ให้แสดงการหาตัวผกผัน

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]$ $R_3 + (-R_2) = R_3$

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$ $R_2 + (-R_1) = R_2$

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$

A^{-1}

$T^{-1} = A^{-1}V$

$= \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}x_1\\-x_1+x_2\\-x_2+x_3\end{bmatrix}$

$$\boxed{T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1+x_2, -x_2+x_3)}$$