$\mathrm{adj}(A)_{2\times 2}$ 3

C_{11} $(-1)^2 \cdot M_{11}$

$$\mathrm{adj}(A)_{3\times 3} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

จงหา A^{-1} และใช้มันเพื่อถอดรหัสหาข้อความ

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2

Matrix Encryption

ข้อความที่เข้ารหัส คือ $-45\ 34 \mid 36\ -24 \mid -43\ 37 \mid -23\ 22 \mid -37\ 29 \mid 57\ -38 \mid -39\ 31$

0 = _	14 = N
1 = A	15 = O
2 = B	16 = P
3 = C	17 = Q
4 = D	18 = R
5 = E	19 = S
6 = F	20 = T
7 = G	21 = U
8 = H	22 = V
9 = I	23 = W
10 = J	24 = X
11 = K	25 = Y
12 = L	26 = Z
13 = M	

Key $\begin{bmatrix} 1 & 12 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 9 - 8 = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{\cancel{\det(A)}\ 1} \cdot \mathrm{adj}(A)$

$= \begin{bmatrix} 3 & +2 \\ +4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

ข้อความ$_{1\times M}$ · Key$_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} -45 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{L}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -43 & 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -23 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{S}{19} & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -37 & 29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 57 & -38 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -39 & 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \end{bmatrix}$$

"ALL SYSTEMS GO"

ให้ V เป็นเซตของเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ (invertible) ทั้งหมดที่มีการดำเนินการมาตรฐาน

จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ~~พร้อมเหตุผล~~

ไม่มีสมบัติการบวก

vector space

True/False

Nonsingular Matrix $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$

$\frac{1}{0}$

$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 - 0 = 0$

V, $\mathbb{R}$

u, v

u, v

สมบัติปิดการบวก $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ False

1. $u + v$ in V.
2. $c(u)$ in V.

AND

สมบัติปิดการบวก

$|u+v|$ สมบัติปิดการคูณด้วย scalar

$\det(A) = 0$

scalar

$c \in \mathbb{R}$

Invertible

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 4 - 6 = -2$

$+$

$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ $\det(B) = 4 - 6 = -2$

$\underbrace{A + B}_{\text{หา } A^{-1} \text{ ได้}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(A+B) = 0$

Noninvertible

$c = 0$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $cA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(cA) = 0$

Invertible

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det(B) = 1 - 6 = -5$$

un A^{-1} [illegible]

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\det(A+B) = 10 - 25 = -15$$

Vector space?

$R^2 =$ 　　　 $u + v$ in V.

V. Matrix 2×2 　 u 　 v

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$u + v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad cU \text{ in } V. \quad 100 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100a & 100b \\ 100c & 100d \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

100

4 　 2×2 　 V

$u + v$ 　 v

w 　 z 　 u

7

Vector Space Set of Int

u, v

1. $3+5=8$, $-1+2=1$

int

$\mathbb{R}$

$0+1=1$ ✓

2. cu in V.

$1.5(3)=4.5$ float

V.

Integer (s)

2. cu in V.

Integer

float

$1.5(5)=7.5$

พหุนามดีกรี 4 → A → False

ไม่เป็น Vector Space

พหุนามดีกรี 4 (หรือน้อยกว่า) → B

3, 2, 1, 0

u+v in V.

$-4x^4+x+2$

ดีกรี 4

$4x^4+3x^2+1$

ดีกรี 4

$\cancel{4x^4}+3x^2+1$

$\cancel{-4x^4}+x+2$ +

0 $3x^2+x+3$

$-4x^4$ $4x^4$

u+v

$\cancel{4x^4}+3x^2+1$

$\cancel{-4x^4}+x+2$

$= 3x^2+x+3$ ✓

2

(x, y, z)

เงื่อนไขการเป็น Vector Space

1. u+v in V.

2. cu in V.

เราต้องหา False, ถ้าหาไม่มีจริง

เป็นแบบนั้นจริง

ไม่เป็น, เป็น

ให้ $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ และ $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$

x, y, z

$v = (2, 1, -1)$

จงหา

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$
2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 6$
3. $\|\mathbf{v}\|^2 = 6$
4. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}$
5. มุม θ ระหว่างเวกเตอร์ โดยที่ $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

(หา Norm)

$\|v\|$

วัดขนาด

$\|u\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\|v\| = \sqrt{6}$

$u \cdot v = 2 + 1 \cancel{-1} = 2$

$v \cdot v = 4 + 1 + 1 = 6$

$\cos\theta = \frac{\cancel{u \cdot v}\, 2}{\|u\|\|v\|} = \frac{2}{(\sqrt{6})(\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{18}} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}}$

$= \frac{\cancel{2}\sqrt{18}}{\cancel{18}}$

$|u| =$

$\|v\| = (2, 1, -1) = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$= 6$

$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cancel{\text{arccos}}(\cancel{\cos}\theta) = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{18}}{9}\right)$

$\theta = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{18}}{9}\right)$

$= 61.87^\circ$

$v \cdot v = \|v\|^2$

$v = (x, y, z)$

$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,2}$

$v = (x, y, z)$

$v \cdot v = x^2+y^2+z^2$

$\|v\|^2 = v \cdot v$

$\|v\| = (x, y, z, \theta, \alpha)$ 5 มิติ Vector

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2+\theta^2+\alpha^2}$

$v = (2, 1) = \sqrt{2^2+1^2}$

จงพิจารณาว่าการแปลงเชิงเส้นหาตัวผกผันได้หรือไม่ ถ้าหาได้ ให้แสดงการหาตัวผกผัน (T^{-1}) ด้วย

$T(x,y) = (x+y, x-y)$

Inverse

$T^{-1} = A^{-1}V$, $T = AV$

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

? A ปกติ

$T(x,y) = (\underset{1}{x+y}, \underset{-1}{x-y})$

Method 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad -1-1 = -2$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$ $\qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Matrix

Vector

$T^{-1} = A^{-1}V$

$=$

$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$

จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเฉพาะจง และเวกเตอร์เฉพาะจงที่สมนัยของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

λ

eigenvalue

eigenvector

1. eigenvalue
2. eigenvector

$Ax = \lambda x$

ตรงแปร

(1)

$A\cancel{I}$

$|\lambda I - A| = 0$

$\cancel{(\lambda - A)x = 0}$

$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$

$\boxed{(\lambda I - A)x = 0}$

$|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda-2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2) - 2(\lambda-2) = 0$

$(\lambda-2)^2(\lambda-3) - 2(\lambda-2) = 0$

$(\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda-3) \boxed{-2\lambda+4}$

$\lambda^2(\lambda-3) - 4\lambda(\lambda-3) + 4(\lambda-3)$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 3\lambda^2 + 12\lambda - 12 - 2\lambda + 4 = 0$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Method 1, จัดกลุ่ม

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$x^3 - 8 - 7x^2 + 14x = 0$

$\underset{A}{x^3} - \underset{B}{2^3} \quad -7x(x-2)$

$x - 2 = A$

$(x-2)(x^2+2x+4) - 7x(x-2) = 0$

$A(x^2+2x+4 \quad -7x(A) = 0$

$A(x^2+2x+4 \quad 7x)$

$(x-2)(x^2-5x+4) = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0$

$0 = 0$

สมการลักษณะเฉพาะ

characteristic equation

$\lambda = 1, 2, 4$

$\lambda = 2, 4, 1$

$\lambda_1 = \quad , \lambda_2 = \quad , \lambda_3 =$

Vector

$[\quad]$

หารสังเคราะห์

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

$P(-1) = -1 - 7 - 14 - 8$ ✗

$P(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0$

$-1, 1, -2, 2, -4, 4$

$-8, 8$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -7 & 14 & -8 \\
  &   & 1 & -6 & 8 \\
\hline
  & 1 & -6 & 8 & 0
\end{array}
\quad +
$$

$x^2 \quad x \quad x^0$

$x = 1$

$(x^2 - 6x + 8)(x - 1) = 0$

$(x - 4)(x - 2)(x - 1) = 0$

$\lambda = 1, 2, 4$

$\lambda = \underline{1}, \underline{2}, \underline{4} \rightarrow$ ค่าเจาะจง

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(\lambda I - A)x = 0$

$\lambda_1 = 1$

$(I - A)x = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \longleftrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-R_1 \rightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$R_1 + 3R_2 \rightarrow R_1$

ตัวแปรอิสระ

$x_1 + x_2 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$x_3 = t$

$x_2 = t$

$x_1 = -t$

$x_2 - \cancel{x_3} = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + \cancel{0} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_2 - t = 0$

$x_2 = t$

$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = -t}$

$x_1 + t = 0$

$B_1 = \{(-1, 1, 1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$(\lambda I - A)x = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B_2 = \{(1, 0, 0)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = t$

$x_2 + 2x_3 = 0$

$x_2 = -2t$

$x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x = 0$

$x_1 - 2t - \frac{3}{2}t$

$x_1 - \frac{4}{2}t - \frac{3}{2}t = 0$

$x_1 - \frac{7}{2}t$

$x_1 = \frac{7}{2}t$

$$t\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Encoding a Message

Use the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

to encode the message MEET ME MONDAY.

0 = __	14 = N
1 = A	15 = O
2 = B	16 = P
3 = C	17 = Q
4 = D	18 = R
5 = E	19 = S
6 = F	20 = T
7 = G	21 = U
8 = H	22 = V
9 = I	23 = W
10 = J	24 = X
11 = K	25 = Y
12 = L	26 = Z
13 = M	

Decoding a Message

Use the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

to decode the cryptogram

$$13 \quad -26 \quad 21 \quad 33 \quad -53 \quad -12 \quad 18 \quad -23 \quad -42 \quad 5 \quad -20 \quad 56 \quad -24 \quad 23 \quad 77.$$

1. จงแสดงวิธีทำและหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ Cramer’s Rule หรือการกำจัดแบบเกาส์ด้วยการแทนค่าย้อนกลับ (Gaussian elimination with back-substitution) หรือการกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan elimination)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= -7 \\
2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -8 \\
-x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

2. จงแสดงวิธีทำและหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การกำจัดแบบเกาส์ด้วยการแทนค่าย้อนกลับ (Gaussian elimination with back-substitution) หรือการกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan elimination)

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad - 3x_3 &= -2 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

1. ให้ $\mathbf{u} = (4, 0, -3,5), \mathbf{v} = (0,2,5,4)$

จงหา (a) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(b) $2(\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$

(c) $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$

2. ให้ $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1)$ และ $\mathbf{v} = (0, 2, 3, -1)$

จงหาผลเฉลยของ $\mathbf{w}$ เมื่อ $2\mathbf{w} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

3. ให้ $\mathbf{u} = (-1, 1, -2)$ และ $\mathbf{v} = (1, -3, -2)$

จงหา (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

(c) $\|\mathbf{u}\|^2$

4. ให้ $\mathbf{u} = (3,1), \mathbf{v} = (-2,4)$

จงหามุม θ ระหว่างเวกเตอร์

5. ให้ $\mathbf{u} = (12, -3, 1), \mathbf{v} = (-2, 5, 1)$

จงหาผลเฉลยของ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และแสดงว่าผลเฉลยตั้งฉากกับทั้งสองเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$

1. ให้ V เป็นเซตของพหุนามดีกรี 5 ทั้งหมดที่มีการดำเนินการมาตรฐาน
   จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ให้ $V = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ ที่มีการดำเนินการมาตรฐานใน R^2
จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. ให้ W เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

และ $V = M_{2,2}$

จงตรวจสอบว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V หรือไม่

4. ให้ $S = \{(6,2,1), (-1,3,2)\}$

จงพิจารณาว่า S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

5. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $\boldsymbol{M_{4,1}}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

1. ใช้ฟังก์ชันเพื่อหา (a) ภาพ (image) ของ $\mathbf{v}$ และ (b) บุพภาพ (preimage) ของ $\mathbf{w}$

   $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2), \mathbf{v} = (3, -4), \mathbf{w} = (3,19)$

2. การแปลงเชิงเส้น $T: R^n \to R^m$ ถูกกำหนดโดย $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ จงหาขนาด *(มิติ)* ของ R^n และ R^m

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T

   $T(x,y,z) = (3z - 2y, 4x + 11z)$

4. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการประกอบ $T = T_2 \circ T_1$ และ $T' = T_1 \circ T_2$

$T_1 : R^2 \to R^2, T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$
$T_2 : R^2 \to R^2, T_2(x, y) = (2x, x - y)$

5. จงพิจารณาว่าการแปลงเชิงเส้นหาตัวผกผันได้หรือไม่ ถ้าหาได้ ให้แสดงการหาตัวผกผัน

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$