mfit technical term by CaveZ

$$2x + y = 8$$
$$3x + 10y + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 1$$

Linear Algebra

1. **Augmented Matrix** ; เมทริกซ์แต่งเติม

- เอาทั้ง coefficient และ constant มาใส่ใน Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

2. **Coefficient Matrix** ; เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

- เอามาแต่ coefficient

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. **Identity Matrix** ; เมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์ที่มี pattern 1 ในแนวทะแยง, ที่เหลือเป็น 0

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_1 = [1], \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etc.

4. **Square Matrix** ; เมทริกซ์จัตุรัส

- Matrix มีขนาด $n \times n$

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$

NOT Square Matrix → $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$

5. **Symmetric Matrix** ; เมทริกซ์สมมาตร

- $A^T = A$; Transpose แล้วก็ยังเท่าเดิม
- จะเป็น Symmetric ได้ต้องเป็น square matrix ด้วย

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Singular / Nonsingular Matrix

; เอกฐาน / ไม่เอกฐาน

- Nonsingular Matrix is invertible (หา Inverse ได้)
- $AB = BA = I_n$
- $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ (เป็น square matrix ทั้งคู่)

- Singular Matrix is NOT invertible
  > $\det(A) = 0$ เลยหาไม่ได้

7. Triangular Matrix

Theorem

If A is an $n \times n$ triangular matrix (upper triangular, lower triangular, or diagonal), then $\det(A)$ is the product of the entries on the main diagonal of the matrix; that is, $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

- ทำให้เราหา det ได้เลย ถ้า Matrix เป็นตาม Pattern (คูณตามทะแยงเลย)

$\det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$

(คือตาม pattern นี้

Upper Triangular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

Lower Triangular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{44}a_{33}a_{22}|a_{11}| = a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$$

Proof แบบคร่าวๆ

8. Homogenous system, Trivial & Nontrivial Solutions
(สมการเอกพันธ์)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad & \quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

สมการที่อยู่ใน form แบบนี้

If a homogeneous linear system has more unknowns than equations $(m<n)$ then it will have infinitely many solutions.

ถ้าจำนวนสมการ มีน้อยกว่าตัวแปร
↳ จะทำให้ solution เป็นอนันต์ หรือก็คือ Nontrivial Solutions
↳ มันจะเกิด free variables ขึ้นมา

Trivial Solutions
คือคำตอบของ x ใดๆจะเท่ากับ 0 หมด

$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ \ldots,\ x_n=0$ ← คำตอบชุดนี้ยังไงก็มีแน่ๆ
is always a solution to a homogenous system of linear equations and is called the trivial solution

Homogenous system
- มี Trivial Solution แน่ๆ อย่างน้อย 1 ตัว คือ $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$
- อาจมี/ไม่มี Nontrivial Sol. ถ้ามีต้องมี infinite sol. พิจารณาจากจำนวนสมการ & ตัวแปร ถ้ารู้คำตอบก็ใช้ Gauss-Jordan

9. Free Variable & Basic Variable

มีคำตอบที่มีชัดเจนแน่ๆ

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ Unique Solution

$x_3=2$

$x_2+3x_3=4,\ x_2+6=4,\ x_2=-2$

$x_1+2x_2-4x_3=8,\ x_1-4-8=8,\ x_1=20$

ถ้าจำนวนตัวแปร > จำนวนสมการ
↳ เกิด free variable แน่นอน

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$ No Solutions

$0x_1+0x_2+0x_3=5,\ 0=5$

เกิดฟรี free variable → Infinite sol. ขึ้นมา

$x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5$

$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ → $x_2=t,\ x_5=s$

$x_1-4x_2+2x_5=3$
$x_3+4x_5=6$
$x_4+3x_5=-5$
$x_4=5s-5$
$x_3=4s+6$
$x_1=46-2s+3$

x ตัวแรกที่อยู่ Pivot Column จะเป็น basic(leading) variables ส่วนที่เหลือจะเป็น free variables

10. One Solution, No Solution, Infinite Solution

No Solution

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

ไม่ได้ว่า $0 = 3$

Key: Pivot จะอยู่ใน Augmented Column

Incosistent

One Solution (Unique)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad x_1 = 1, \; x_2 = 2$$

NO Free Variables

Consistent

Infinite (many) Solutions

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_1 = 1, \; x_2 = t$$

อาจจะเปลี่ยนในรูปตัวแปรแบบนี้

↳ เกิด free variables

Consistent