

Formulario Controlli Automatici

Davide Fantauzzi e Giovanni Cuoco

2023

Indice

1	Argomenti esercizi	2
1.1	Impostazione generale dell'esercizio	2
1.2	Funzioni importanti	3
1.3	Autovalori del processo nel dominio del tempo	3
1.4	Autovalori nascosti	4
1.4.1	Assunzione per i processi nel dominio di Laplace	4
1.4.2	Tipologie di autovalori	4
1.4.3	Distinzione tra intrinseci e dati da interconnessione	4
1.4.4	Cancellazione zero-polo e polo-zero	4
1.5	Gestione a regime permanente	5
1.5.1	Regola della 'moltiplicazione' ed ingressi sinusoidali	5
1.6	Stabilità asintotica ed assegnazione	6
1.6.1	Criterio di Routh	6
1.6.2	Casi 'traslati'	7
1.6.3	Diofantina	7
1.6.4	Condizioni affinché un processo non sia stabilizzabile	7
1.7	Tabella strutture	8
1.7.1	Elementi da prendere in considerazione per la scelta della struttura	8
1.8	Polinomio caratteristico	8
1.9	Elementi per il cammino delle radici	8
1.9.1	Guida per realizzare il cammino	9
1.9.2	Come far capitare un punto singolare doppio in un certo punto	10
1.9.3	Transitorio privo di oscillazioni	10
1.9.4	Velocità del transitorio massima	10
1.10	Processi in parallelo	10
1.10.1	Differenza per il calcolo del processo totale	10
1.10.2	Determinare il numero ed il tipo degli autovalori	10
1.11	Disturbo misurabile	12
1.12	Sistemi a tempo discreto	12
1.12.1	Condizioni per la stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto	12
1.12.2	Risoluzione delle specifiche annullamento dell'errore e specifica tempo di annullamento	12
1.12.3	Altri elementi sul tempo discreto	13

1.13	Grafico di Bode for dummies	13
1.13.1	Modulo	14
1.13.2	Fase	15
1.14	Nyquist for dummies	16
1.14.1	Grafico	16
1.14.2	Criterio	17
2	Argomenti teorici	18
2.1	Temi	18
2.1.1	Model Predictive Control	18
2.1.2	Reinforcement learning	18
2.1.3	Deep learning (è quello fatto peggio)	19
2.2	Domande e dimostrazioni	19
2.2.1	Domande	19
2.2.2	Dimostrazione errore nullo	20
2.2.3	Dimostrazione assegnazione autovalori	21
2.2.4	Dimostrazione osservatore asintotico	22
2.2.5	Dimostrazione principio di separazione	23
3	Appendice	25
3.1	Procedimento per l'inversa di una matrice	25
3.1.1	Trucco per 2x2	25
3.2	Prodotto matriciale	25
3.3	Equazione di secondo grado	26
3.4	Trasformate di Laplace	26
3.5	Binomi con diverso esponente	26
3.6	Funzioni proprie ed improprie	26
4	Esami svolti	26

1 Argomenti esercizi

1.1 Impostazione generale dell'esercizio

Per impostare l'esercizio bisogna anzitutto capire l'ordine con cui risolvere le specifiche. Generalmente l'ordine è il seguente: (1) **specifiche su autovalori nascosti** \Rightarrow (2) **specifiche su regime permanente** \Rightarrow (3) **specifiche su stabilità asintotica / assegnazione di autovalori**.

Per (1) si guardi il paragrafo *Autovalori nascosti* e, se il processo è nel dominio del tempo, anche *Autovalori del processo nel dominio del tempo*. Per (2) si guardi il paragrafo *Gestione a regime permanente*. Per (3) si guardino i paragrafi *Stabilità asintotica ed assegnazione* e *Tabella strutture*. Nota **importante**: la scelta della struttura è l'ultimo step per la realizzazione del controllore e spesso bisogna prendere in considerazione informazioni provenienti da diverse specifiche. Inoltre l'ordine sopra definito non è preciso e scritto sulla pietra: a volte lo svolgimento di una specifica va 'messo in pausa' e concluso in un altro momento.

1.2 Funzioni importanti

Funzione processo: $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$; *nota su queste due funzioni: prima di A c'è un meno, perciò a prescindere bisogna cambiare il segno a tutti gli elementi di A , non solo a quelli sulla diagonale principale!*

Funzione disturbo: $M(s) = C(sI - A)^{-1}P + Q$

Funzione trasferimento ad anello aperto: $F(s) = G(s)P(s)$

Processo complessivo:

processi in parallelo: $P(s) = P_1(s) + P_2(s)$

in tutti gli altri casi: $P(s) = P_1(s) \cdot P_2(s)$

Funzione di trasferimento ingresso-uscita:

con controreazione $H \neq 0$: $W = \frac{y}{r} = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}$

in tutti gli altri casi: $W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$

Funzione di trasferimento errore-uscita:

$$W_e = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \stackrel{\text{se } H=1}{=} \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

Funzione di trasferimento disturbo-uscita:

$$W_z = \frac{N_P D_G D_H}{N_P N_G N_H + D_P D_G D_H} \stackrel{\text{se } H=1}{=} \frac{N_P D_G}{N_P N_G + D_P D_G}$$

con due sottoprocessi in serie: $\frac{N_{P2} D_{P1} D_G}{N_{P2} N_{P1} N_G + D_{P2} D_{P1} D_G}$

1.3 Autovalori del processo nel dominio del tempo

Per calcolare gli autovalori di un sottoprocesso nel dominio del tempo si calcola:

$$\det(A - \lambda I)$$

Per matrici di dimensione 3 possiamo sfruttare un truccetto: consideriamo come autovalori il termine in alto a sinistra e il determinante della matrice 2×2 in basso a destra:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 \end{array} \right)$$

Per studiare gli autovalori, invece, abbiamo (1) delle formule per determinare quanti autovalori sono raggiungibili ed osservabili e poi (2) le formule di Hautus, che consentono di studiare la raggiungibilità e l'osservabilità di un *certo* autovalore:

$$\begin{aligned} \text{rgo}(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) = r = \text{autovalori } \mathbf{raggiungibili}, \text{ con} \\ \dim(A) - r = \text{autovalori } \mathbf{irraggiungibili} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rgo} \left(\begin{array}{c} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{array} \right) = o = \text{autovalori } \mathbf{osservabili}, \text{ con} \\ \dim(A) - o = \text{autovalori } \mathbf{inosservabili} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{rgo} \begin{pmatrix} A - \bar{\lambda}I & B \end{pmatrix} &= \begin{cases} = m \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ è raggiungibile} \\ < m \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ è irraggiungibile} \end{cases} \\
\text{rgo} \begin{pmatrix} A - \bar{\lambda}I \\ C \end{pmatrix} &= \begin{cases} = m \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ è osservabile} \\ < m \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ è inosservabile} \end{cases} \\
&\text{con } m = \dim(A)
\end{aligned} \tag{2}$$

Nota: per calcolare $A^{n-1}B$ si moltiplica A per il termine precedente della matrice. Ad esempio, per calcolare A^2B , moltiplichiamo A per AB .

1.4 Autovalori nascosti

1.4.1 Assunzione per i processi nel dominio di Laplace

Per lo studio degli autovalori nascosti partiamo dall'assunzione, di fondamentale importanza, che i processi forniti *già* nel dominio di Laplace **non hanno autovalori nascosti intrinseci**. Questo significa che, dato un processo nel dominio di Laplace, l'unico modo per generare autovalori nascosti è per interconnessione (e quindi mediante cancellazione zero-polo o polo-zero).

1.4.2 Tipologie di autovalori

Nature degli autovalori, di cui solo i primi non sono nascosti:

1. raggiungibili ed osservabili; gli **unici** autovalori non nascosti (*quelli generati da diofantina sono sempre così*)
2. raggiungibili ed inosservabili; nascosti
3. irraggiungibili ed osservabili; nascosti
4. irraggiungibili ed inosservabili; nascosti

1.4.3 Distinzione tra intrinseci e dati da interconnessione

Gli autovalori nascosti si dividono in due categorie:

1. **intrinseci**: questi 'escono fuori' quando si passa dal processo in forma implicita o matriciale in forma esplicita con la funzione $P(s)$
2. **dati da interconnessione**: questi invece 'escono fuori' quando si prende in considerazione il processo *insieme* al controllore, ossia quando si calcola la funzione ad anello aperto $F(s)$

1.4.4 Cancellazione zero-polo e polo-zero

Possiamo generare soltanto autovalori nascosti dati da interconnessione. Per fare ciò dobbiamo realizzare una cancellazione zero-polo o polo-zero, in cui il primo termine rappresenta il controllore ed il secondo il processo complessivo.

La cancellazione zero-polo genera un autovalore **irraggiungibile ed osservabile**.

La cancellazione polo-zero genera un autovalore **raggiungibile ed inosservabile**.

Se in un problema possiamo scegliere tra più poli e/o zeri da cancellare, in base a cosa effettuare la scelta? Dobbiamo:

1. valutare la presenza di altre specifiche; ad esempio specifiche che richiedono autovalori a parte reale minore di un certo $-x$
2. scegliere sempre e comunque autovalori a parte reale negativa (infatti un sistema con autovalori nascosti a parte reale *non* negativa non è stabilizzabile!)
3. cercare di mantenere $G(s)$ a dimensione minima e propria.

1.5 Gestione a regime permanente

Cosa da tenere a mente per le specifiche a regime permanente:

1. in base a cosa richiede la specifica è importante scegliere la corretta funzione di trasferimento
2. bisogna seguire la regola della 'battaglia navale', per cui si parte scegliendo la corretta colonna e, dall'alto verso il basso, si seleziona la **prima** riga adatta alla specifica
3. nel caso di specifiche che richiedano l'errore (o il disturbo o l'uscita) uguale ad un certo valore, è importante quantomeno impostare l'equazione. Questa poi, nella gran parte dei casi, viene risolta quando si tratta la stabilità asintotica. **E' importante inoltre ricordarsi che per risolvere quest'equazione è necessario avere un parametro libero in più.**

Zeri della $W(s)$ in $s = 0$	1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$	$W(0)t + \left. \frac{dW}{ds} \right _{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left. \frac{dW}{ds} \right _{s=0} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{ds^2} \right _{s=0}$
1	0	$\left. \frac{W(s)}{s} \right _{s=0} = \left. \frac{dW}{ds} \right _{s=0} \neq 0$	$\left. \frac{dW}{ds} \right _{s=0} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{ds^2} \right _{s=0}$
2	0	0	$\left. \frac{W(s)}{s^2} \right _{s=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{ds^2} \right _{s=0} \neq 0$

Figura 1: tabella per sistemi a tempo continuo

1.5.1 Regola della 'moltiplicazione' ed ingressi sinusoidali

Per ingressi sinusoidali bisogna (1) sostituire s con $j\omega$ e (2) trasformare i complessi coniugati in numeri reali, quindi ad esempio $|W(s)|_{s=j\omega} = 0$. Tenendo conto che, ad esempio, per

Zeri della $W(z)$ in $z = 1$	$\eta(h)$	h	$\frac{h^{(2)}}{2} = \frac{h(h-1)}{2}$
0	$W(1) \neq 0$	$W(1)h + \left. \frac{dW}{dz} \right _{z=1}$	$W(1)\frac{h^{(2)}}{2} + \left. \frac{dW}{dz} \right _{z=1} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{dz^2} \right _{z=1}$
1	0	$\left. \frac{W(z)}{z-1} \right _{z=1} = \left. \frac{dW}{dz} \right _{z=1} \neq 0$	$\left. \frac{dW}{dz} \right _{z=1} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{dz^2} \right _{z=1}$
2	0	0	$\left. \frac{W(z)}{(z-1)^2} \right _{z=1} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{dz^2} \right _{z=1} \neq 0$

Figura 2: tabella per sistemi a tempo discreto

$r(t) = \sin(2t) \Rightarrow \omega = 2$. Esempio con $r(t) = \sin(t)$ e W_e :

$$|W_e(s)|_{s=j\omega} = 0$$

$|W_e(j\omega)| = 0 \rightarrow$ per annullarlo bisogna annullare il suo numeratore

$$|D_F(j\omega)| = 0 \rightarrow \text{so che } \omega = 1$$

$|D_F(j)| = 0 \rightarrow$ devo quindi aggiungere un *polo* a F

$$\text{aggiungo polo } (s+j) \Rightarrow (s+1)(s-1) = s^2 + 1$$

Se abbiamo dei riferimenti polinomiali diversi dai valori presenti sulle colonne, bisogna seguire la 'regola della moltiplicazione', per cui anzitutto consideriamo soltanto il termine con esponente più grande; impostiamo l'equazione, la calcoliamo in $s = 0$ ma, prima di risolverla, moltiplichiamo $W(s)$ per il valore opportuno.

Ad esempio se abbiamo $r(t) = 2t^2 + 5t + 4$ dalla tabella scegliamo la colonna $t^2/2$. Per passare da $t^2/2$, la colonna scelta, al nostro effettivo riferimento $2t^2$ bisogna moltiplicare per 4.

1.6 Stabilità asintotica ed assegnazione

1.6.1 Criterio di Routh

Per verificare la stabilità asintotica si utilizza il criterio di Routh. Importare ricordare (1) di realizzare, anzitutto, le prime due righe e (2) se in una colonna è assente un valore, si prende sempre quello più in alto e a destra. Realizzata la tabella, si impostano gli elementi presenti nella prima colonna maggiori di zero.

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	
$n-2$	b_1	b_2	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots			
0					

Ora andiamo a calcolare il primo elemento della riga $(n-2)$, che abbiamo indicato con b_1 . Questo è uguale al determinante della matrice 2×2 che ha, come prima colonna, *i primi due elementi delle due righe precedenti* (in questo caso, a_n e a_{n-1}) e, come seconda colonna, *gli elementi delle due righe precedenti che si trovano sulla colonna immediatamente a destra di quella di b_1* (in questo caso, a_{n-2} e a_{n-3}); il tutto diviso il primo elemento della riga precedente (a_{n-1}) cambiato di segno:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Per calcolare b_2 , la prima colonna del determinante e il termine per cui è stato diviso b_1 rimangono invariati, e cambia solamente la seconda colonna del determinante, che sarà formata dai due elementi delle due righe precedenti che stanno nella colonna dopo rispetto a b_2 :

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Figura 3: Guida alla tabella del criterio di Routh

1.6.2 Casi 'traslati'

Se viene richiesta la stabilità asintotica tale che gli autovalori siano a parte reale minore di $-x$, bisogna applicare il criterio di Routh alla D_W 'traslata'. Ossia bisogna sostituire s con $(s - x)$. Ad esempio, se la specifica richiede parte reale minore di -4 , sostituiamo s con $(s - 4)$.

1.6.3 Diofantina

Per assegnare tutti gli autovalori al valore x si sfrutta l'equazione di Diofantina:

$$D_W = (s - x)^{d_w}$$

In cui d_w è il grado dell'equazione di sinistra. L'equazione si risolve mediante un sistema in cui si pongono uguaglianze tra i coefficienti dello stesso grado. (*nota: se è richiesta l'assegnazione, bisogna usare **per forza** l'equazione ($n.parametri = d_w$) per la scelta della struttura di $G(s)$*).

1.6.4 Condizioni affinché un processo non sia stabilizzabile

Se ci vengono richiesti i valori di certi parametri affinché un sistema *non* sia stabilizzabile, se il processo ci viene già fornito nel dominio di Laplace, bisogna eseguire Routh, considerando logicamente i valori opposti a quelli trovati. Se invece il processo è nel dominio del tempo, come accade quasi sempre quando c'è questa specifica, bisogna studiare gli autovalori e, sfruttando le formule di Hautus ed associate, trovare i valori dei parametri liberi per cui un autovalore a parte reale *non* negativa sia nascosto. Infatti **un sistema non è stabilizzabile se ci sta almeno un autovalore nascosto a parte reale non negativa**.

1.7 Tabella strutture

$G(s)$	a	$\frac{a}{s+b}$	$\frac{s+b}{s+c}$	$\frac{as+b}{s+c}$	$\frac{as+b}{s^2+cs+d}$	$\frac{(s+b)}{a(s+c)(s+d)}$	$\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+l}$	$\frac{(s+b)(s+c)}{a(s+d)(s+l)}$
parametri	1	2	3			4		5
dimensione	0	1	1			2		2

1.7.1 Elementi da prendere in considerazione per la scelta della struttura

Se è richiesta la *sola* stabilità asintotica, scegliamo la struttura a dimensione più bassa, considerando nella scelta la presenza di altre specifiche e/o la presenza di parametri liberi all'interno del processo o del controllore. In altre parole, seguiamo comunque i *principi* esposti qui sotto, tuttavia non è *necessario* usare quella formula.

Se invece è richiesta l'assegnazione di autovalori, *bisogna* usare l'equazione:

$$\text{n. parametri} = d_w \stackrel{\text{se } H=1}{=} d_f$$

Con $d_w = \text{grado } D_W$ e $d_f = \text{grado } D_F$.

Importante: a d_f dobbiamo sommare o sottrarre ulteriori parametri a seconda delle specifiche e dei parametri liberi. Più nello specifico, se alcune specifiche richiedono altri parametri per la risoluzione (ad esempio perché una specifica a regime permanente ha generato un'equazione da rispettare), *aggiungiamo* parametri a d_f . Se invece nel problema dato sono presenti dei parametri liberi, *sottraiamo* parametri a d_f .

Ad esempio si consideri un problema in cui abbiamo 2 parametri liberi ed oltre la stabilità asintotica bisogna rispettare un'equazione generata da una specifica su regime permanente; in questo caso avremo:

$$\text{numero parametri} = d_w - 2 + 1$$

1.8 Polinomio caratteristico

Il polinomio caratteristico è dato da D_W aggiungendo gli autovalori nascosti:

$$P_c(s) = D_W \cdot \{\text{autovalori nascosti}\}$$

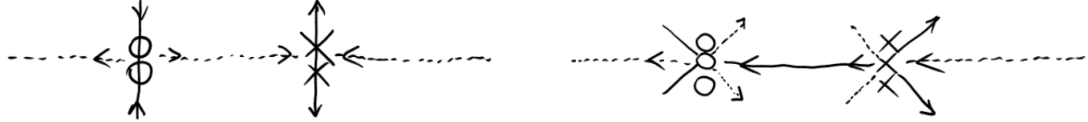
Si noti che se abbiamo svolto Routh, D_w va espresso nella forma 'finita' (*quella a partire dalla quale costruiamo la tabella di Routh*).

1.9 Elementi per il cammino delle radici

1. Il cammino parte sull'asse reale da più infinito e parte **negativo**.
2. Con X indichiamo gli **n** poli e con \bigcirc gli **m** zeri.
3. Il luogo positivo è una linea continua, il luogo negativo una linea tratteggiata.
4. Il luogo cambia di segno ogni volta che si incontra un polo o un zero; se incontriamo un doppio polo o un doppio zero, quindi, esso non cambia: tuttavia (**importante!**) cambia in verticale.

5. Il centro asintotico si ottiene con la formula: $\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$

6. Per i punti singolari doppi o tripli (ossia quando graficamente le frecce divergono / convergono):



7. Dato il centro asintotico e la differenza tra n poli e m zeri, si realizzano i punti asintotici. Le rette possono essere disegnate perché danno un'idea del percorso del cammino, ma *non* rappresentano un cammino vero e proprio. Tabella:

$n - m$	1	2	3
Luogo positivo			
Luogo negativo			

8. Per trovare sia il punto 'effettivo' di punto singolare che il valore di k per cui il cammino esegue quel percorso, si risolve il sistema:
$$\begin{cases} D_W(s) = 0 \\ \frac{dD_W(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Per gli arrivi e le partenze:

1. **luogo positivo:** da ogni polo parte uno e un solo cammino. Gli arrivi del luogo sono agli zeri oppure ai punti asintotici del luogo positivo.
2. **luogo negativo:** gli arrivi sono ai poli. Le partenze sono dagli zeri o dai punti asintotici.

1.9.1 Guida per realizzare il cammino

1. Anzitutto si scrive la $F(s)$, il numero dei poli n , il numero degli zeri m con ogni polo e/o zero. Poi si calcola il centro asintotico.
2. Si segnano sul grafico (asse x: reale, asse y: immaginario) i poli e gli zeri. Si realizzano anche i punti asintotici.
3. Si rappresenta il cammino, tenendo conto (1) che va da più infinito a meno infinito, (2) che parte da negativo e (3) che cambia segno per ogni polo o zero che incontra.
4. Si realizzano arrivi e partenze, tenendo conto anche dei punti asintotici.

1.9.2 Come far capitare un punto singolare doppio in un certo punto

Alcune specifiche richiedono di far capitare un punto singolare doppio (o triplo) in un certo punto. Per realizzare queste specifiche bisogna usare Diofantina per assegnare un doppio (o triplo) autovalore nel punto richiesto dalla specifica.

1.9.3 Transitorio privo di oscillazioni

Per le specifiche che richiedono il "transitorio privo di oscillazioni", bisogna cercare il valore di k per cui il luogo diventa 'solo' reale: nel 99% dei casi questo significa trovare il valore di un punto singolare. E' importante ricordarsi di intersecare le condizioni ottenute con quelle della stabilità asintotica. Infatti il transitorio privo di oscillazioni si ottiene quando le radici sono (1) sull'asse reale e (2) a parte reale negativa.

1.9.4 Velocità del transitorio massima

Bisogna calcolare il punto singolare più a sinistra. Per ottenere la velocità si scrive:

$$e^{P_s t}$$

In cui P_s è il 'punto' del punto singolare ottenuto a partire dal sistema che abbiamo già visto.

1.10 Processi in parallelo

Ci sono soltanto due differenze nel trattare i processi in parallelo. Queste sono esposte nei successivi sotto-paragrafi.

1.10.1 Differenza per il calcolo del processo totale

Il processo complessivo si calcola con la somma al posto della moltiplicazione:

$$P_{tot}(s) = P_1(s) + P_2(s)$$

1.10.2 Determinare il numero ed il tipo degli autovalori

Di questo non sono sicuro: se i sottoprocessi in parallelo hanno autovalori uguali, allora sono nascosti.

Per determinare la tipologia degli autovalori, c'è una procedura *abbastanza* difficile, purtroppo.

1. Bisogna tornare nel dominio del tempo scrivendo i sottoprocessi nella forma canonica raggiungibile.
2. Si realizzano le equazioni di stato, passando poi alla forma matriciale. Si ottengono così le matrici A_p , B_p e C_p .
3. Dalla matrice A_p posso determinare il numero ed il tipo degli autovalori seguendo le solite procedure.

Di seguito è riportato un esempio con i sottoprocessi: $P_1(s) = \frac{1}{s+a}$ e $P_2(s) = \frac{1}{s(s+a)}$. Per P_1 è facile individuare $c_1 = 1$ e $a_0 = a$; P_2 conviene invece scriverla nella forma canonica $P_2(s) = \frac{1+0s}{s^2+as+0}$ con $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $a_1 = a$ e $a_0 = 0$. La forma canonica raggiungibile è la

seguinte:
$$\begin{cases} \bar{x} = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 \end{cases}$$

Con $A = -a_0$ e $B = 1$ se hanno dimensione 1; negli altri casi bisogna considerare la seguente struttura:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto scriviamo i due sottoprocessi in forma matriciale:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = -ax_1 + u \\ y_1 = x_1 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \end{array}}$$

A questo punto passiamo alla forma esplicita:
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -ax_1 + u \\ \bar{x}_{21} = x_{22} \\ \bar{x}_{22} = -ax_{22} + u \\ y = y_1 + y_2 = y_1 + x_{21} \end{cases}$$

E di nuovo in forma matriciale, questa volta canonica raggiungibile, cioè:
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix} = A_P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} + B_P u \\ y = C_P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

In questo caso otteniamo quindi $A_P = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$, $B_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dallo studio della matrice A_P otteniamo un solo autovalore $\lambda_1 = -a$ irraggiungibile ed inosservabili; perciò nascosto.

1.11 Disturbo misurabile

Se la traccia dice che c'è un 'disturbo misurabile' bisogna considerare le seguenti funzioni per svolgere l'esercizio (*vedere sotto*). Bisogna inoltre usare $M(s)$ al posto di $P(s)$.

$$\begin{aligned} W &= \frac{y}{r} = \frac{N_F}{D_F + N_F} \\ W_z &= \frac{y}{z} = \frac{M + FK}{1 + F} = \frac{M + GPK}{1 + GP} \end{aligned} \quad (3)$$

Se una specifica richiede che la risposta y corrispondente a qualsiasi disturbo z sia nulla, bisogna porre: $\frac{M + FK}{1 + F} = 0$. Questo equivale ad imporre $K = -\frac{M}{F}$.

1.12 Sistemi a tempo discreto

Rispetto i sistemi a tempo continuo, ci sono due differenze a livello pratico: (1) come si svolge la stabilità asintotica e (2) come si risolvono le specifiche del tipo *determina un controllore in modo che l'errore $e(h)$ in corrispondenza di un certo ingresso sia nullo nel minor tempo possibile e specificare l'istante l a partire da cui si annulla*. Per il resto abbiamo le stesse funzioni e usiamo le stesse tecniche, con qualche ovvia differenza, ad esempio $P(s)$ diventa $P(z) = C(zI - A)^{-1}B + P$. Si osservi l'esame di maggio 2020 nel capitolo 4 per ulteriori informazioni.

1.12.1 Condizioni per la stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto

La condizione più facile per la stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto la si ottiene osservando il relativo cammino delle radici. Se i poli e gli zeri della $F(s)$ si trovano dentro la circonferenza di raggio unitario che va da -1 a $+1$, allora il sistema è stabile asintoticamente. Condizione *teorica*: un sistema a tempo discreto è stabile asintoticamente se e solo se tutti i suoi eventuali autovalori nascosti hanno modulo minore di 1.

1.12.2 Risoluzione delle specifiche annullamento dell'errore e specifica tempo di annullamento

Per risolvere questa specifica dobbiamo anzitutto cancellare il maggior numero di poli e zeri del processo complessivo (*mediante cancellazioni polo-zero o zero-polo*) con modulo minore di 1. Questo per far sì che l'errore $e(h)$ si esaurisca nel minor tempo possibile.

A questo punto bisogna imporre la seguente condizione:

$$e(z) = W_e(z)r(z) \stackrel{\text{set}}{=} \frac{S(z)}{z^{l-1}}$$

Questo ci porta ad un sistema con due equazioni:

$$\begin{cases} D_F = S(z)D_r \\ D_W = z^{l-1}N_r \end{cases}$$

In cui $r(z) = \frac{N_r}{D_r}$. Per realizzare la prima equazione potrebbe essere necessario aggiungere dei termini a G , affinché N_F sia uguale a $S(z)D_r$. Con la seconda equazione fondamentalmente

andiamo ad applicare diofantina, assegnando gli autovalori in $z = 0$, stando attenti che il numero dei parametri sia sufficiente. Perciò con tale condizione abbiamo anche verificato la stabilità asintotica.

Il numero l è uguale al grado del denominatore di $W(z)$.

Nota importante: questo nel caso in cui chiedi l'esaurimento dell'errore nel minor tempo possibile. Logico che, se chiedi invece l'eusarimento dell'uscita, bisogna usare W al posto di W_e e quindi il sistema cambia leggermente. Per il resto tutto uguale.

1.12.3 Altri elementi sul tempo discreto

1. Per determinare, nel luogo delle radici, il valore di K corrispondente ad un punto singolare $z = a$, con $a \in \mathbb{R}$, si impone l'equazione caratteristica del luogo $D_w = N_F + D_F = 0$ e, ponendo $z = a$, si trova K senza dover svolgere il classico sistema del punto singolare
$$\begin{cases} D_W = 0 \\ \frac{dD_W}{ds} = 0 \end{cases}$$
2. Quando chiedi di determinare l'andamento complessivo dell'errore $e(h)$ rispetto ad un ingresso $r(h)$ (se $r(h)$ è a rampa vuol dire che $r(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$), bisogna determinare $e(z) = W_e(z)r(z)$ e poi fare l'anti-trasformata. Ad esempio: $e(z) = \frac{z+2}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$ allora, dato $z^{-1}[\frac{1}{z}] = \delta(h-1)$ e $z^{-1}[\frac{1}{z^2}] = 2\delta(h-2)$ si ha: $e(h) = \delta(h-1) + 2\delta(h-2)$.
3. Se chiedi nel luogo delle radici per quali valori del parametro K il sistema complessivo ha tutti gli autovalori **reali** e minori di un numero (*ad esempio minori di -3*): bisogna osservare, lungo l'asse reale, per quale valore di K il sistema abbia autovalori *solo* reali (cioè sull'asse reale) e minore di -3 .

1.13 Grafico di Bode for dummies

Prima di realizzare il grafico del modulo e della fase bisogna trasformare la funzione ad anello aperto $F(s)$. In particolare bisogna:

1. Sostituire s con $j\omega$. Perciò $F(s) \Rightarrow F(j\omega)$
2. Esprimere i termini $(s+x)^p$ nella forma $(1 + \frac{j\omega}{\tau})$. E' importante che ci sia 1 positivo all'inizio. Per ottenere questa forma possiamo effettuare moltiplicazioni e/o divisioni; queste operazioni ovviamente si accumulano in un termine costante all'inizio della funzione, che chiameremo K .

Effettuate queste operazioni, ci ritroviamo con quattro tipologie diverse di termini. Ognuno di questi termini prevede delle tecniche per la realizzazione del modulo e della fase :). Anzitutto i quattro termini sono:

1. K' nella $F(s) \Rightarrow K$ nella $F(j\omega)$: K sono i **termini costanti**
2. s^p nella $F(s) \Rightarrow j\omega^p$ nella $F(j\omega)$: $j\omega^p$ sono i **fattori monomi**

3. $(s + x)^p$ nella $F(s) \Rightarrow (1 + \frac{j\omega}{\tau})$: $(1 + \frac{j\omega}{\tau})$ sono i **fattori binomi**

4. $(as^2 + bs + c)$ nella $F(s) \Rightarrow ((j\omega)^2 + bj\omega + c)$: $((j\omega)^2 + bj\omega + c)$ sono i **fattori trinomi**

Osservazione: i fattori trinomi sono **radici complesse**. Ad esempio $s^2 + 1$.

1.13.1 Modulo

L'asse x è in *decadi* e, tendenzialmente, parte da 0,01. Si sviluppa in potenze di 10, quindi $0,01 \rightarrow 0,1 \rightarrow 1 \dots$. Importante realizzare tacchette abbastanza lunghe.

L'asse y è invece in *decibel*. Aumenta / diminuisce di 20 ogni tacchetta.

1. i **termini costanti** si rappresentano come rette orizzontali. Per trovare il valore di intersezione con l'asse y bisogna usare la conversione $K \Rightarrow 20 \cdot \log_{10}|K|$. Ad esempio quindi, per $K = -1$ si ottiene una retta orizzontale passante per 0 (*e quindi corrispondente all'asse x*). Oppure, per $K = \frac{-1}{10}$ si ottiene una retta orizzontale per -20.

2. i **termini monomi** partono dall'asse y , passano per 1 e, se si trovano al numeratore, salgono verso l'alto; se si trovano invece al denominatore, scendono verso il basso. La velocità con cui crescono o decrescono è determinata dall'esponente: i termini monomi infatti crescono (o *decrescono*) percorrendo una decade ogni $(p \cdot 20)$ decibel. Qui sotto sono riportati due grafici con un termine monomio al numeratore (*che quindi cresce verso +infinito*) ed uno al denominatore (*che quindi decresce verso -infinito*).

3. i **termini binomi** partono dall'origine e rimangono pari a 0 fino ad arrivare al valore di τ . Se il termine si trova al numeratore, cresce verso l'alto; se invece si trova al denominatore decresce verso il basso. La velocità questa volta è fissa: i termini binomi crescono (o *decrescono*) di 20 decibel ogni decade. Come per i termini monomi, qui sotto un grafico rappresentativo.

4. per graficare i **termini trinomi** bisogna calcolare W_n , il 'punto asintotico' e z , il termine che descrive la 'gobba'. Per trovare W_n pongo $\frac{s^2}{W_n^2} \stackrel{\text{set}}{=} as^2$, in cui a è semplicemente il

coefficiente di s^2 ; risolvo tale equazione per W_n^2 . Invece per trovare z pongo $\frac{2z}{W_n s} \stackrel{\text{set}}{=} bs$, risolvendo l'equazione per z . A questo punto realizzo un asintoto tratteggiato (*perché in realtà l'asintoto è presente soltanto se $z = 0$, ma comunque aiuta realizzarlo, ma è una così, fra me e te, privata, segreta*).

Dopo "l'asintoto" W_n il termine trinomio sale verso l'alto se sta al numeratore; scende verso il basso se sta al denominatore; con una velocità pari a 40 decibel ogni decade.

A questo punto rimane soltanto da realizzare il grafico **prima** di W_n : per fare ciò bisogna osservare z ; z è compreso tra 0 ed 1: più si avvicina a zero più la 'gobba' è grande, tant'è che se è uguale a 0 c'è un vero e proprio asintoto verticale, quindi il termine va verso +infinito se sta al denominatore (perché dopo l'asintoto scende verso -infinito) e verso -infinito se sta al numeratore (perché dopo l'asintoto sale verso +infinito). In ogni caso raramente $z = 0$. Basta tenere conto di questa regola: *più z si avvicina a 0, più la gobba è grande; più z si avvicina ad 1, più gobba è piccola*.

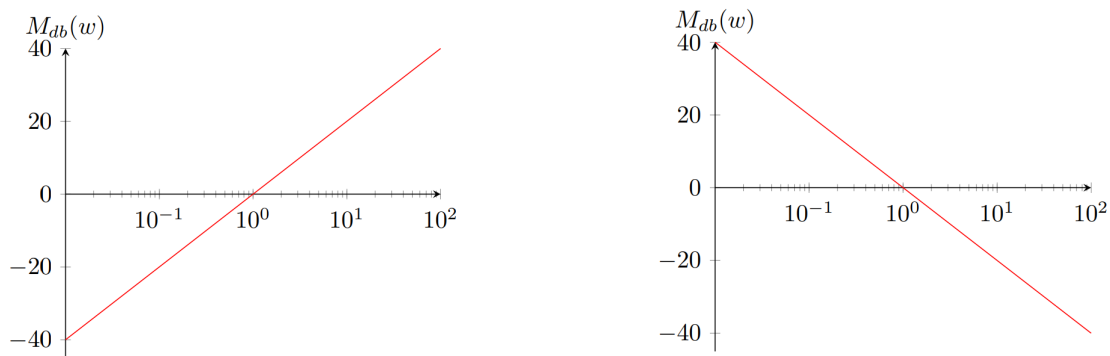


Figura 4: Fattore monomio al numeratore e al denominatore; pendenza rispettivamente di 20dB/dec e -20dB/dec

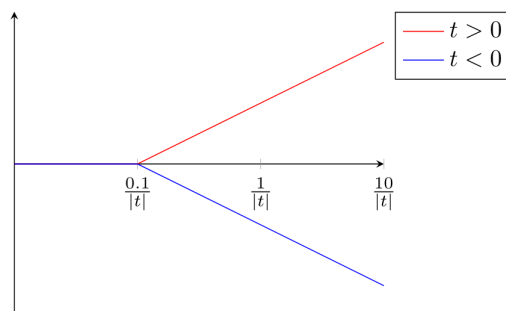


Figura 5: Fattore binomio al numeratore (in rosso) e al denominatore (in blu)

1.13.2 Fase

L'asse x rimane invariato.

L'asse y invece cresce / decresce a $\frac{\pi}{2}$.

1. per i **termini costanti**, se sono positivi non li rappresento proprio, se invece sono negativi realizzo una retta orizzontale passante per $-\pi$.
2. anche i **termini monomi** sono una retta orizzontale, passante per $(p \cdot \frac{\pi}{2})$ se si trovano al numeratore, passante invece per $(-p \cdot \frac{\pi}{2})$ se si trovano al denominatore.
3. i **termini binomi** partono da 0 e rimangono costanti fino ad arrivare alla decade *prima* di τ . A questo punto crescono se si trovano al numeratore; decrescono se si trovano al denominatore: ma se $j\omega$ ha segno meno **la regola si inverte**.

Dalla decade prima di τ fino a τ vanno da 0 a $\pm\frac{\pi}{4}$. Da τ fino alla decade dopo vanno

da $\pm\frac{\pi}{4}$ a $\pm\frac{\pi}{2}$. Arrivati a questo punto diventano costanti.

4. i **termini trinomi** partono anch'essi da 0. Arrivati ad un punto 'più o meno vicino' (questo 'più o meno' dipende dal valore di z) a τ , se si trovano al numeratore salgono, se invece si trovano al denominatore scendono. Crescono / decrescono di $k \cdot \pm\pi$ (k esponente delle radici complesse). Ma come ho già accennato, il punto a partire da cui partono e il punto in cui arrivano dipende dal valore di z : più z è vicino a 0, più parto e finisco vicino a τ . Più z è vicino ad 1, più parto e finisco lontano da τ . Si visualizzi questa cosa: se $z = 0$ c'è una retta verticale che parte da τ e va verso il basso o l'alto. Se invece $z = 1$ il termine parte la decade prima di *tau* ed arriva alla decade *dopo*. Come per tutti gli altri termini, una volta 'arrivati', diventano costanti.

1.14 Nyquist for dummies

1.14.1 Grafico

L'asse x è l'asse dei numeri reali. L'asse y l'asse dei numeri immaginari.
Il grafico di Nyquist si traccia in questo modo:

1. In base alla $F(s)$ si determina la partenza 0^+ e l'arrivo $+\infty$.
2. Osservo il grafico del modulo *totale* di Bode: se il modulo va verso $-\infty$, Nyquist va verso 0; se il modulo va verso $+\infty$, Nyquist va verso ∞ .
3. Osservo il grafico della fase *totale* di Bode: rispetto l'asse immaginario, Nyquist deve seguire *l'andamento* della fase. La fase, nella gran parte dei casi, determina in quale semipiano realizzare il grafico.
4. Finiti i primi tre step e realizzato il grafico che da 0^+ a $+\infty$, bisogna costruire il simmetrico di tale grafico rispetto l'asse x . Questo grafico 'simmetrico' partirà da 0^- ed arriverà a $-\infty$.
5. Se ci sono poli o zeri per $s = 0$ nella $F(s)$ è necessario un ulteriore *step*: chiudere il grafico. Cioè bisogna andare da 0^- a 0^+ , **in senso orario**, compiendo un numero di *mezzi giri* pari alla molteplicità dei poli / zeri in $s = 0$.
6. A prescindere da chiusura o meno, si conclude realizzando le frecce direzionali del diagramma di Nyquist, tenendo conto che tale diagramma va da $-\infty$ a $+\infty$. Perciò le frecce direzionali seguono quest'ordine: $-\infty \rightarrow 0^- \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty$.

Per quanto riguarda la **partenza** 0^+ :

- I Se non ci sono poli o zeri per $s = 0$ in $F(s)$, il diagramma di Nyquist parte dal punto $(K, 0)$ con una *fase* pari a:

$$\angle(0) = \argomento(K) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

- II Se invece ci sono poli o zeri per $s = 0$ nella $F(s)$, il diagramma di Nyquist parte da un punto improprio $\pm\infty$ (*cioè qualsiasi punto da 'infinito', non rappresenta una direzione vera e propria!*) e con una *fase* pari a:

$$\angle(0) = \argomento(K) = V \cdot 90^\circ = \begin{cases} -V90^\circ & \text{se } K > 0 \\ -180^\circ - V90^\circ & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Con V pari al numero di poli e zeri per $s = 0$. Per quanto riguarda **l'arrivo** $+\infty$:

- I Se la $F(s)$ è strettamente propria, ossia il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore, allora Nyquist termina nell'origine del piano.
- II Se invece $F(s)$ è propria, ossia il grado del denominatore è uguale al grado del numeratore, allora Nyquist termina nel punto $(K', 0)$.
- III In entrambi i casi, la *fase* di 'arrivo' è pari a:

$$\begin{cases} -(n - m) \cdot 90^\circ & \text{se } K' > 0 \\ -180^\circ - (n - m) \cdot 90^\circ & \text{se } K' < 0 \end{cases}$$

La **fase**, nel diagramma di Nyquist, serve per determinare l'asse di partenza e l'asse di arrivo. La fase si conta in senso orario. Perciò ad esempio fase pari 0° corrisponde al semiasse positivo x , fase pari a 90° , o $\frac{\pi}{2}$, corrisponde al semiasse negativo y , fase $= -180^\circ$ corrisponde al semiasse negativo x e *così via*.

1.14.2 Criterio

Ci sono due tecniche principali per stabilire il criterio di Nyquist. La seconda è più semplice:

1. Collego il punto $(-1, 0)$ con $-\infty$. Immagino di far girare questo segmento attraverso il diagramma, in senso orario o antiorario a seconda della direzione imposta dalle freccette direzionali (*nota bene: o è solo antiorario, o solo orario*). Conto il numero di giri completi che questo segmento fa attorno al punto di partenza, ossia $(-1, 0)$.
2. A partire dal punto $(-1, 0)$ traccio ogni *possibile retta* in ogni direzione - o comunque immagino di farlo. A questo punto guardo le intersezioni con il diagramma di Nyquist: in particolare osservo il verso delle freccette direzionali quando le mie rette intersecano



il diagramma. Se il diagramma di Nyquist entra dalla sinistra della mia retta: conto un giro in senso orario; se invece il diagramma di Nyquist entra dalla destra



della mia retta: conto un giro in senso anti-orario. Facendo la differenza tra il numero di giri orari ed anti-orari ottengo il numero di giri *totali*.

3. In entrambe le tecniche, una volta ottenuto il numero di *giri completi*, devo osservare il numero di poli nella $F(s)$ a parte reale positiva; infatti:

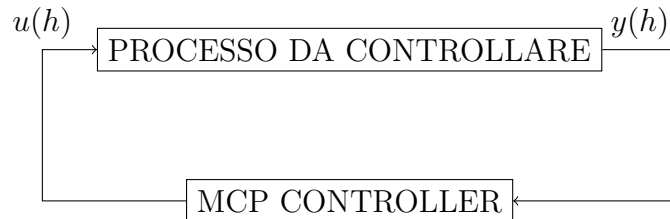
se il numero di giri completi è uguale al numero di poli nella $F(s)$ a parte reale positiva, allora il sistema è stabile asintoticamente; altrimenti non lo è.

2 Argomenti teorici

2.1 Temi

2.1.1 Model Predictive Control

Il Model Predictive Control (MPC) è una tecnica di controllo avanzata che prevede la formulazione di un problema di ottimizzazione per determinare le azioni di controllo ottimali in base a un modello del sistema da controllare.



Il controllore MPC è caratterizzato da: vincoli, uscita del processo desiderato, funzione di costo J .

Essendo il modello del processo molto complesso da determinare, uno dei vantaggi del MPC è che riesce a controllare il sistema anche se il modello del processo non è perfetto.

Rispetto ai controlli classici, dove si reagisce a qualcosa che è accaduto, il MPC cerca di predire o anticipare quello che accadrà.

Nel MPC si deve innanzitutto scegliere quanti istanti N vogliamo guardare in avanti. Scegliendo per esempio $N=8$ e partendo dall'istante $h=1$, riesco a prevedere cosa succede fino all'istante $h+N$. Ogni volta poi ricomincio tutto di nuovo partendo dall'istante successivo, sempre arrivando all'istante $h+N$. A ogni ciclo ho sempre un'informazione nuova perché conosco l'uscita reale $y(h)$ dell'istante precedente.

Nel fare questa pianificazione, quello che farò è massimizzare o minimizzare la funzione di costo J :

$$J = \sum_{k=0}^N [(h+k)]^2$$

Dunque il MPC mi consente di guardare in avanti, pur non facendo affidamento sul modello del processo, che è continuamente corretto in quanto a ogni istante, basandomi sull'uscita reale $y(h)$ del processo, riottimizzo tutto da capo.

2.1.2 Reinforcement learning

Una delle principali caratteristiche del Reinforcement Learning (RL) è che non ho bisogno del processo da controllare perché si basa sempre univocamente sull'osservazione dei KPI (Key Performance Indicators), che devono contenere un'informazione compatta e pregnante di quello che accade nel processo.

Per il RL Controller devo definire tre cose fondamentali:

1. Qual è lo stato del processo.
2. Quali sono le azioni possibili.
3. Le ricompense, che sono legate allo scopo del controllore.

Infatti, con il RL controller sono in grado di massimizzare la somma delle ricompense che otterrò da adesso fino a un'istante T (che può essere anche infinito).

Lo scopo, dunque, del RL è quello di massimizzare la funzione $R(h)$ (detta Long Term Rewards(?)), definita in questo modo:

$$R(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r(h + i + 1)$$

2.1.3 Deep learning (è quello fatto peggio)

Il Deep Learning è una tecnica di apprendimento in cui si espongono reti neurali artificiali a vaste quantità di dati, in modo che possano imparare a svolgere compiti.

Il Deep Learning si basa sul concetto di reti neurali artificiali profonde, che sono ispirate al funzionamento del cervello umano. Le reti neurali sono composte da un insieme di nodi, chiamati neuroni artificiali, che sono collegati tra loro da connessioni pesate.

Durante il processo di addestramento delle reti neurali, i dati di input vengono alimentati nella rete, passano attraverso una serie di strati nascosti (deep layers) e producono un'uscita. Ogni nodo in un layer successivo riceve input dai nodi del layer precedente e combina questi input utilizzando i pesi delle connessioni.

I pesi delle connessioni rappresentano l'importanza di ciascun input per il nodo successivo. Durante l'addestramento, i pesi vengono regolati in base all'errore commesso dalla rete rispetto all'output desiderato. Questo processo di regolazione dei pesi si basa sull'algoritmo di retropropagazione dell'errore, che calcola l'errore attraverso la rete e lo retropropaga per aggiornare i pesi delle connessioni.

Inoltre, ogni nodo applica una funzione di attivazione, che determina l'output del nodo in base ai suoi input pesati. La funzione di attivazione può introdurre una non-linearità nel modello, consentendo alle reti neurali di apprendere relazioni complesse tra i dati.

Il processo di addestramento delle reti neurali richiede una grande quantità di dati di addestramento rappresentativi del problema che si vuole risolvere. Man mano che la rete viene esposta a un numero sempre maggiore di esempi, i pesi delle connessioni vengono aggiornati in modo da ottimizzare le prestazioni della rete.

Una volta addestrate, le reti neurali possono essere utilizzate per elaborare nuovi dati, producendo output predittivi o classificativi in base alle informazioni apprese durante l'addestramento. Il deep learning, dunque, permette ai computer di imparare autonomamente dai dati senza essere esplicitamente programmati per compiti specifici. Ciò significa che possono adattarsi e migliorare le loro prestazioni man mano che vengono esposti a nuovi dati.

2.2 Domande e dimostrazioni

2.2.1 Domande

Qui di seguito 6 possibili domande che possono capitare:

1. *Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente?*

Risposta: Tutti gli eventuali autovalori irraggiungibili del processo devono essere a parte reale negativa.

2. Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente, e tutti gli autovalori del sistema complessivo coincidano con dei valori assegnati ad arbitrio?

Risposta: Tutti gli autovalori del processo devono essere raggiungibili.

3. Sotto quali condizioni esiste un osservatore asintotico dello stato?

Risposta: Tutti gli eventuali autovalori inosservabili del processo devono essere a parte reale negativa.

4. In un osservatore asintotico dello stato, sotto quali condizioni è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale?

Risposta: Tutti gli autovalori del processo devono essere osservabili.

5. Si consideri un processo caratterizzato dalle matrici $A = 1$, $C = 2$ ed un osservatore asintotico dello stato di tale processo caratterizzato dalla matrice $G = 2$. Qual è l'espressione dell'errore $e(t)$ tra lo stato stimato e lo stato reale?

Risposta: In generale, $e(t) = \exp[(A - GC)t]e(0)$. Nel caso specifico, dato che $A - GC = -3$, risulta $e(t) = \exp[-3t]e(0)$.

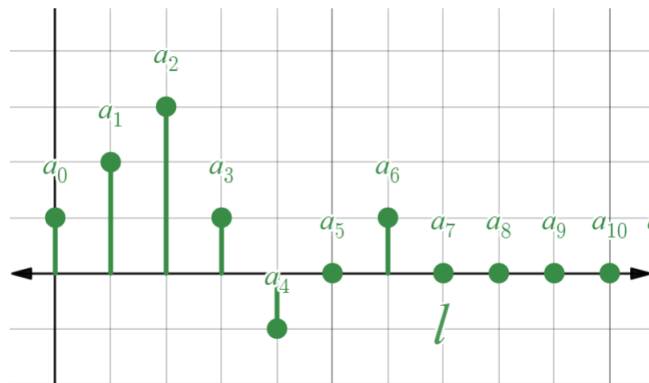
6. Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controeazione, rispetto a quello a controeazione semplice.

Risposta: Il vantaggio è quello di permettere di disaccoppiare le specifiche riguardanti il disturbo da tutte le altre, permettendo quindi di affrontare 2 problemi meno complessi rispetto al problema originario. Inoltre, si può ottenere la reiezione completa del disturbo.

2.2.2 Dimostrazione errore nullo

Domanda: Sia assegnato un processo $P(z)$. Si dimostri come sia possibile progettare un controllore $G(z)$ in modo che l'errore $e(h)$, corrispondente ad un ingresso $r(h) = h$, sia nullo a partire da un certo istante finito (istante tempo discreto l).

Dimostrazione: Noi vorremmo che l'errore e si comporti come una funzione $f(h)$ che è identicamente nulla da un certo istante l , quindi $f(h) = 0, \forall h \geq l$, per esempio:



L'unico valore che deve necessariamente essere non nullo è $f(l-1)$ (altrimenti $l-1$ sarebbe il nostro l cercato). La funzione nel grafico è determinata dall'espressione

$$f(h) = a_0\delta(h) + a_1\delta(h-1) + \dots + a_{l-1}\delta(h-l+1)$$

da cui segue:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_{l-1}}{z^{l-1}} = \frac{a_0 z^{l-1} + a_1 z^{l-2} + \dots + a_{l-1}}{z^{l-1}}$$

Questa funzione ha come numeratore un generico polinomio di grado minore o uguale a $l-1$, per cui sappiamo che è propria. Possiamo indicare questo generico polinomio al numeratore con $S(z)$. Possiamo imporre che l'errore abbia la forma desiderata:

$$e(z) = W_e(z)r(z) \stackrel{\text{set}}{=} \frac{S(z)}{z^{l-1}}$$

2.2.3 Dimostrazione assegnazione autovalori

Domanda: Si dimostri il teorema dell'assegnazione degli autovalori.

Dimostrazione: Assegnata una coppia di matrici $(A_{n \times n}, B_{n \times p})$, è possibile scegliere opportunamente una matrice $K_{p \times n}$ tale che il sistema complessivo $A+BK$ abbia $m = \text{rgo}(B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$ autovalori scelti arbitrariamente, mentre gli altri $n-m$ autovalori coincidono necessariamente (per qualsiasi scelta di K) a quelli *irraggiungibili* della coppia (A, B) .

Nella forma raggiungibile di Kalman, la matrice $A+BK$ assume la forma:

$$A' + B'K' = \begin{pmatrix} A_R & A_{12} \\ 0 & A_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_R \\ 0 \end{pmatrix} ((K_1 \quad K_2)) = \begin{pmatrix} A_R + B_R K_1 & A_{12} + B_R K_2 \\ 0 & A_I \end{pmatrix}$$

$A' + B'K'$ in questa rappresentazione è diagonale a blocchi, perciò i suoi autovalori sono quelli presenti nelle matrici $A_R + B_R K_1$ e A_I . E' evidente che, indipendentemente dalla scelta di K , gli autovalori contenuti nella matrice A_I si ritroveranno esattamente nel sistema complessivo. Si può tuttavia dimostrare che, scegliendo opportunamente K (in particolare K_1), si possono modificare arbitrariamente gli autovalori raggiungibili del sistema.

Consideriamo allora solamente la parte di sistema identificata dalla matrice $A_R + B_R K_1$. Possiamo effettuare un ulteriore cambio di coordinate e portare le matrici A_R e B_R nella forma canonica raggiungibile. Questo è sempre possibile per definizione, perché sappiamo che nella matrice A_R sono presenti tutti gli autovalori raggiungibili. Dimostriamo il caso di interesse, ovvero con $p=1$; si ha che:

$$\tilde{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che:

$$\det(\lambda I - \tilde{A}_R) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - (\tilde{A}_R + \tilde{B}_R \tilde{K}_R)) &= \det \left[\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_m) \right] \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_0 - k_1 & a_1 - k_2 & \cdots & \lambda + a_{m-1} - k_m \end{pmatrix} \\
&= \lambda^m + (a_{m-1} - k_m)\lambda^{m-1} + \cdots + (a_1 - k_2)\lambda + (a_0 - k_1)
\end{aligned}$$

Essendo ogni termine del polinomio caratteristico dipendente da un termine di K , possiamo concludere che gli autovalori raggiungibili del sistema complessivo sono modificabili a piacimento. In effetti, se il polinomio caratteristico desiderato è

$$p^*(\lambda) = \lambda^m + \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

allora basta porre

$$\lambda^m + (a_{m-1} - k_m)\lambda^{m-1} + \cdots + (a_1 - k_2)\lambda + (a_0 - k_1) \stackrel{\text{set}}{=} \lambda^m + \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

Risolvendo l'equazione diofantina si ottiene il sistema

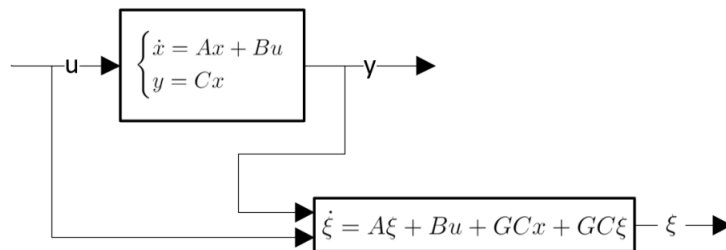
$$\begin{cases} a_{m-1} - k_m = \beta_m - 1 \\ \vdots \\ a_1 - k_2 = \beta_1 \\ a_0 - k_1 = \beta_0 \end{cases}$$

Scegliendo, allora, $\overline{K_R} = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_m) = (a_0 - \beta_0 \quad a_1 - \beta_1 \quad \cdots \quad a_{m-1} - \beta_{m-1})$, e trasformando indietro $\overline{K_R}$ nella K , si ottiene che il sistema finale avrà polinomio caratteristico esattamente pari a p^* .

2.2.4 Dimostrazione osservatore asintotico

Domanda: Dimostra sotto quali ipotesi si può costruire un osservatore asintotico.

Dimostrazione: Questo problema è il *duale* dell'assegnazione degli autovalori. Dato il processo x e il suo osservatore asintotico in ξ , dimostriamo che esiste una matrice G tale per cui l'errore $e(t) = x(t) - \xi(t)$ tenda asintoticamente a zero.



Essendo $e = x - \xi$, si ha anche che:

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\xi} \\
 &= A_x + B_u - A\xi - Bu - Gy + GC\xi \\
 &= Ax - A\xi - GCx + GC\xi \\
 &= (A - GC)(x - \xi) \\
 &= (A - GC)e
 \end{aligned}$$

In forma esplicita, l'errore ha la seguente espressione:

$$e(t) = \exp[(A - GC)t]e(0)$$

Da qui è evidente che, per far sì che l'errore tenda a zero per $t \rightarrow +\infty$, la matrice $A - GC$ debba avere tutti gli autovalori a parte reale negativa. Tuttavia, la matrice G permette di modificare solamente gli autovalori osservabili del sistema di partenza, perché, considerando al forma osservabile di Kalman:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{inos} & A_{12} \\ 0 & A_{oss} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad C_{oss})$$

si ha che

$$\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = \begin{pmatrix} A_{inos} & A_{12} \\ 0 & A_{oss} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{pmatrix} (0 \quad C_{oss}) = \begin{pmatrix} A_{inos} & A_{12} - \tilde{G}_1 C_{oss} \\ 0 & A_{oss} - \tilde{G}_2 C_{oss} \end{pmatrix}$$

Questa matrice è triangolare a blocchi, perciò gli autovalori sono quelli presenti nelle matrici A_{inos} e $A_{oss} - \tilde{G}_2 C_{oss}$. Si vede che, indipendentemente dal valore di G , tutti gli autovalori inosservabili della matrice A restano anche nel sistema dell'errore.

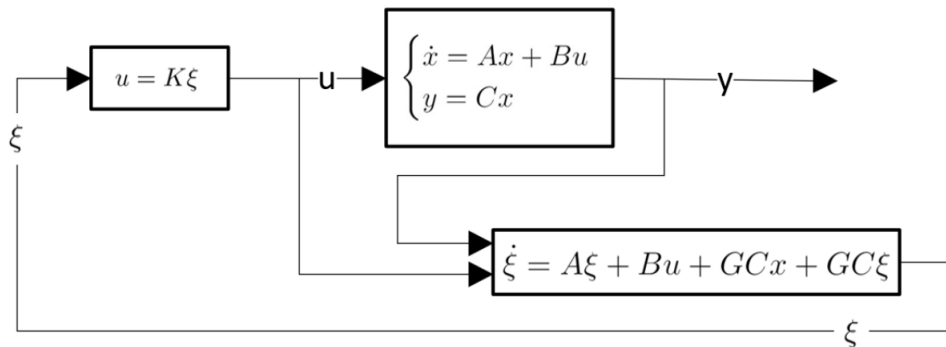
Dunque, se il sistema ha p autovalori osservabili, il polinomio caratteristico del sistema errore sarà:

$$|\lambda I - (A - GC)| \stackrel{\text{set}}{=} \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_{arb_i}) \prod_{j=1}^{n-p} (\lambda - \lambda_{inos_j}), \quad \text{dove } p = \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

2.2.5 Dimostrazione principio di separazione

Domanda: Si dimostri il principio di separazione.

Dimostrazione: Consideriamo un processo con matrici A, B, C , il suo osservatore asintotico e un sistema a controreazione dallo stato stimato ξ :



Il sistema complessivo ha la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + BK\xi + GCx - GC\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

Applicando il cambio di coordinate $T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$, si ha che:

$$\tilde{A}_c = TA_cT^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - GC \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice \tilde{A}_c , essendo diagonale a blocchi, sono composti dall'unione degli autovalori delle due matrici $A+BK$ e $A-GC$. Perciò, se l'obiettivo è rendere asintoticamente stabile il sistema complessivo, il problema si è separato in due sottoproblemi, completamente indipendenti: uno in cui si deve stabilizzare la parte del sistema individuata dalla matrice $A+BK$, e il secondo si riferisce alla parte con matrice $A-GC$. Questi sono esattamente il problema dell'assegnazione degli autovalori e il problema della costruzione dell'osservatore asintotico, rispettivamente.

Sappiamo già che m autovalori raggiungibili del sistema $A+BK$ sono assegnabili ad arbitrario scegliendo la matrice K , così come lo sono p autovalori osservabili del sistema $A-GC$, scegliendo opportunamente la matrice G .

3 Appendice

3.1 Procedimento per l'inversa di una matrice

$$\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot C_{ij}$$

Dove C_{ij} rappresenta il determinante della sottomatrice A_{ij} che si ottiene da A eliminando la riga i e la colonna j .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{Cof}(a_{11}) & \text{Cof}(a_{12}) & \cdots & \text{Cof}(a_{1n}) \\ \text{Cof}(a_{21}) & \text{Cof}(a_{22}) & \cdots & \text{Cof}(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cof}(a_{n1}) & \text{Cof}(a_{n2}) & \cdots & \text{Cof}(a_{nn}) \end{pmatrix}^T$$

3.1.1 Trucco per 2x2

Per realizzare l'inversa di una matrice 2x2, come la gran parte delle matrici che capitano, si può usare un trucco: si invertono gli elementi sulla diagonale principale, si inverte il segno degli elementi sulla diagonale secondaria e si divide il tutto per il determinante della matrice 'originaria':

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}}{(x_{11}x_{22}) - (x_{21}x_{12})}$$

3.2 Prodotto matriciale

Non mi andava di scriverlo.... prodotto riga per colonna con tanto di esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

3.3 Equazione di secondo grado

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

3.4 Trasformate di Laplace

Trasformate utili da Laplace a tempo discreto (*servono per i tempi discreti*):

$\eta(h)$	$\frac{z}{z-1}$
h	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{h^{(2)}}{2} = \frac{h(h-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
$\delta(h - \alpha)$	$z^{-\alpha}$

3.5 Binomi con diverso esponente

Quadrato del binomio: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Cubo del binomio: $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

3.6 Funzioni proprie ed improprie

Una funzione è:

- **propria** se grado numeratore = grado denominatore
- **strettamente propria** se grado denominatore > grado numeratore
- **strettamente impropria** se grado numeratore > grado denominatore

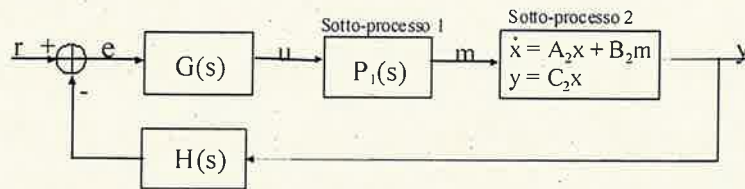
4 Esami svolti

Nelle successive pagine si trovano i *pdf* di alcuni esami svolti. In particolare abbiamo 3 esami del 2022 ed un esame del 2020 a **tempo discreto**, che contiene tutte le specifiche che un problema a tempo discreto può richiedere. Il formulario finisce qua: si ringrazia Emanuele per la parte di Bode e Nyquist.

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 24 marzo 2022

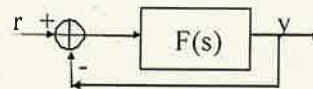
PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:



dove $P_1(s) = \frac{s+2}{s}$; $A_2 = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = [1 \ 0]$; $H(s) = \frac{1}{s}$

- A) Si determini il parametro "a", nonché un controllore $G(s)$, a dimensione minima, in modo tale che:
- α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti: uno raggiungibile ed inosservabile, l'altro irraggiungibile ed osservabile;
 - β) l'errore "e" a regime permanente, corrispondente ad un riferimento $r(t)=t$, sia nullo;
 - γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.
- B) Si specifichino inoltre le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $F(s) = K \frac{s-1}{(s+a)(s+2)}$

- A) Si determini il parametro "a" in modo che il corrispondente luogo delle radici abbia un punto singolare doppio (ossia un punto in cui si intersecano due cammini delle radici) in -1; si disegni il luogo corrispondente.
- B) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), per quali valori del parametro K il sistema complessivo è asintoticamente stabile?
- C) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), si determini il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata. Qual è tale velocità?

TEMA

Si illustri lo schema di controllo con reazione dall'uscita nel dominio del tempo e si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 2 ha un autovalore irragg. ed oss. in -2. Allora, in virtù della specifica γ) tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere in -2.

La funzione di trasferimento del sotto-processo 2 risulta $P_2(s) = \frac{1}{s-a}$.

L'unico modo per avere un autovalore nascosto ragg. ed inoss. è allora quello di creare una cancellazione polo-zero in -2 inserendo un polo in -2 nel controllore.

Le funz. di trasf. ing.-uscita ed errore uscita sono pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s) P(s), \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica β) richiede che nella $W_e(s)$ ci sia uno zero di molteplicità due in $s=0$: tale specifica è automaticamente soddisfatta grazie alla presenza dei poli in $s=0$ in $P_1(s)$ e $H(s)$.

Per fare in modo che anche gli autovalori non nascosti siano in -2, il numero dei parametri liberi deve essere uguale a $d_W = d_F + d_H = d_F + 1$. Considerando che il parametro "a" non è ancora stato scelto, la struttura di $G(s)$ a dimensione minima che rispetta la suddetta condizione (nonché la presenza di un polo in -2) è la seguente:

$$G(s) = \frac{bs+c}{s+2} \Rightarrow F(s) = G(s) P_1(s) P_2(s) = \frac{bs+c}{s(s-a)}$$

In effetti con tale struttura si hanno 3 parametri liberi e $d_F + 1 = 2 + 1 = 3$.

Procedendo all'assegnazione degli autovalori non nascosti in -2, e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = bs + c + s^2(s-a) = (s+2)^3 \Rightarrow a=-6, b=12, c=8.$$

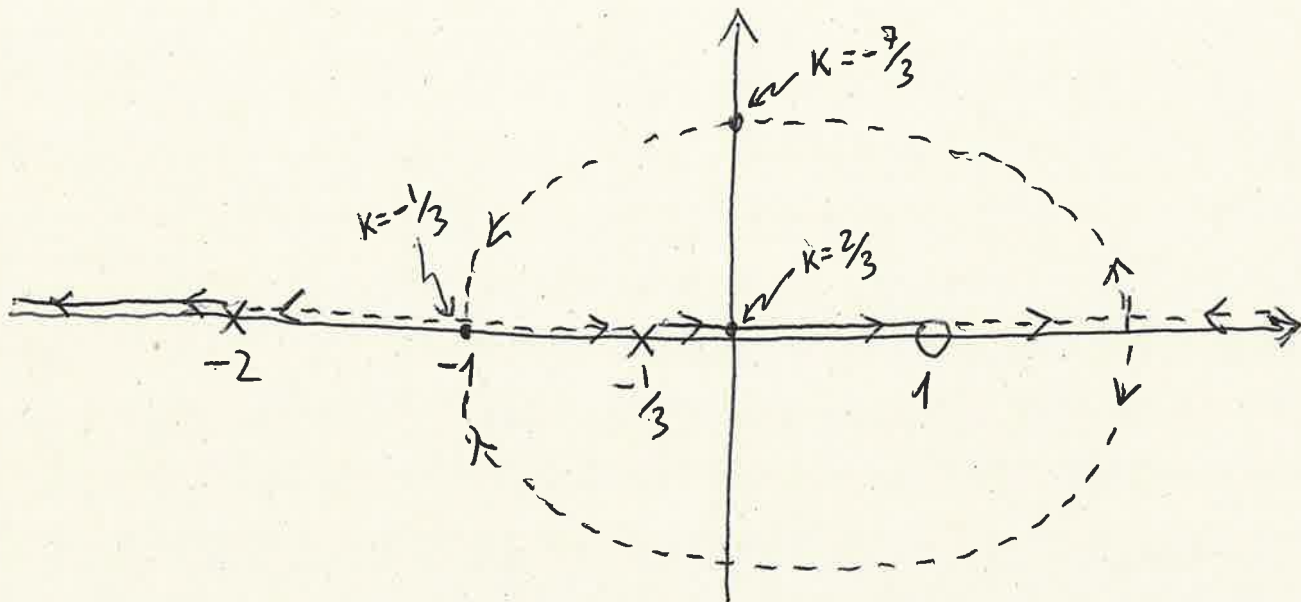
B) Come si evince dalla domanda A), il sistema complessivo ha 5 autovalori in -2: uno raggiungibile ed inosservabile, un altro irraggiungibile ed osservabile, ed altri tre ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) La presenza di un punto singolare doppio nel luogo delle radici implica l'esistenza di un valore di K e di un valore del parametro "a" in corrispondenza dei quali i 2 autovalori del sistema complessivo coincidano in -1. Tali valori possono essere determinati imponendo:

$$D_W = N_F + D_F = K(s-1) + (s+a)(s+2) = (s+1)^2 \Rightarrow a = 1/3; K = -1/3$$

Da quanto sopra si evince che il luogo delle radici della funzione $F(s) = K \frac{s-1}{(s+1/3)(s+2)}$ ha un punto singolare doppio in -1 corrispondente al valore $K=-1/3$. Tenendo presente tale informazione, il luogo delle radici è il seguente:



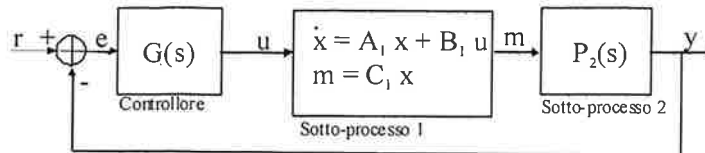
B) Applicando il criterio di Routh, si evince che il sistema risulta asintoticamente stabile per $2/3 > K > -7/3$.

C) Dall'esame visivo del luogo, risulta evidente che il valore del parametro K in corrispondenza del quale la parte reale del massimo dei due autovalori del sistema complessivo è la minima, coincide con il valore corrispondente al punto singolare doppio, ossia $K = -1/3$; per tale valore di K entrambi gli autovalori sono in -1 . Quindi, la velocità di esaurimento del transitorio più elevata è pari a e^{-t} .

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 14 giugno 2022

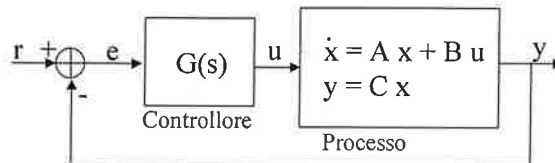
PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A_1 = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2(s) = \frac{s-1}{s+b}$.

- A) Si determinino i parametri "a", "b" e un controllore $G(s)$ a dimensione minima in modo che:
 - α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
 - β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso $r(t) = 1$ sia uguale a 5;
 - γ) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti.
- B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.
- C) Considerati i parametri "a", "b", individuati nella domanda A), si disegni il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)$, evidenziando la congruenza del luogo con l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c & 1 \end{bmatrix}$

- A) Per quali valori dei parametri "b" e "c" il sistema complessivo non è stabilizzabile asintoticamente?
- B) Scelti $b=c=0$ e $G(s)=1$ si traccino i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)$ e si disegni il corrispondente diagramma di Nyquist. Determinare, applicando il criterio di Nyquist, se il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile.
- C) Scelti $b=c=0$, si determini un controllore $G(s)$ a dimensione minima che abbia uno zero in -1 , un polo in -3 e tale da rendere asintoticamente stabile il sistema complessivo.

TEMA

Svolgere, a scelta, uno dei seguenti due temi:

- A) Nel perentorio spazio di due pagine si descrivano gli aspetti salienti di metodologie in cui il modello del processo non sia conosciuto.
- B) Nel perentorio spazio di due pagine si descrivano le problematiche inerenti la modellizzazione dei processi.

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \frac{1}{s+a}$. In tale sotto-processo esiste un autovalore nascosto (irraggiungibile ed osservabile) in -2. Ciò implica, dato che tutti gli autovalori devono essere coincidenti, che anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo dovranno essere in -2.

Il secondo autovalore nascosto deve necessariamente ricavarsi ponendo $a=2$ (oppure $b=2$) e inserendo nel controllore uno zero in -2 in modo da creare una cancellazione zero-polo in -2 e quindi un autovalore nascosto (irragg. ed oss.) in -2.

Per trovare il numero di parametri necessario, si deve tener conto che la specifica β) impone una condizione sui parametri ulteriore rispetto a quelle imposte dall'assegnazione degli autovalori. Il numero dei parametri liberi dovrà quindi essere pari a d_F+1 ($d_F = \text{grado } D_F$); tenendo conto che il parametro b è ancora libero, si deve scegliere la seguente struttura di $G(s)$ (a dimensione uno):

$$G(s) = c \frac{s+2}{s+d} \Rightarrow F(s) = G(s) P_1(s) P_2(s) = c \frac{s-1}{(s+b)(s+d)}$$

Con tali scelte, $d_F+1=3$ e ci sono 3 parametri ancora liberi.

Per soddisfare la specifica β) deve risultare:

$$W_e(0) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \Big|_{s=0} = 5 \Rightarrow 4bd=5c \quad (*)$$

L'equazione Diofantina per l'assegnazione degli autovalori non nascosti risulta:

$$D_W = N_F + D_F = c(s-1) + (s+b)(s+d) = (s+2)^2 \Rightarrow s^2 + s(b+c+d) + bd-c = s^2 + 4s + 4$$

Risolvendo con il principio di identità dei polinomi si deducono le condizioni:

$$(**) \quad b+c+d = 4$$

$$(***) \quad bd-c = 4$$

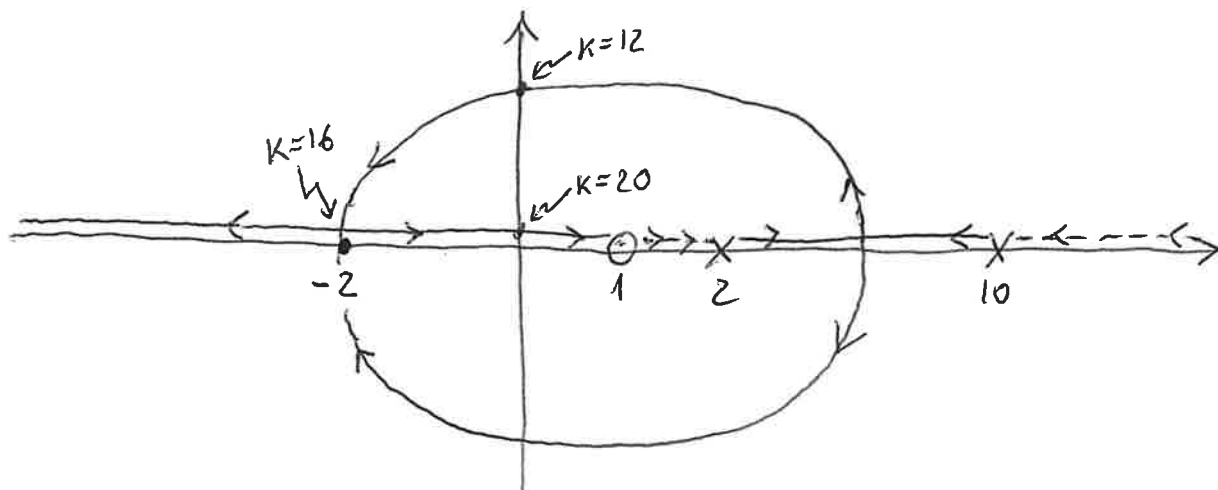
Il sistema di 3 equazioni (*), (**), (***) nelle 3 incognite b, c, d fornisce $b=-2, c=16, d=-10$ (oppure, $b=-10, c=16, d=-2$).

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)^4$ dove due autovalori in -2 sono irragg. e oss., mentre gli altri due autovalori in -2 sono rag. e oss.

C) Il luogo delle radici richiesto è relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$F(s) = K \frac{s-1}{(s-2)(s-10)}$$

L'assegnazione di autovalori di cui alla domanda A) determina la presenza di un punto singolare doppio in -2 corrispondente al valore di $K=16$. Tenendo in conto la suddetta considerazione il luogo delle radici richiesto è il seguente:



Soluzione del problema 2

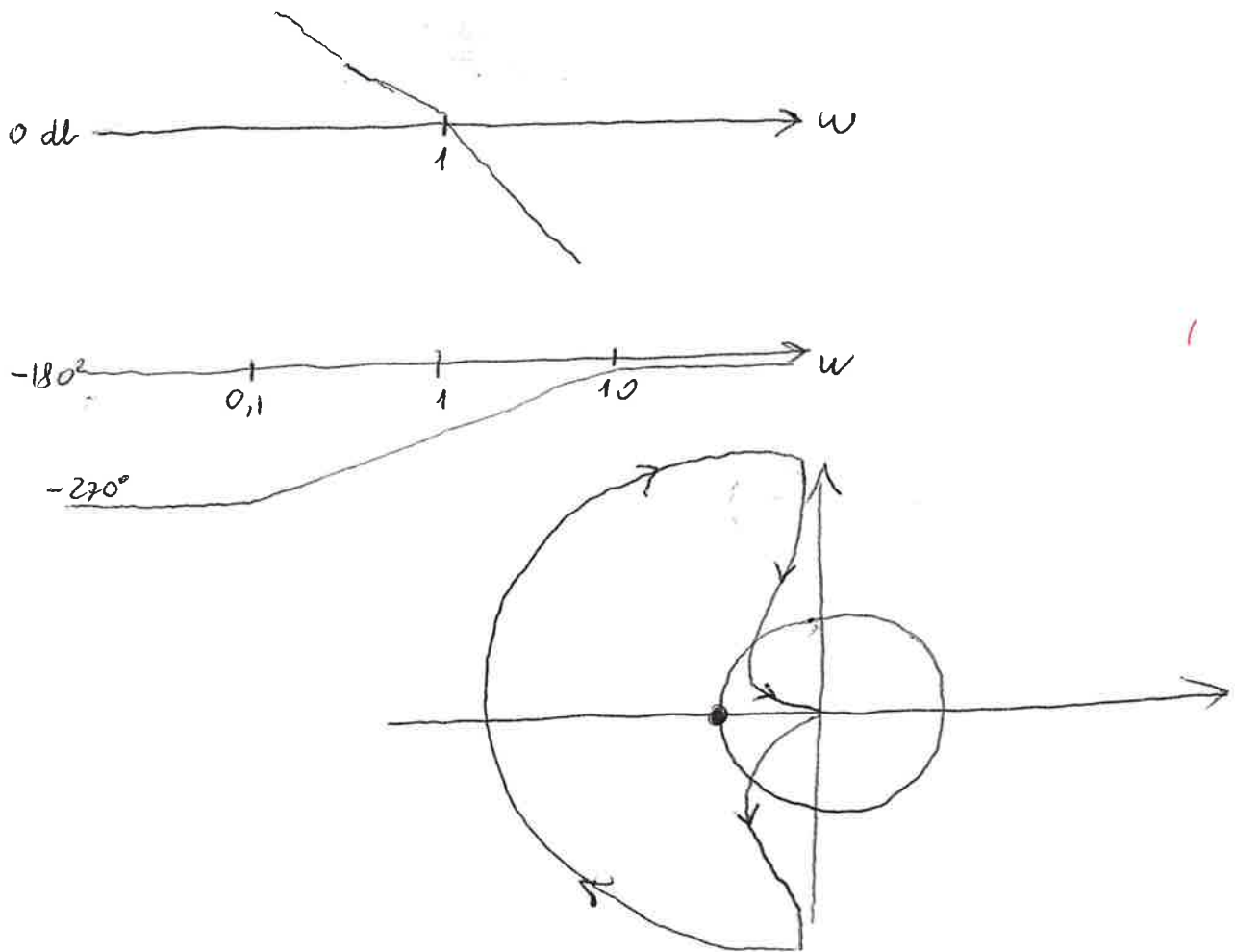
A) Il processo ha autovalori 0 e +1. L'autovalore +1 è sempre raggiungibile ed è inosservabile solo per $c=-1$; l'autovalore 0 è irraggiungibile solo per $b=1$ ed è sempre osservabile.

Un processo è stabilizzabile con reazione dall'uscita se e solo se tutti i suoi eventuali autovalori nascosti sono a parte reale negativa: quindi il processo non è stabilizzabile se $c=-1$ OR $b=1$.

B) Scegliendo $b=c=0$ e $G(s)=1$, risulta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

I corrispondenti diagrammi di Bode e Nyquist sono mostrati qui di seguito. Dal diagramma di Nyquist si evince un giro in senso orario attorno al punto $(-1;0)$. Dato che la $F(s)$ ha un polo a parte reale positiva, in base al criterio di Nyquist, il sistema complessivo sarebbe stato asintoticamente stabile se ci fosse stato un giro in senso antiorario attorno al punto $(-1;0)$. Il sistema complessivo risulta quindi non asintoticamente stabile:



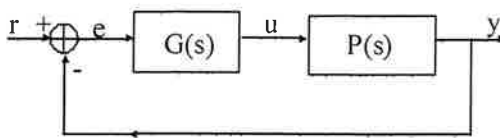
C) Aiutandosi con il luogo delle radici, o procedendo per tentativi, si evince che una possibile struttura della $G(s)$ che renda il sistema complessivo asintoticamente stabile è la seguente:

$$G(s) = K \frac{s+1}{s+3} \Rightarrow F(s) = K \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

Risulta quindi $D_W = N_F + D_F = K(s+1) + s(s-1)(s+3) = s^3 + 2s^2 + s(K-3) + K$.

Applicando il criterio di Routh, si evince che il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile per $K > 6$.

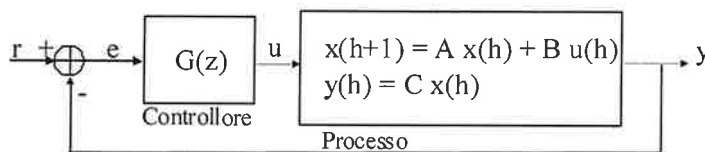
PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$

- A) Posto $G(s)=1$ si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist e, utilizzando il criterio di Nyquist, si determini se il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile.
- B) Si determini un controllore $G(s)$ a dimensione minima in modo che:
 - α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
 - β) il modulo dell'errore "e" a regime permanente per ingresso $r(t) = 1$ sia uguale a $1/9$;
 - γ) il controllore abbia un polo in -10 ;
 - δ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto.
- C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda B) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.
- D) Si consideri la $G(s)$ individuata nella domanda B). Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 2 . Si consideri lo schema di controllo tempo discreto riportato in figura:



con $A = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$

- A) Per quali valori del parametro "x" il sistema complessivo non è stabilizzabile asintoticamente?
- B) Scelto $x=5$ si determini un controllore $G(z)$ in modo da verificare le seguenti specifiche:
 - α) l'errore $e(h)$ corrispondente all'ingresso $r(h) = \text{costante}$ sia nullo nel minor tempo possibile (si specifichi l'istante l a partire dal quale l'errore si annulla);
 - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.
- C) Si disegni il luogo delle radici relativo alla $F(z)=G(z)P(z)$, dove $G(z)$ è il controllore individuato nella domanda B) e $P(z)$ è il processo assegnato, evidenziando la congruenza del luogo delle radici con l'assegnazione di autovalori effettuata nella domanda B).

PROBLEMA 3

- A) Si illustri lo schema relativo all'osservatore asintotico dello stato di un processo, e si dimostri come, sotto opportune condizioni, tale osservatore sia in grado di ricostruire asintoticamente lo stato di un processo.
- B) Si consideri un processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

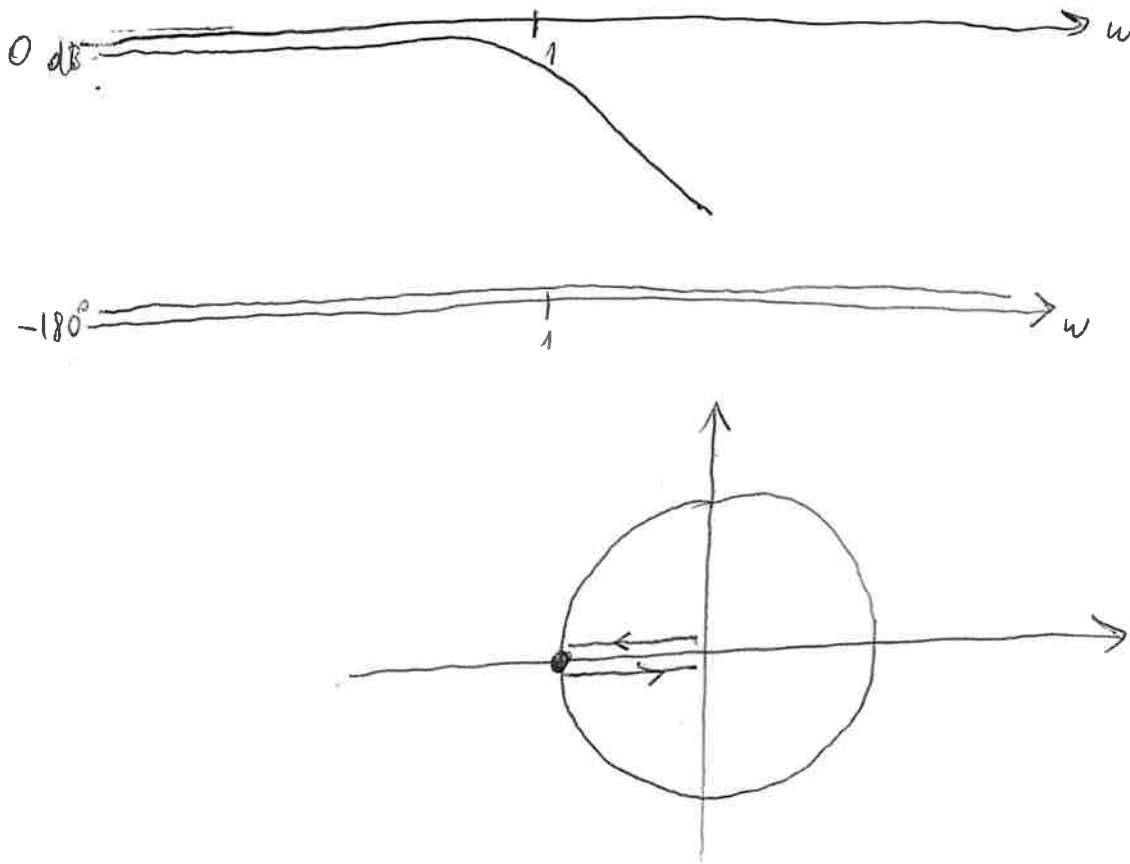
$A=3, \ B=1, \ C=c$

Si determini per quali valori del parametro "c" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

- C) Si consideri il processo di cui alla domanda B) e si ponga $c=2$. Si costruisca l'osservatore asintotico dello stato in modo che la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato del processo vada come e^{-5t} .

Soluzione del problema 1

A) I diagrammi richiesti (approssimati) sono mostrati qui di seguito. Dal diagramma di Nyquist si evince che il diagramma passa per il punto $(-1;0)$. In base al criterio di Nyquist, il sistema complessivo non è asintoticamente stabile:



B) Per soddisfare la specifica δ) si deve inserire uno zero in -1 nel controllore in modo da creare una cancellazione zero-polo in -1 e quindi un autovalore nascosto (irragg. ed oss.) in -1 .

Tenendo in conto la specifica γ), si può tentare di risolvere il problema con un controllore (a dimensione 1) con la seguente struttura:

$$G(s) = K \frac{s+1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s) P(s) = K \frac{1}{(s+10)(s-1)}$$

In base alla specifica β), deve risultare:

$$|W_e(0)| = \left| \frac{D_F}{N_F + D_F} \right|_{s=0} = 1/9 \quad \Rightarrow \quad K=100$$

Per tale valore di K il sistema risulta asintoticamente stabile come si può facilmente verificare applicando il criterio di Routh al polinomio:

$$D_W = N_F + D_F = 100 + (s+10)(s-1) = s^2 + 9s + 90.$$

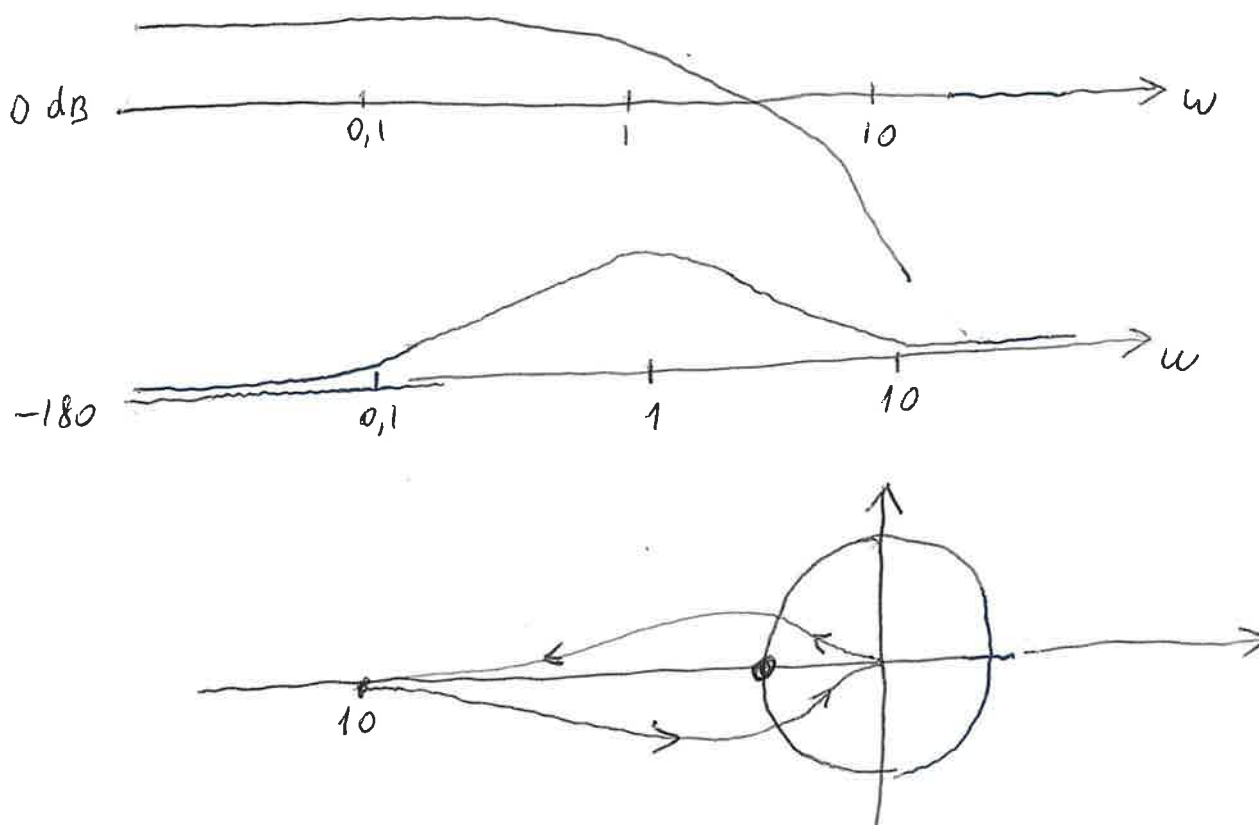
C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+1)[s^2 + 9s + 90]$ dove i due autovalori radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss., mentre l'autovalore in -1 è irrag. e oss.

D) In base alla soluzione della domanda B) la funzione di trasf. ad anello aperto risulta:

742

$$F(s) = 100 \frac{1}{(s+10)(s-1)} = -10 \frac{1}{(1+s/10)(1-s)}$$

I diagrammi richiesti (approssimati) sono mostrati qui di seguito. Dal diagramma di Nyquist si evince un giro in senso antiorario attorno al punto $(-1;0)$. Dato che la $F(s)$ ha un polo a parte reale positiva, in base al criterio di Nyquist, il sistema complessivo è asintoticamente stabile:



Soluzione del problema 2

A) Il processo ha autovalori 1 e -2 (entrambi a modulo non minore di 1). L'autovalore +1 è irraggiungibile se $x=6$ ed è sempre osservabile; l'autovalore -2 è irraggiungibile per $x=0$ ed è sempre osservabile.

Un processo tempo discreto è stabilizzabile con reazione dall'uscita se e solo se tutti i suoi eventuali autovalori nascosti hanno modulo minore di 1: quindi il processo non è stabilizzabile se $x=6$ OR $x=0$.

B) Scegliendo $x=5$, risulta:

$$P(z) = \frac{z-0,5}{(z+2)(z-1)}$$

Posto $F(z) = G(z)P(z)$, per verificare la specifica $\alpha)$ occorre che risulti

$$W_e(z) r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \frac{z}{z-1} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \text{ con } S(z) \text{ polinomio arbitrario di grado non superiore a } l-1$$

Per verificare la relazione precedente è sufficiente che (i) in $F(z)$ vi sia un polo in +1 (condizione già automaticamente verificata grazie al polo in $z=1$ della $P(z)$), (ii) risulti $N_F(z) + D_F(z) = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla (tale condizione assicura anche la stabilità asintotica del sistema complessivo dato che pone tutti gli autovalori non nascosti del sistema complessivo in zero).

Si può allora scegliere la seguente struttura di $G(z)$ (a dimensione uno), la quale, onde minimizzare l'istante l , crea una cancellazione polo-zero in 0,5 che genera un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in 0,5 (non inficiante la stabilità asintotica poiché a modulo minore di 1):

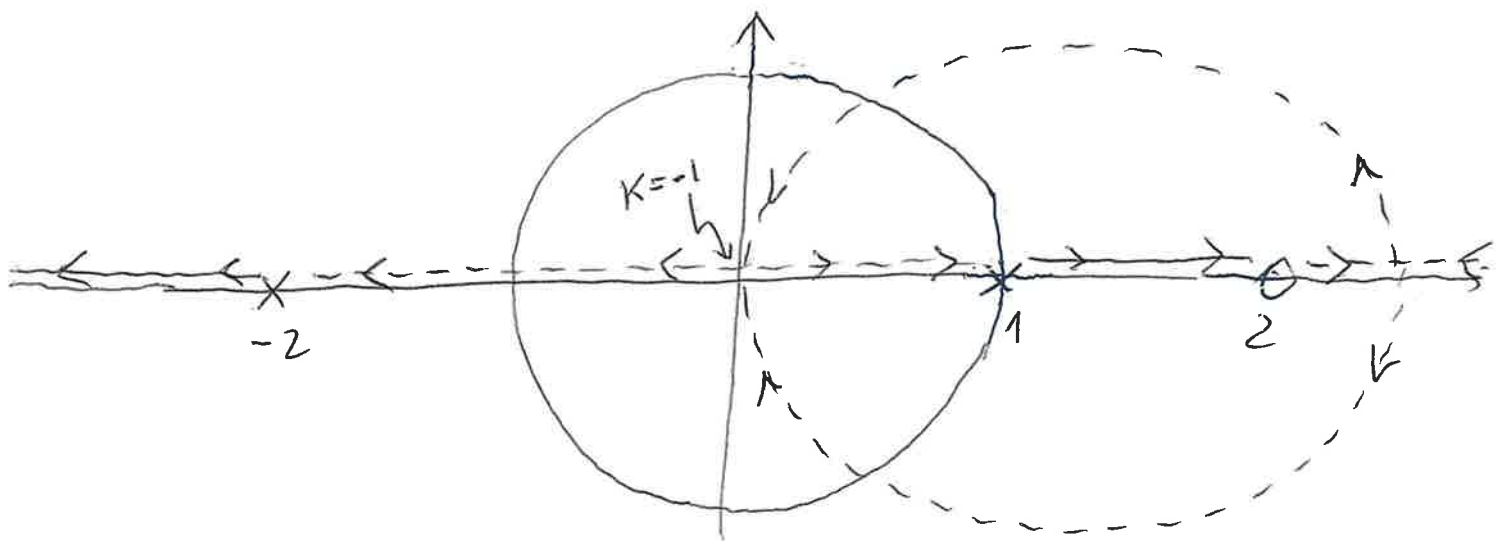
$$G(z) = \frac{az+b}{z-0,5} \Rightarrow F(z) = \frac{az+b}{(z+2)(z-1)}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi alla relazione $N_F(z) + D_F(z) = z^2$ si ricava $a=-1$, $b=2$. Quindi l'errore è uguale identicamente a zero a partire dall'istante $l=2$.

C) In base alla domanda B) risulta:

$$F(z) = \frac{-z+2}{(z+2)(z-1)} = -1 \frac{z-2}{(z+2)(z-1)}$$

Il luogo delle radici richiesto è quindi relativo alla $F(z) = K \frac{z-2}{(z+2)(z-1)}$. L'assegnazione di autovalori di cui alla domanda B) determina la presenza di un punto singolare doppio in zero corrispondente al valore $K=-1$. Il luogo in questione è il seguente:



Soluzione del problema 3

B) E' possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di un processo se e solo se tutti gli eventuali autovalori inosservabili del processo sono a parte reale negativa. Il processo assegnato ha autovalore +3: tale autovalore risulta inosservabile se e solo se $c=0$. Quindi è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato se e solo se $c \neq 0$.

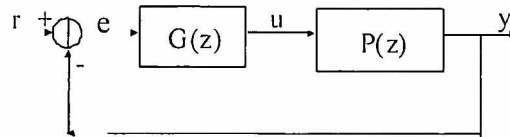
C) Una volta progettato l'osservatore asintotico secondo lo schema di cui alla domanda A), si determina la matrice G che caratterizza l'osservatore risolvendo l'equazione:

$$|\lambda - (A - GC)| = \lambda - \lambda_{arb}$$

Per avere la velocità di convergenza richiesta deve risultare $\lambda_{arb} = -5$. Si ha quindi:

$$|\lambda - (3 - 2G)| = \lambda + 5 \Rightarrow G = 4$$

Problema 1 Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \frac{z - 0,2}{(z - 1)(z + 0,8)}$ $P(z) = (z - 0,2)/(z - 1)(z + 0,8)$

- A) Si determini un controllore $G(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore $e(h)$ a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(h) = \eta(h)$ (gradino) sia nullo;
 - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (si discuta la stabilità asintotica con riferimento al luogo delle radici di interesse).
- B) Si determini un controllore $G(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore $e(h)$ corrispondente all'ingresso $r(h) = h$ (rampa) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante " l " a partire dal quale l'errore si annulla);
 - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.
- C) Con riferimento alla soluzione della domanda B), si calcoli l'espressione dell'errore $e(h)$ corrispondente all'ingresso $r(h) = h$ (rampa).
- D) Si determini la struttura di un controllore $G(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore $e(h)$ corrispondente all'ingresso $r(h) = h$ (rampa) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante " l " a partire dal quale l'errore si annulla), compatibilmente con la specifica β);
 - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.
- E) Si determinino i polinomi caratteristici dei sistemi complessivi individuati nelle domande A), B) e D), e si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

Problema 2

Sia assegnato un processo attraverso equazioni ingresso-stato-uscita:

- A) Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente?
- B) Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente, e tutti gli autovalori del sistema complessivo coincidano con dei valori assegnati ad arbitrio?
- C) Sotto quali condizioni esiste un osservatore asintotico dello stato?
- D) In un osservatore asintotico dello stato, sotto quali condizioni è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale?
- E) Si consideri un processo caratterizzato dalle matrici $A = 1$, $C = 2$ ed un osservatore asintotico dello stato di tale processo caratterizzato dalla matrice $G = 2$. Qual è l'espressione dell'errore $e(t)$ tra lo stato stimato e lo stato reale?
- F) Si consideri un processo caratterizzato dai seguenti due autovalori: -1 irraggiungibile ed osservabile, e $+2$ raggiungibile ed inosservabile. Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, progettando opportunamente uno schema di controllo con reazione dello stato, quali delle tre seguenti coppie di autovalori sono assegnabili al sistema complessivo:

F1) $-1 ; -1$

F2) $-1 ; -2$

F3) $-2 ; -2$

Soluzione Problema 1

691

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F}, \quad W_e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(z) = G(z) P(z) = \frac{N_F}{D_F}$$

A) Per verificare la specifica α), in D_F deve essere presente uno zero in $+1$. Tale specifica è già automaticamente soddisfatta grazie al polo in $z=1$ della $P(z)$.

Per verificare la specifica β) si può provare con un controllore a dimensione zero:

$$G(z) = K \quad \Rightarrow \quad F(z) = K \frac{z - 0,2}{(z - 1)(z + 0,8)}$$

Con tale scelta risulta, l'equazione caratteristica del luogo risulta:

$$D_W = N_F + D_F = (z - 1)(z + 0,8) + K(z - 0,2) = z^2 + z(K - 0,2) - 0,2K - 0,8 = 0$$

Il luogo delle radici di interesse si svolge interamente sull'asse reale. Da tale luogo è evidente che entrambe le radici sono interne al cerchio di centro origine e raggio unitario per $K^* > K > 0$ dove K^* è il valore di K in corrispondenza del quale la radice del luogo positivo che parte dal polo in $-0,8$ e va verso $-\infty$ attraversa il cerchio suddetto; dato che tale attraversamento avviene in corrispondenza dell'ascissa $z = -1$, il valore di K^* si può dedurre dall'equazione caratteristica del luogo ponendovi $z = -1$ e risolvendo rispetto a K . Si deduce quindi $K^* = 1/3$.

B) Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z) r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{S(z)}{z^{l+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{S(z)(z-1)^2}{z}$$

dove $S(z)$ è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a $l-1$ e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) D_F abbia una radice doppia in $+1$ (una delle due radici è già presente nella $P(z)$) e (ii) si imponga l'assegnazione degli autovalori $N_F + D_F = z^l$ (si noti che tale assegnazione degli autovalori rende il sistema complessivo asintoticamente stabile consentendo di verificare anche la specifica β). Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla, conviene cancellare il polo del processo in $-0,8$ e lo zero del processo in $+0,2$ (tali polo e zero sono cancellabili in quanto interni al cerchio di centro origine e raggio unitario). Infine, conviene introdurre un numero di parametri atto a verificare l'assegnazione degli autovalori. Tenendo conto di quanto sopra, conviene scegliere la seguente struttura del controllore (numero di parametri = $d_F=2$):

$$G(z) = \frac{(z + 0,8)(az + b)}{(z - 0,2)(z - 1)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{az + b}{(z - 1)^2}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F + D_F = (z - 1)^2 + az + b = z^2 \quad \Rightarrow \quad l=2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene $a=2$, $b=-1$.

C) Sfruttando i calcoli effettuati nella domanda B), si deduce:

$$e(z) = W_e(z) r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)^2}{z^2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad e(h) = \delta(h-1)$$

D) La soluzione è analoga a quella della domanda B), con la differenza che, dato che per garantire l'errore nullo in tempo finito è necessario assegnare tutti gli autovalori non nascosti in zero, allora, per garantire che tutti gli autovalori siano coincidenti è necessario che anche gli eventuali autovalori nascosti siano in zero. Non è quindi possibile effettuare le cancellazioni di cui alla soluzione della domanda B).

Tenendo conto di quanto sopra, conviene scegliere la seguente struttura del controllore (numero di parametri $= d_F=4$):

$$G(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z+d)(z-1)} \Rightarrow F(z) = \frac{(az^2 + bz + c)(z-0,2)}{(z+d)(z+0,8)(z-1)^2}$$

692

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F + D_F = (az^2 + bz + c)(z-0,2) + (z+d)(z+0,8)(z-1)^2 = z^4 \Rightarrow l=4$$

E)

Per la domanda A):

$p(z) = z^2 + z(K - 0,2) - 0,2K - 0,8$ con K compreso nell'intervallo $(0, 1/3)$. I due autovalori sono ragg. e oss.

Per la domanda B):

$p(z) = z^2(z+0,8)(z-0,2)$ dove i due autovalori in zero sono ragg. e oss., l'autovalore in $-0,8$ è irragg. e oss., l'autovalore in $0,2$ è ragg. e inoss.

Per la domanda D):

$p(z) = z^4$ dove i quattro autovalori in zero sono ragg. e oss.

Soluzione Problema 2

A) Tutti gli eventuali autovalori irrag. del processo devono essere a parte reale negativa.

B) Tutti gli autovalori del processo devono essere ragg.

C) Tutti gli eventuali autovalori inoss. del processo devono essere a parte reale negativa.

D) Tutti gli autovalori del processo devono essere oss.

E) In generale, $e(t) = \exp^{(A-GC)t} e(0)$. Nel caso specifico, dato che $A-GC = -3$, risulta $e(t) = \exp^{-3t} e(0)$

F) In base alla risposta alla domanda A), il processo è stabilizzabile con reazione dallo stato; tuttavia, dato che vi è un autovalore irrag. in -1 , tale autovalore dovrà necessariamente essere presente nel sistema complessivo, mentre l'altro autovalore del sistema complessivo potrà essere assegnato ad arbitrio. Quindi le coppie di autovalori F1) e F2) sono assegnabili, mentre la coppia F3) non è assegnabile.

Si include il grafico del cammino di quest'ultimo esame a tempo discreto:

