Controlli automatici

1) Stabilità

Un sistema è stabilizzabile se e solo se TUTTI autovalori nascosti sono a parte reale negativa

{autovalori di A} ⊇ {poli di P(s)}

{autovalori nascosti del processo} = {autovalori di A} – {poli di P(s)}

2) Raggiungibilità ed osservabilità

m = n° autovalori raggiungibili ⇒
$\text{rango}(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)$

p = n° autovalori osservabili ⇒ $\text{rango}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

con n=lunghezza diag(A)

3) Test di Hautus

L'autovalore $\bar{\lambda}$ è raggiungibile o irraggiungibile?

$$rango(A - \bar{\lambda}I \quad B) \begin{cases} = n \implies \bar{\lambda}\, raggiungibile \\ < n \implies \bar{\lambda}\, irraggiungibile \end{cases}$$

L'autovalore $\bar{\lambda}$ è osservabile o inosservabile?

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \bar{\lambda}I \\ C \end{pmatrix} \begin{cases} = n \implies \bar{\lambda}\, osservabile \\ < n \implies \bar{\lambda}\, inosservabile \end{cases}$$

4) Relazioni fra poli e zeri dopo eventuali cancellazioni

Cancellazione polo-zero $\Rightarrow$ si crea un autovalore raggiungibile ed inosservabile nella coppia che si è cancellata

Cancellazione zero-polo $\Rightarrow$ si crea un autovalore irraggiungibile ed osservabile nella coppia che si è cancellata

$$\{autovalori\ del\ sistema\ complessivo\} = \{autovalori\ non\ nascosti\ del\ sistema\ complessivo\ *\} + \{autovalori\ nascosti\ intriseci\ nei\ sistemi\ componenti\} + \{autovalori\ nascosti\ generati\ per\ interconnessione\ tra\ i\ sistemi\ componenti\}$$

$*$ poli della funzione di trasferimento ingresso − uscita del sistema complessivo

5) Strutture possibili per il controllore

G(s)	n° parametri
a	1
$\frac{a}{s+b}$	2
$\frac{as+b}{s+c}$ $a\frac{s+b}{s+c}$	3
$\frac{as+b}{s^2+cs+d}$ $a\frac{s+b}{(s+c)(s+d)}$	4

$\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e}$ $a\frac{(s+b)(s+c)}{(s+d)(s+e)}$	5
$\frac{as^2+bs+c}{s^3+ds^2+es+f}$	6
$\frac{as^3+bs^2+cs+d}{s^3+es^2+fs+g}$	7
$\frac{as^3+bs^2+cs+d}{s^4+es^3+fs^2+gs+h}$	8
$\frac{as^4+bs^3+cs^2+ds+e}{s^4+fs^3+gs^2+hs+i}$	9

6) Calcolo della risposta a regime permanente ad ingressi polinomiali

$\mathrm{W}(s)$ ha in $s=0$ uno zero di molteplicità, per ingressi polinomiali del tipo $\mathrm{u}(t)=\frac{t^k}{k!}$

Molteplicità		$\mathrm{u}(t)$	
↓↓↓	$1_{k=0}$	$t_{k=1}$	$\frac{t^2}{2}_{k=2}$
0	$\mathrm{W}(0)\neq 0$	$\mathrm{W}(0)\mathrm{t}+\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$\mathrm{W}(0)\frac{t^2}{2}+\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0	$\left.\frac{W(0)}{s}\right\|_{s=0}\neq 0$	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0	0	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0}\neq 0$

7) Calcolo della risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali

Per ingressi sinusoidali del tipo $\mathrm{u(t)} = \sin \tilde{\omega} t$, la risposta a regime permanente si calcola usando l'equazione $\tilde{y}(t) = |W(j\tilde{\omega})| \sin(\tilde{\omega} t + \llcorner W(j\tilde{\omega}))$

8) Equazione diofantina

Serve per definire il valore dei parametri in modo arbitrario del denominatore della funzione di trasferimento del sistema complessivo

$$D_w(s) = \prod_{i=1}^{d_w} (s - s_{ARBi})$$

Con $d_w = grado(D_w)$

n° parametri ⇔ n° gradi di libertà =(sempre valido)= d_w =(valido solo per schemi a controreazione unitaria, anello chiuso)= d_f

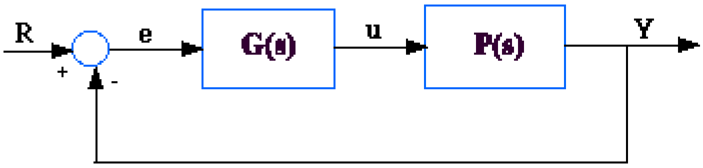
9) Equazione della funzione di trasferimento per schemi a controreazione unitaria, anello chiuso

$$\mathrm{W} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

Con F indichiamo la funzione di trasferimento ad anello aperto $\mathrm{F} = \mathrm{GP} = \frac{N_F}{D_F}$

10) Teorema

Se il sistema



è asintoticamente stabile, allora esiste un $\tilde{\tau} > 0$ (sufficientemente piccolo) tale che $\forall\, \tau \in (0, \tilde{\tau})$ anche il sistema con controllore uguale a $\frac{G(s)}{1+\tau s}$ è asintoticamente stabile

11) Margine di fase

Il margine di fase m_φ è la misura di quanto la AS (stabilità asintotica) è robusta rispetto a permutazione e/o imprecisione del modello

$$m_\varphi = 180° + \llcorner F(j\omega_t)$$

12) Criterio di Bode

Se $m_\varphi^+ = 0$ allora il diagramma di Nyquist ha una sola intersezione con il semiasse negativo

$$\text{AS} \iff m_\varphi > 0$$

Indicando con AS la stabilità asintotica

13) Fedeltà/precisione transitorio

La fedeltà/precisione di risposta nel transitorio si ha se e solo se il transitorio è rapido e poco oscillatorio

$$(1)\ t_s \le t_{s_{max}}$$
$$(2)\ \hat{s} \le \widehat{s_{max}}$$

Indicando con t_s il tempo di salita, e con $\hat{s}$ la sovraelongazione

14) Stabilizzazione con reazione dallo stato

Avendo il processo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ con lo stato x(t) che deve essere misurabile si ha un controllore caratterizzato da una matrice K, costante $\mathrm{U(t) = Kx(t)}$, quindi il sistema complessivo sarà dato da $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$, con il seguente teorema si potranno scegliere degli autovalori in modo da stabilizzare il sistema complessivo

15) Teorema di assegnazione degli autovalori (probabile domanda teorica d'esame)

Assegnato un processo (e quindi una coppia di matrici A, B), scegliendo opportunatamente una matrice K si può far sì che gli autovalori raggiungibili del processo si "trasformino" nella matrice $\mathrm{A + BK}$ in valori arbitrari, mentre gli autovalori irraggiungibili del processo si ritrovano pari pari nella matrice $\mathrm{A + BK}$ quale che sia la scelta di K.

Utilizzando la forma canonica di Kalman

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ le cui dimensioni sono n*n, suddivise rispettivamente così $\mathrm{n * n} = \begin{pmatrix} m * m & m * (n - m) \\ (n - m) * m & (n - m) * (n - m) \end{pmatrix}$, e con A_{11} matrice degli autovalori <u>raggiungibili</u> e con A_{22} matrice degli autovalori <u>irraggiungibili</u>

$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix}$ e con $\widetilde{K} = (K_1 \quad K_2)$ avremo

$$\tilde{A} + \tilde{B}\widetilde{K} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} (K_1 \quad K_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1K_1 & B_1K_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

nel caso particolare in cui $\mathrm{m} = 2$ e $\mathrm{p} = 1$ abbiamo $\widetilde{A_{11}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ e $\widetilde{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per assegnare i valori in modo arbitrario agli autovalori raggiungibili si utilizza la seguente equazione

$$\left|\lambda I - \left(\widetilde{A_{11}} + \widetilde{B_1}K\right)\right| = \prod_{i=0}^{2} (\lambda - \lambda_{ARBi})$$

risolvendo la quale si ottiene

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2)\right]\right| = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 - k_1 & \lambda + a_1 - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\lambda(\lambda + a_1 - k_2) + a_0 - k_1 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\lambda^2 + (a_1 - k_2)\lambda + a_0 - k_1 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$\begin{Bmatrix} a_1 - k_2 = \alpha_1 \\ a_0 - k_1 = \alpha_0 \end{Bmatrix}$ e quindi $\begin{matrix} k_2 = a_1 - \alpha_1 \\ k_1 = a_0 - \alpha_0 \end{matrix}$

In definitiva la formula generale per l'assegnazione degli autovalori è:

$$|\lambda I - (A + BK)| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_{ARBi}) \prod_{i=m}^{n-m} (\lambda - \lambda_{IRRAGi})$$

16) Osservatore asintotico dello stato (probabile domanda teorica d'esame)

Avendo un sistema di questo tipo, per "osservatore asintotico dello stato" si intende un processo che asintoticamente misuri lo stato del sistema, con un errore tendente a zero.

Le equazioni caratterizzanti il processo sono le solite $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$, mentre l'equazione caratterizzante l'osservatore asintotico dello stato (OAS), è $\dot{\xi} = A\xi + Bu + Gy - GC\xi$, e l'errore è dato da $\mathrm{e} = \mathrm{x} - \xi$, con x rappresenta lo stato reale del sistema, mentre ξ rappresenta lo stato stimato. Volendo portare l'errore a 0, si ha che $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$, per cui $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = Ax + Bu - (A\xi + Bu + Gy - GC\xi) = \mathrm{Ax} - \mathrm{A\xi} - \mathrm{GCx} + \mathrm{GC\xi} = (\mathrm{A} - \mathrm{GC})\mathrm{x} - (\mathrm{A} - \mathrm{GC})\xi = (\mathrm{A} - \mathrm{GC})(\mathrm{x} - \xi) = (\mathrm{A} - \mathrm{GC})\mathrm{e}$ per cui si ha che $\dot{e} = (A - GC)e$, e quindi $\mathrm{e(t)} = \mathrm{e(0)} \exp[(\mathrm{A} - \mathrm{GC})\mathrm{t}]$

L'obbiettivo ora è di scegliere la matrice $G_{n\times q}$ in modo tale che tutti gli autovalori della matrice $\mathrm{A} - \mathrm{GC}$ siano a parte reale negativa. Il teorema che permette ciò è duale al teorema dell'assegnazione degli autovalori.

"Assegnato un processo (e quindi una coppia di matrici A,C), scegliendo opportunatamente una matrice G, si può far in modo che gli autovalori osservabili del processo si trasformino nella matrice **A - GC** in valori arbitrari, mentre gli autovalori inosservabili del processo si ritrovano pari pari nella matrice **A - GC** quale che sia la scelta della matrice G"

Esistenza dell'osservatore asintotico dello stato

$\Longleftrightarrow$

tutti gli autovalori inosservabili del processo sono a parte reale negativa

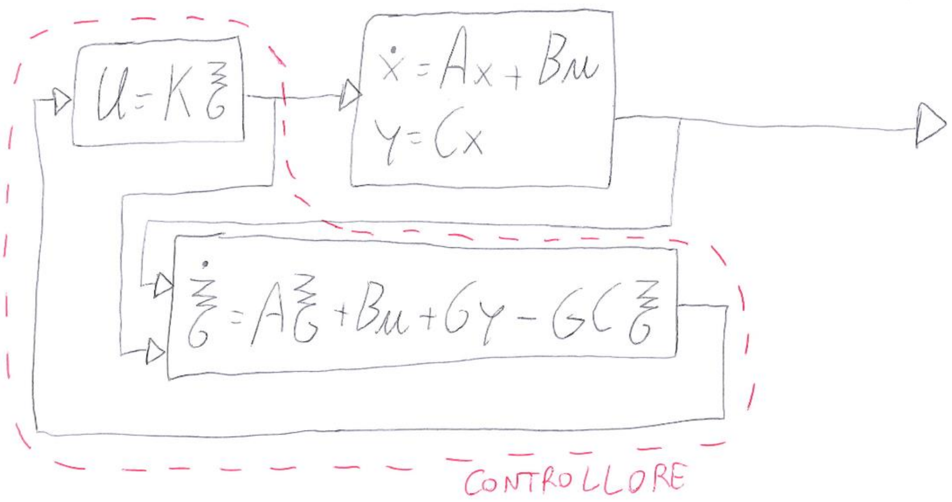
L'equazione per il calcolo della matrice G, è duale a quella per l'assegnazione degli autovalori, ed è

$$|\lambda I-(A-GC)|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_{ARBi})\prod_{i=s}^{n-s}(\lambda-\lambda_{INOSSi})$$

Con $\mathrm{s}=\mathrm{n}^\circ\ \mathrm{aut.oss.}=\mathrm{rgo}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{pmatrix}$, e $\mathrm{n}-\mathrm{s}=\mathrm{n}^\circ\ \mathrm{aut.inoss.}$

17) Stabilizzazione con reazione dall'uscita

(probabile domanda teorica d'esame)



Si vuole rendere stabile un sistema di questo tipo

Le equazioni di tale sistema sono

$\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} = Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + BK\xi + GCx - GC\xi \end{Bmatrix}$, ossia

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$; per stabilizzare tale sistema ci serve una matrice T di trasformazione fatta così $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$ con la sua inversa $T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$

Si applica tale trasformazione al sistema, ottenendo così $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & \text{-I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{BK} \\ \mathrm{GC} & \mathrm{A + BK\text{-}GC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & \text{-I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{BK} \\ \mathrm{A\text{-}GC} & \mathrm{\text{-}A + GC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & \text{-I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A + BK} & \mathrm{\text{-}BK} \\ 0 & \mathrm{A\text{-}GC} \end{pmatrix}$, la quale è una matrice diagonale a blocchi, in cui gli autovalori sono proprio le matrici descritte precedentemente, per i problemi di stabilizzazione con reazione dallo stato (e teorema dell'assegnazione degli autovalori) e l'osservatore asintotico dello stato. Per cui le matrici da trovare sono le due matrici K, G, e ci si riconduce ai problemi sopra analizzati.

18) Osservazioni

Il sistema complessivo è stabilizzabile con reazione dall'uscita

$$\Leftrightarrow$$

Tutti gli autovalori irraggiungibili del processo devono essere a parte reale negativa && tutti gli autovalori inosservabili del processo devono essere a parte reale negativa, ossia tutti gli autovalori nascosti del processo devono essere a parte reale negativa

Tutti gli autovalori del sistema complessivo possono essere assegnati ad arbitrio

$\Longleftrightarrow$

Tutti gli autovalori del processo devono essere raggiungibili ed osservabili

(reazione dall'uscita) È possibile assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo

$\Longleftrightarrow$

Tutti gli autovalori del processo devono essere non nascosti

(reazione dallo stato) Il sistema complessivo è stabilizzabile

$\Longleftrightarrow$

Tutti gli autovalori irraggiungibili sono a parte reale negativa

(reazione dallo stato) È possibile assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo

$\Longleftrightarrow$

Tutti gli autovalori del processo sono raggiungibili

Esistenza dell'osservatore asintotico dello stato

$\Longleftrightarrow$

Tutti gli autovalori inosservabili del processo sono a parte reale negativa