1 Regime permanente

1.1 Tabella nel tempo continuo

Zeri della $W(s)$ in $s=0$	1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$	$W(0)t + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0	$\left.\frac{W(s)}{s}\right\|_{s=0} = \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0	0	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0} \neq 0$

1.2 Tabella nel tempo discreto

Zeri della $W(z)$ in $z=1$	$\eta(h)$	h	$\frac{h^{(2)}}{2} = \frac{h(h-1)}{2}$
0	$W(1) \neq 0$	$W(1)h + \left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1}$	$W(1)\frac{h^{(2)}}{2} + \left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1} h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\|_{z=1}$
1	0	$\left.\frac{W(z)}{z-1}\right\|_{z=1} = \left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1} h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\|_{z=1}$
2	0	0	$\left.\frac{W(z)}{(z-1)^2}\right\|_{z=1} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\|_{z=1} \neq 0$

1.3 Ingressi sinusoidali

Nel tempo continuo, se gli ingressi sono sinusoidali (o cosinusoidali), ovvero se, per esempio: $r(t) = \sin(t)$ oppure $r(t) = 5 + \cos(t)$, si utilizza la seguente formula:

$$y_{rp}(t) = |W(jw)| \sin\Big(\omega t + \angle W(jw)\Big)$$

Nel tempo discreto si usa la formula equivalente:

$$y_{rp}(h) = |W(e^{j\theta})| \sin\Big(\theta h + \angle W(e^{j\theta})\Big)$$

2 Test di Hautus

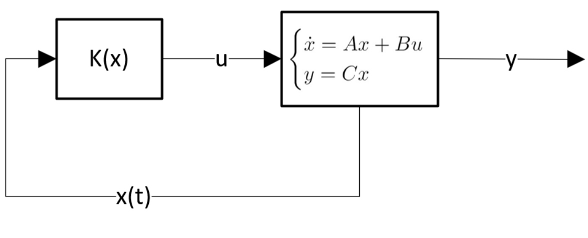
Date le matrici nel tempo del processo, A, B, C, per capire se un autovalore λ_0 è osservabile, si guarda il rango della matrice

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \lambda_0 I \\ C \end{pmatrix} : \begin{cases} = n & \Longrightarrow \lambda_0 \text{ è osservabile} \\ < n & \Longrightarrow \lambda_0 \text{ non è osservabile} \end{cases}$$

Equivalentemente, per la raggiungibilità:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \lambda_0 I & B \end{pmatrix} : \begin{cases} = n & \Longrightarrow \lambda_0 \text{ è raggiungibile} \\ < n & \Longrightarrow \lambda_0 \text{ non è raggiungibile} \end{cases}$$

3 Reazione dallo stato



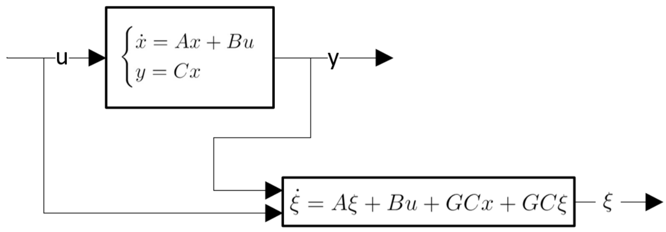
Scrivi la seguente equazione:

$$|\lambda I - (A + BK)| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{arb_i}) \prod_{j=1}^{n-m} (\lambda - \lambda_{irr_j}) \tag{1}$$

dove

$$m = \text{rango}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \text{numero di autovalori raggiungibili}$$

4 Osservatore asintotico



Una domanda può essere: *Qual è l'espressione $e(t)$ tra lo stato stimato e lo stato reale?* Scrivi l'equazione:

$$\dot{e} = (A - GC)e \implies e(t) = \exp\big[(A - GC)t\big]e(0)$$

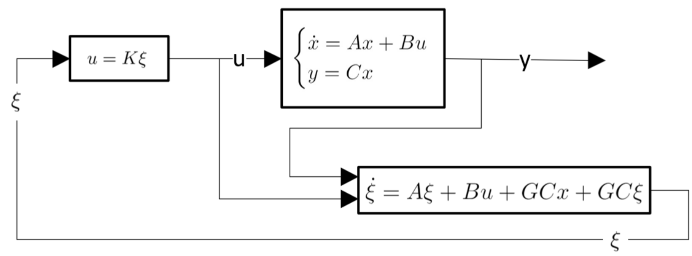
(dove $\exp[x]$ indica e^x, dove $e \approx 2.72$ è il numero di Nepero) e risolvere (o impostare) la seguente equazione secondo il *principio di identità* dei polinomi:

$$|\lambda I - (A - GC)| = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_{arb_i}) \prod_{j=1}^{n-m}(\lambda - \lambda_{inos_j}) \tag{2}$$

dove

$$m = \text{rango}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \text{numero di autovalori osservabili}$$

5 Reazione dall'uscita



Domanda possibile: *Si determini uno schema di controllo con reazione dall'uscita che renda il sistema asintoticamente stabile utilizzando le tecniche del dominio del tempo.*

Grazie al principio di separazione è possibile applicare questo schema di controllo (lo disegni); basta quindi mettere a sistema le due equazioni (1) e (2).

6 Tempo discreto

Per risolvere domande del tipo: *determina un controllore $G(z)$ in modo che l'errore $e(h)$ corrispondente all'ingresso $r(h)$ sia nullo nel minor tempo possibile, e specifica l'istante l a partire dal quale l'errore si annulla.*

Dato il processo $P(z)$, il controllore deve sempre nascondere (semplificare) tutti i poli e gli zeri di $P(z)$ che sono in modulo minori di 1 (per esempio, $z - 0.8$). Inoltre, va utilizzata la formula:

$P = Cz(zI - A)^{-1}B$

$$e(z) = W_e(z)r(z) \overset{\text{set}}{=} \frac{S(z)}{z^{l-1}}$$

per esempio, se $r(h) = h$ e $W_e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}$, allora si avrà $r(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ e:

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\frac{z}{(z-1)^2} \overset{\text{set}}{=} \frac{S(z)}{z^{l-1}} \implies \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{S(z)(z-1)^2}{z^l}$$

a questo punto, si mettono uguali numeratore e denominatore in modo separato, perciò, in generale, può capitare che si deve aggiungere un termine del tipo $(z - 1)^\alpha$, per qualche α, al *denominatore* del controllore G, stando attenti che non sia già presente nel numeratore della W.

Per il denominatore della W, facciamo l'assegnazione degli autovalori in $z = 0$ (l'equazione diofantina) stando attenti che il numero dei parametri sia sufficiente. Il numero l è esattamente uguale al grado del denominatore di $W(z)$.

6.1 Trasformate utili tempo discreto

$\eta(h)$	$\frac{z}{z-1}$
h	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{h^{(2)}}{2} = \frac{h(h-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
$\delta(h - \alpha)$	$z^{-\alpha}$

6.2 Trasformazione per l'uso di Routh a tempo discreto

Imporre $D_W = 0$, ed eseguire la trasformazione

$$z \longrightarrow \frac{1+s}{1-s}$$

poi mcm, si toglie il denominatore, e si semplifica, per poi lavorare con Routh su quello che rimane.

7 Realizzazione

Dato un processo P scritto in questo modo:

$$P(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + D$$

La sua realizzazione in forma canonica raggiungibile si fa in questo modo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Nel caso $n = 2$, si avrà:

$$P(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \end{pmatrix}$$

7.1 Interconnessioni

Per le connessioni in *parallelo* di due processi, P_1 e P_2, il sistema complessivo avrà le seguenti matrici:

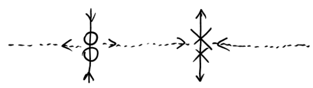
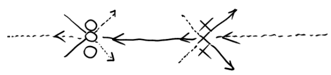
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

8 Luogo delle radici

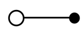
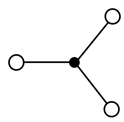
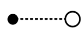
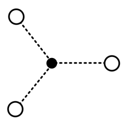
Il centro asintotico si calcola:

$$\text{C.A.} = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m}$$

I cammini, in base alla molteplicità dei poli/zeri, sono i seguenti:

molteplicità	cammino
singolo	
doppio	
triplo	

In base alla differenza $n - m$, si formano diversi punti asintotici (ignora le linee, che non sono percorsi veri e propri; considera il centro asintotico, riempito in nero, e i punti asintotici, bianchi):

$n - m$	1	2	3
Luogo positivo			
Luogo negativo			

Se si vuole trovare un punto singolare (quindi, il valore di s, z o K associato), si deve mettere a sistema il denominatore della W, D_W, con la sua derivata prima in s (o z), entrambe poste uguali a zero:

$$\begin{cases} D_W(s) = 0 \\ \dfrac{d}{ds} D_W(s) = 0 \end{cases}$$

Congettura di Edo. Se non c'è scritto di fare il luogo delle radici, al 99% di probabilità non serve usarlo. È sufficiente fare Routh, suvvia.

9 Fase di un numero immaginario

La fase di un numero immaginario $x + iy$ è uguale a:

$$\underline{/x + iy} = \begin{cases} \arctan y/x, & x > 0 \\ \pi/2, & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0 \\ \arctan y/x + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan y/x - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Se hai la calcolatrice scientifica in grado di gestire numeri complessi, fallo con quello (per es., con CASIO fx-991EX basta andare su `MENU` $\rightarrow$ `2:Complex` $\rightarrow$ `OPTN` $\rightarrow$ `1:Argument` $\rightarrow$ scrivere il numero complesso dentro $Arg()$ e premere `=`).

10 Criterio di Nyquist

Disegnato il diagramma di Nyquist, il criterio che permette di verificare la stabilità asintotica è il seguente:

$$\overset{\frown}{N} = P_p$$

dove P_p è il numero di poli a parte reale strettamente positiva della $F(s)$, e $\overset{\frown}{N}$ è il numero di "giri" in senso antiorario che la funzione fa attorno a -1 (quelli in senso orario si sottraggono).

10.1 Asintoti

Per calcolare eventuali asintoti del diagramma di Nyquist si procede nel seguente modo. Per calcolare un asintoto verticale, si porta prima $F(j\omega)$ nella forma $X(j\omega) + jY(j\omega)$, dove X e Y sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di $F(j\omega)$. Se l'asintoto si trova per $\omega = \omega_0$, l'ascissa σ_0 dell'asintoto verticale si calcola facendo:

$$\sigma_0 = \lim_{\omega \to \omega_0} \mathrm{Re}\,(F(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_0} X(j\omega)$$

Se questo limite esiste ed è finito, allora c'è un asintoto verticale di equazione $x = \sigma_0$. Se, invece, viene infinito, allora si tratta probabilmente di un asintoto obliquo. A questo punto, l'asintoto sarà la retta $mx + q$, dove:

$$m = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\frac{dY(j\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(j\omega)}{d\omega}}, \qquad q = Y(j\omega) - m\,X(j\omega)$$

11 Domande

11.1 Osservatore e controllore

1. *Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente?*

   Risposta: Tutti gli eventuali autovalori irraggiungibili del processo devono essere a parte reale negativa.

2. *Nell'ipotesi che lo stato sia misurabile, sotto quali condizioni è possibile progettare uno schema di controllo con reazione dallo stato in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente, e tutti gli autovalori del sistema complessivo coincidano con dei valori assegnati ad arbitrio?*

   Risposta: Tutti gli autovalori del processo devono essere raggiungibili.

3. *Sotto quali condizioni esiste un osservatore asintotico dello stato?*

   Risposta: Tutti gli eventuali autovalori inosservabili del processo devono essere a parte reale negativa.

4. *In un osservatore asintotico dello stato, sotto quali condizioni è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale?*

   Risposta: Tutti gli autovalori del processo devono essere osservabili.

5. *Si consideri un processo caratterizzato dalle matrici $A = 1$, $C = 2$ ed un osservatore asintotico dello stato di tale processo caratterizzato dalla matrice $G = 2$. Qual è l'espressione dell'errore $e(t)$ tra lo stato stimato e lo stato reale?*

   Risposta: In generale, $e(t) = \exp\big[(A - GC)t\big]e(0)$ (vedi il capitolo 4). Nel caso specifico, dato che $A - GC = -3$, risulta $e(t) = \exp\big[-3t\big]e(0)$.

11.2 Altre domande

6. *Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controreazione, rispetto a quello a controreazione semplice.*

   Risposta: Il vantaggio è quello di permettere di disaccoppiare le specifiche riguardanti il disturbo da tutte le altre, permettendo quindi di affrontare 2 problemi meno complessi rispetto al problema originario. Inoltre, si può ottenere la *reiezione completa* del disturbo.

12 Margine di fase e di guadagno

Per quanto riguarda il margine di fase, una volta trovata la pulsazione ω_0 tale per cui il modulo di $F(j\omega_0)$ è pari a 1 (o 0 in decibel):

$$\omega_0 : \quad |F(j\omega_0)| = 1 \iff |F(j\omega_0)|_{\mathrm{dB}} = 0$$

allora il margine di fase è la quantità:

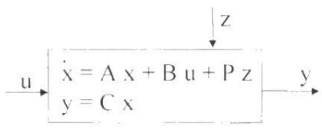
$$m_\varphi = \pi + \underline{/F(j\omega_0)}$$

Per il margine di guadagno, invece, si deve avere la pulsazione $\omega_{-\pi}$ tale per cui la fase di $F(j\omega) = -\pi = -180°$, ed è definito così:

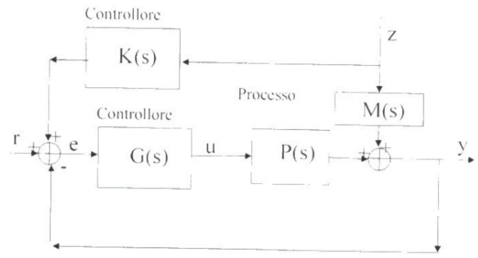
$$m_g = |F(j\omega_{-\pi})|$$

13 Disturbo misurabile

Quando ci troviamo di fronte a sistemi del tipo:



se la traccia dice che *il disturbo è misurabile* (è importante), allora si deve costruire il sistema a doppia controreazione in questo modo:



A questo punto, le funzioni di trasferimento sono:

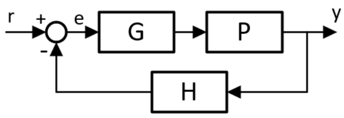
$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{D_F + N_F}, \qquad W_z = \frac{y}{z} = \frac{M + FK}{1+F} = \frac{M + GPK}{1+GP}$$

Se si deve fare in modo che la risposta y corrispondente a qualsiasi disturbo z sia nulla, si deve porre

$$\frac{M+FK}{1+F} = 0 \implies K = -\frac{M}{F}$$

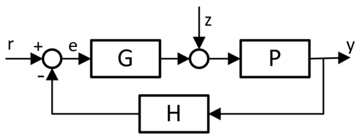
14 Funzioni di trasferimento "canoniche"

14.1 Controreazione con H



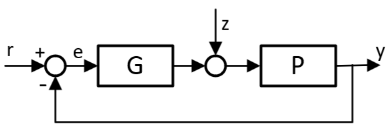
$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \qquad W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}$$

14.2 Controreazione con H e disturbo



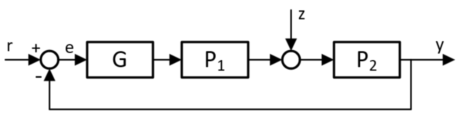
$$W \text{ e } W_e \text{ come sopra,} \qquad W_z = \frac{y}{z} = \frac{N_P D_G D_H}{N_P N_G N_H + D_P D_G D_H}$$

14.3 Controreazione con disturbo



$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}, \qquad W_z = \frac{y}{z} = \frac{N_P D_G}{N_P N_G + D_P D_G}, \qquad W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

14.4 Controreazione con disturbo tra due sottoprocessi in serie



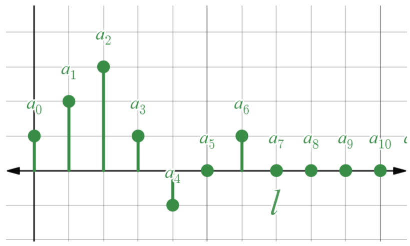
$$W \text{ e } W_e \text{ come sopra ponendo } P = P_1 P_2, \qquad W_z = \frac{y}{z} = \frac{N_{P_2} D_{P_1} D_G}{N_{P_2} N_{P_1} N_G + D_{P_2} D_{P_1} D_G}$$

15 Terza domanda

15.1 Dimostrazione: errore nullo da un istante l

Domanda. Sia assegnato un processo $P(z)$. Si dimostri come sia possibile progettare un controllore $G(z)$ in modo che l'errore $e(h)$, corrispondente ad un ingresso $r(h) = h$, sia nullo a partire da un certo istante finito (istante tempo discreto l).

Dimostrazione. Noi vorremmo che l'errore e si comporti come una funzione $f(h)$ che è identicamente nulla da un certo istante l, quindi $f(h) = 0, \forall h \geq l$, per esempio:



L'unico valore che deve necessariamente essere non nullo è $f(l-1)$ (altrimenti $l-1$ sarebbe il nostro l cercato). La funzione nel grafico è determinata dall'espressione

$$f(h) = a_0\delta(h) + a_1\delta(h-1) + \cdots + a_{l-1}\delta(h-l+1)$$

da cui segue:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{l-1}}{z^{l-1}} = \frac{a_0 z^{l-1} + a_1 z^{l-2} + \cdots + a_{l-1}}{z^{l-1}}$$

Questa funzione ha come numeratore un generico polinomio di grado minore o uguale a $l-1$, per cui sappiamo che è *propria*. Possiamo indicare questo generico polinomio al numeratore con $S(z)$. Possiamo imporre che l'errore abbia la forma desiderata:

$$e(z) = W_e(z)r(z) \overset{\text{set}}{=} \frac{S(z)}{z^{l-1}}$$

□

15.2 Dimostrazione: assegnazione degli autovalori

Domanda. Si dimostri il teorema dell'assegnazione degli autovalori.

Assegnata una coppia di matrici $(A_{n\times n}, B_{n\times p})$, è possibile scegliere opportunamente una matrice $K_{p\times n}$ tale che il sistema complessivo $A+BK$ abbia $m = \text{rango}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{pmatrix}$ autovalori scelti arbitrariamente, mentre gli altri $n-m$ autovalori coincidono necessariamente (per qualsiasi scelta di K) a quelli *irraggiungibli* della coppia (A, B).

Nella forma raggiungibile di Kalman, la matrice $A+BK$ assume la forma:

$$A' + B'K' = \begin{pmatrix} A_R & A_{12} \\ 0 & A_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_R \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R + B_R K_1 & A_{12} + B_R K_2 \\ 0 & A_I \end{pmatrix}$$

$A' + B'K'$ in questa rappresentazione è diagonale a blocchi, perciò i suoi autovalori sono quelli presenti nelle matrici $A_R + B_R K_1$ e A_I. È evidente che, indipendentemente dalla scelta di K, gli autovalori contenuti nella matrice A_I si ritroveranno esattamente nel sistema complessivo. Si può tuttavia dimostrare che, scegliendo opportunamente K (in particolare, K_1), si possono modificare arbitrariamente gli autovalori raggiungibili del sistema.

Consideriamo allora solamente la parte di sistema identificata dalla matrice $A_R + B_R K_1$. Possiamo effettuare un ulteriore cambio di coordinate e portare le matrici A_R e B_R nella forma canonica raggiungibile. Questo è sempre possibile per definizione, perché sappiamo che nella matrice A_R sono presenti tutti gli autovalori raggiungibili. Dimostriamo il caso di interesse, ovvero con $p = 1$; si ha che

$$\tilde{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$\det(\lambda I - \tilde{A}_R) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (\tilde{A}_R + \tilde{B}_R\tilde{K}_R)) &= \det\left[\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_0 - k_1 & a_1 - k_2 & \cdots & \lambda + a_{m-1} - k_m \end{pmatrix} \\ &= \lambda^m + (a_{m-1} - k_m)\lambda^{m-1} + \cdots + (a_1 - k_2)\lambda + (a_0 - k_1) \end{aligned}$$

Essendo ogni termine del polinomio caratteristico dipendente da un termine di K, possiamo concludere che gli autovalori raggiungibili del sistema complessivo sono modificabili a piacimento. In effetti, se il polinomio caratteristico desiderato è

$$p^*(\lambda) = \lambda^m + \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

allora basta porre

$$\lambda^m + (a_{m-1} - k_m)\lambda^{m-1} + \cdots + (a_1 - k_2)\lambda + (a_0 - k_1) \overset{\text{set}}{=} \lambda^m + \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

Risolvendo l'equazione diofantina si ottiene il sistema

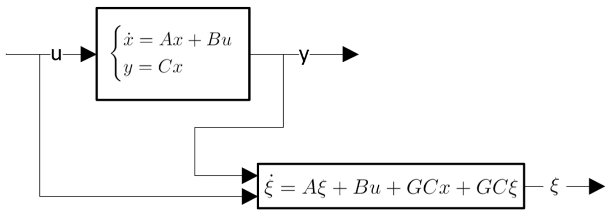
$$\begin{cases} a_{m-1} - k_m = \beta_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 - k_2 = \beta_1 \\ a_0 - k_1 = \beta_0 \end{cases}$$

Scegliendo, allora, $\tilde{K}_R = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - \beta_0 & a_1 - \beta_1 & \cdots & a_{m-1} - \beta_{m-1} \end{pmatrix}$, e trasformando indietro $\tilde{K}_R$ nella K, si ottiene che il sistema finale avrà polinomio caratteristico esattamente pari a p^*. □

15.3 Dimostrazione: osservatore asintotico

Domanda. Dimostra sotto quali ipotesi si può costruire un osservatore asintotico.

Questo problema è il *duale* dell'assegnazione degli autovalori. Dato il processo in x e il suo osservatore asintotico in ξ, dimostriamo che esiste una matrice G tale per cui l'errore $e(t) = x(t) - \xi(t)$ tenda asintoticamente a zero.



Essendo $e = x - \xi$, si ha anche che:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\xi} \\
&= Ax + Bu - A\xi - Bu - Gy + GC\xi \\
&= Ax - A\xi - GCx + GC\xi \\
&= (A - GC)(x - \xi) \\
&= (A - GC)e
\end{aligned}$$

In forma esplicita, l'errore ha la seguente espressione:

$$e(t) = \exp\Big[(A - GC)t\Big]\, e(0)$$

Da qui è evidente che, per far sì che l'errore tenda a zero per $t \to +\infty$, la matrice $A - GC$ debba avere tutti gli autovalori a parte reale negativa. Tuttavia, la matrice G permette di modificare solamente gli autovalori osservabili del sistema di partenza, perché, considerando la forma osservabile di Kalman:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{\text{inos}} & A_{12} \\ 0 & A_{\text{oss}} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{\text{oss}} \end{pmatrix}$$

si ha che

$$\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = \begin{pmatrix} A_{\text{inos}} & A_{12} \\ 0 & A_{\text{oss}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{\text{oss}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\text{inos}} & A_{12} - \tilde{G}_1 C_{\text{oss}} \\ 0 & A_{\text{oss}} - \tilde{G}_2 C_{\text{oss}} \end{pmatrix}$$

Questa matrice è triangolare a blocchi, perciò gli autovalori sono quelli presenti nelle matrici A_{inos} e $A_{\text{oss}} - \tilde{G}_2 C_{\text{oss}}$. Si vede che, indipendentemente dal valore di G, tutti gli autovalori inosservabili della matrice A restano anche nel sistema dell'errore.

Dunque, se il sistema ha p autovalori osservabili, il polinomio caratteristico del sistema errore sarà:

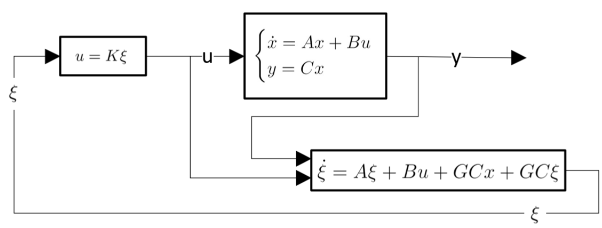
$$|\lambda I - (A - GC)| \overset{\text{set}}{=} \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_{\text{arb}_i}) \prod_{j=1}^{n-p} (\lambda - \lambda_{\text{inos}_j}), \qquad \text{dove } p = \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

□

15.4 Dimostrazione: principio di separazione

Domanda. Si dimostri il principio di separazione.

Consideriamo un processo con matrici A, B, C, il suo osservatore asintotico, e un sistema a controreazione dallo stato stimato ξ:



Il sistema complessivo ha la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + BK\xi + GCx - GC\xi \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

Applicando il cambio di coordinate $T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$, si ha che:

$$\tilde{A}_c = TA_cT^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A + BK - GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - GC \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $\tilde{A}_c$, essendo diagonale a blocchi, sono composti dall'unione degli autovalori delle due matrici $A + BK$ e $A - GC$. Perciò, se l'obiettivo è rendere asintoticamente stabile il sistema complessivo, il problema si è *separato* in due sotto-problemi, completamente indipendenti: uno in cui si deve stabilizzare la parte del sistema individuata dalla matrice $A + BK$, e il secondo si riferisce alla parte con matrice $A - GC$. Questi sono esattamente il problema dell'assegnazione degli autovalori e il problema della costruzione dell'osservatore asintotico, rispettivamente.

Sappiamo già che m autovalori raggiungibili del sistema $A + BK$ sono assegnabili ad arbitrio scegliendo la matrice K, così come lo sono p autovalori osservabili del sistema $A - GC$, scegliendo opportunamente la matrice G. □

15.5 Dimostrazione: sistemi a cascata

Domanda. Si dimostri che nella cascata di due sistemi caratterizzati dalle funzioni di trasferimento

$$P_1(s) = \frac{s+3}{s}, \quad P_2(s) = \frac{s+1}{s+3}$$

è presente un autovalore irraggiungibile e osservabile in -3.

In generale, si realizzano i due sistemi, e si connettono in parallelo. Perciò, dati i due processi

$$P_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

se questi sono connessi in serie, allora l'ingresso di P_2 è l'uscita di P_1, ovvero $u_2 = y_1$. Inoltre, l'uscita del sistema complessivo sarà l'uscita di P_2. Allora:

$$P : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 \\ y = C_2 x_2 + D_2 y_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{pmatrix} x + D_2 D_1 u \end{cases}$$

Se le quattro matrici del sistema complessivo P le chiamiamo A^*, B^*, C^*, D^*, allora basta fare il test di Hautus sull'autovalore λ_0 richiesto dalla domanda per verificare le sue caratteristiche di raggiungibilità e osservabilità:

$$\begin{pmatrix} A^* - \lambda_0 I & B^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^* - \lambda_0 I \\ C^* \end{pmatrix}$$

Nel caso dell'esempio, realizzando si trova:

$$A_1 = 0,\ B_1 = 1,\ C_1 = 3,\ D_1 = 1$$
$$A_2 = -3,\ B_2 = 1,\ C_2 = -2,\ D_2 = 1$$

da cui segue che il sistema complessivo avrà le matrici:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D^* = 1$$

A questo punto si vede con il test di Hautus che:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A^* + 3I & B^* \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \implies -3 \text{ è irraggiungibile.}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A^* + 3I \\ C^* \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2 \implies -3 \text{ è osservabile.}$$

□

15.6 Dominio del tempo e dominio di Laplace

Domanda. Vantaggi e svantaggi dell'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo rispetto all'assegnazione degli autovalori nel dominio di Laplace.

I vantaggi di assegnare autovalori nel dominio di Laplace, che sono anche gli svantaggi del dominio del tempo:

- **Facilità dei calcoli.** Nel dominio di Laplace, la quantità di calcoli da svolgere è nettamente inferiore a quella nel dominio del tempo, e molte operazioni risultano più semplici da svolgere.
- **Controllore a dimensione minima.** Mentre nel dominio del tempo il controllore ha necessariamente dimensione $2n$, con n dimensione della matrice A del processo da controllare, in Laplace si può costruire un controllore a dimensione minima.

Gli svantaggi del dominio di Laplace sono i seguenti:

- Ci sono dei calcoli extra da svolgere, ovvero la trasformazione del sistema dal tempo al dominio di Laplace, e la realizzazione del controllore nel tempo, una volta trovato.
- Non può essere utilizzato Laplace per sistemi non lineari.

I vantaggi del dominio del tempo sono:

- Si possono trattare sistemi non lineari
- Valgono le stesse formule per più ingressi e più uscite

15.7 Step progettazione controllore

Domanda. Quali sono gli step da seguire per un ingegnere automatico per stabilizzare sistema?

1. Identificazione di:
   - Grandezze da controllare, $y(t)$
   - Grandezze controllanti, $u(t)$
   - Disturbi, $z(t)$
   - Specifiche progettuali (Tracking, Disturbance rejection, Stability, Optimal control, ecc.)

2. Modellizzazione del processo nel dominio del tempo, ovvero cercare di tradurre il processo in equazioni matematiche. Sarebbe ottimale riuscire a modellare un sistema lineare stazionario della forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pz(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Qz(t) \end{cases}$$

nel caso in cui non ci si riesca, ci si può "accontentare" anche di sistema non lineare della forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, z, t) \\ y(t) = g(x, u, z, t) \end{cases}$$

3. (*) Modellizzazione del processo nel dominio di Laplace. Non ci sono più le sei matrici A, B, C, D, P, Q, ma due funzioni di trasferimento $P(s)$ e $M(s)$.

4. Scelta dello schema di controllo. Può essere ad anello aperto, oppure ad anello chiuso, che è il modo più basilare per controllare il processo. Esiste anche lo schema di controllo a doppio anello chiuso, se il disturbo è misurabile.

5. (*) Progetto del controllore nel dominio di Laplace

6. Progetto del controllore nel dominio del tempo. Alla fine, si avrà un controllore nella forma

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) = H\xi(t) + Le(t) \end{cases}$$

L'uscita $u(t)$ del controllore è l'ingresso del processo.

I punti segnati con (*) indicano gli step da effettuare nel dominio di Laplace; il passaggio al dominio di Laplace non è necessario.

16 Epilogo

Per l'amor del cielo:

- Controlla sempre se sia presente la matrice D del processo.
- Leggi le domande successive, potrebbero dare indizi sullo svolgimento della domanda attuale. Scontato, dirai; ebbene sì, ma tutti quelli che hanno sbagliato Nyquist lo scorso appello si sarebbero resi conto, se solo avessero letto per bene la domanda dopo.
- La **forma di Bode**. Mi raccomando. Non te la ricordi? Scemo. Ecco a te: $1 \pm s$, $1 \pm \frac{2z}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$. Ricorda che il segno $\pm$ non interessa al modulo, ma ribalta la fase.
- Su Nyquist, controlla trecento volte il senso. Dev'essere **antiorario**. Hai presente il senso delle lancette? L'altro. Non fidarti della funzione, fidati del simbolo sopra la $\overset{\frown}{N}$.
- Hai controllato se il processo ha la D? E nel secondo esercizio? Ti vedo eh.
- C'è qualche domanda sulla risposta a regime permanente? Certo che c'è, che domande. Beh, controlla se dice che la risposta deve essere **in modulo** uguale o minore di un valore. Mi raccomando il modulo.
- A proposito di regime permanente, se deve essere uguale a 8 per riferimenti del tipo $r(t) = 2t^2$, prima ottieni la $W(s)$, la calcoli in zero, poi moltiplichi per il valore opportuno (in questo caso 4, perché dobbiamo passare da $t^2/2$ a $2t^2$), e solo *poi* puoi porla uguale a 8. Usa questo esempio a tuo vantaggio. Non sbagliarti su ste cavolate.
- Dai che è 30L facile.

Fase che sia $30^\circ \Rightarrow \angle F(j\omega) = 30^\circ - 180^\circ$

ω_t deve essere una pulsazione di attr. $\Rightarrow |F(j\omega_t)| = 1$

si determini l'andamento $y = Wr$

$e = W_e r$

K in corrispondenza della circonferenza, $z = 1$ o -1