20. april 2020

Računalniška orodja – vaje: naloga 3

Diskutirajmo poševni met krogle z maso m ob upoštevanju kvadratičnega zakona zračnega upora, kot je na sliki 1. Recimo, da označimo čas s t, lego krogle z vektojem $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{k}$ in hitrost kot vektor $\mathbf{v}(t) = \mathrm{d}\mathbf{r}(t)/\mathrm{d}t$. Vektor pospeška $\mathbf{a}(t) = \mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)/\mathrm{d}t^2$ je določen z enačbo

$$m\mathbf{a}(t) = -mg\mathbf{k} - C\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{v}(t)\ ,$$

kjer je g je gravitacijski pospšek in C je konstanta upora. S substitucijami spremenljivk $x = L\xi$, $z = L\zeta$ in $t = T\tau$, kjer so ξ, ζ in τ brezdimenzijske spremenljivke, in ustrezno izbiro skalirnih konstant L in T zgornjo enačbo prepišemo v brezdimenzijsko obliko

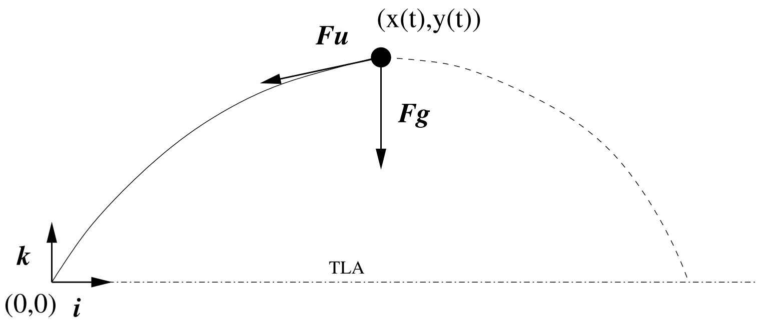
$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2} = -\|\mathbf{u}\|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} = -1 - \|\mathbf{u}\|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau}\ , \tag{1}$$

pri čemer uvedemo brezdimenzijsko hitrost

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau}\right)\ .$$

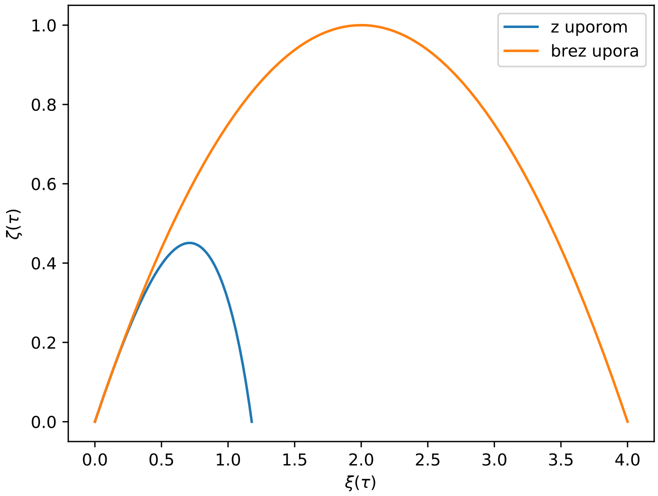
Sistem navadnih diferencialnih enačb (1) opisuje dinamiko krogle, kjer je zadnji člen v obeh enačbah odgovoren za upor. Sistem enačb (1) želimo integrirati z začetnimi pogoji (pri $\tau = 0$):

$$(\xi, \zeta)|_{\tau=0} = (0, 0) \qquad \mathbf{u}|_{\tau=0} = A(\cos\phi, \sin\phi)\ .$$



Slika 1: Skica meta krogle, na katero pri letu deluje sila teže $F_\mathrm{g} = mg$ in sila zračnega upora $F_\mathrm{u} = Cv^2$, in baznih vektorjev $\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, v katerih opišemo trajektorijo krogle.

V python skripti `nal3.py` izračunaj trajektorijo krogle v prisotnosti in odsotnosti zračnega upora od njenega začetka do trka s tlemi v primeru $A = 2$ in $\phi = \pi/4$. Obe trajektoriji prikažite na enem grafu z legendo in označenimi osmi, kot je prikazana spodaj, in jo shranite v sliko `meta.pdf`.



Prav tako narišite graf, kako se domet, označen s črko D, spreminja z velikostjo začetne hitrosti A ob prisotnosti in odsotnosti upora pri začetnem kotu $\phi = \pi/4$ in ga shranite v sliko domet_A.pdf. Nabor začetnih hitrosti A, za katere izračunate domet, je enak

```
4*np.linspace(0.01, 0.99, 100) .
```

Za izračun trajektorij in dometa zadostuje uporaba integracija z metodo RK4 in korakom $dt = 0.01$, kjer zadnji korak pred trkom drobite tako dolgo, da se ζ-koordinata trajektorije približa ničli na vsaj 6 decimalk. Problem lahko tudi zelo elegantno rešite z uporabo scipy.integrate.solve_ivp, ki je dostopen v novejših verzijah paketa scipy.

V LaTeX napišite poročilo z imenom nal3.tex v katerem po naslovu z vašim imenom in priimkom vključite sliki meta.pdf in domet_A.pdf, vsako v svojem figure okolju z ukazom \includegraphics in primernim opisom preko uporabe ukaza \caption. V dototeki opišite enačbe, ki ste jih integrirali in kako ste določili domet. Latex datoteko prevedite v PDF format in tako dobite nal3.pdf.

Vse datoteke (nal3.py, meta.pdf, domet_A.pdf, nal3.tex, nal3.pdf) shranite v zip arhiv z imenom

vaje_nal_3_<priimek>_<ime>.zip

in ga pošljete na e-mail naslov:

rovf-vaje@fmf.uni-lj.si

z zadevo:

RACORODJA Vaje: Naloga 3 <priimek> <ime>

kjer <priimek> in <ime> nadomestite z lastnim priimkom in imenom brez $<$ in $>$:-).