

Théorie des quaternions

1 Introduction

1.1 Abstract

La théorie des quaternions est une alternative extrêmement élégante aux rotations d'Euler ou Tait-Bryan pour représenter des rotations dans l'espace. La théorie des quaternions est une extension des nombres complexes au domaine de l'espace. Ce document a pour but de donner les éléments de théorie essentiels à la compréhension des quaternions.

1.2 Bibliographie

[1] Visualizing Quaternions, Andrew J. Hanson, 2006

2 Théorie des rotations dans le plan

Lorsqu'on veut effectuer une rotation dans le plan, on a le choix entre deux possibilités : la rotation matricielle et la rotation par nombre complexe.

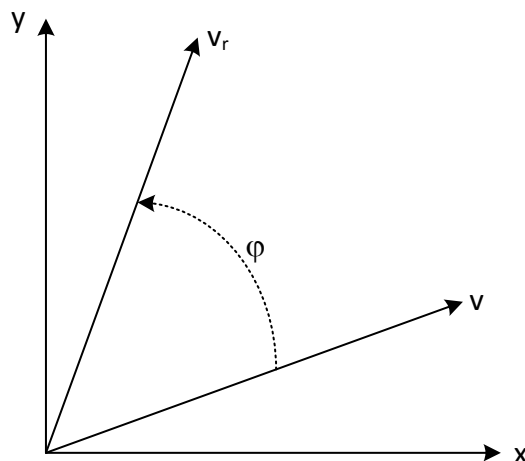


Figure 1

Attention : un angle de rotation φ est orienté. Il est défini positif dans le sens trigonométrique (exemple de la Figure 1) et négatif dans le sens contraire.

2.1 Rotation matricielle

La rotation matricielle s'effectue via l'opération suivante :

$$\begin{pmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

En notation simplifiée on obtient :

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

La matrice \mathbf{R}_z est orthogonale, ce qui implique que son inverse est égale à sa transposée : $\mathbf{R}_z^{-1} = \mathbf{R}_z^T$.

Pour l'opération inverse, on effectue une rotation par $-\varphi$:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{pmatrix} \quad (3)$$

En notation simplifiée on obtient :

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}_z^T \cdot \mathbf{v}_r \quad (4)$$

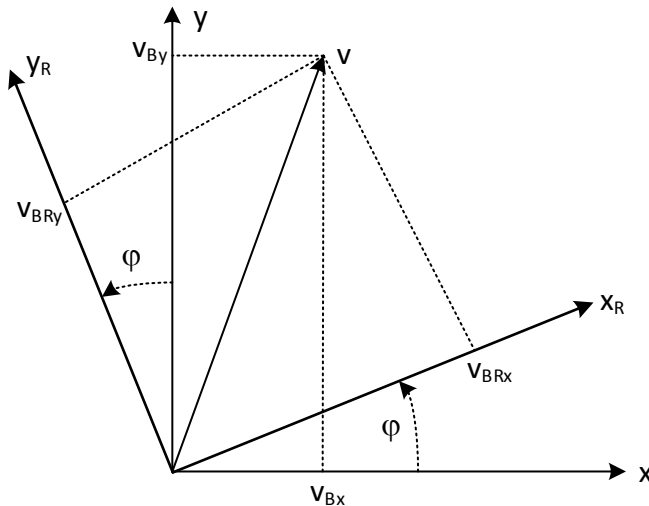
2.1.1 Exemple

On aimerait imprimer une rotation de 60 degrés au vecteur $\vec{v} = (1 \quad \sqrt{3})^T$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.2 Changement de base matriciel

Le problème proposé ici est différent du précédent, tout en lui ressemblant. On a une base initiale \mathbf{B} et une base \mathbf{B}_R obtenue par rotation d'un angle φ . Soit un même vecteur \mathbf{v} exprimé dans l'une des deux bases : quelles seront ses coordonnées dans l'autre base ?



On trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{BR} = \mathbf{R}_z^T \cdot \mathbf{v}_B \\ \mathbf{v}_B = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{v}_{BR} \end{cases} \quad (6)$$

La similitude entre les équations de (6) et les équations (2) et (4) est évident : un changement de base s'exprime comme une rotation inverse. On s'en servira pour les raisonnements analogues dans l'espace.

2.3 Rotation par nombre complexe

La rotation par nombre complexe est extrêmement élégante. Elle consiste à simplement multiplier le vecteur \underline{v} par $e^{j\varphi}$.

$$\underline{v}_r = \underline{v} \cdot e^{j\varphi} \quad (7)$$

L'opération inverse est triviale :

$$\underline{v} = \underline{v}_r \cdot e^{-j\varphi} \quad (8)$$

2.3.1 Exemple

On aimerait imprimer une rotation de 60 degrés au nombre complexe $\underline{v} = 1 + j\sqrt{3}$. On obtient :

$$(1 + j\sqrt{3}) \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = (1 + j\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + j\sqrt{3} \quad (9)$$

Sous forme exponentielle, c'est encore plus élégant :

$$\left(2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (10)$$

2.4 Relation avec les quaternions

Si la rotation par matrice fonctionne, elle est moins pratique que la multiplication complexe. La théorie des quaternions permet d'employer une procédure similaire à la multiplication complexe, mais dans l'espace !

3 Théorie des rotations dans l'espace

3.1 Rotation matricielle

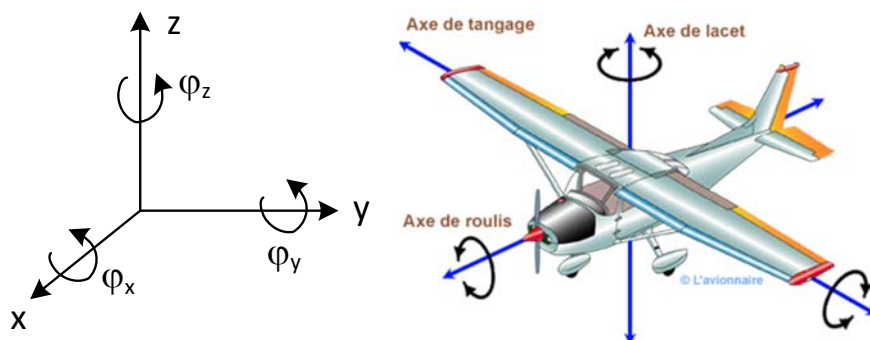


Figure 2

Il existe plusieurs manières d'effectuer une rotation dans l'espace : la méthode qui suit est appelée z-y'-x'' en rotation intrinsèque. On parle encore de méthode Tait–Bryan avec φ_x étant le roulis, φ_y étant le tangage et φ_z étant le lacet. Soit un vecteur $v = (v_x \ v_y \ v_z)^T$. On lui applique une rotation d'angle φ_z autour de l'axe des z; v devient v' et les axes x et y sont déplacés sur de nouveaux axes x' et y'. A présent on applique à v' une rotation d'angle φ_y autour du nouvel axe y'; v' devient v'' et les axes x' et z sont déplacés sur de nouveaux axes x'' et z'. Pour terminer on applique à v'' une dernière rotation d'angle φ_x autour du nouvel axe x''; v'' devient v_r et les axes y' et z' sont déplacés sur les nouveaux axes y'' et z''.

La rotation intrinsèque a ceci de particulier qu'elle tient compte des rotations précédentes : on change donc le référentiel à chaque rotation.

Au niveau matriciel, on obtient la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_z} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & \sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{pmatrix}}^{R_y} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix}}^{R_x} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

En notation simplifiée on obtient :

$$v_r = (R_z \cdot R_y \cdot R_x) \cdot v \quad (12)$$

On démontre cette relation avec le changement de base décrit au §3.2. On peut multiplier les trois matrices pour n'en garder qu'une seule, mais cela donne une matrice assez compliquée. L'avantage de les garder les trois, c'est qu'on comprend bien l'action de chacune. A noter qu'on peut obtenir une même rotation avec d'autres stratégies, par exemple z-x'-z'' (appelée méthode de Euler ou encore méthode des cardans).

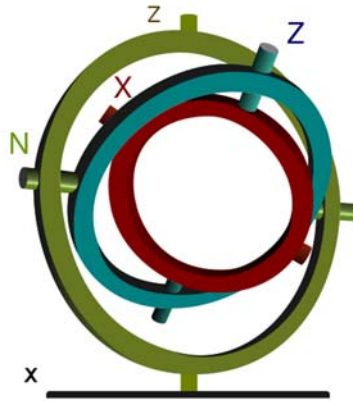


Figure 3 – principe du cardan – source Wikipedia

On constate que les trois matrices R_x , R_y et R_z sont orthogonales, donc leurs matrices inverses sont égales à leurs transposées : $R_x^{-1}=R_x^T$, $R_y^{-1}=R_y^T$ et $R_z^{-1}=R_z^T$. La relation inverse de (12) est simple :

$$v = (R_x^T \cdot R_y^T \cdot R_z^T) \cdot v_r \quad (13)$$

La rotation matricielle n'est à l'évidence pas simple à comprendre et à appliquer dans l'espace. D'autre part, il y a des exemples d'application où son emploi pose de gros problèmes (par exemple le blocage de cardan – angl. gimbal lock). L'usage des quaternions ne pose aucun problème, il est numériquement plus robuste et par conséquent, il est très souvent préféré aux rotations matricielles.

3.1.1 Rotation extrinsèque (pour ceux que cela intéresse)

La rotation extrinsèque effectue des rotations autour d'axes x , y et z fixes. Soit un vecteur $v = (v_x \ v_y \ v_z)^T$. On lui applique une rotation d'angle φ_z autour de l'axe des z et on obtient un nouveau vecteur $v' = (v'_x \ v'_y \ v'_z)^T$. On applique ensuite une rotation d'angle φ_y autour de l'axe des y et on obtient un nouveau vecteur $v'' = (v''_x \ v''_y \ v''_z)^T$. On applique enfin une rotation d'angle φ_x autour de l'axe des x et on obtient le vecteur définitif $v_r = (v_r_x \ v_r_y \ v_r_z)^T$. L'ordre des rotations n'est pas interchangeable, si on permute deux rotations on obtient un résultat différent.

Si on regroupe nos exemples on obtient :

$$\text{Rotation extrinsèque} \quad v_r = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot v \quad (14)$$

$$\text{Rotation intrinsèque} \quad v_r = R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot v \quad (\text{équivalent à (12)}) \quad (15)$$

3.2 Changement de base matriciel

Le problème est ici différent de la rotation d'un vecteur. Soit B une base fixe et B_R une base ayant subi plusieurs rotations. Soit le vecteur v_B représenté dans la base B , quelles seront ses coefficients dans la base B_R ?

Prenons le changement de base z - y' - x'' . La base B est la base initiale. La base B_R est obtenue en effectuant les rotations successives autour des axes z , y' et x'' (raisonnement intrinsèque, dès la seconde rotation on tient compte des rotations précédentes). On a la situation suivante :

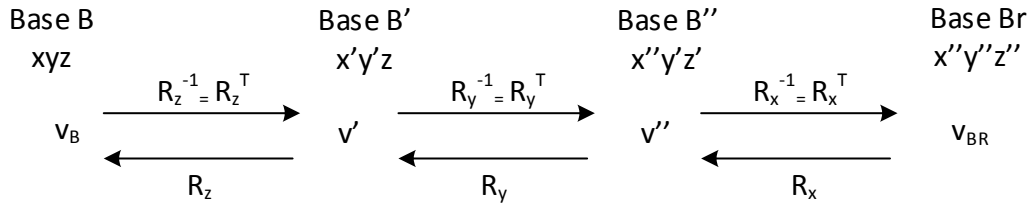


Figure 4

On trouve les changements de base suivants :

$$\begin{cases} v_{BR} = (R_x^T \cdot R_y^T \cdot R_z^T) \cdot v_B \\ v_B = (R_z \cdot R_y \cdot R_x) \cdot v_{BR} \end{cases} \quad (16)$$

La deuxième relation de (16) est importante : elle permet de ramener à la base fixe B les coordonnées d'un vecteur exprimé dans une base mouvante B_R . Ici encore, si on compare (16) avec (12) et (13), on constate que le changement de base s'exprime comme une rotation inverse.

3.3 Théorie des quaternions

Soit le nombre suivant :

$$z = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k \quad (17)$$

avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij &= k & ji &= -k \\ ik &= -j & ki &= j \\ jk &= i & kj &= -i \end{aligned} \quad (18)$$

On constate la non-commutativité de (18) puisque $ij=-ji$, $ik=-ki$ et $jk=-kj$! On peut se référer au tableau suivant :

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

A titre d'exercices, on résoudra la multiplication $z = (1-2i+j+2k) \otimes (1+i-2j+k)$ (réponse : $z=3+4i+3j+6k$).¹

3.3.1 Quelques propriétés

Soit $z = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$. On définit :

Conjugué complexe : $z^* = q_0 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k$ (19)

Norme : $|z| = \sqrt{z \otimes z^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ (20)

- Un quaternion est dit **unitaire** si sa norme $|z|$ est égale à 1.
- La valeur q_0 est appelée **partie réelle** de z .
- Un quaternion est dit **pur** si $q_0=0$.

3.3.2 Théorème important

Soit un vecteur unitaire de l'espace $\vec{u} = (u_x \quad u_y \quad u_z)^T$ et un angle de rotation φ .

On définit le quaternion-orientation r de la manière suivante :

$$r = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + u_x \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot i + u_y \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot j + u_z \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot k \quad (21)$$

Ce quaternion est unitaire car :

$$|r| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \underbrace{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}_{=1}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 1 \quad (22)$$

¹ La multiplication de quaternions sera indiquée avec le symbole \otimes dans la suite de ce document

Soit encore un vecteur de l'espace $\vec{v} = (v_x \ v_y \ v_z)^T$. On aimerait réaliser une rotation d'angle φ autour du vecteur unitaire \vec{u} (voir Figure 5) pour obtenir \vec{v}_r :

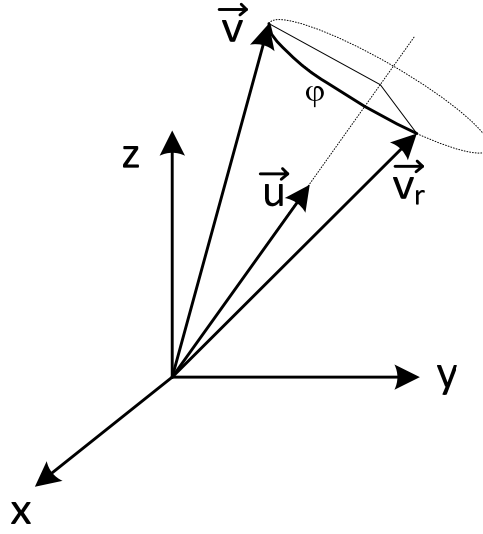


Figure 5

On démontre la très importante relation suivante :

$$v_r = r \otimes v \otimes r^* \quad (23)$$

où v et v_r sont des quaternions purs définis ainsi :

$$\begin{cases} v = v_x \cdot i + v_y \cdot j + v_z \cdot k \\ v_r = v_{rx} \cdot i + v_{ry} \cdot j + v_{rz} \cdot k \end{cases} \quad (24)$$

3.3.3 Exemple

Soit le vecteur $\vec{v} = (1 \ -1 \ 3)^T$. On aimerait effectuer une rotation de $\varphi = \pi/2$ autour du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{1}{3} \cdot (2 \ 1 \ 2)^T$.

On pose les quaternions v et r :

$$\begin{cases} v = i - j + 3k \\ r = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot j + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot i + \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot j + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot k \end{cases} \quad (25)$$

On calcule le quaternion v_r :

$$v_r = r \otimes v \otimes r^* = \frac{29}{9} \cdot i - \frac{5}{9} \cdot j + \frac{5}{9} \cdot k \quad (26)$$

On déduit le vecteur $\vec{v}_r = \left(\frac{29}{9} \ -\frac{5}{9} \ \frac{5}{9}\right)^T$

3.3.4 Rotations successives

Imaginons qu'on souhaite effectuer n rotations successives, caractérisées par les quaternions r_1, r_2, \dots, r_n . On peut synthétiser toutes ces rotations en une seule :

$$r = r_n \otimes r_{n-1} \otimes \dots \otimes r_2 \otimes r_1 \quad (27)$$

3.4 Exemple et comparaison matrices-quaternions

Prenons l'exemple suivant. Soit le vecteur $\vec{v}_r = (1 \ 2 \ -1)^T$ auquel nous aimerions appliquer les rotations successives suivantes (modèle intrinsèque) : $-\pi/3$ autour de l'axe z , puis $\pi/2$ autour de l'axe y' , puis enfin $\pi/6$ autour de l'axe x'' .

Avec les matrices on trouve :

$$v_r = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Avec les quaternions, on passe par les étapes suivantes :

$$\begin{cases} r_z = \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) + i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot k \\ r_y = \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + i \cdot 0 + j \cdot \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + k \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot j \\ r_x = \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + j \cdot 0 + k \cdot 0 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot k \end{cases} \quad (29)$$

$$\Rightarrow r = r_z \otimes r_y \otimes r_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot j - \frac{1}{2} \cdot k$$

Et on trouve enfin :

$$v_r = r \otimes v \otimes r^* = 2 \cdot i + j - k \quad (30)$$

On déduit le vecteur $\vec{v}_r = (2 \ 1 \ -1)^T$

Toutes ces rotations sont équivalentes à une seule rotation d'angle φ autour d'un vecteur unitaire u . On considère le quaternion résultant $r = 1/2 + i/2 + j/2 - k/2$. On trouve selon (21) :

$$\begin{cases} \varphi = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0.5 / \sin(\varphi/2) \\ 0.5 / \sin(\varphi/2) \\ -0.5 / \sin(\varphi/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (31)$$

3.5 Changement de base au moyen des quaternions

On la situation suivante, à comparer avec la Figure 4.

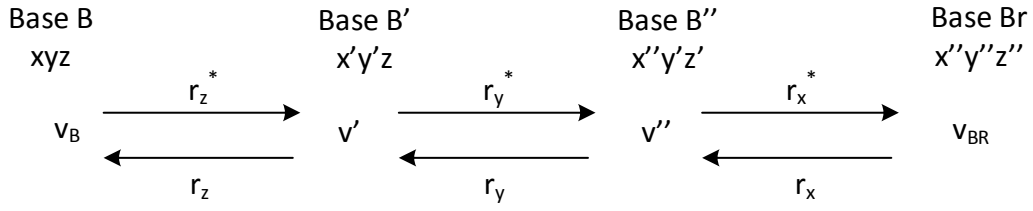


Figure 6

On trouve les changements de base suivants :

$$\begin{cases} r_{B \rightarrow BR} = r_x^* \otimes r_y^* \otimes r_z^* \\ r_{BR \rightarrow B} = r_z \otimes r_y \otimes r_x \end{cases} \quad (32)$$

Ensuite il suffit d'employer la relation (30) pour effectuer le changement de base.

4 Comment et pourquoi allons-nous employer les quaternions dans notre projet ?

Le composant de mesure prévu possède un accéléromètre, un gyroscope et un magnétomètre, tous tridimensionnels. Cependant, tous ces capteurs vont donner des indications par rapport à leur propre référentiel, et pas du tout par rapport à un référentiel fixe ! Si on compare à nos exemples, on va considérer B la base fixe (la terre) et B_R la base mouvante liée au capteur. Le capteur nous livre les résultats suivants :

$$\vec{a}_{acc_{BR}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{B_R} \quad \vec{\omega}_{gyr_{BR}} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_{B_R} \quad \vec{m}_{mag_{BR}} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}_{B_R} \quad (33)$$

Si on intègre deux fois le vecteur d'accélération $\vec{a}_{acc_{BR}}$ par rapport à t, on obtiendra une petite catastrophe \vec{x}_{BR} qui correspond aux mouvements calculés dans un référentiel mouvant B_R. Avant la double intégration, il faut tout ramener au référentiel fixe B en employant les formules (32) et (30).