НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Теория автоматического управления

Лабораторная работа №8

«Модальные регуляторы и наблюдатели»

Выполнил студент:

Мысов М.С. (B-8)

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1

Система:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 5\\ 0\\ 6\end{bmatrix}u$$

1.1. Собственные числа

$$\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3 + 4i,\ \ \lambda_4 = 3 - 4i.$$

На основе жордановой формы можно сделать вывод об управляемости собственных чисел:

Управляемы: $\lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3 + 4i,\ \ \lambda_4 = 3 - 4i$, так как все собственные числа различны и элементы матрицы B, соответствующие последним строкам жордановых клеток, не равны нулю.

Неуправляемо: $\lambda_1 = -1$, так как элемент матрицы B, соответствующие строке, в которой находится собственное число, равен нулю.

Так как не все собственные числа управляемы, то система не является полностью управляемой.

Так как неуправляемому собственному числу $\lambda_1 = -1$ соответствует устойчивая мода, а все остальные собственные числа управляемы, то система является стабилизируемой.

1.2. Схема моделирования системы с регулятором

$\dot{x} = Ax + Bu$ с регулятором $u = Kx$

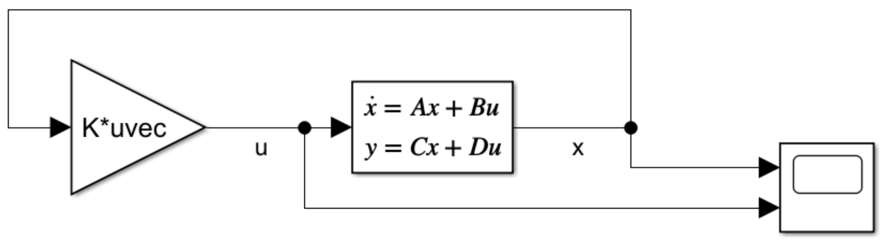

Рисунок 1 – схема моделирования системы с регулятором u = Kx

1.3. Модальное управление

1. $\boldsymbol{\sigma(A+\ BK)\ =\ \{-1,-1,-1,-1\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \ Y = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ (Y, \Gamma) - \text{наблюдаема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.667 & 2.22 & 2.4 & 2.469 \\ -0.75 & -0.9375 & -0.9609 & -0.9609 \\ 0.75 & 0.75 & 0.7266 & 0.72 \end{bmatrix}$$

$$K = -YP^{-1} = [-0.0833 \quad -0.0794 \quad 0.2092 \quad -0.836]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

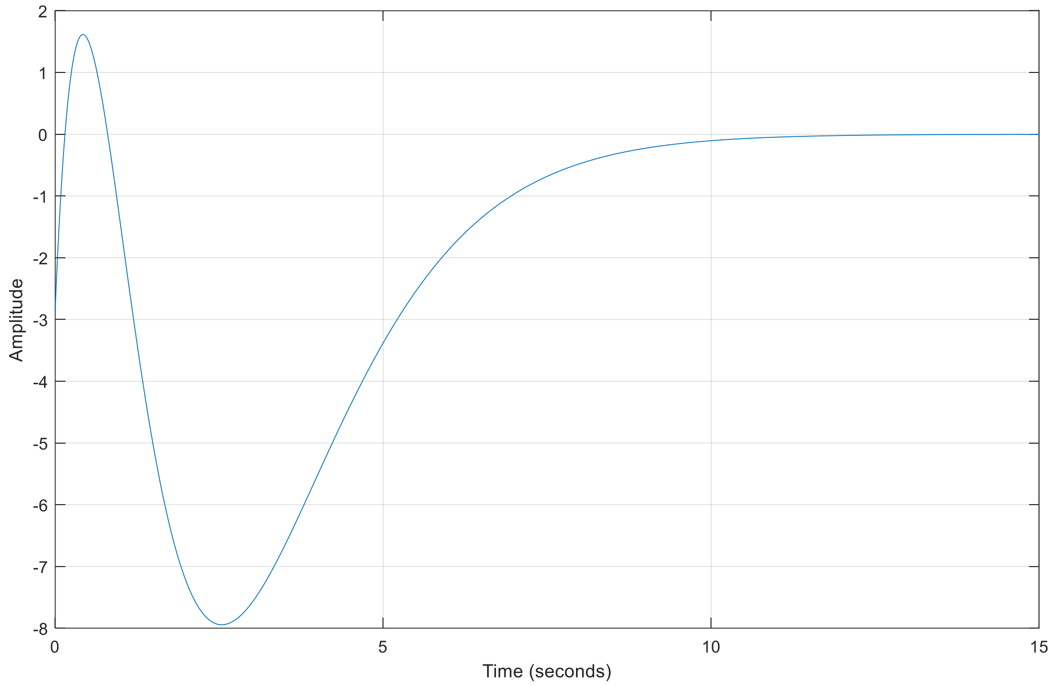

Рисунок 2 – график входного воздействия

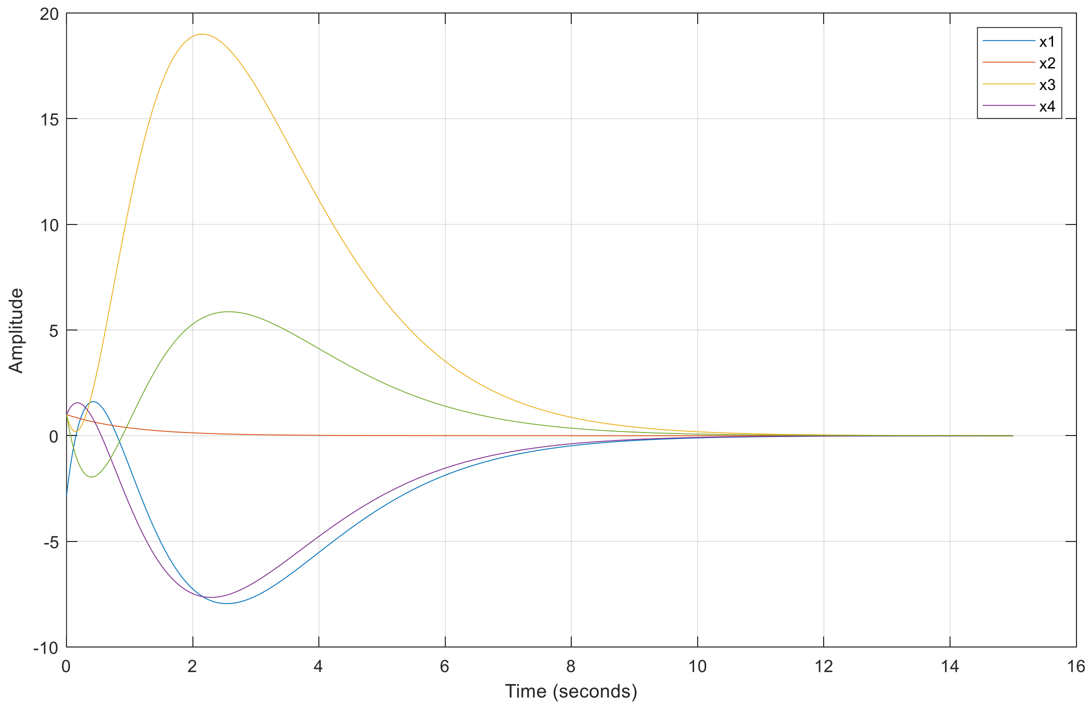

Рисунок 3 – график компонент вектора x

В качестве собственных чисел замкнутой системы было выбрано число -1, которое соответствует устойчивой моде, поэтому компоненты вектора сошлись.

2. $\boldsymbol{\sigma(A + BK) = \{-1, -10, -100, -100\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}, \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], (Y, \Gamma) - \text{наблюдаема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.667 & 0.4167 & 0.049 & 0.0495 \\ -0.75 & -0.1297 & -0.0023 & -0.0023 \\ 0.75 & 0.4216 & 0.0582 & 0.0587 \end{bmatrix}$$

$$K = -YP^{-1} = [0.9188 \quad -1.4688 \quad -0.849 \quad 1.1877]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Графики:

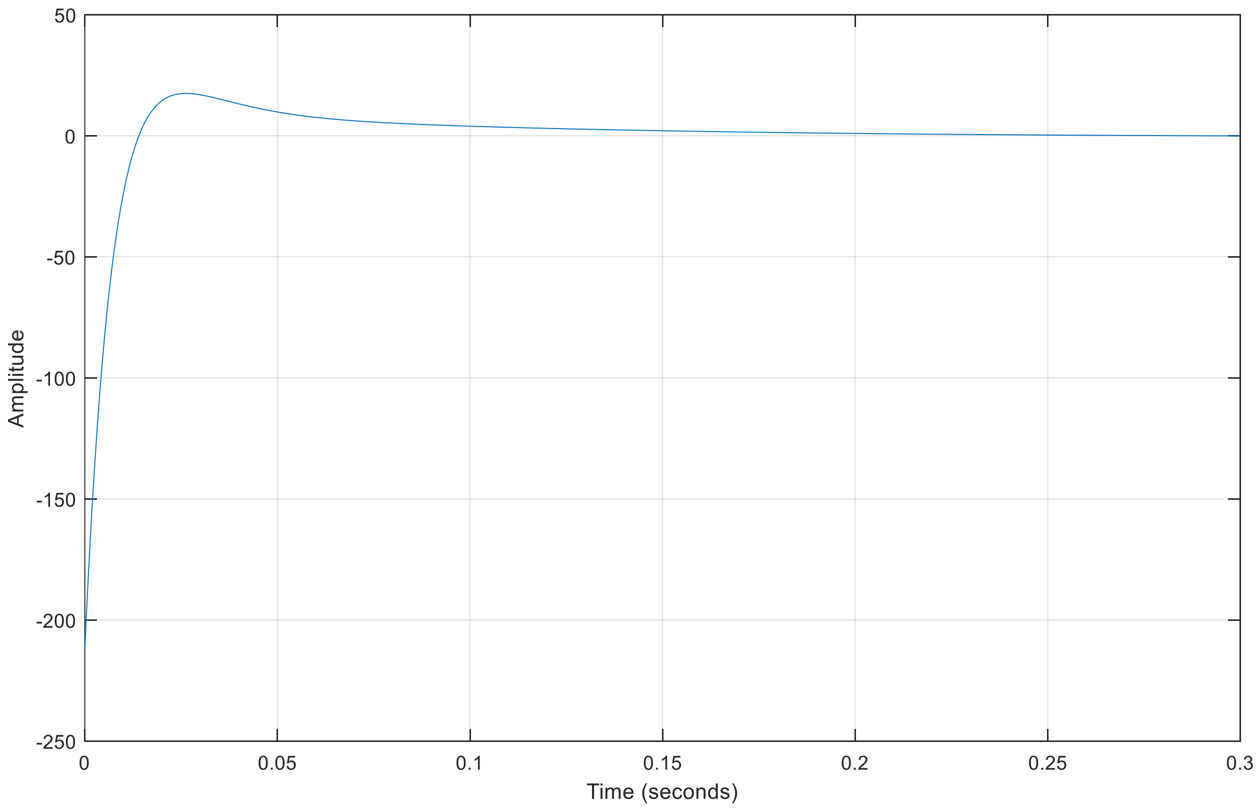

Рисунок 4 – график входного воздействия

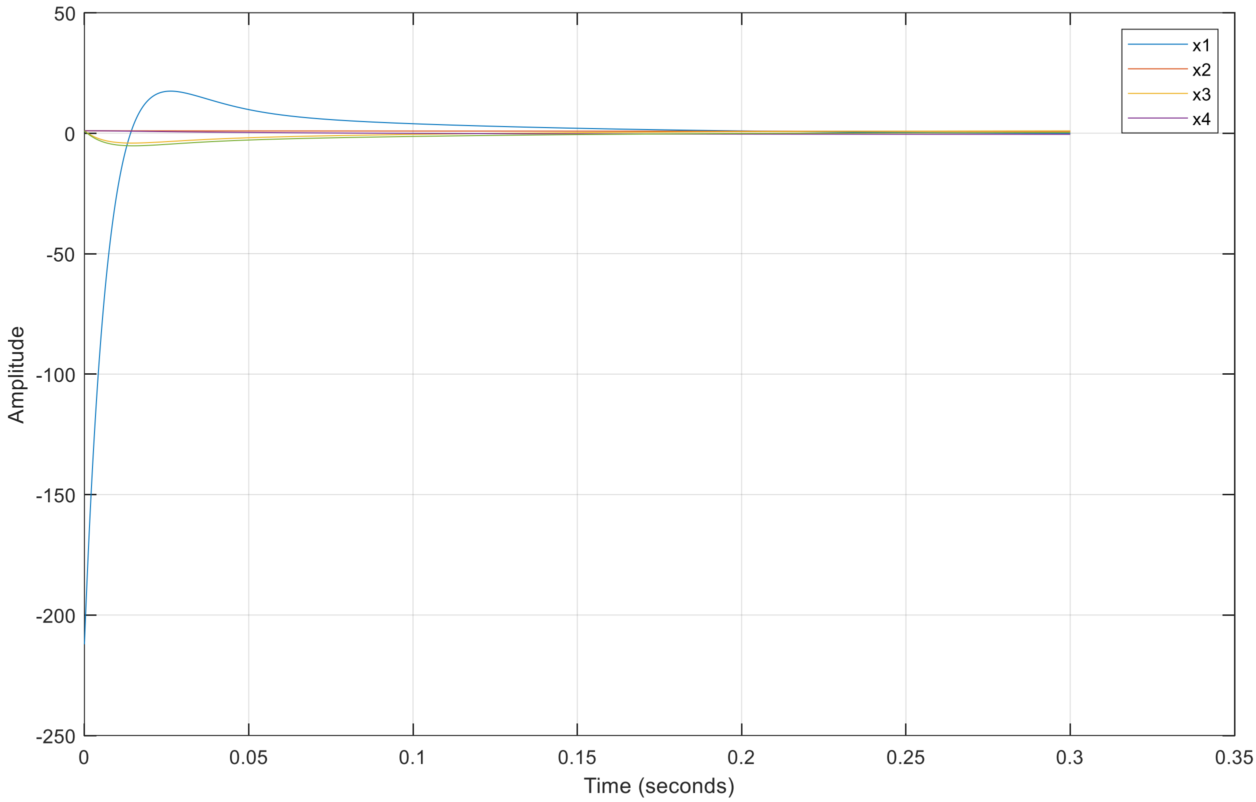

Рисунок 5 – график компонент вектора x

В качестве собственных чисел замкнутой системы были выбраны числа с большей по модулю отрицательной частью, по сравнению с прошлым разом, поэтому компоненты вектора состояния сошлись быстрее.

3. $\boldsymbol{\sigma(A + BK) = \{-1,\ -10,\ 4i,\ -4i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ (Y, \Gamma) - \text{наблюдаема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.667 & 0.4167 & -0.5 & 1.5 \\ -0.75 & -0.1297 & 0.5479 & -1.2055 \\ 0.75 & 0.4216 & 0.7945 & 1.4521 \end{bmatrix}$$

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5938 & -2.8235 & -3.4632 & -0.6471 \end{bmatrix}$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Графики:

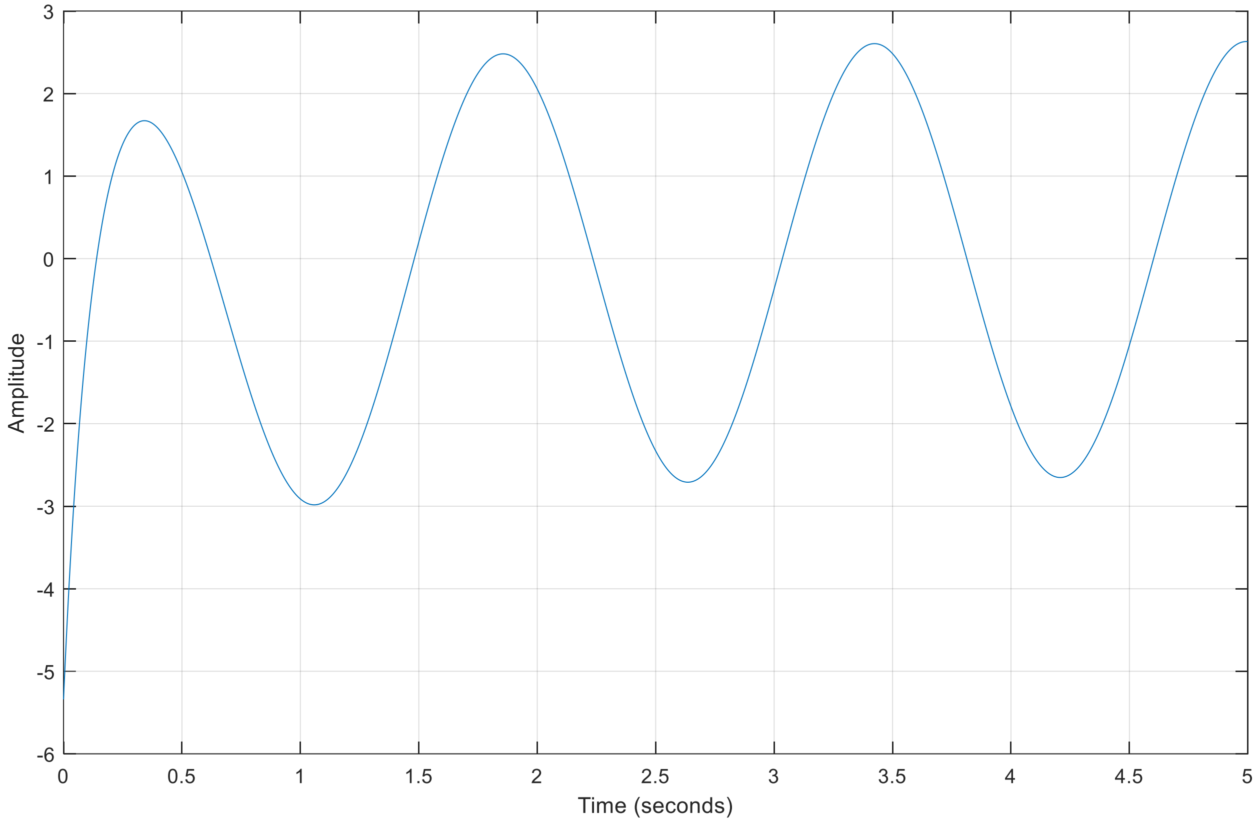

Рисунок 6 – график входного воздействия

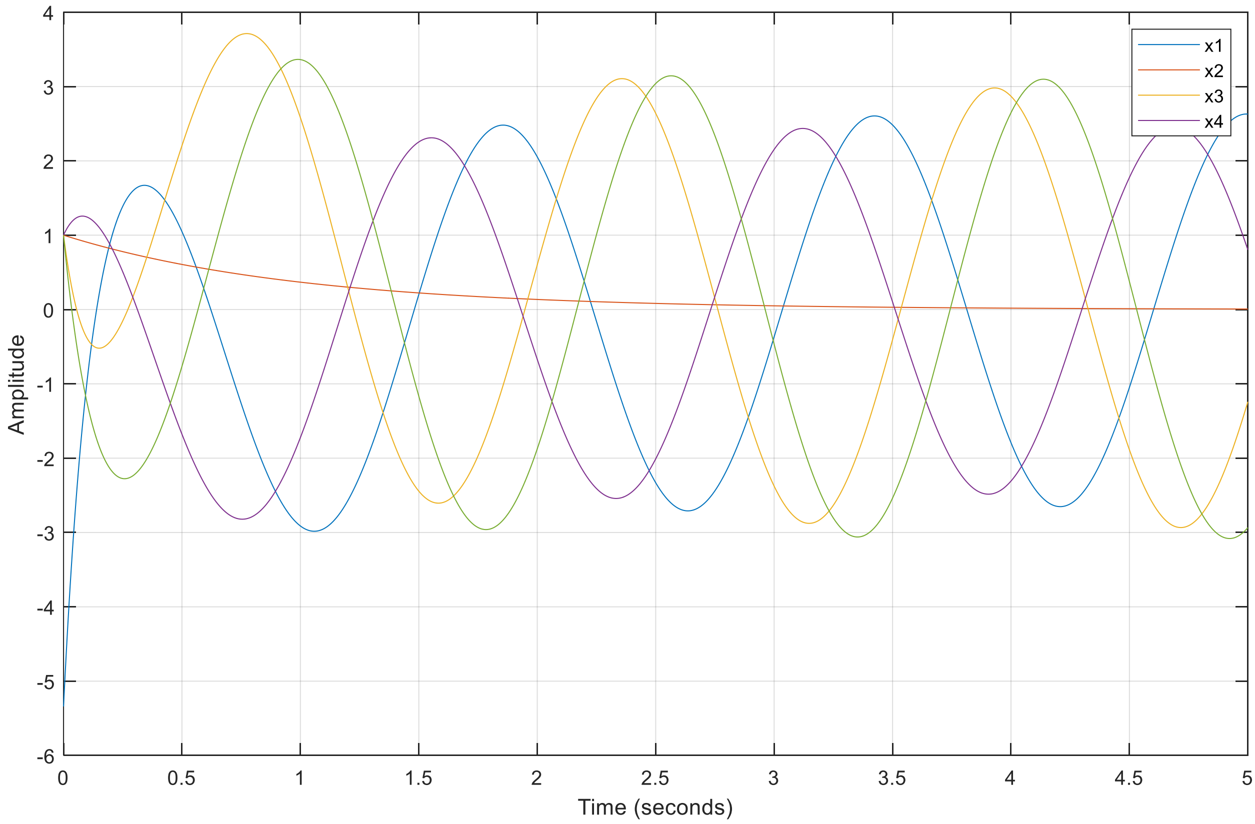

Рисунок 7 – график компонент вектора x

Некоторые компоненты вектора колеблются вокруг нуля, так как некоторые собственные числа были чисто мнимыми. Входящее воздействие тоже колеблется.

4. $\boldsymbol{\sigma(A+\ BK)\ =\ \{-1,\ -10,\ -3+4i,\ -3-4i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1],\ (Y, \Gamma) - \text{наблюдаема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6667 & 0.4167 & 0.122 & 1.0976 \\ -0.75 & -0.1297 & 0.08 & -0.56 \\ 0.75 & 0.4216 & 0.44 & 0.92 \end{bmatrix}$$

$$K = -YP^{-1} = [\,1.875 \quad -5.7882 \quad -8.2059 \quad 0.8235]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Графики:

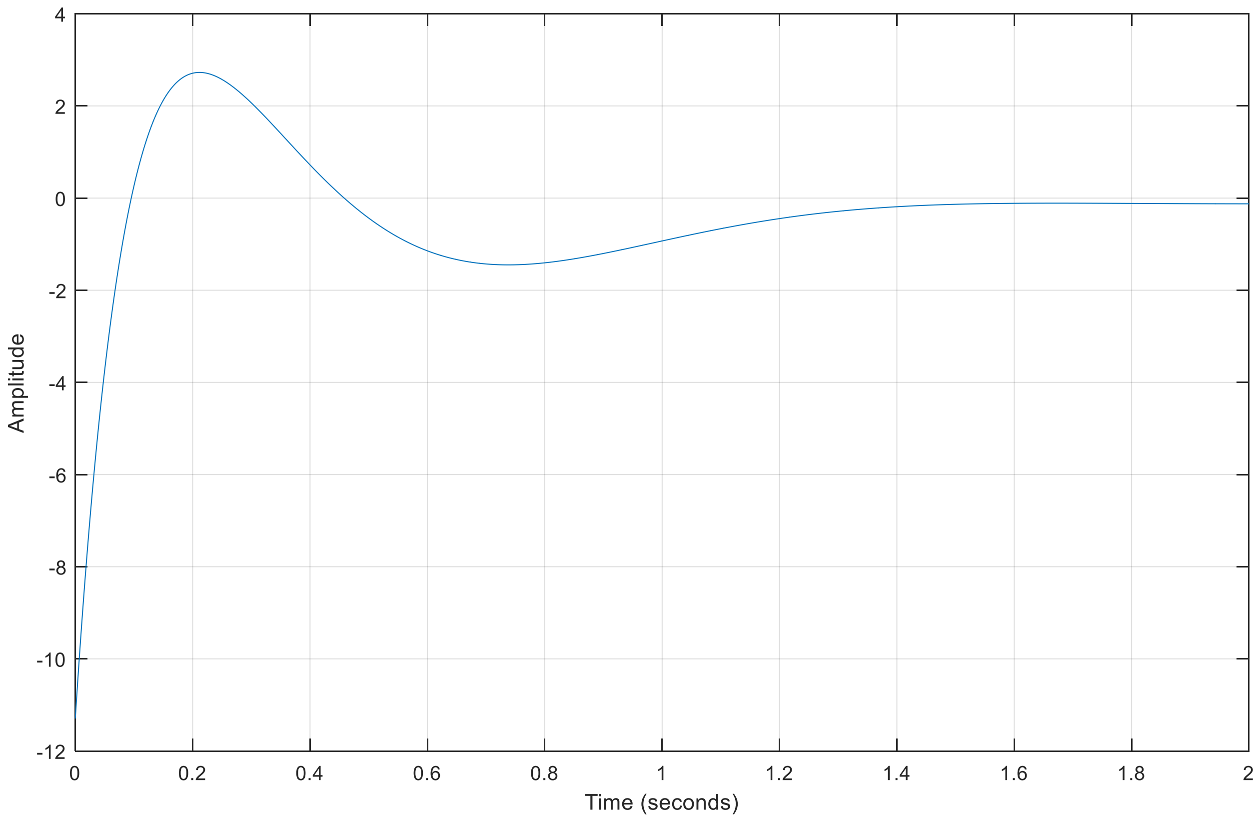

Рисунок 8 – график входного воздействия

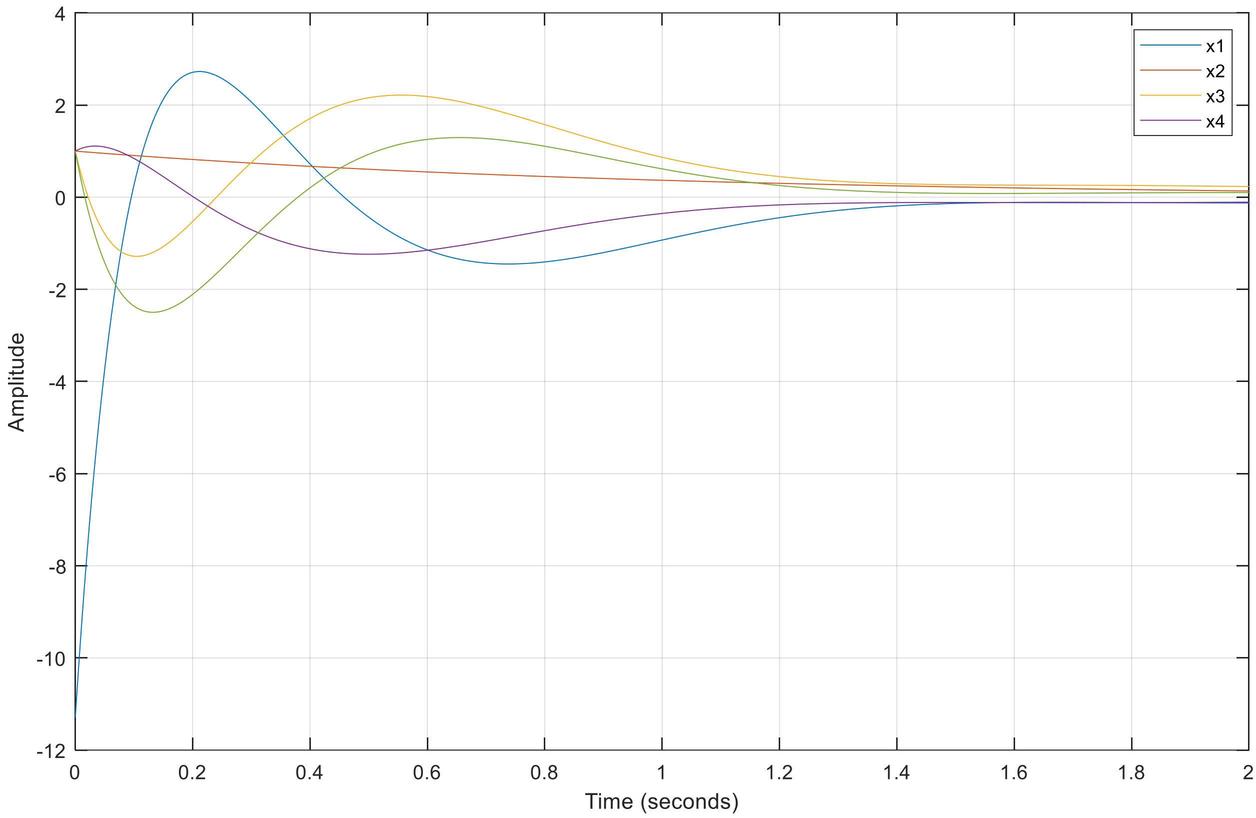

Рисунок 9 – график компонент вектора x

Все компоненты вектора сошлись, так как все собственные числа были выбраны с отрицательной вещественной частью.

Так как система стабилизируема, можно сделать так, чтобы все компоненты вектора сходились.

Задание 2

Система:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}.$$

Так как система уже представлено в жордановой форме, то для определения наблюдаемости собственных чисел будет использовать соответствующий способ.

Собственные числа: $\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$

Собственные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ наблюдаемы так как система является полностью наблюдаемой.

Система является полностью наблюдаемой и является обнаруживаемой.

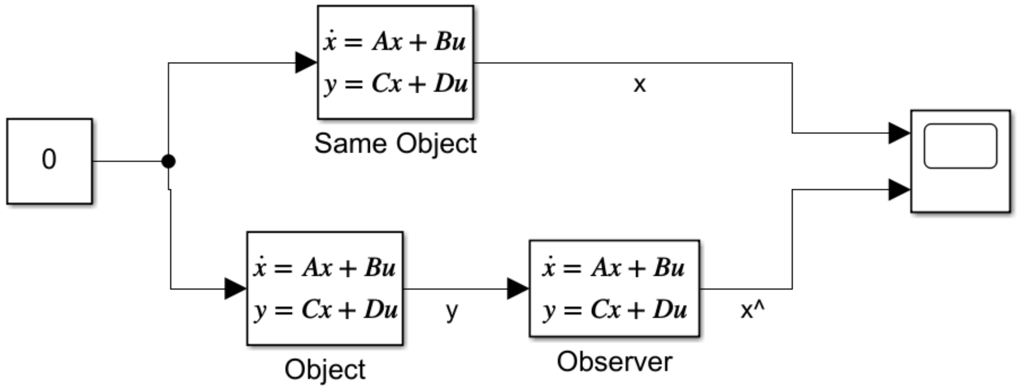

Рисунок 10 – схема моделирования наблюдателя

1. $\boldsymbol{\sigma(A + LC) = \{-1, -1, -1, -1\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ Y^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], (Y, \Gamma) - \text{управляема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q - QA = YC$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.6648 & -3.75 & 0 \\ 0.12 & 0.684 & -3.75 & -0.75 \\ -0.04 & 0.72 & -3 & -1.5 \\ -0.2 & -0.6 & -1.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$L^T = (Q^{-1}Y)^T = [-2 \quad 0.5833 \quad -0.1667 \quad 0]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Графики:

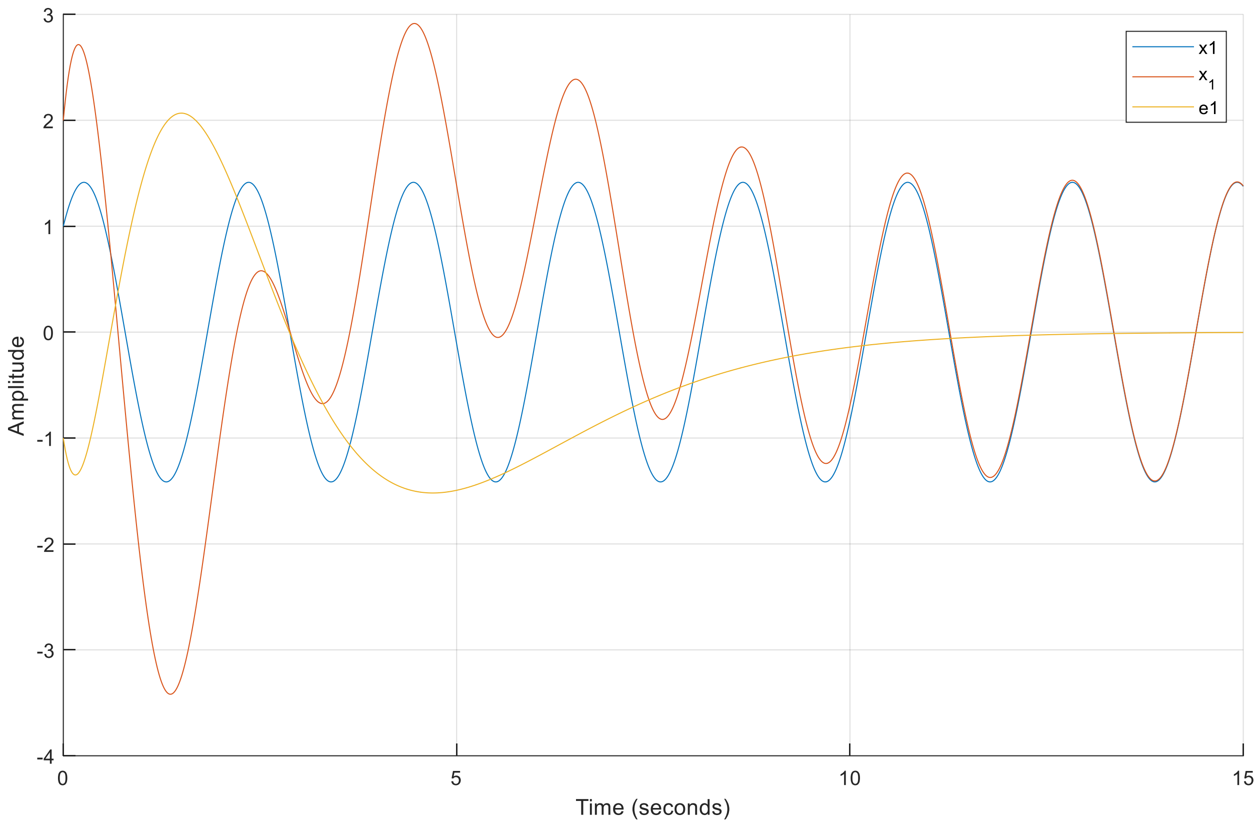

Рисунок 11 – первая компонента вектора состояния

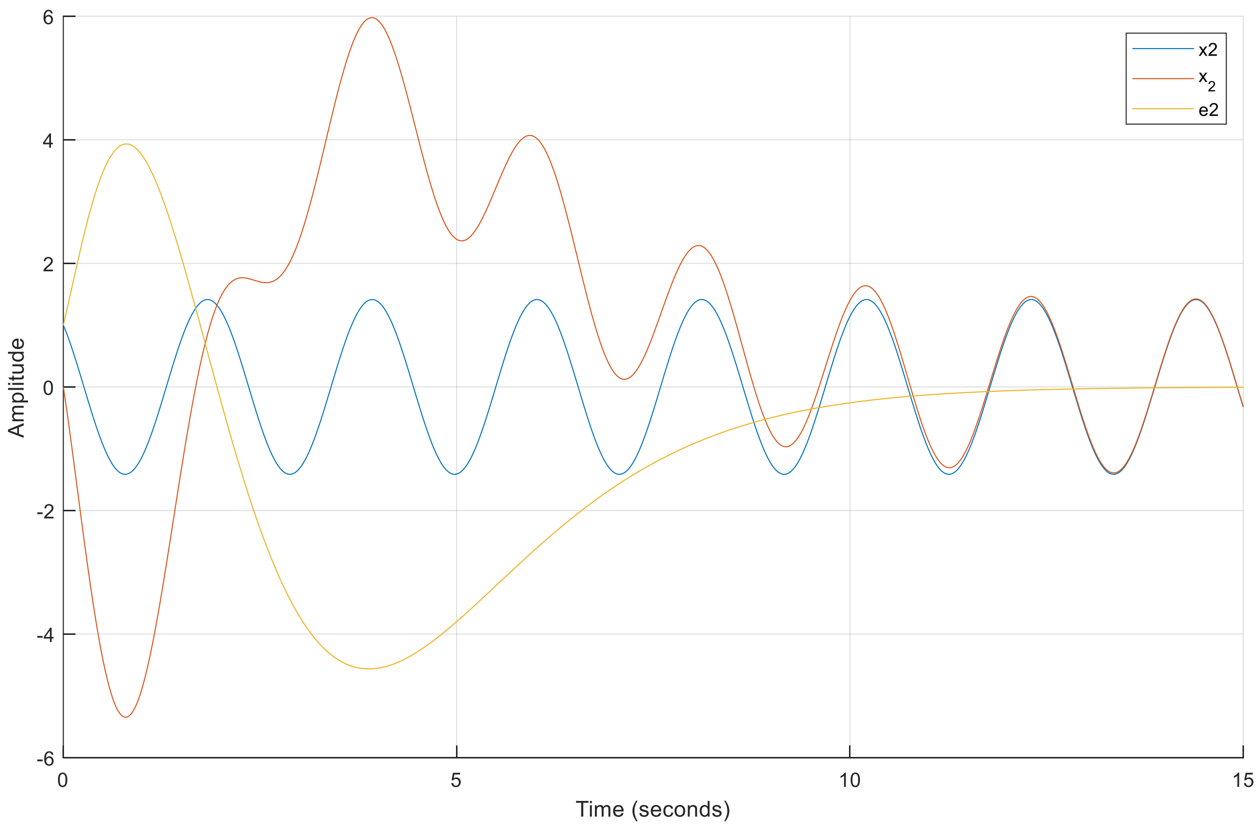

Рисунок 12 – вторая компонента вектора состояния

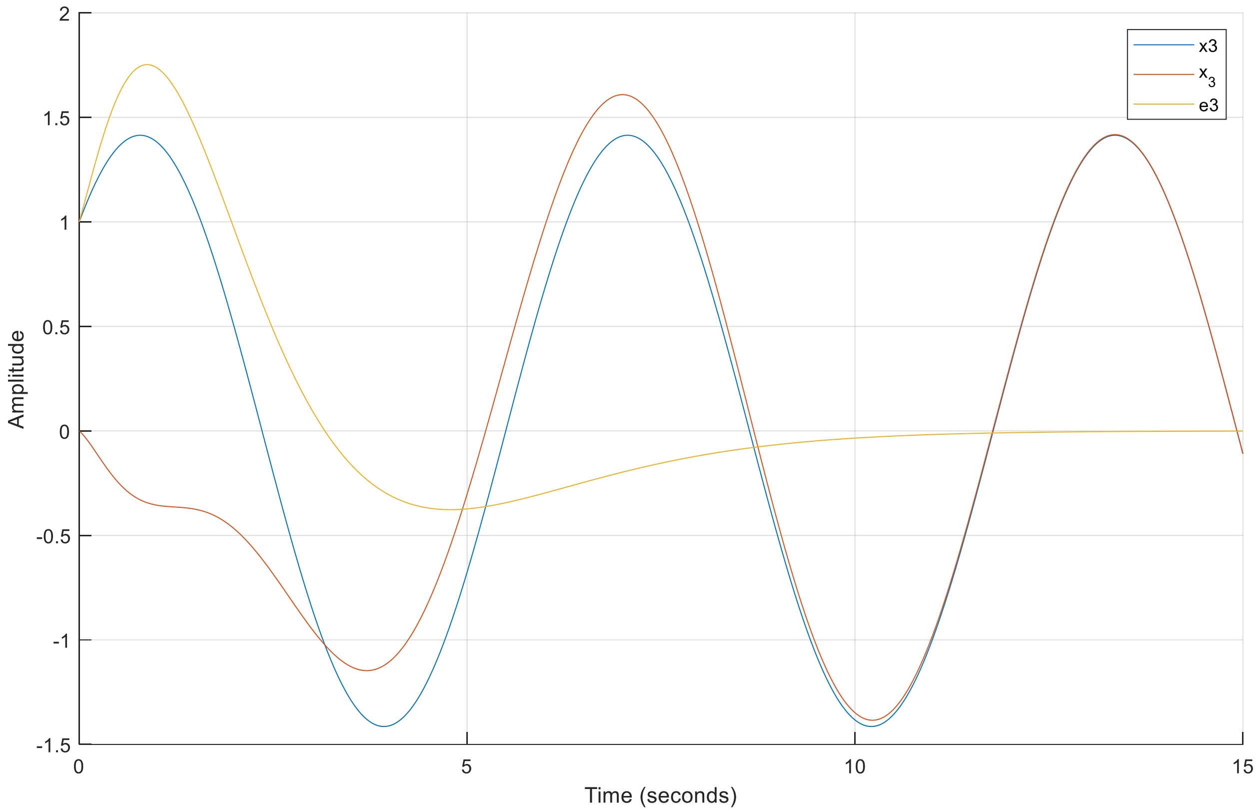

Рисунок 13 – третья компонента вектора состояния

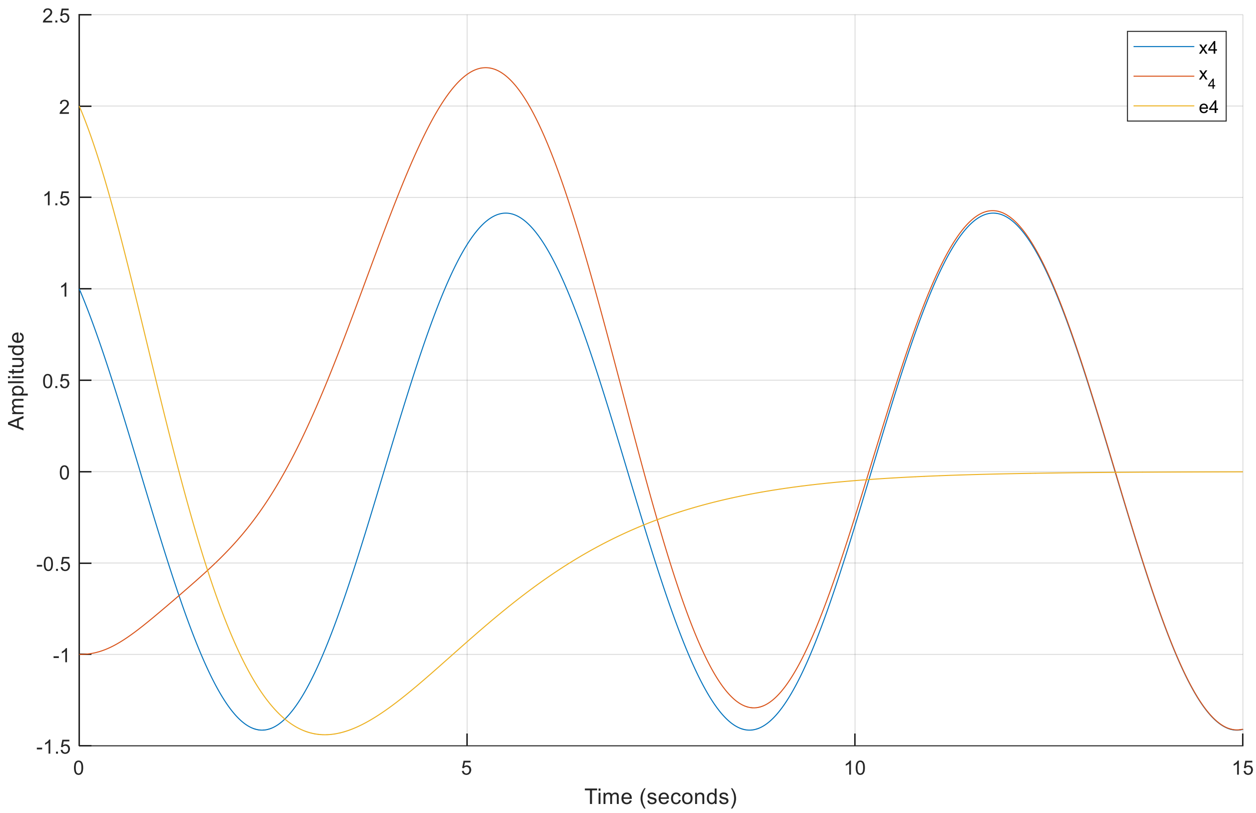

Рисунок 14 – четвертая компонента вектора состояния

2. $\boldsymbol{\sigma(A+\ LC)\ =\{-1,-10,\ -100,\ -100\}}$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -100 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -100\end{bmatrix},\quad Y^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ (Y,\Gamma)-\text{управляема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q-QA=YC$

$$Q=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.6 & -1.5 & -1.5\\ -0.1835 & 0.0550 & -0.0297 & -0.297\\ -0.0202 & 0.006 & -0.0003 & -0.0303\\ -0.02 & 0.006 & -0.003 & -0.03\end{bmatrix}$$

$$L^T=(Q^{-1}Y)^T=\begin{bmatrix}6881.3 & -204.3542 & 3658 & -4657.9\end{bmatrix}$$

Начальный вектор состояния: $x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \hat{x}_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$

Графики:

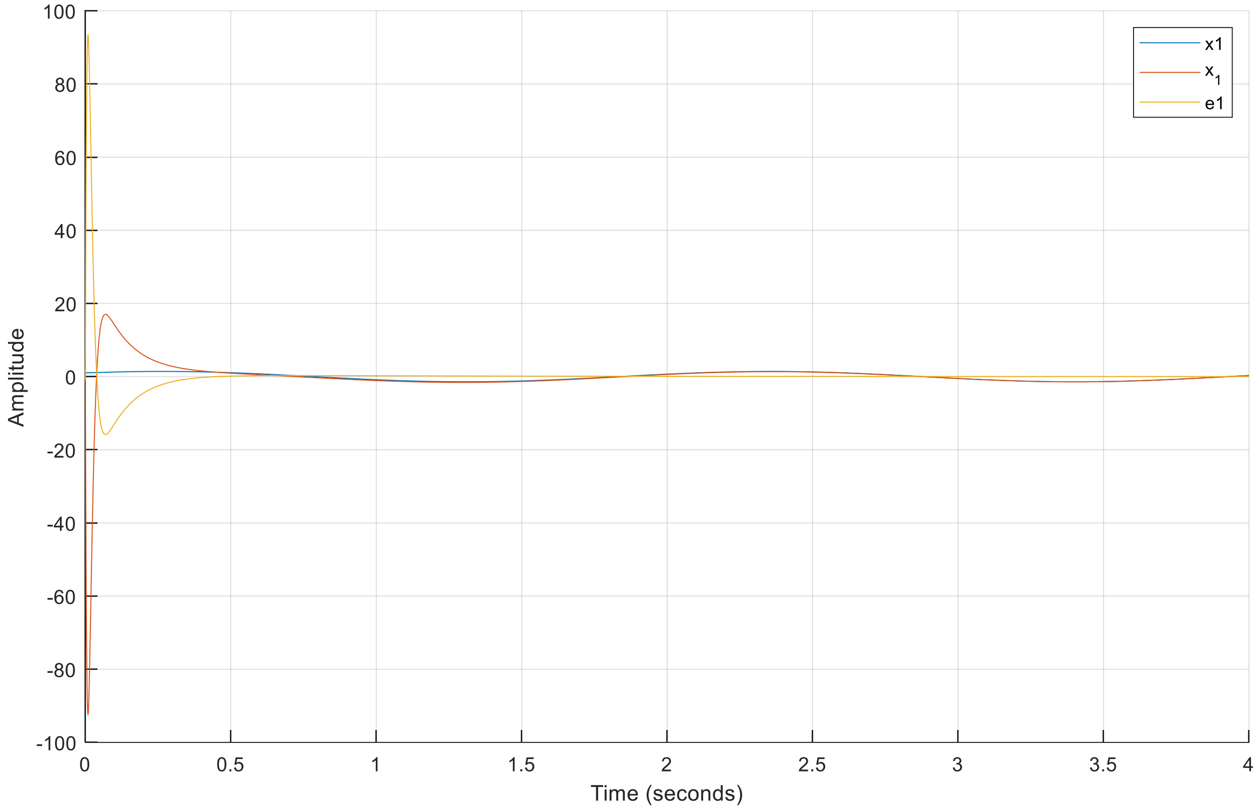

Рисунок 15 – первая компонента вектора состояния

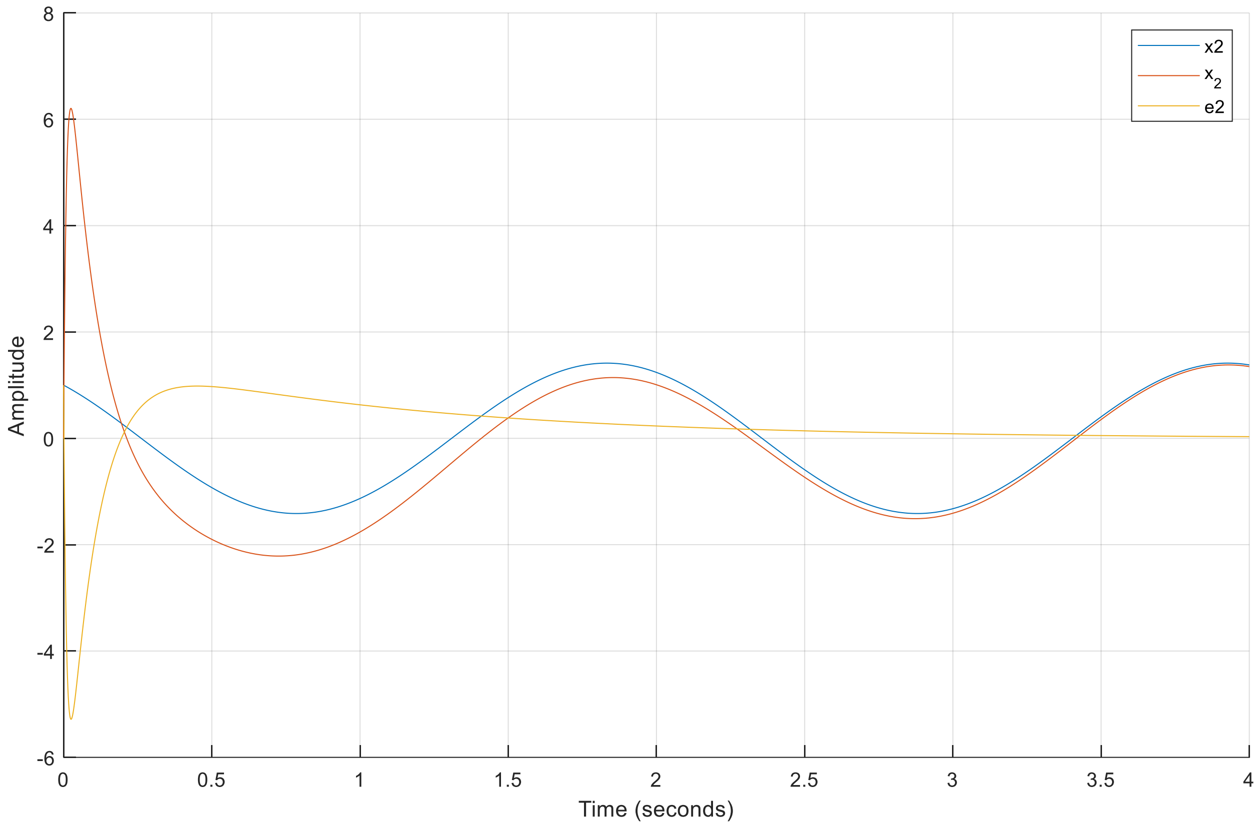

Рисунок 16 – вторая компонента вектора состояния

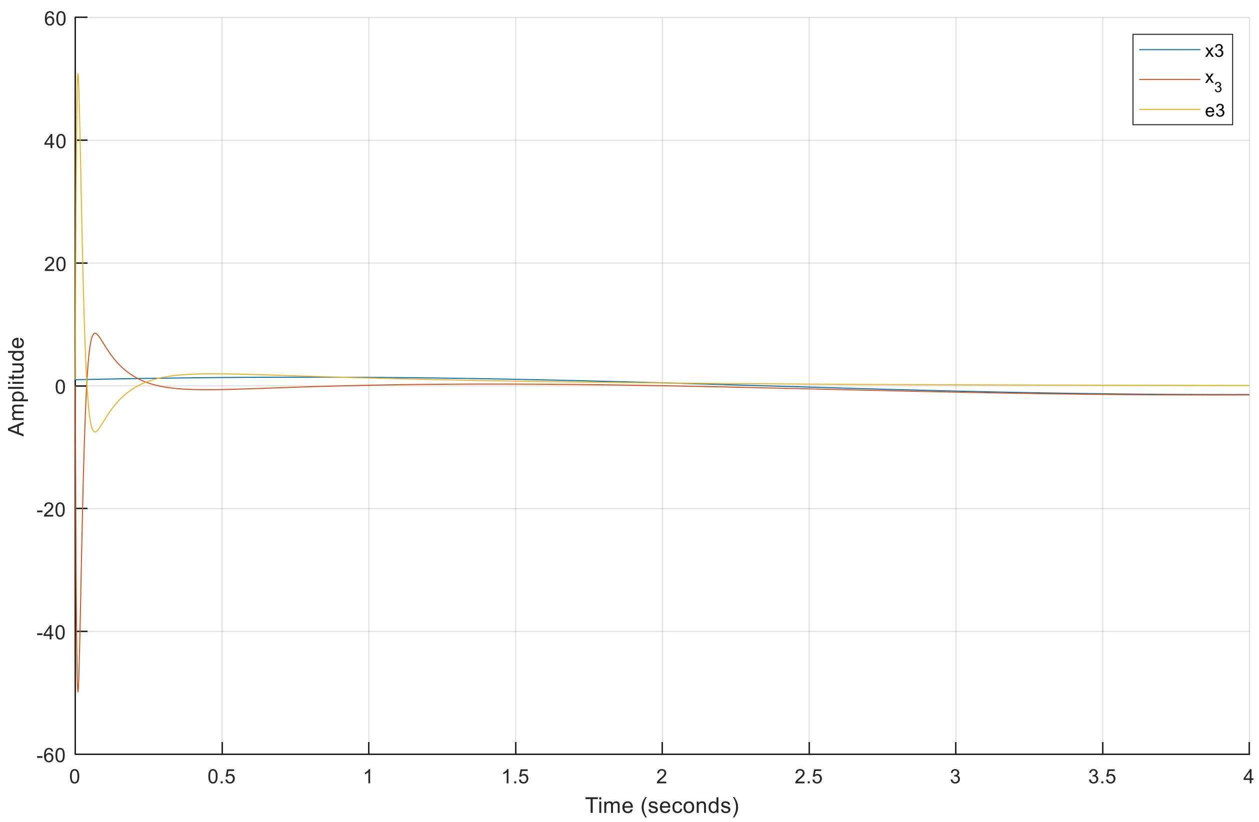

Рисунок 17 – третья компонента вектора состояния

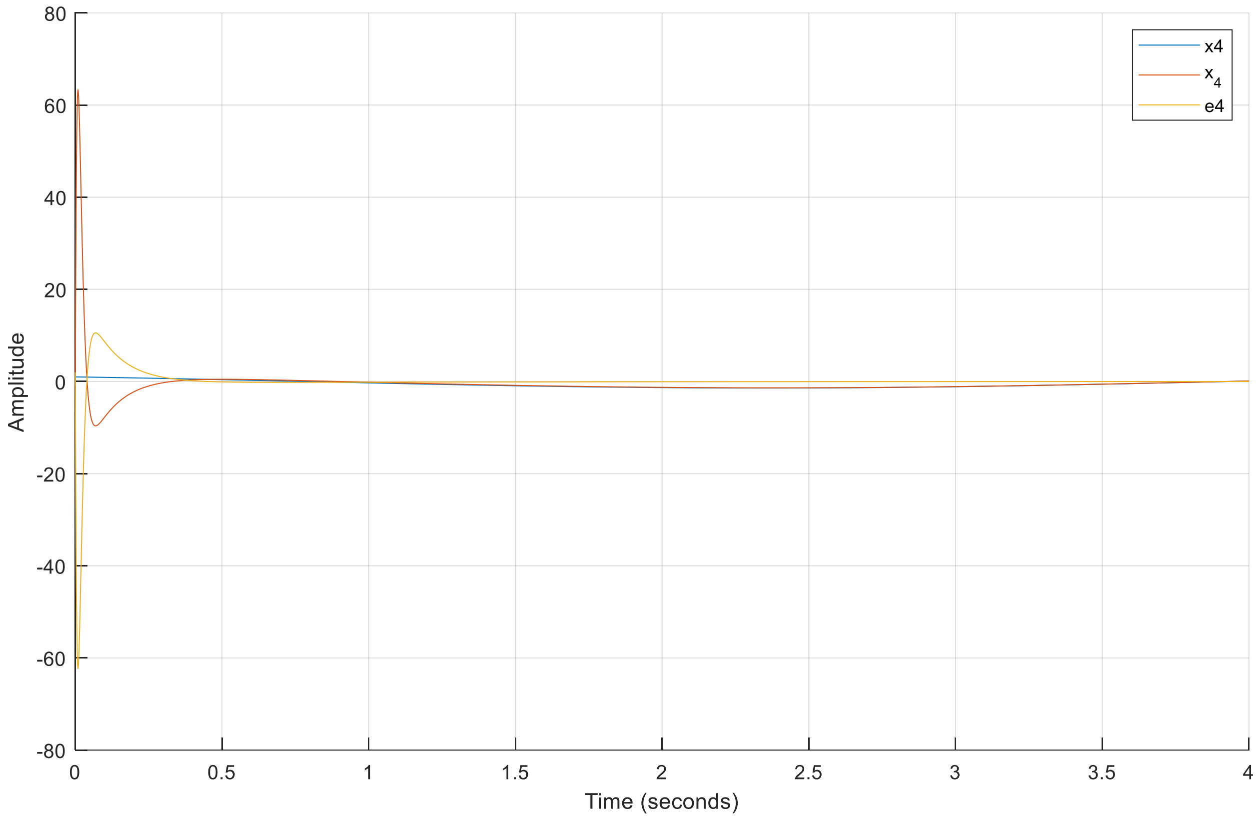

Рисунок 18 – четвертая компонента вектора состояния

3. $\boldsymbol{\sigma(A + LC) = \{-1, -10, 4i, -4i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, Y^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], (Y, \Gamma) - \text{управляема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q - QA = YC$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 & -1.5 & -1.5 \\ -0.1835 & 0.055 & -0.0297 & -0.297 \\ -0.1429 & -0.8571 & 0.2 & -0.8 \\ 0.1429 & -0.8571 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$L^T = (Q^{-1}Y)^T = [4.8125 \quad 0.1458 \quad 5.625 \quad -6.875]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Графики:

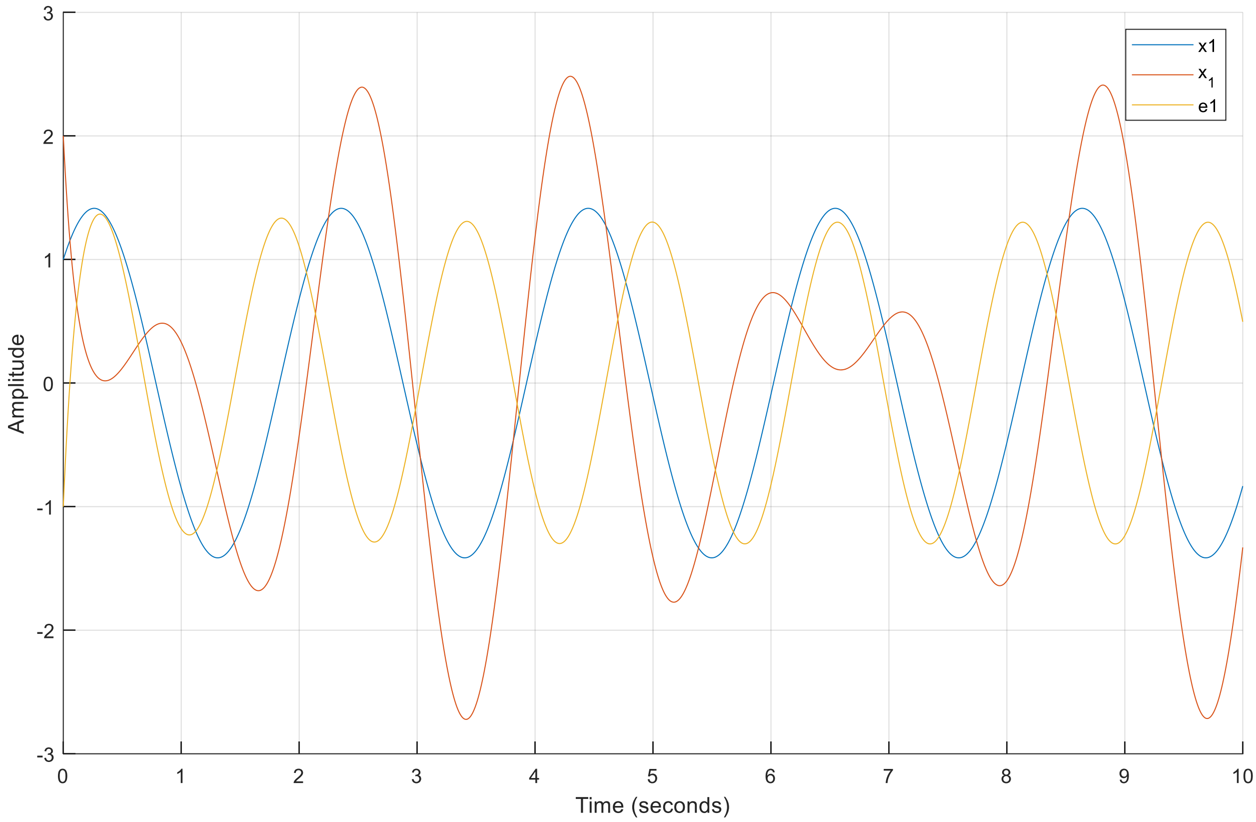

Рисунок 19 – первая компонента вектора состояния

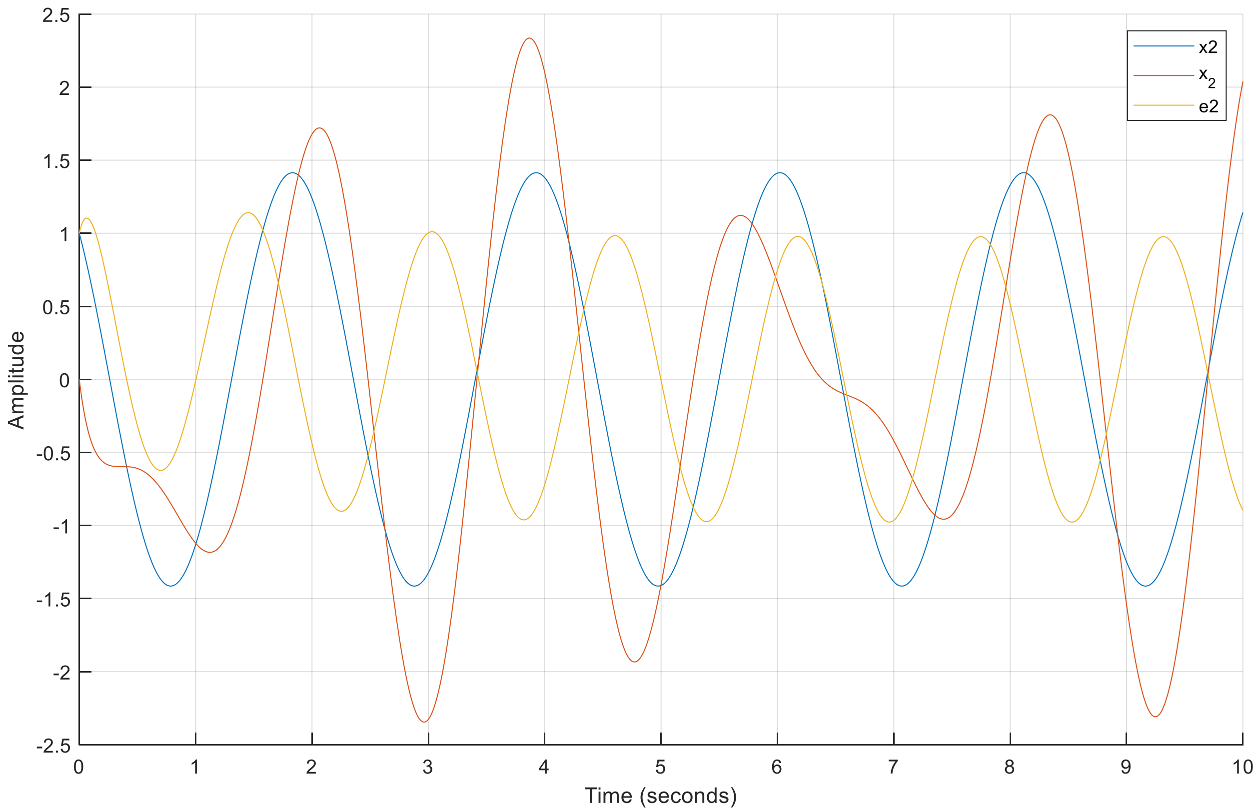

Рисунок 20 – вторая компонента вектора состояния

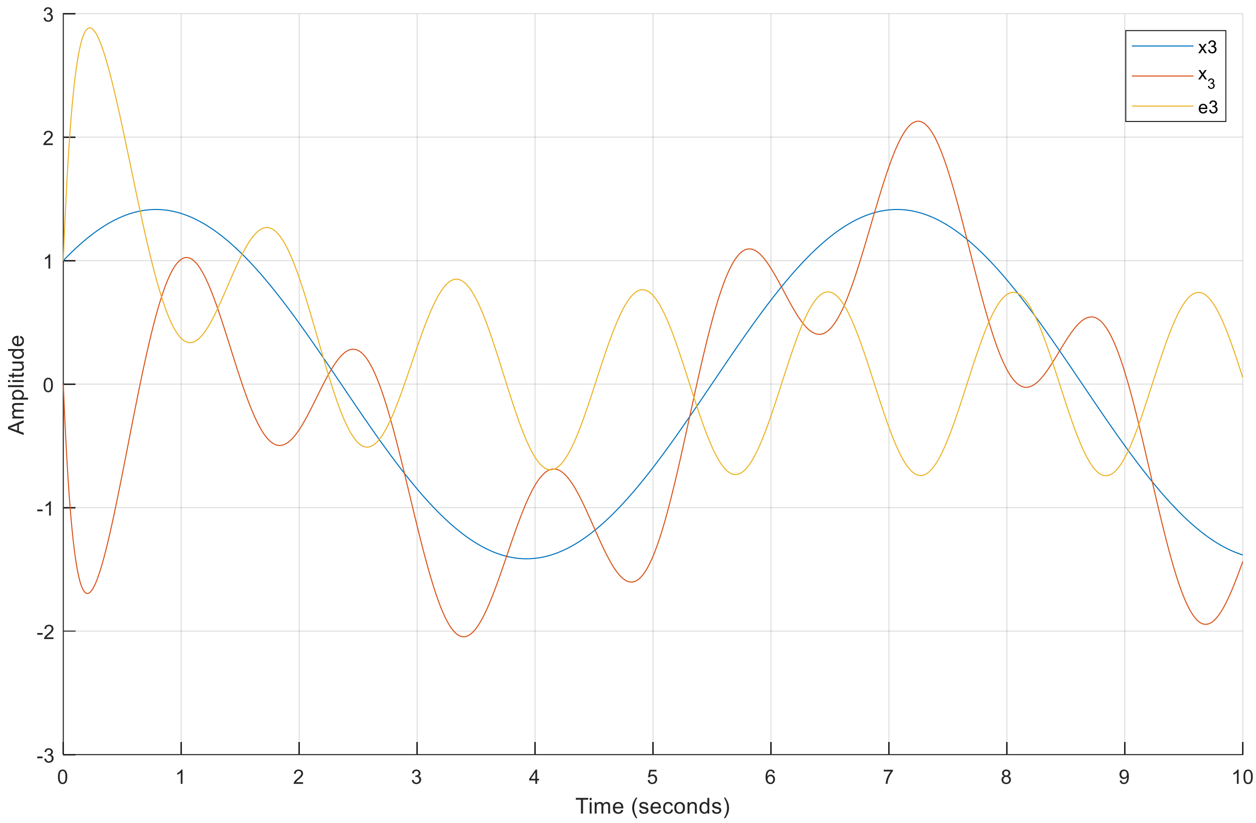

Рисунок 21 – третья компонента вектора состояния

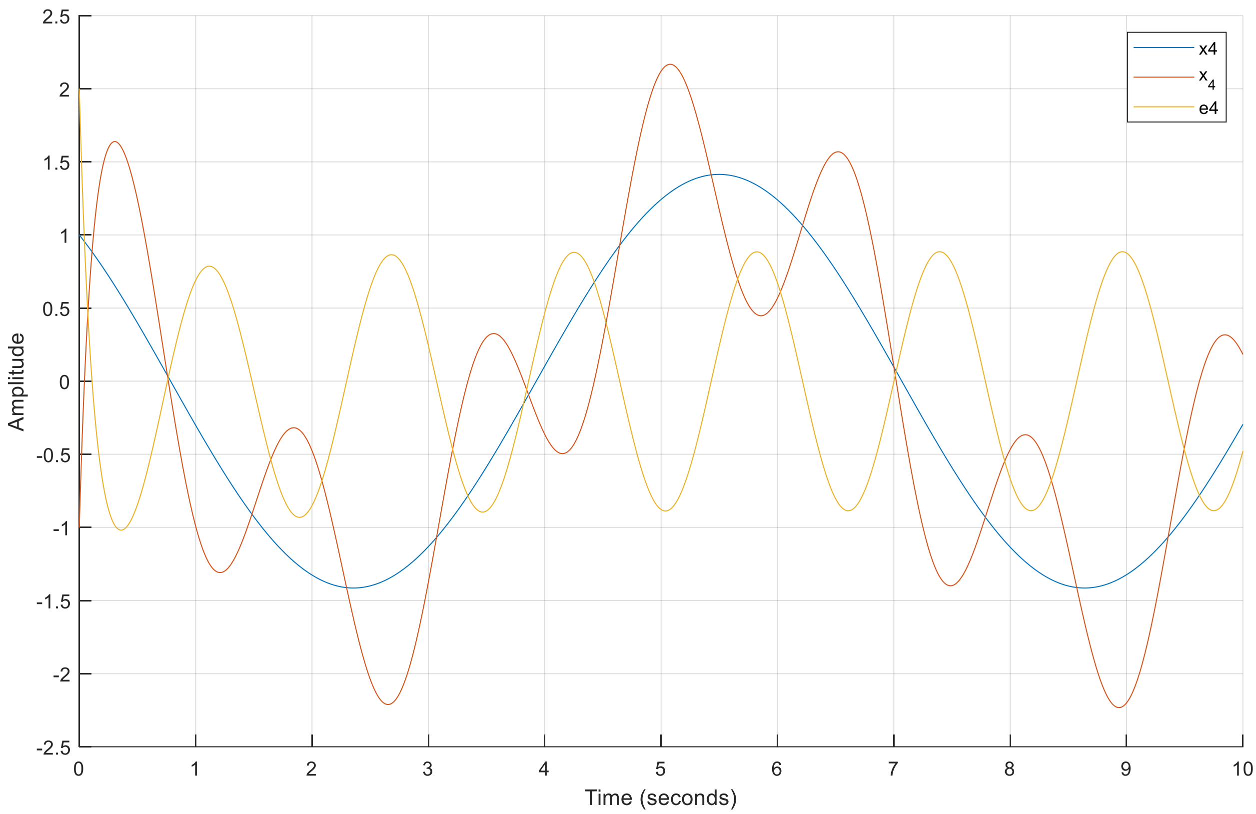

Рисунок 22 – четвертая компонента вектора состояния

4. $\boldsymbol{\sigma(A + LC) = \{-1, -10, -3 + 4i, -3 - 4i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad Y^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], (Y, \Gamma) - \text{управляема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q - QA = YC$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 & -1.5 & -1.5 \\ -0.1835 & 0.055 & -0.0297 & -0.297 \\ -0.5724 & 0.269 & -0.0882 & -0.8529 \\ -0.131 & -0.2276 & 0.1471 & 0.0882 \end{bmatrix}$$

$$L^T = (Q^{-1}Y)^T = [11.375 \quad -12.0417 \quad 6.25 \quad -13.25]$$

Начальный вектор состояния: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Графики:

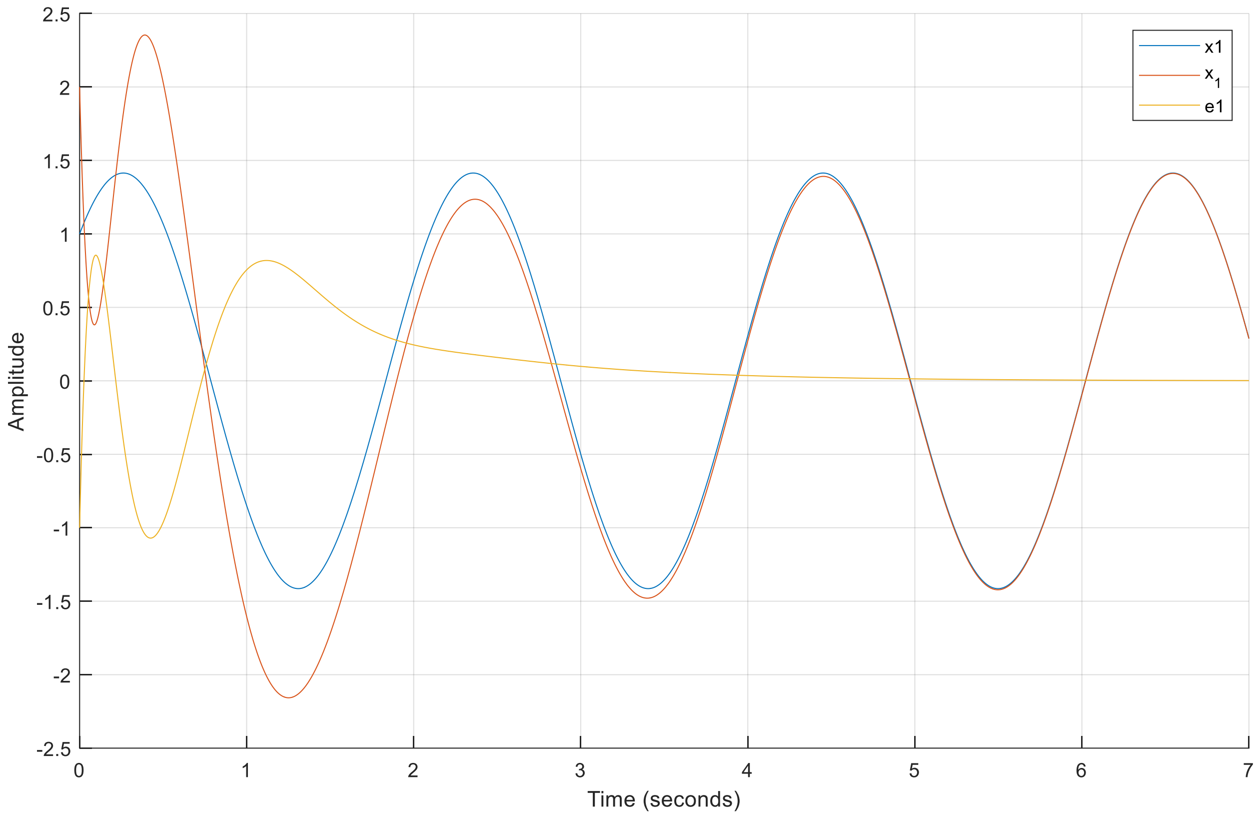

Рисунок 23 – первая компонента вектора состояния

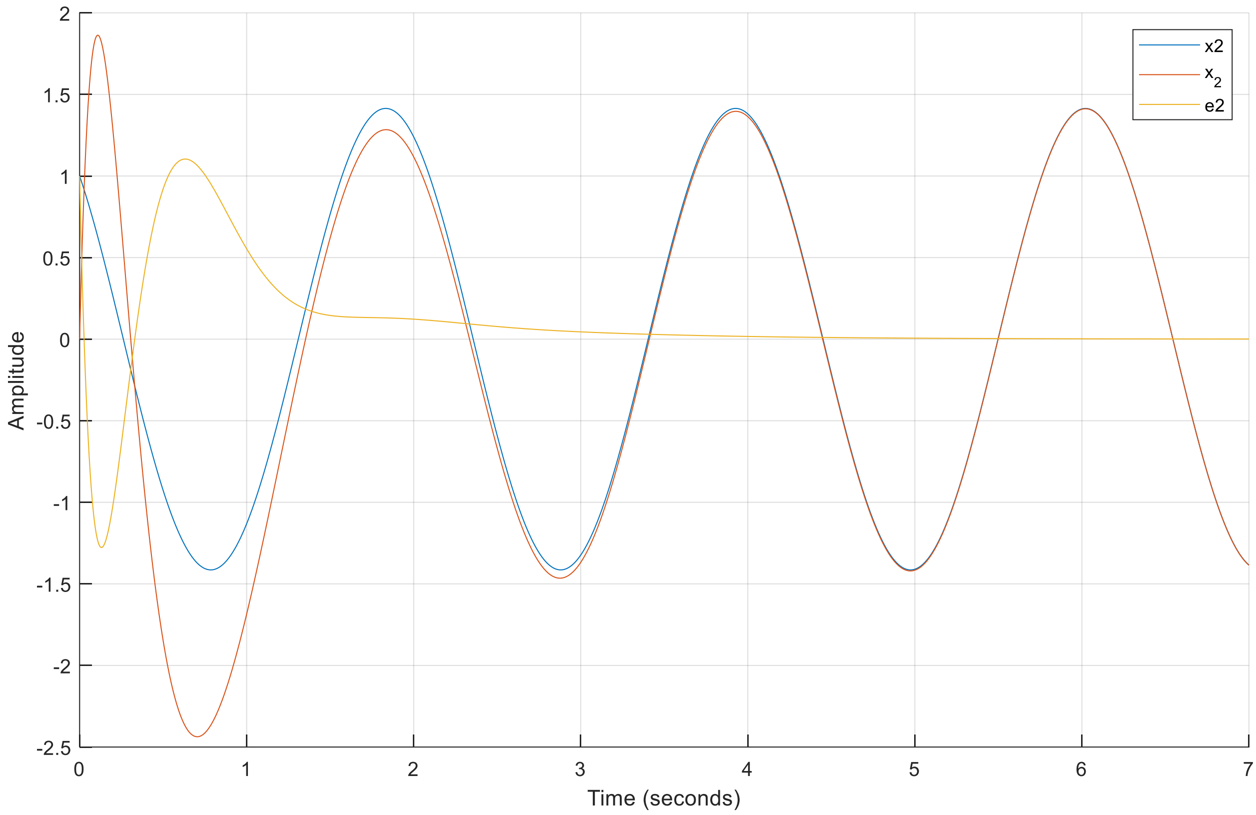

Рисунок 24 – вторая компонента вектора состояния

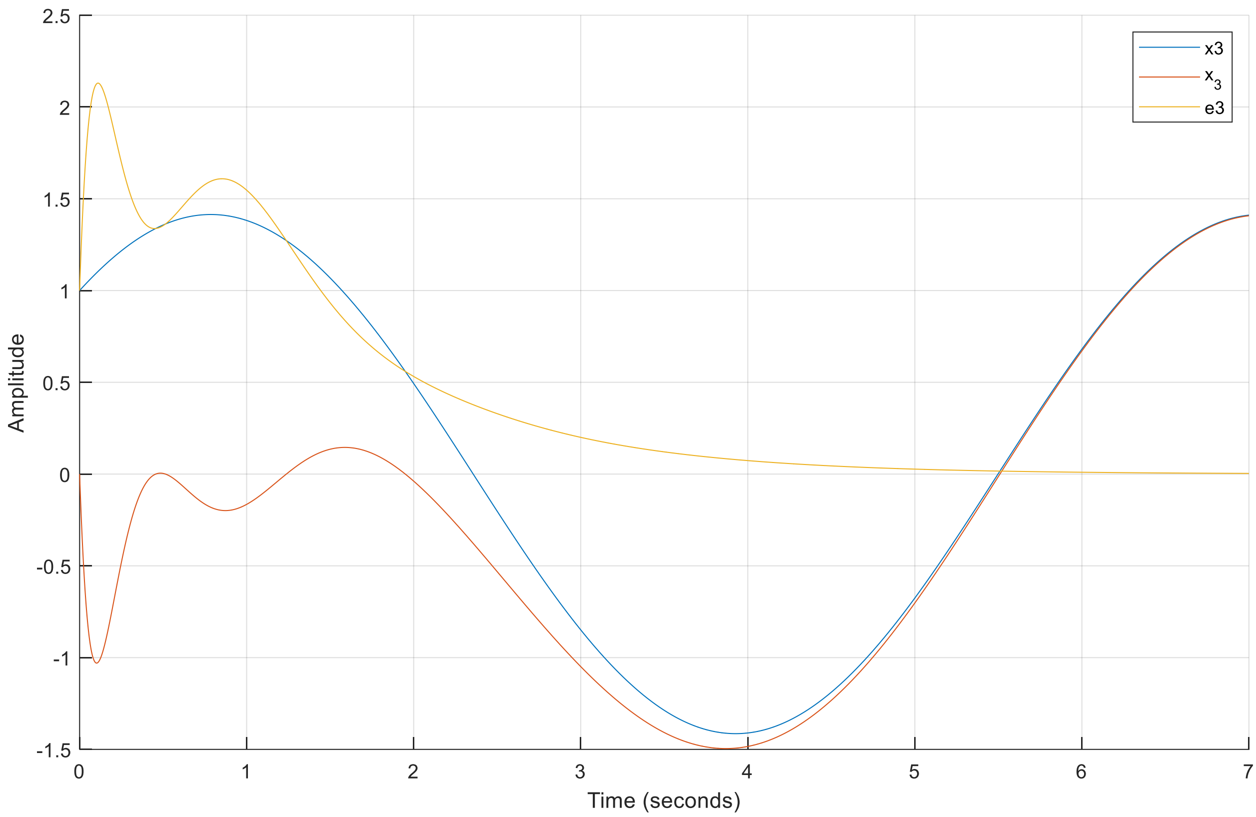

Рисунок 25 – третья компонента вектора состояния

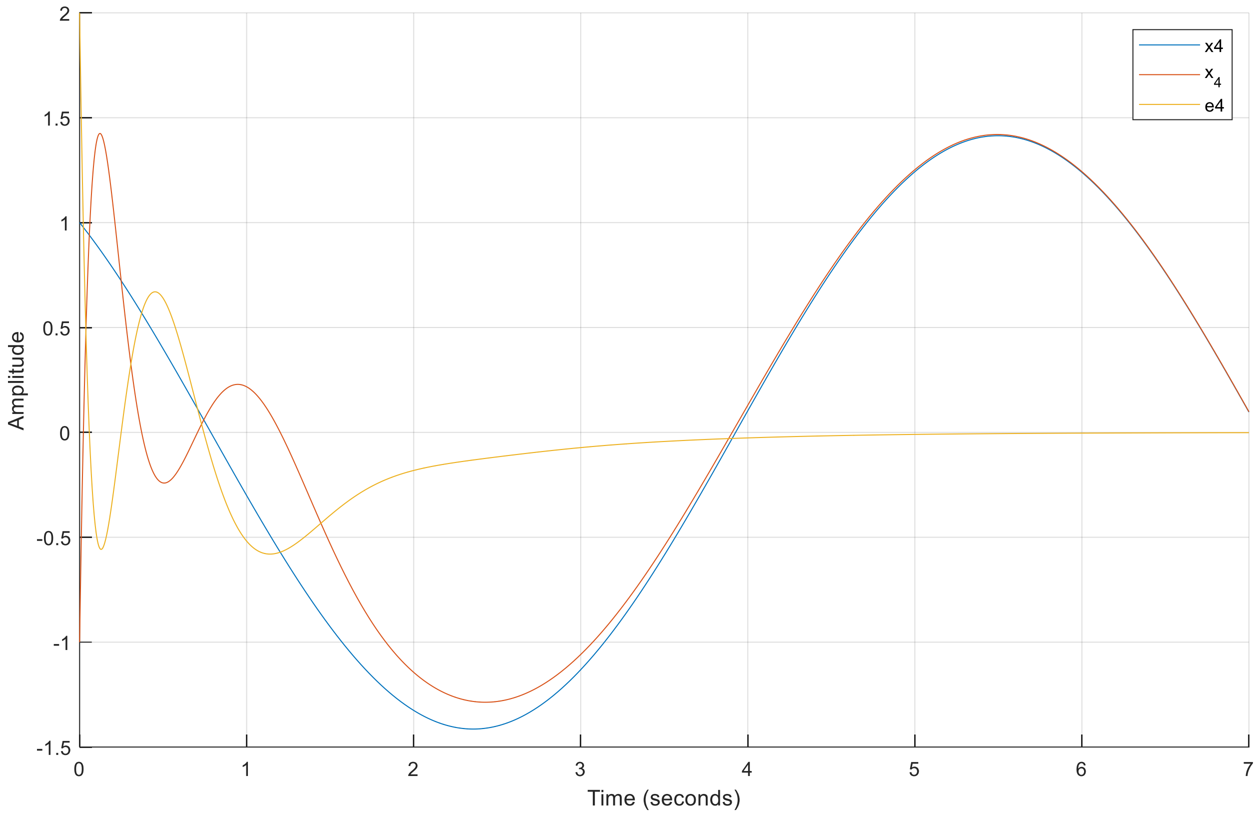

Рисунок 26 – четвертая компонента вектора состояния

Так как система является полностью наблюдаемой, то мы можем выбрать желаемый спектр с теми собственными числами, которые имеют отрицательную вещественную часть, и наблюдатель с какого-то времени будет в точности повторять объект. Чем больше собственные числа по модулю, тем быстрее наблюдатель сойдётся к объекту, что видно на графиках. Если включать в спектр числа с нулевой вещественной частью, то наблюдатель будет восстанавливать объект с определённой ошибкой.

Задание 3

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$U = \begin{bmatrix} 2 & -32 & 64 & -14336 \\ 4 & 8 & 800 & -1408 \\ 2 & 16 & 1024 & 1792 \\ 4 & 72 & 288 & 18048 \end{bmatrix}$, $rank(U) = 4$. Значит система полностью управляема.

Собственные числа: $\lambda_1 = -20,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 12,\ \lambda_4 = 16$ управляемы.

Очевидно, что система является стабилизируемой, так как она управляема.

Наблюдаемость собственных чисел:

$\lambda_1 = -20$ – не наблюдаемо. (на основе рангового критерия)

$\lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 12,\ \lambda_4 = 16$ – наблюдаемые. (на основе рангового критерия)

Система являются обнаруживаемой, так как ненаблюдаемым является только собственное число с отрицательной вещественной частью.

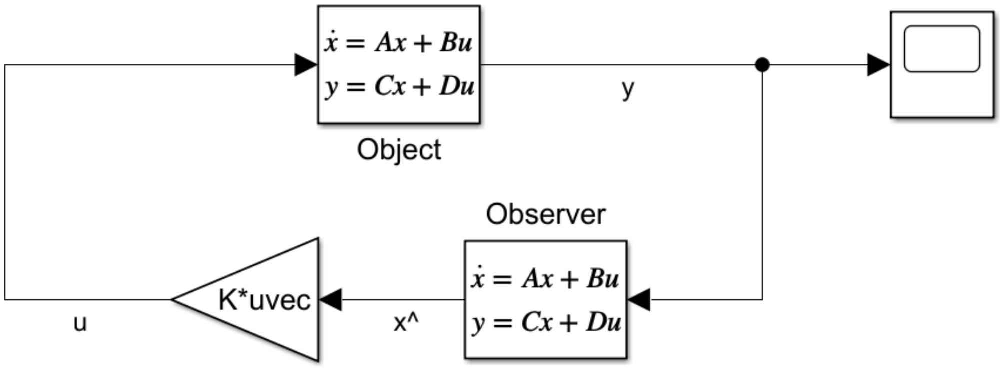

Рисунок 27 – схема моделирования регулятора и наблюдателя

Поиск матрицы регулятора K

Пусть $\boldsymbol{\sigma}(\Gamma) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}) = \{-\mathbf{1}, -\mathbf{2}, -\mathbf{4}, -\mathbf{5}\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1],\ (Y, \Gamma) - \text{наблюдаема.}$$

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

Находим матрицу подобия P:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3066 & 0.2381 & 0.15 & 0.1191 \\ 0.3881 & 0.3175 & 0.225 & 0.192 \\ -0.2581 & -0.2063 & -0.15 & -0.1348 \\ 0.6472 & 0.5714 & 0.475 & 0.443 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = [22.0078 \quad -20.7578 \quad 3.6484 \quad 1.9297]$$

Поиск матрицы наблюдателя L

Так как собственное число $\lambda = -20$ – не является наблюдаемым, то оно должно входить в спектр $A + LC$.

Пусть $\boldsymbol{\sigma}(\Gamma) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}) = \{-\mathbf{20}, -\mathbf{11}, -\mathbf{10}, -\mathbf{9}\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \qquad Y^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q - QA = YC$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1574 & -0.088 & 0.037 & -0.2176 \\ -0.2499 & -0.1501 & 0.076 & -0.324 \\ -0.2667 & -0.1618 & 0.0849 & -0.3437 \\ -0.286 & -0.1755 & 0.0955 & -0.366 \end{bmatrix}$$

$$L^T = (Q^{-1}Y) = \begin{bmatrix} 134.44 & 134.44 \\ -131.3882 & -131.3882 \\ -43.6329 & -43.6329 \\ -56.1639 & -56.1639 \end{bmatrix}$$

Графики:

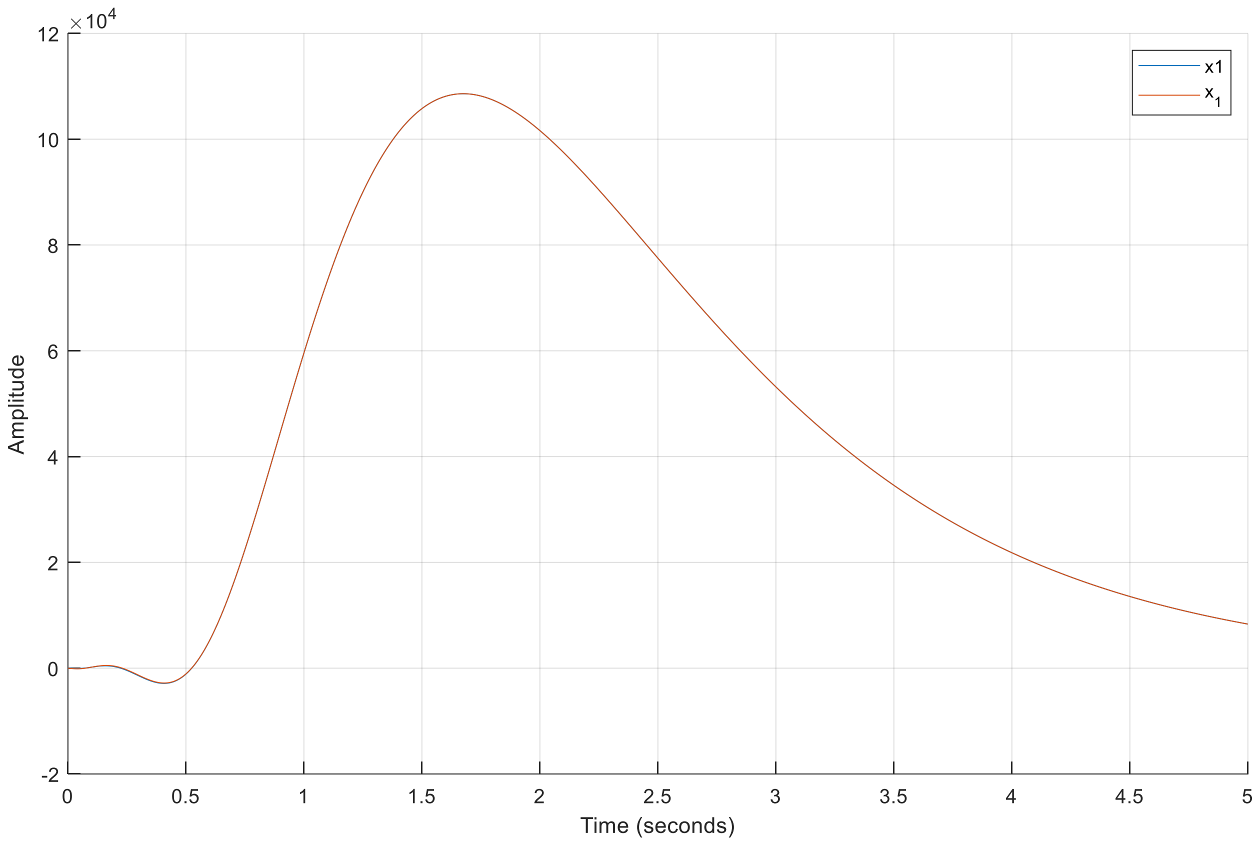

Рисунок 28 – первая компонента вектора состояния

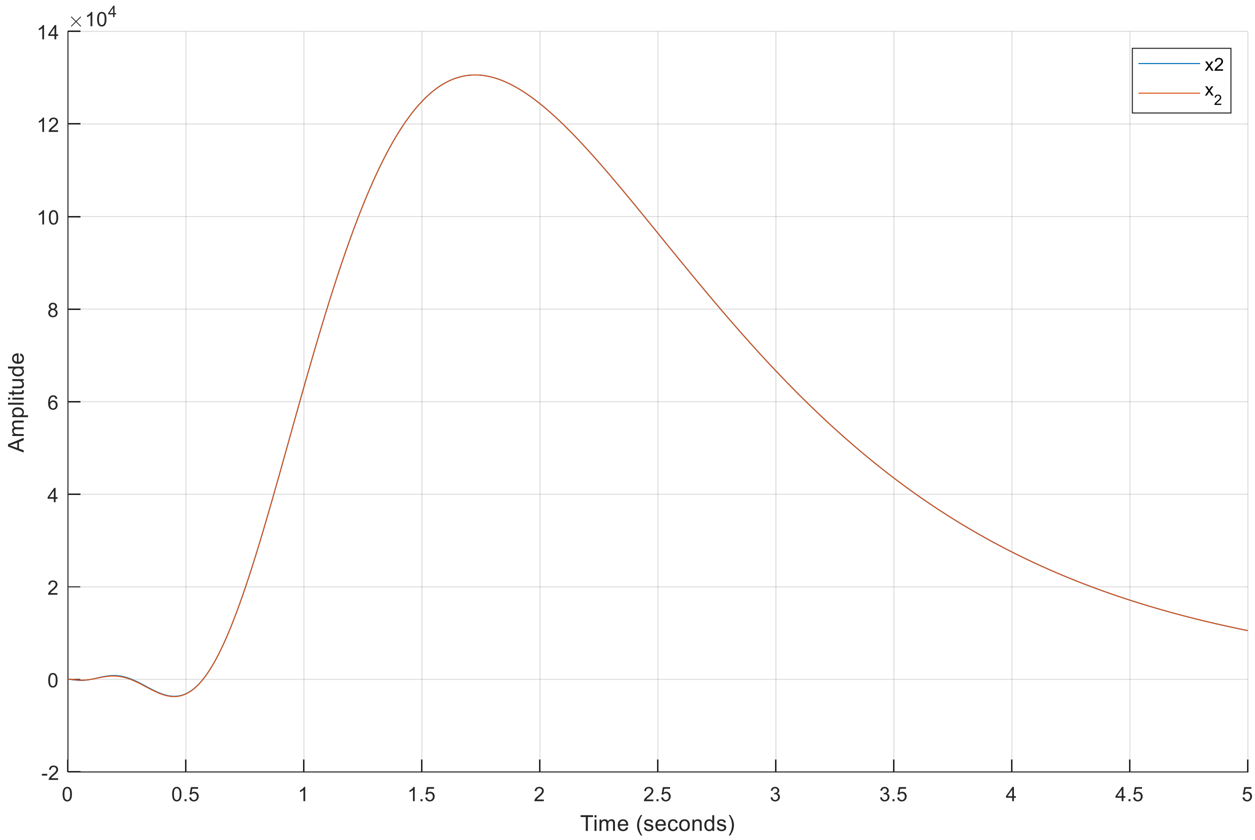

Рисунок 29 – вторая компонента вектора состояния

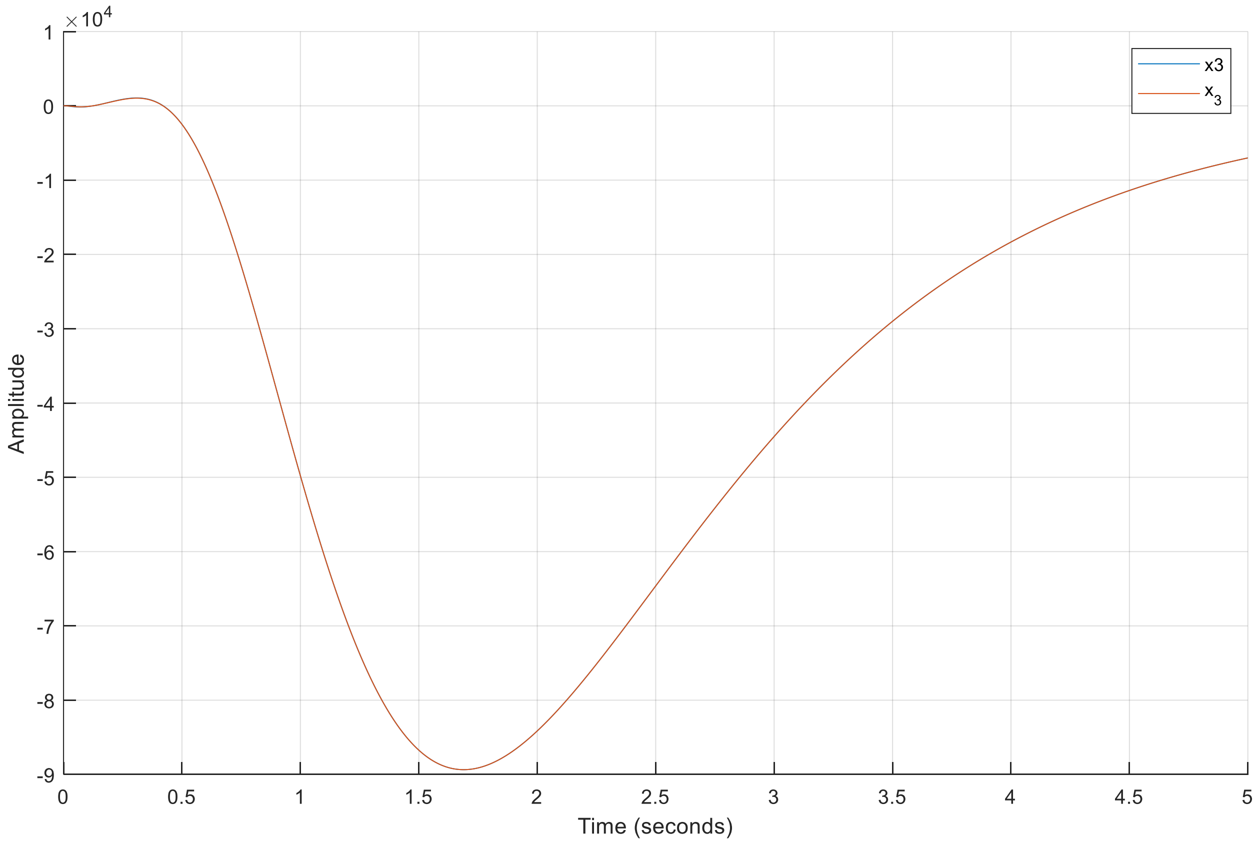

Рисунок 30 – третья компонента вектора состояния

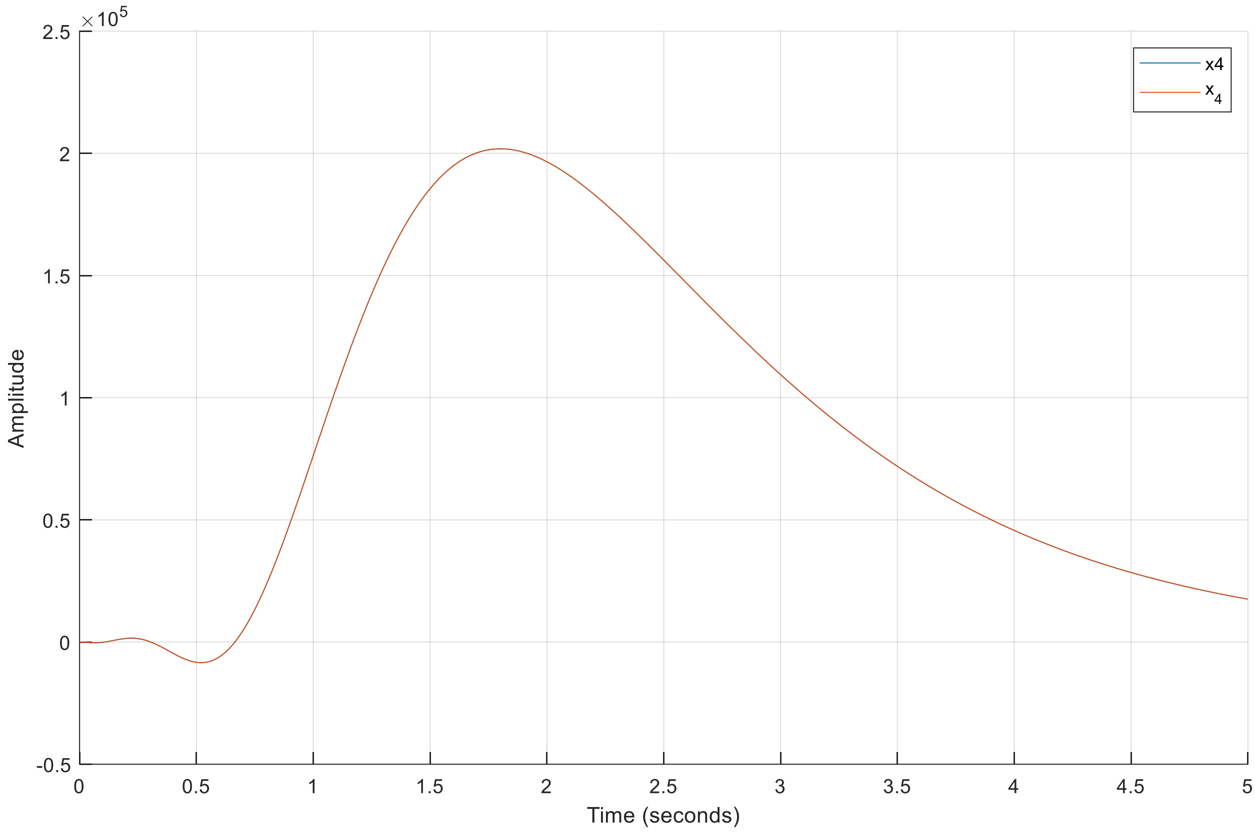

Рисунок 31 – четвертая компонента вектора состояния

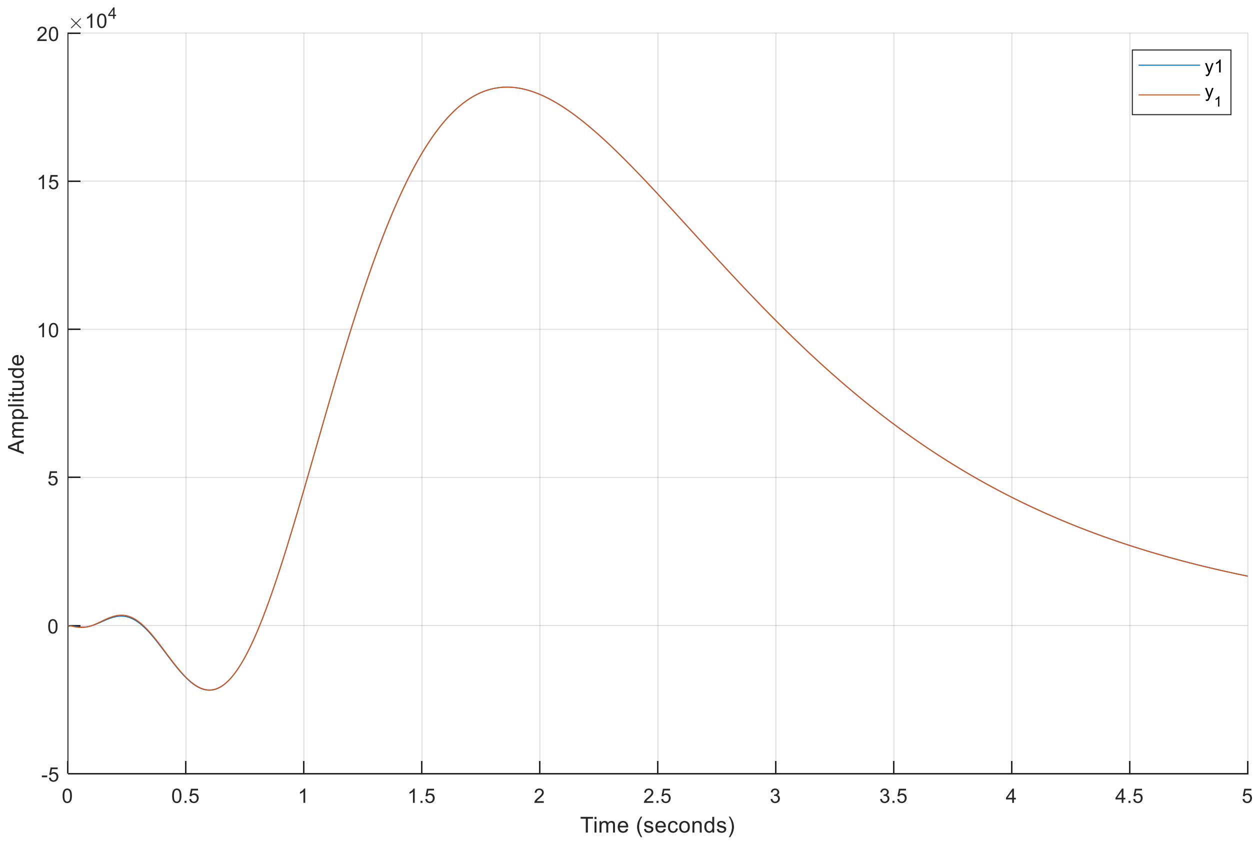

Рисунок 32 – первая компонента вектора выхода

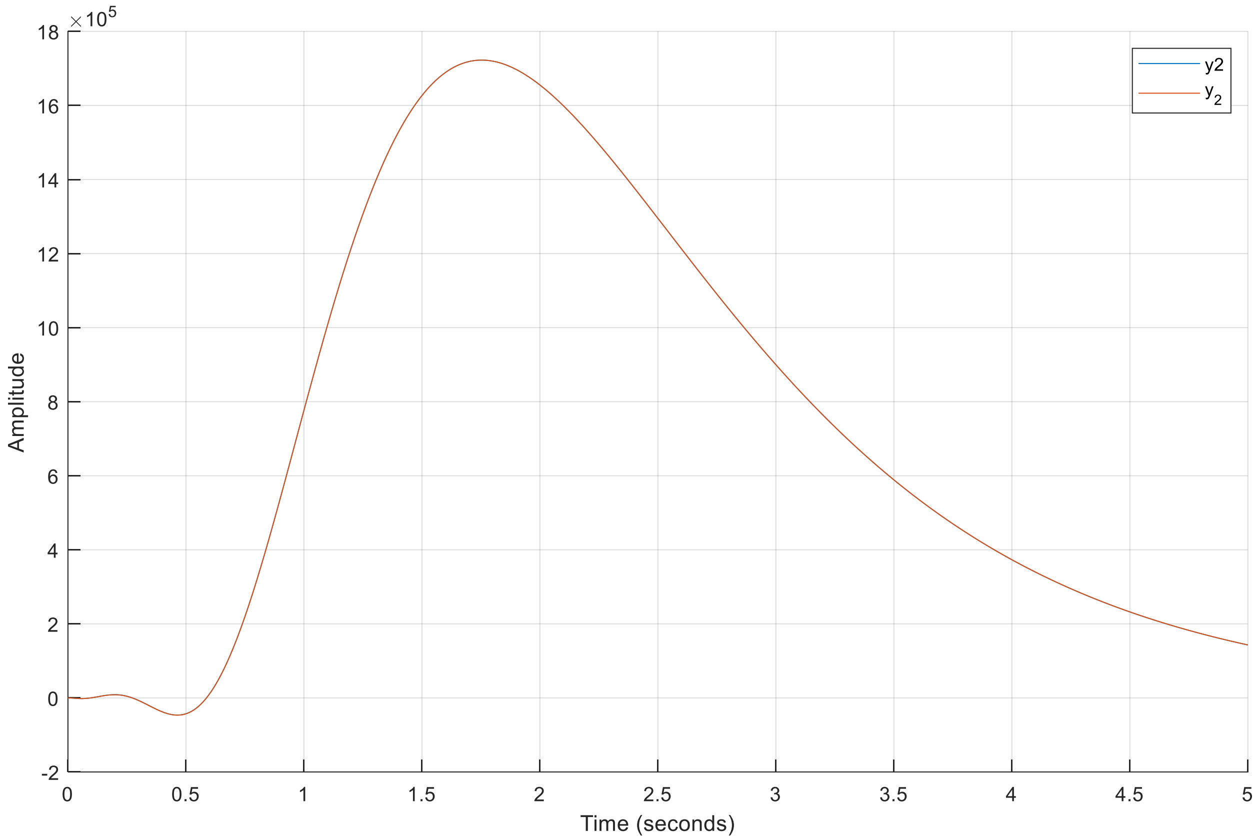

Рисунок 33 – первая компонента вектора выхода

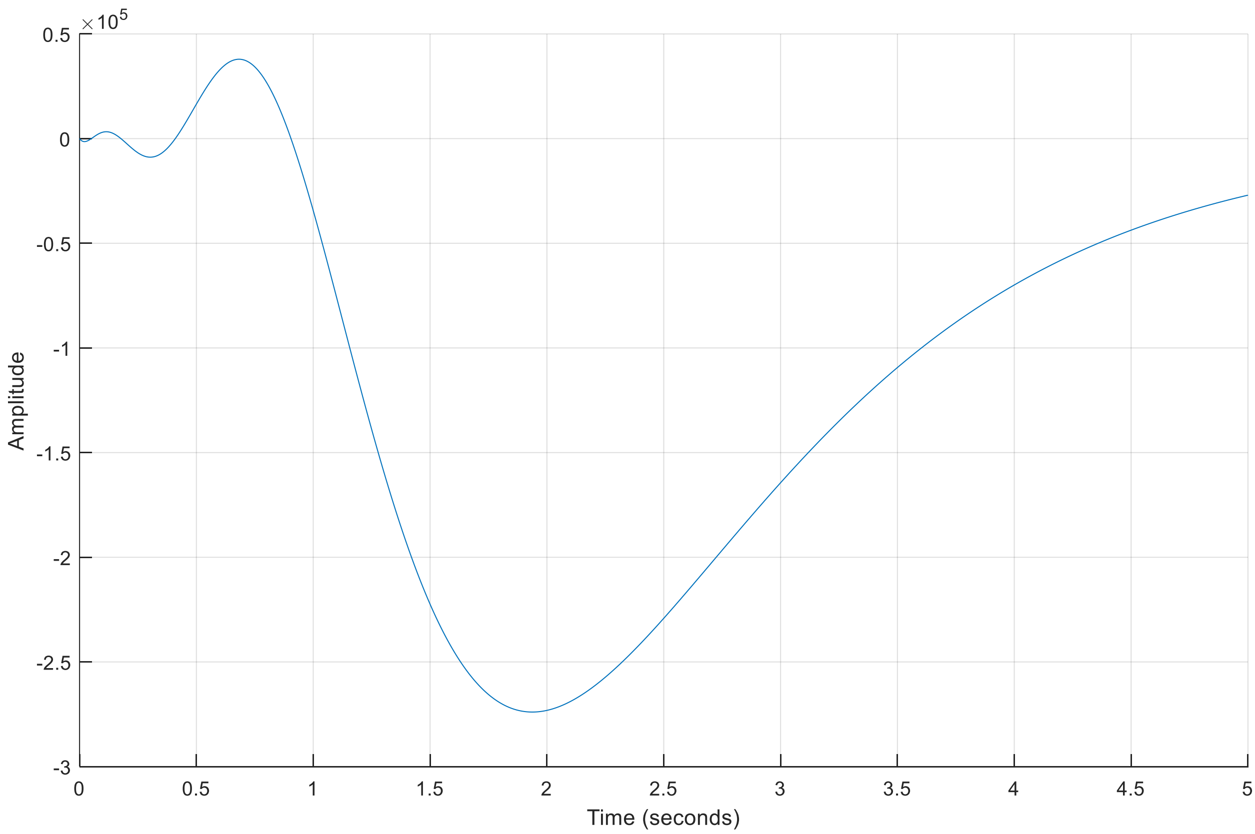

Рисунок 34 – график входного воздействия

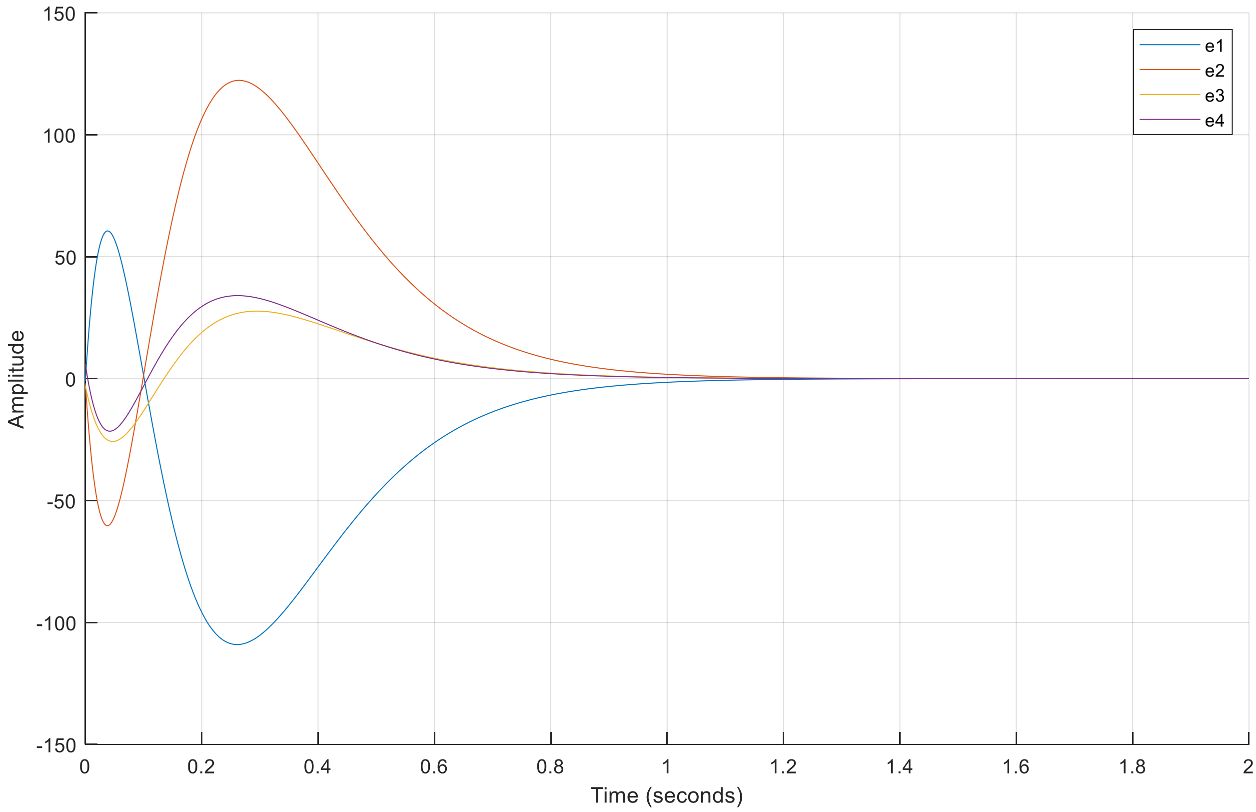

Рисунок 35 – график ошибок

Выводы

В ходе лабораторной работы были построены системы с наблюдателем и модальным регулятором. Для стабилизируемой системы можно подобрать такое управление, чтобы у замкнутой системы были собственные числа с отрицательной вещественной частью для управляемых чисел и тогда вектор состояния сойдется к нулю. Для обнаруживаемой системы можно выбрать такого наблюдателя, чтобы собственные числа замкнутой системы были с отрицательной вещественной частью для наблюдаемых чисел, и тогда наблюдатель сойдется к объекту.