

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники



Теория автоматического управления

Лабораторная работа №10

«Линейно-квадратичные радости»

Выполнил студент:

Мысов М.С. (В-14)

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1. Исследование LQR	3
Задание 2. Сравнение LQR с не-LQR	8
Задание 3. Исследование LQE	11
Задание 4. Исследование LQG	24
Выводы	27

Задание 1. Исследование LQR

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \\ -6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u, \quad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Функционал качества:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(0)Qx(t) + u^T(0)Ru(t))dt$$

Уравнение Риккати:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Матрица К:

$$K = -R^{-1}B^T P$$

Минимальный функционал качества:

$$J = x_0^T P x_0$$

Первый эксперимент (мягкий регулятор)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 4.46 & 7.78 & -2.55 & 11.05 \\ 7.78 & 20.36 & -4.56 & 29.49 \\ -2.55 & -4.56 & 1.66 & -6.62 \\ 11.05 & 29.49 & -6.62 & 44.57 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.25 & -0.11 & 0.397 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 109.62$$

Второй эксперимент (средний регулятор):

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 34.9 & -5.27 & 48.47 \\ 34.9 & 130.76 & -19.82 & 187.59 \\ -5.27 & -19.82 & 3.59 & -30.07 \\ 48.47 & 187.59 & -30.07 & 281.43 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.897 & 6.2374 & -0.7064 & 9.9238 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 723.47$$

Третий эксперимент (жесткий регулятор):

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 218.3 & 805.4 & -122 & 1106.2 \\ 805.4 & 3111 & -478.5 & 4442.2 \\ -122 & -478.5 & 85.4 & -725.1 \\ 1106.2 & 4442.2 & -725.1 & 6644.8 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 47.78 & 125.59 & -3.99 & 196.296 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 1728.4$$

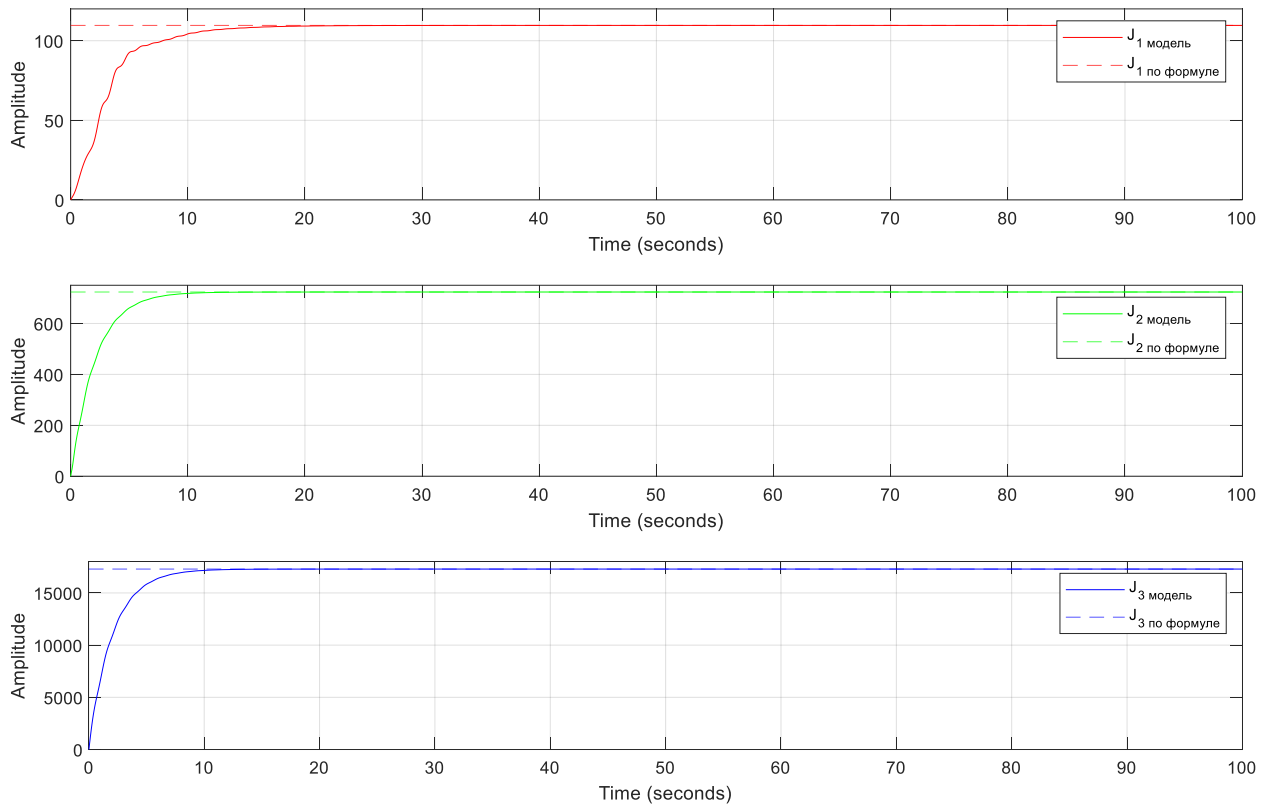


Рисунок 1 – графики значений минимального функционала качества

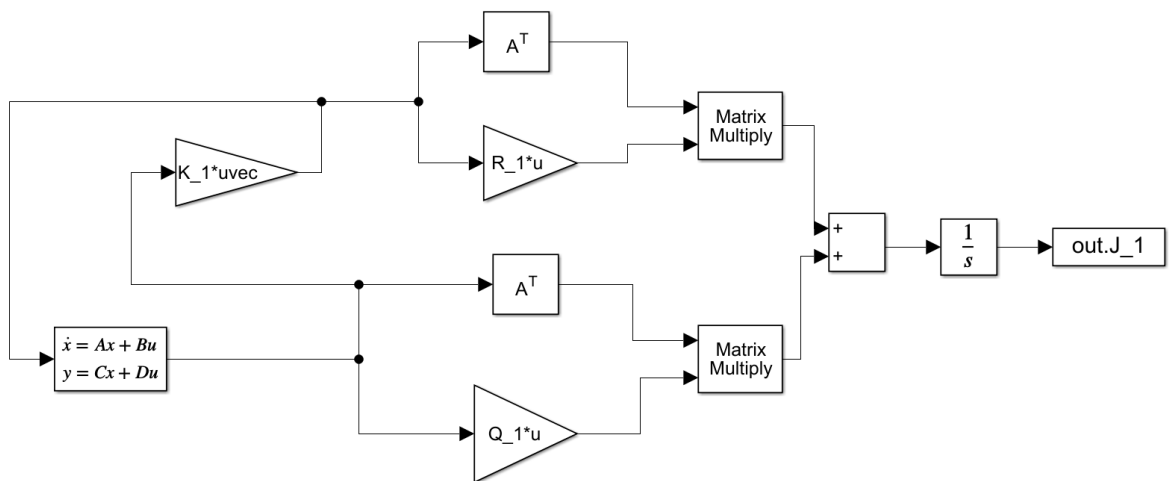


Рисунок 2 – схема моделирования «экспериментального» значения J

Значения минимального функционала качества, рассчитанного по формуле $J = x_0^T P x_0$ и по схеме моделирования, совпадают с высокой точностью.

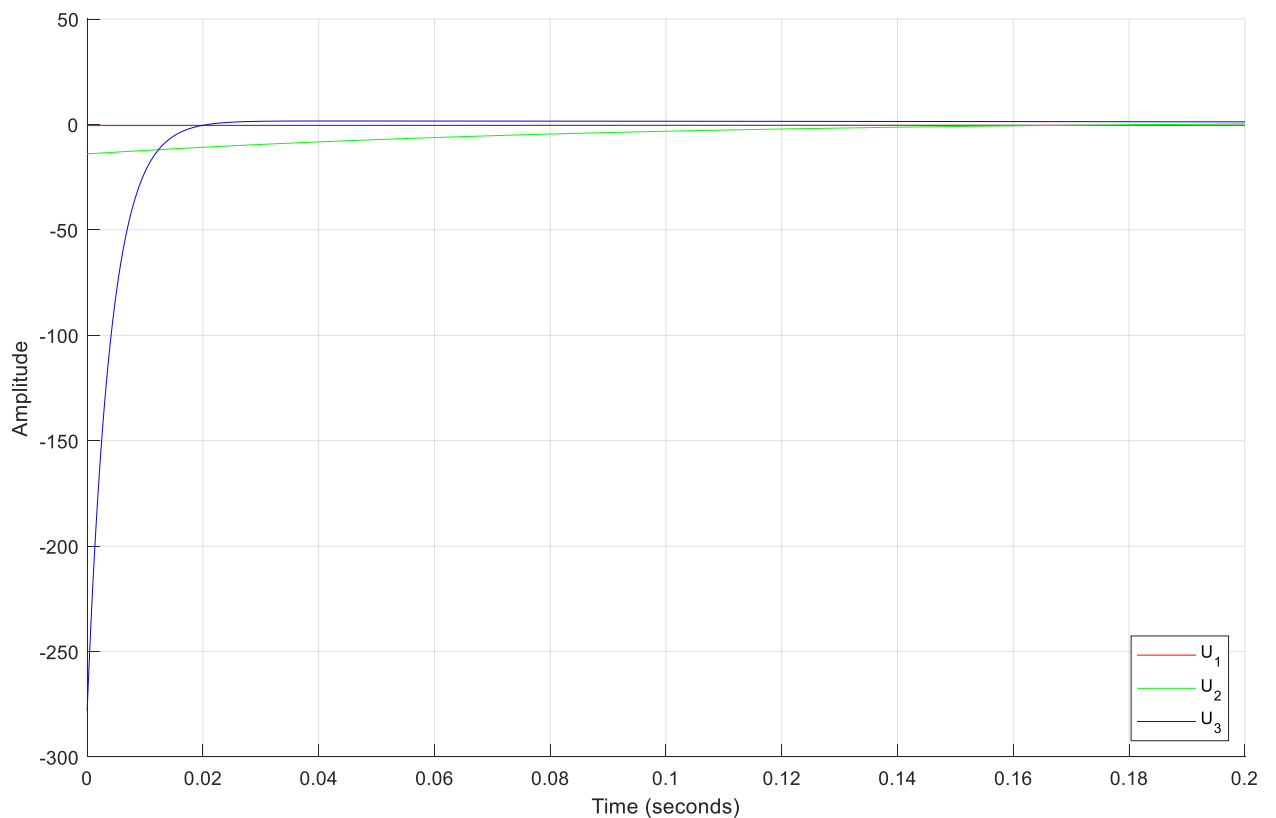


Рисунок 3 – входные воздействия

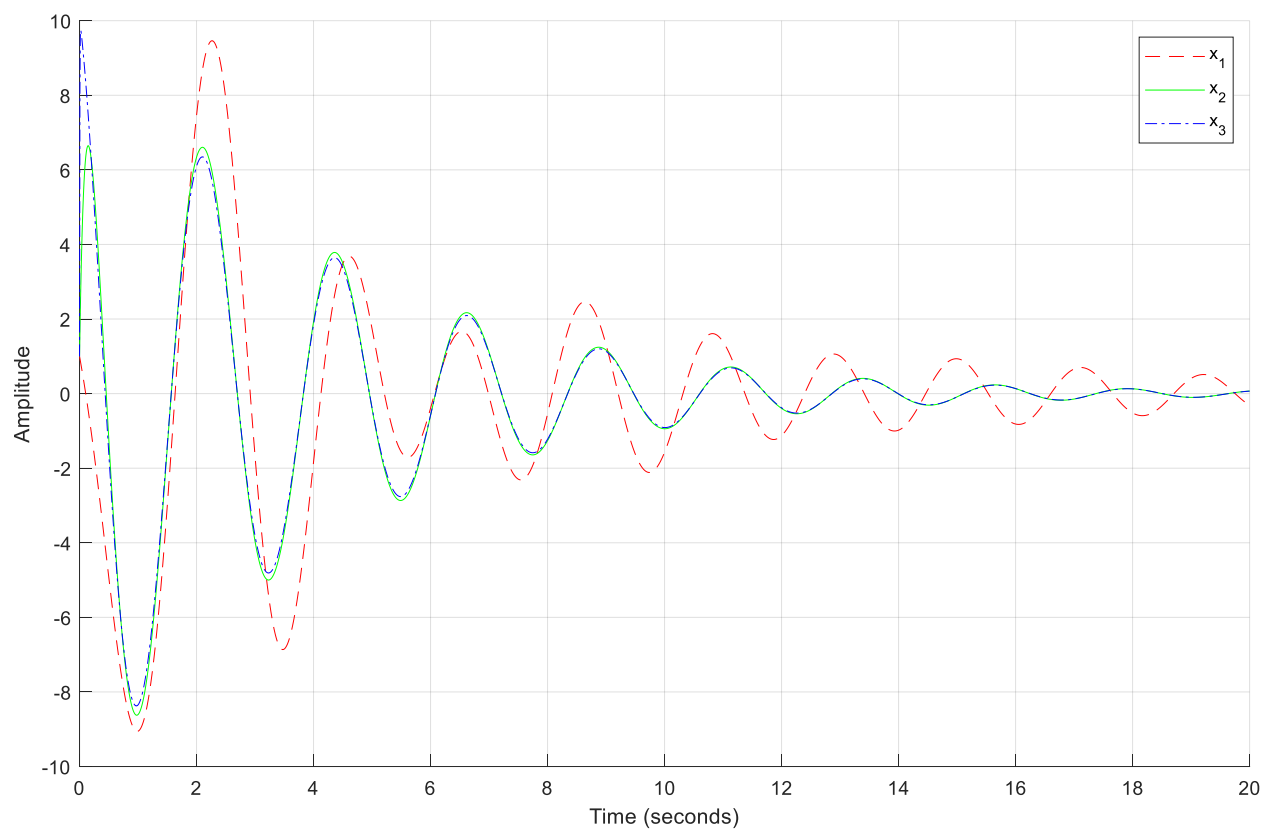


Рисунок 4 – первая компонента вектора состояния

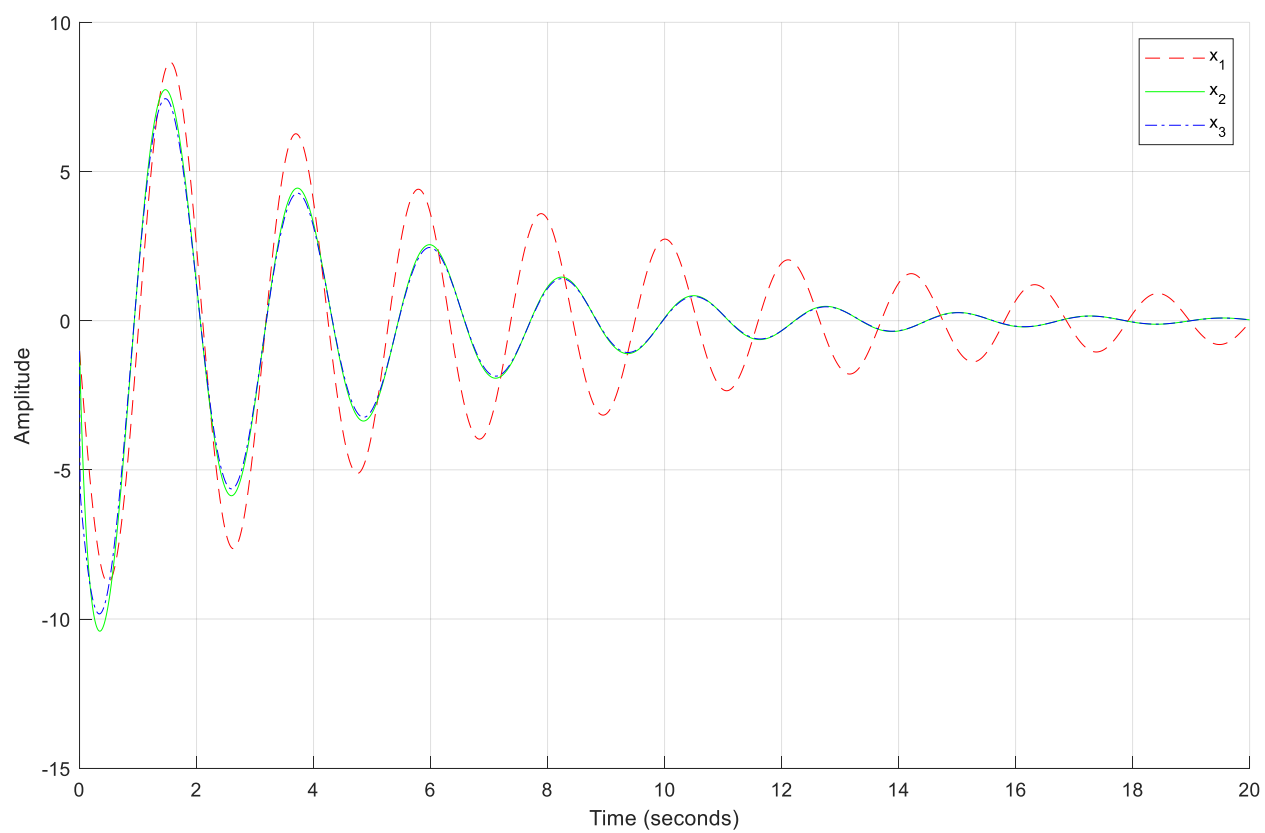


Рисунок 5 – вторая компонента вектора состояния

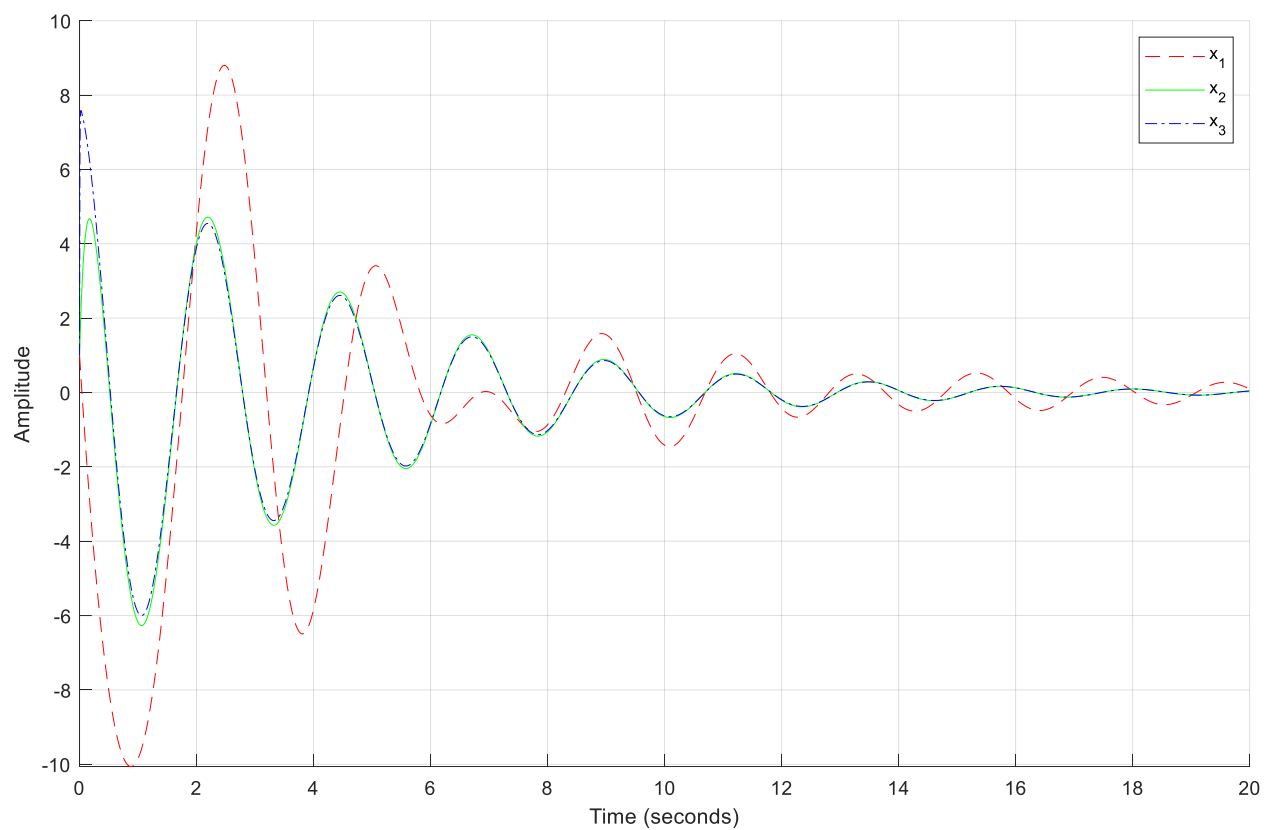


Рисунок 6 – третья компонента вектора состояния

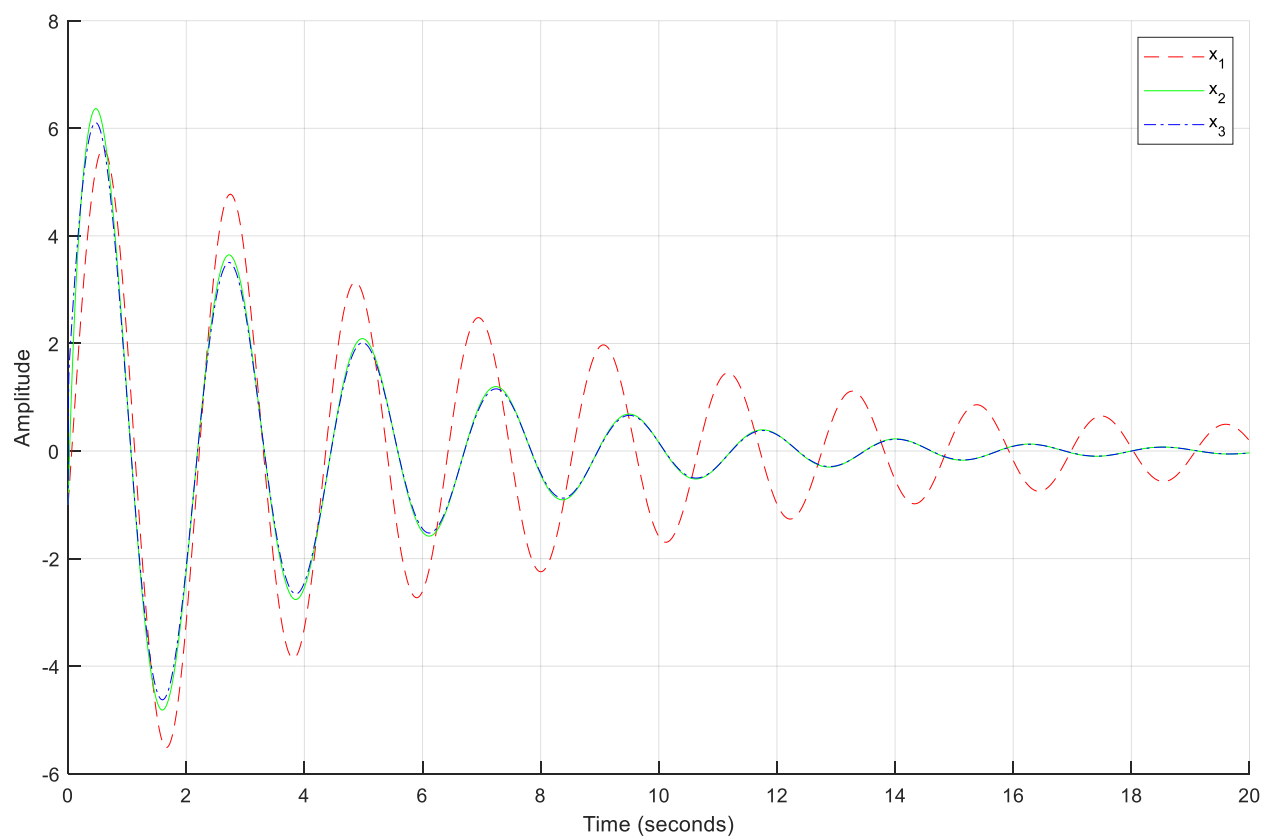


Рисунок 7 – четвертая компонента вектора состояния

Данный синтез LQR предлагает выбрать оптимальный регулятор, который будет давать лучшие значения на выбранном критерии качества.

В значении функционала качества важно взаимное отношение Q и R. Мы провели моделирование трех регуляторов от «**мягкого**» до «**жесткого**» и подтвердили теорию. **Мягкий** регулятор затрачивал меньшее управление и был более «размашистым», в свою очередь **жесткий** регулятор имел большее управление из-за чего и приходил к цели быстрее, **средний** регулятор так и был средним.

Задание 2. Сравнение LQR с не-LQR

Эксперимент	$\sigma(A + BK)$	J
1	$\{-9.86, -0.2464 \pm 2.783i, -3.4785\}$	723.47
2	$\{-0.4569 \pm 2.8259, -2.2691 \pm 1.0683i\}$	890.14
3	$\{-5.7779 \pm 7.095, -3.7656 \pm 1.4042i\}$	11169.4

Для **первого** эксперимента был выбран **средний LQR** регулятор из прошлого задания, во **втором** эксперименте используется LMI регулятор со степенью устойчивости **0.3**, а в **третьем** LMI регулятор со степенью устойчивости **3**.

Из таблицы видно, что самый оптимальный в соответствии с выбранным критерием качества является LQR регулятор.

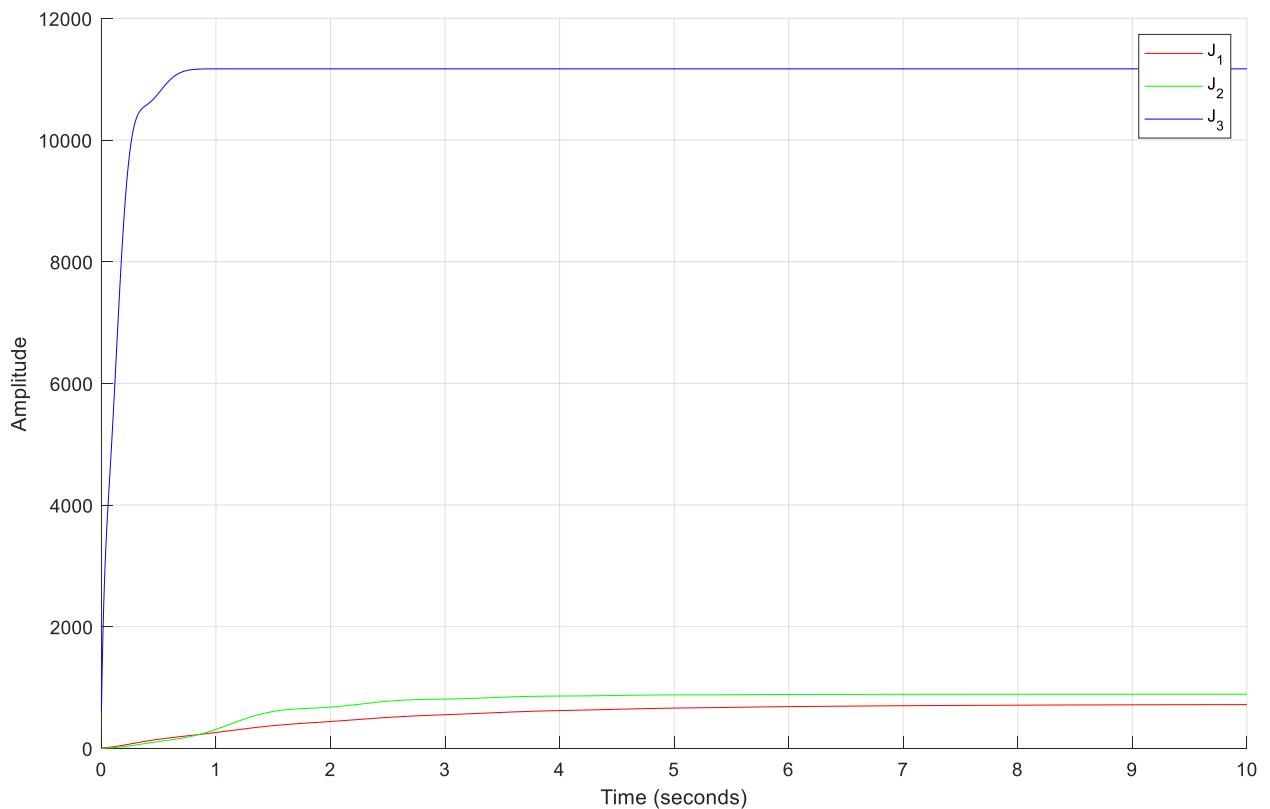


Рисунок 8 – графики значений минимального функционала качества

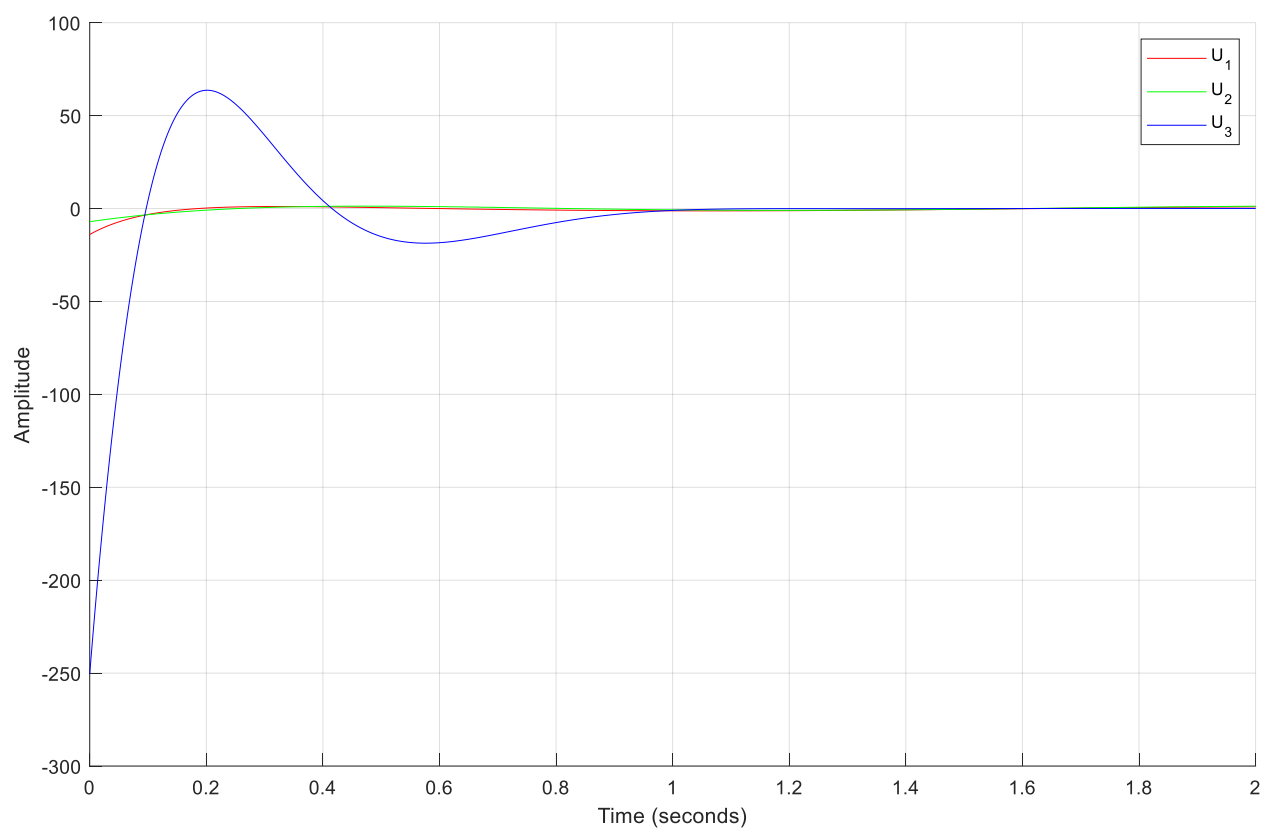


Рисунок 9 – входные воздействия

При LQR не наблюдается большого входного управления на систему при малых t .

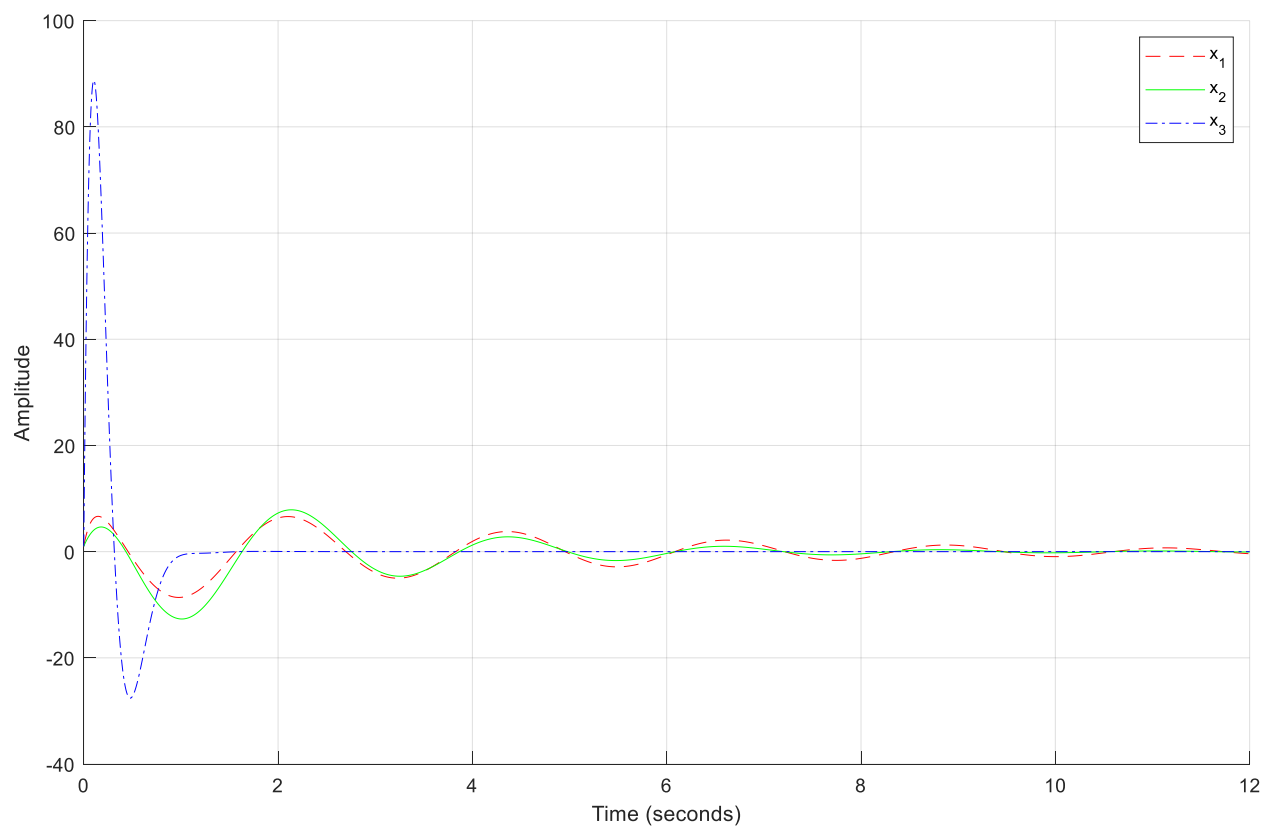


Рисунок 10 – первая компонента вектора

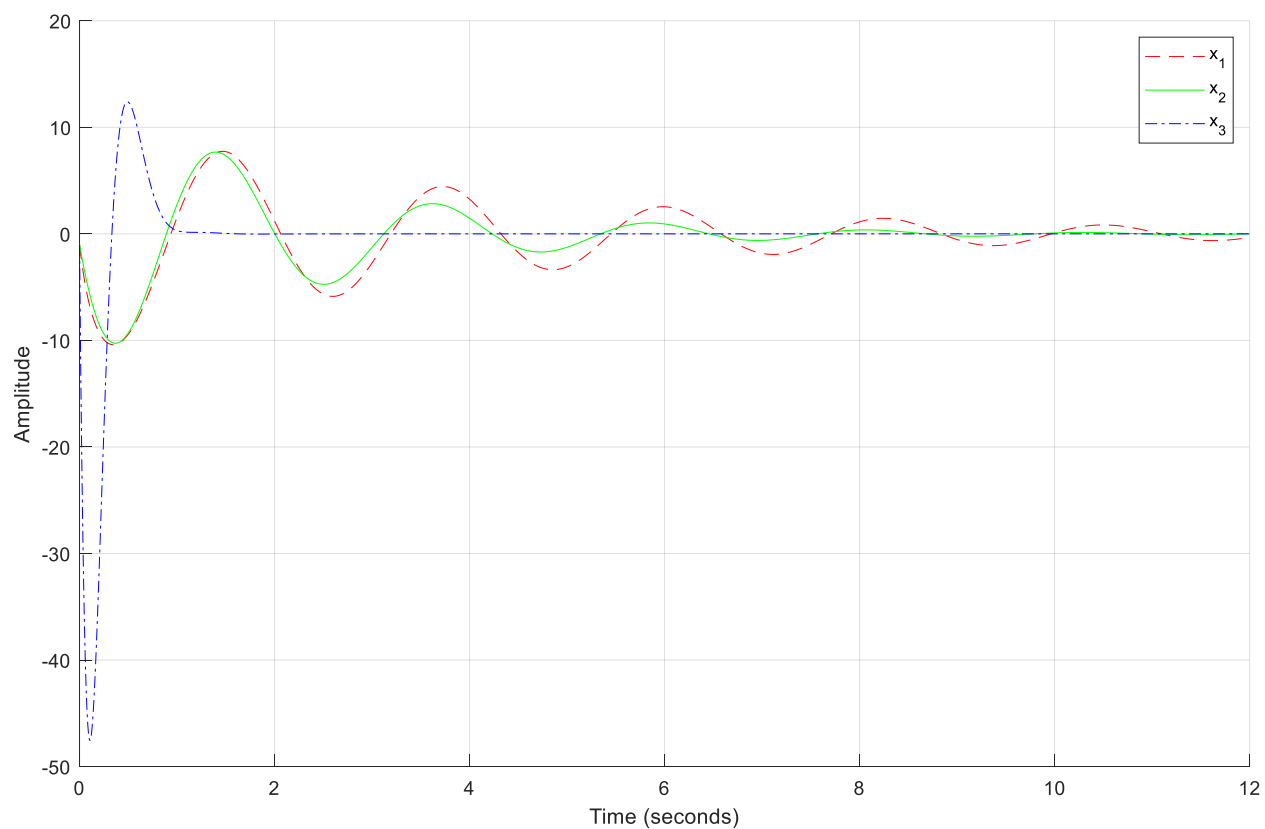


Рисунок 11 – вторая компонента вектора

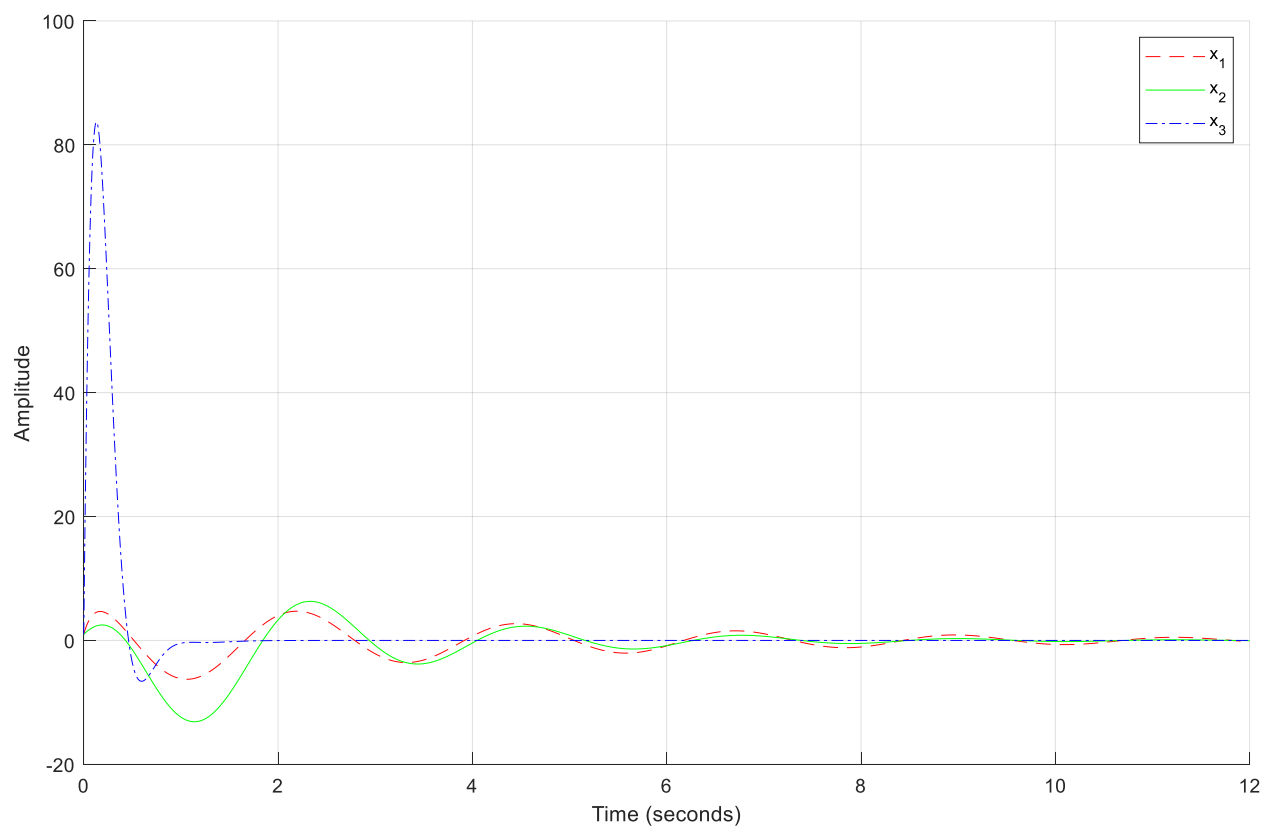


Рисунок 12 – третья компонента вектора

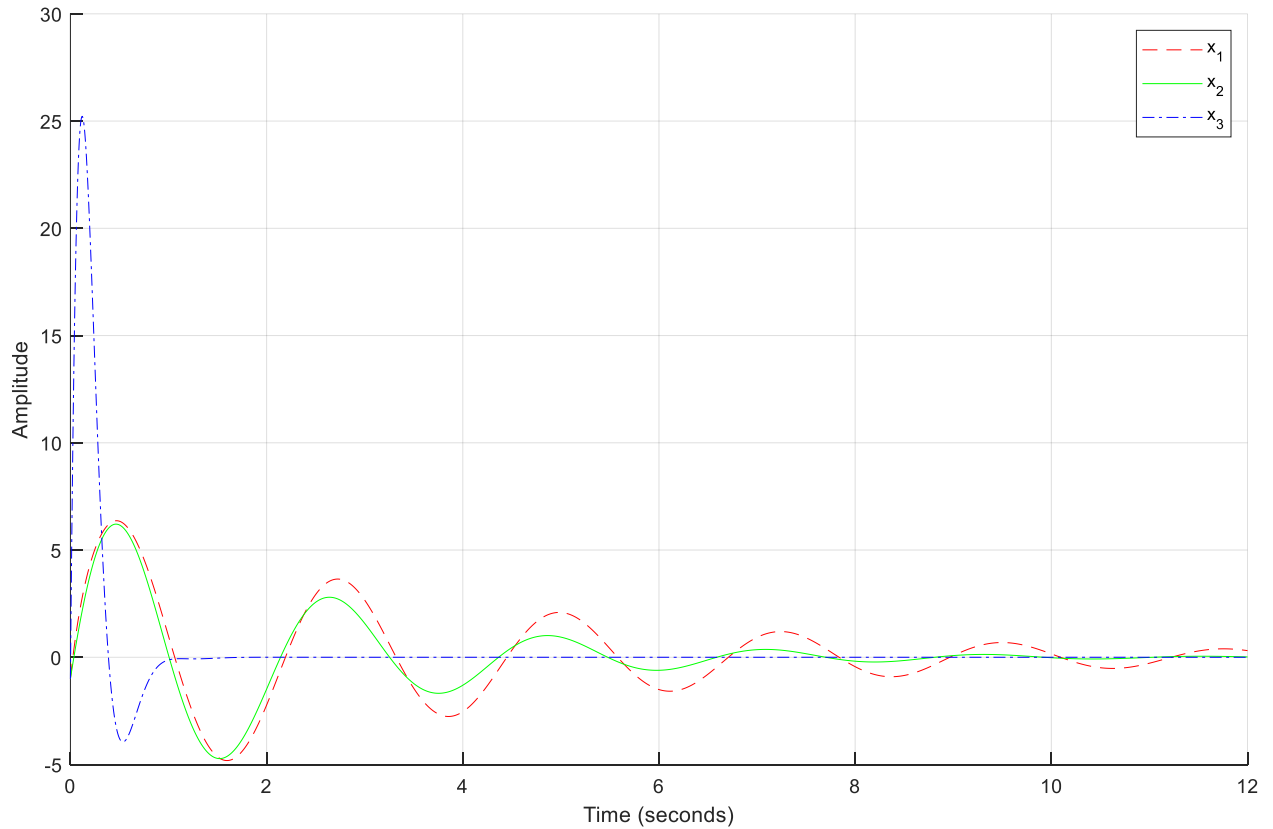


Рисунок 13 – четвертая компонента вектора

Во всех случаях LQR имеет наибольшее время переходного процесса, однако при нем отсутствует большое отклонение при малых t как в остальных регуляторах.

Задание 3. Исследование LQE

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

Наблюдатель:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + L(\hat{y} - y), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}$$

Из уравнения будем находить P :

$$AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$$

Чтобы найти L :

$$L = -PC^T R^{-1}$$

Первый наблюдатель (верим, что ξ мало) - O_ξ

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -23.9 & -13.5386 & -35.97 & 9.0851 \\ 0.189 & 5.5179 & -0.4567 & -5.4379 \end{bmatrix}$$

Данный наблюдатель будет «верить» в сигнал, график \hat{y} будет идти рядом с y .

Второй наблюдатель (верим, что f и ξ примерно равны) - O_I

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -7.89 & -4.15 & -12.12 & 2.82 \\ 1.09 & 1.95 & 0.969 & -1.839 \end{bmatrix}$$

Данный наблюдатель будет «с небольшой опаской верить» в сигнал, на графике \hat{y} будет видна некоторая сглаженность в сравнении с графиком y .

Третий наблюдатель (верим, что f мало) - O_f

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -0.844 & -0.068 & -1.302 & 0.1022 \\ 0.2195 & 0.2455 & 0.1347 & -0.2361 \end{bmatrix}$$

Данный наблюдатель будет «с опаской верить» в сигнал, на графике \hat{y} будет видна сильная сглаженность в сравнении с графиком y .

Пусть f и ξ – белый шум. $f \sim N(0, 500), \xi \sim N(0, 5)$

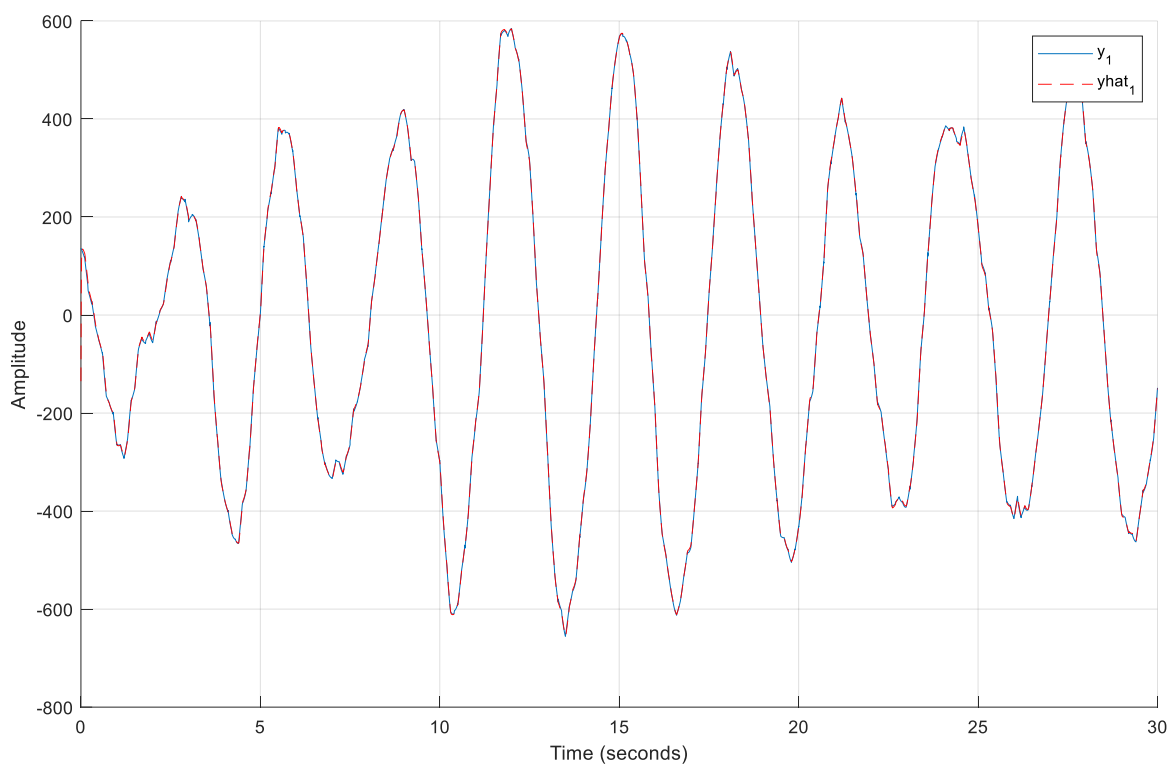


Рисунок 14 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

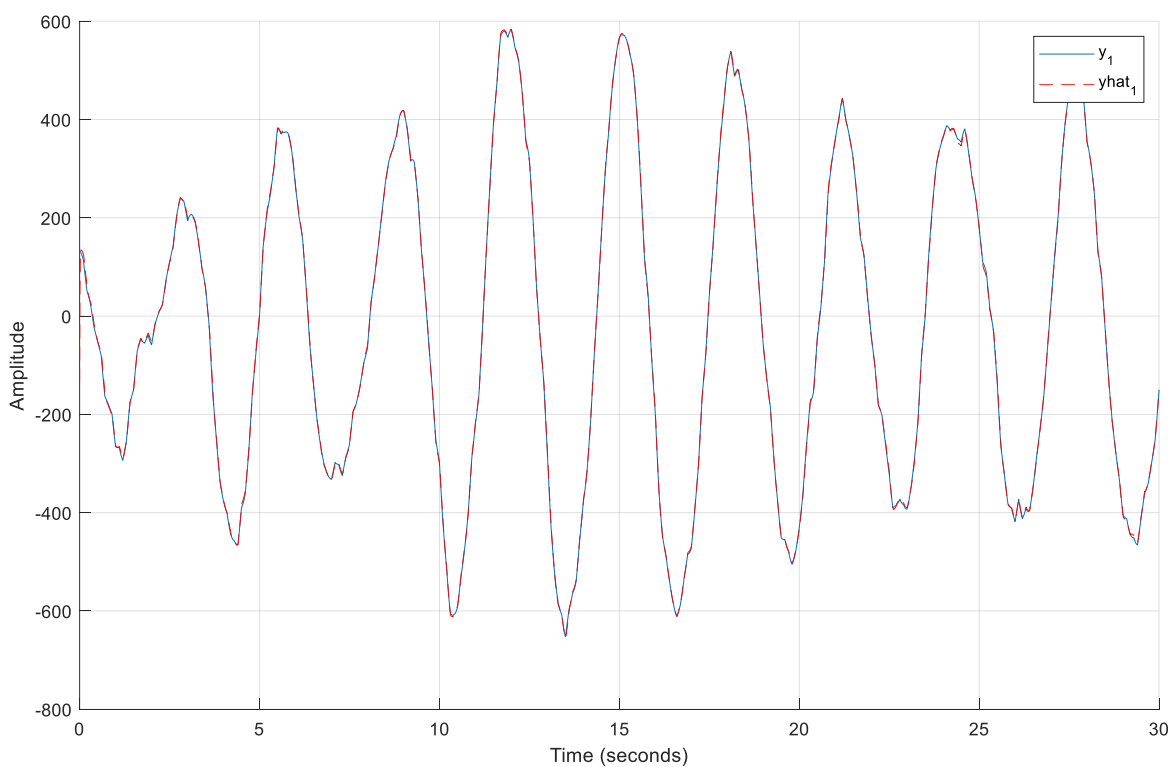


Рисунок 15 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Можно увидеть, что y с наблюдателя очень похож на реальный y , так как ожидания наблюдателя совпали с реальностью (помеха измерений мала).

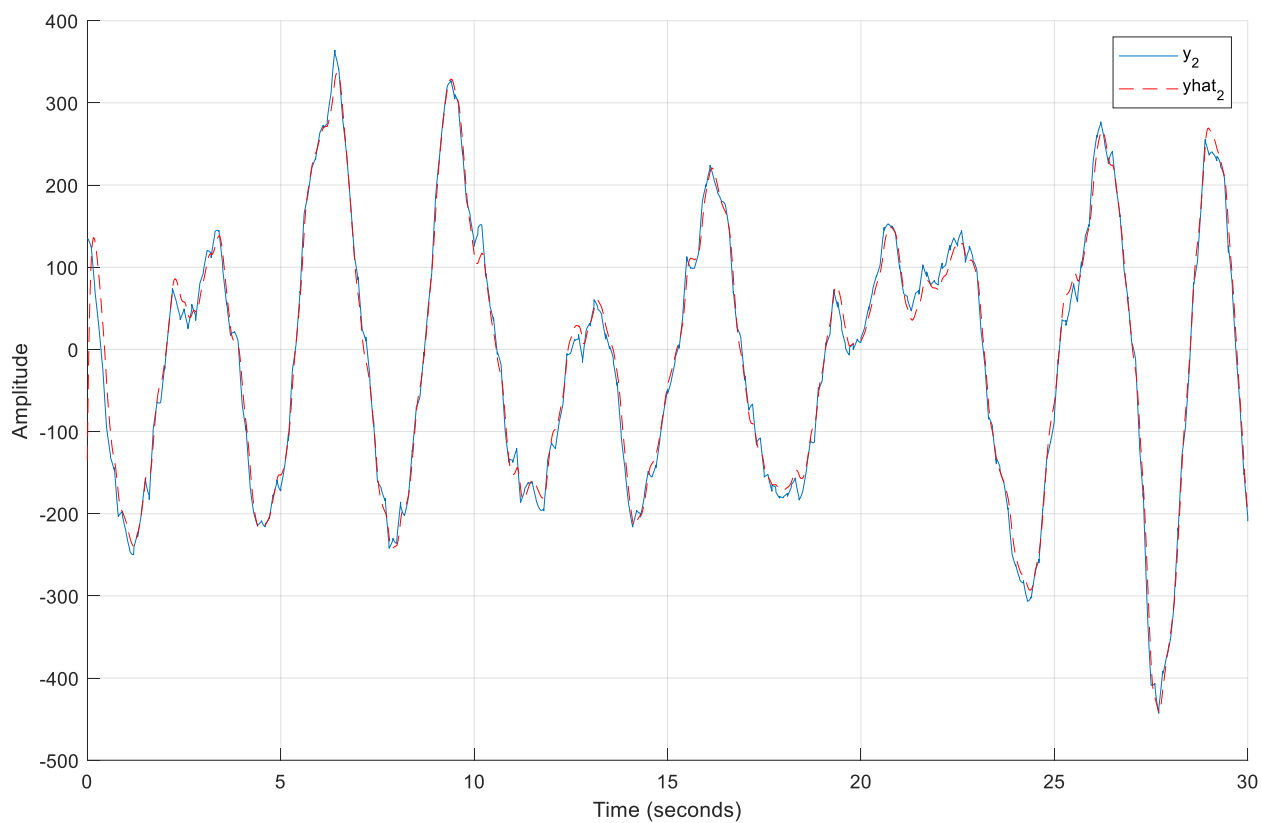


Рисунок 16 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

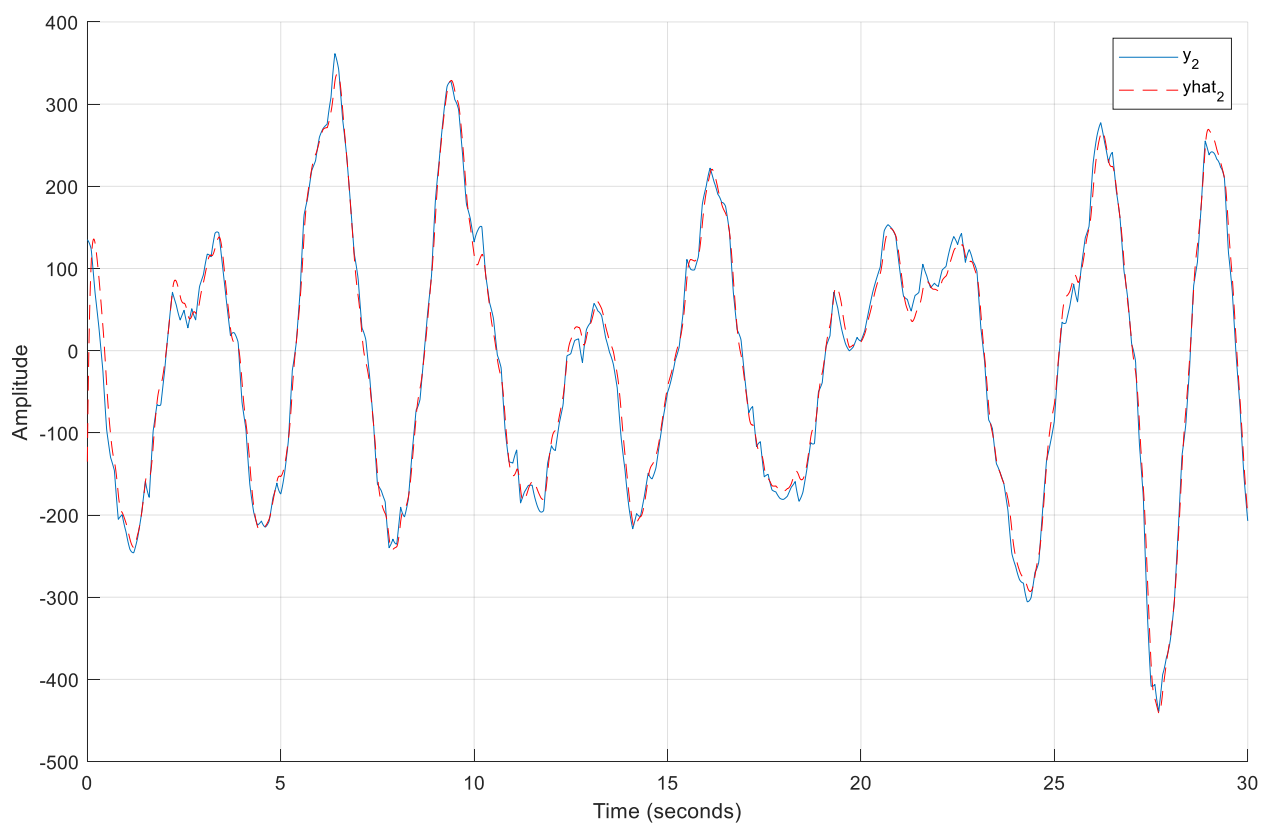


Рисунок 17 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

На данных графиках отличия более заметны, графики совпадают меньше, так как наблюдатель ожидал примерно равные f и ξ .

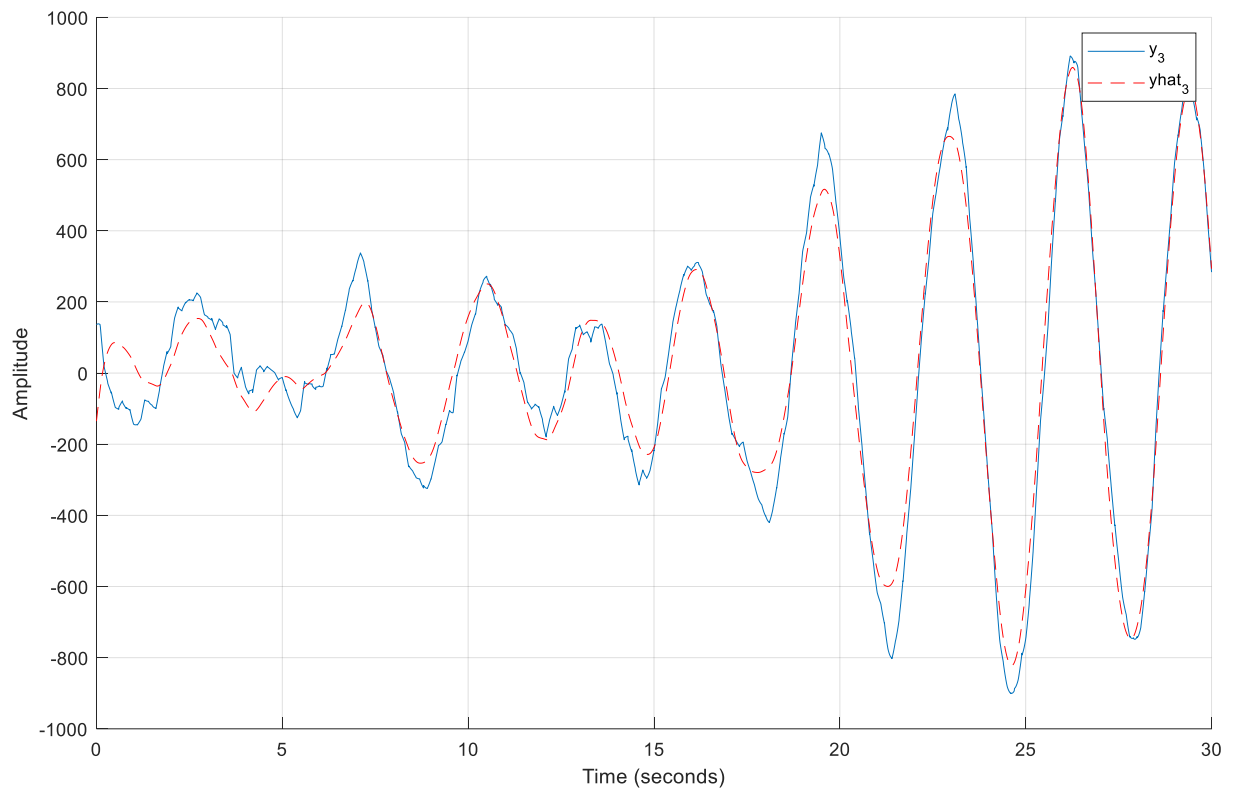


Рисунок 18 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

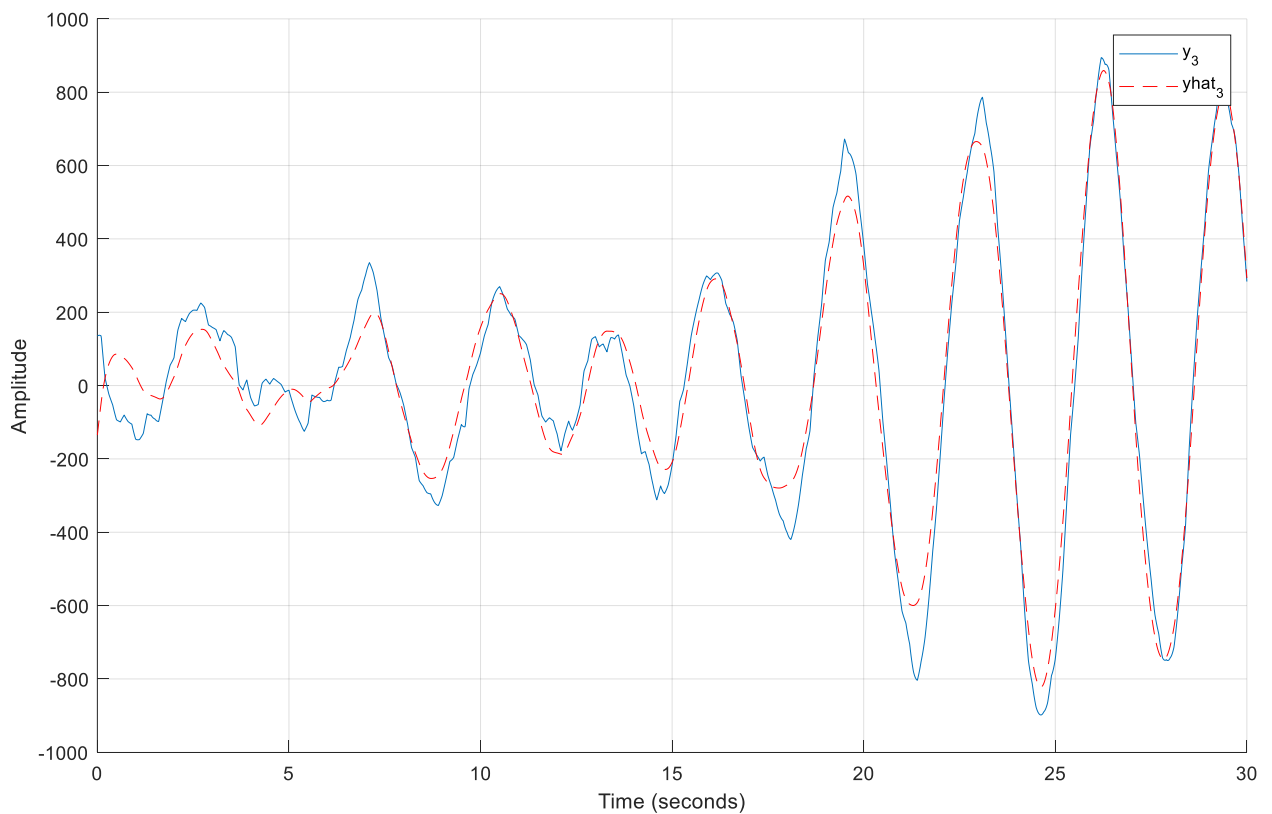


Рисунок 19 – сравнение Sx и \hat{y} с наблюдателя

Графики реального y и y с наблюдателя в этом случае сильнее всего расходятся, так как наблюдатель думает, что изменения связаны с помехой измерений, и будто бы не доверяет измеренному y , хотя в реальности изменения вызваны внешним возмущением.

Пусть f и ξ – белый шум. $f \sim N(0, 5), \xi \sim N(0, 500)$

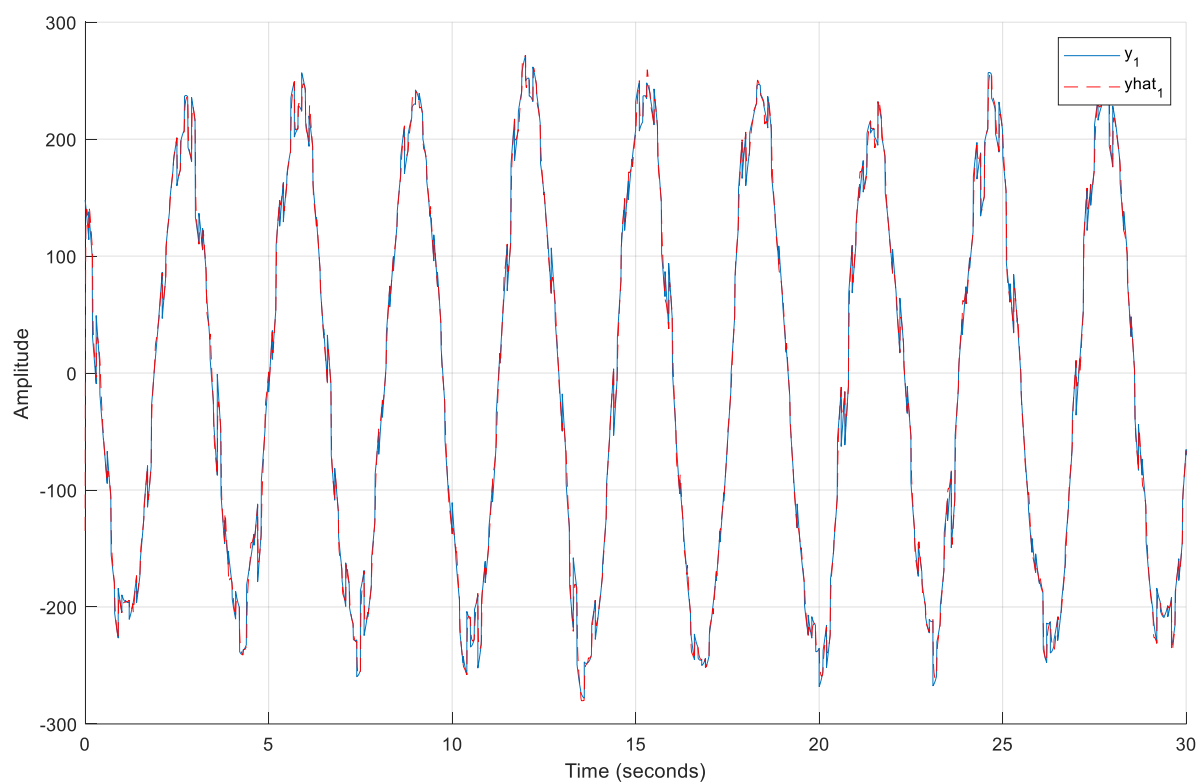


Рисунок 20 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

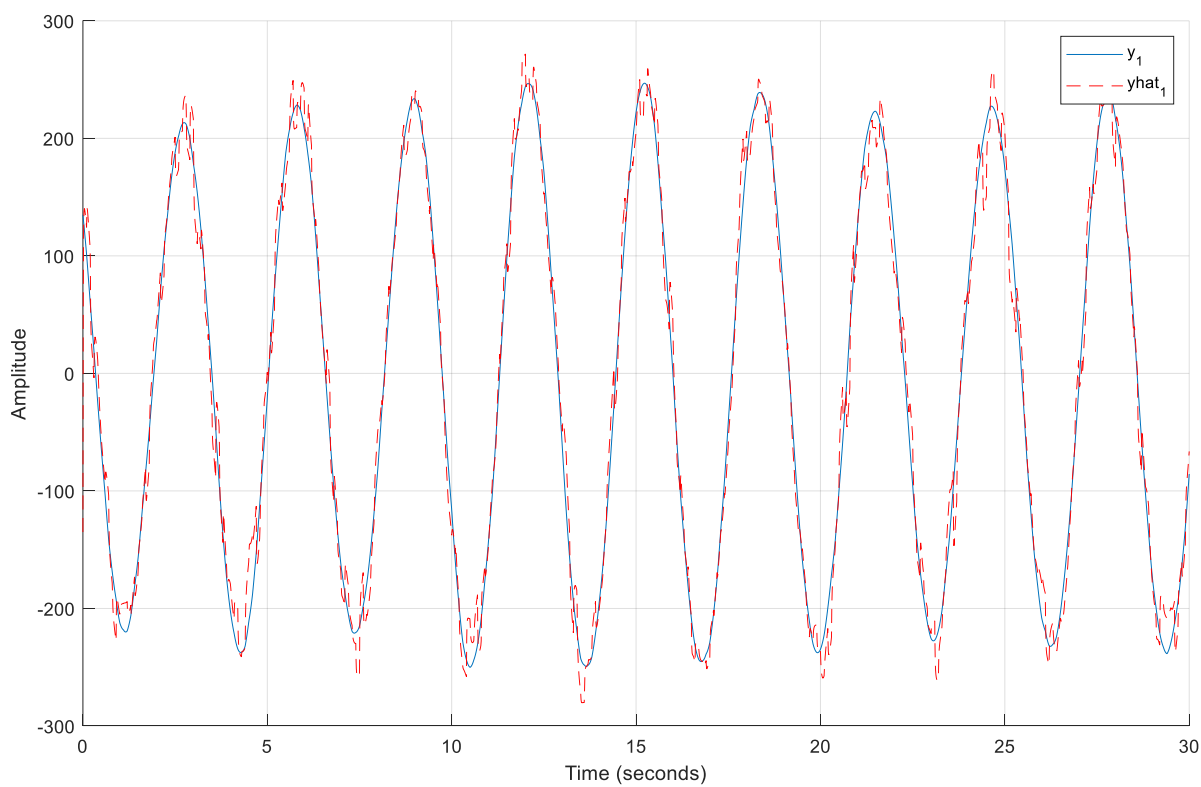


Рисунок 21 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Он слишком доверял сигналу...

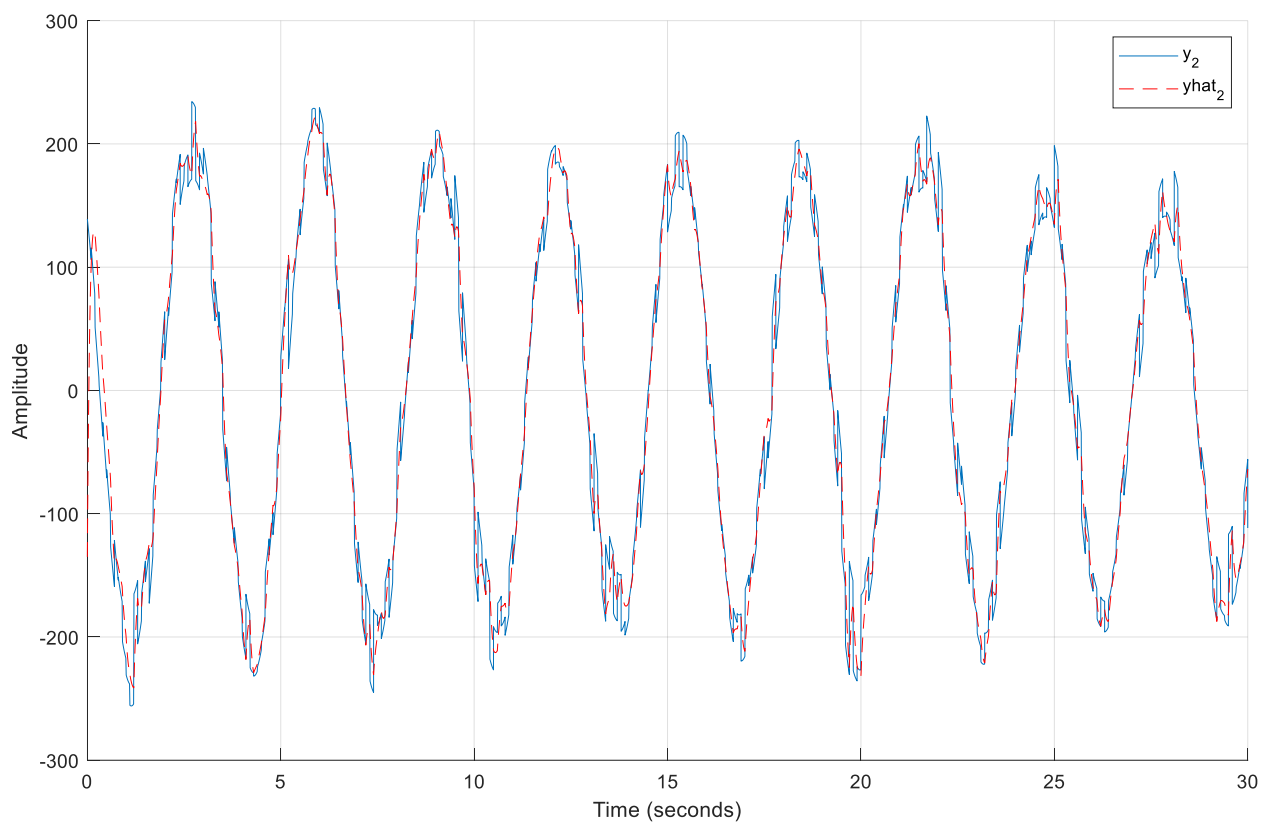


Рисунок 22 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

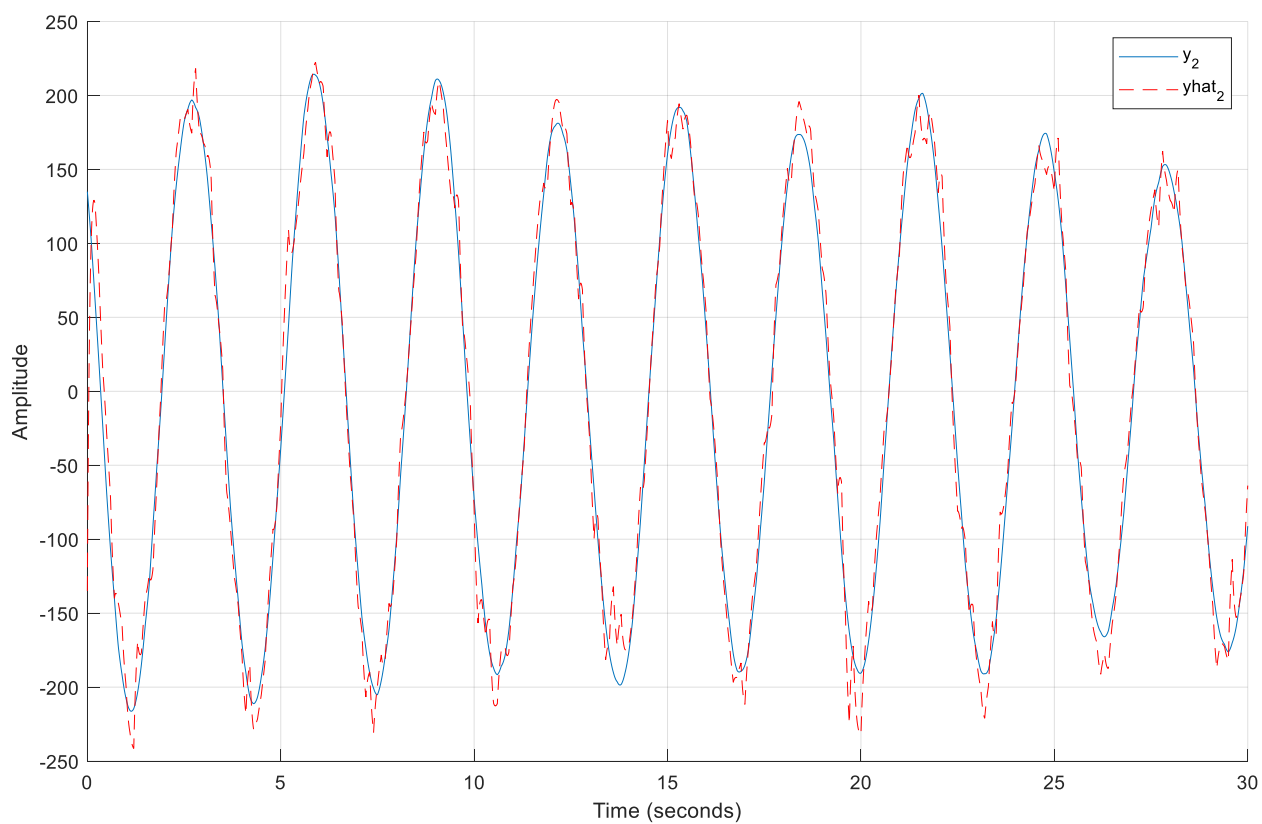


Рисунок 23 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Здесь наблюдатель ожидал примерно равные f и ξ .

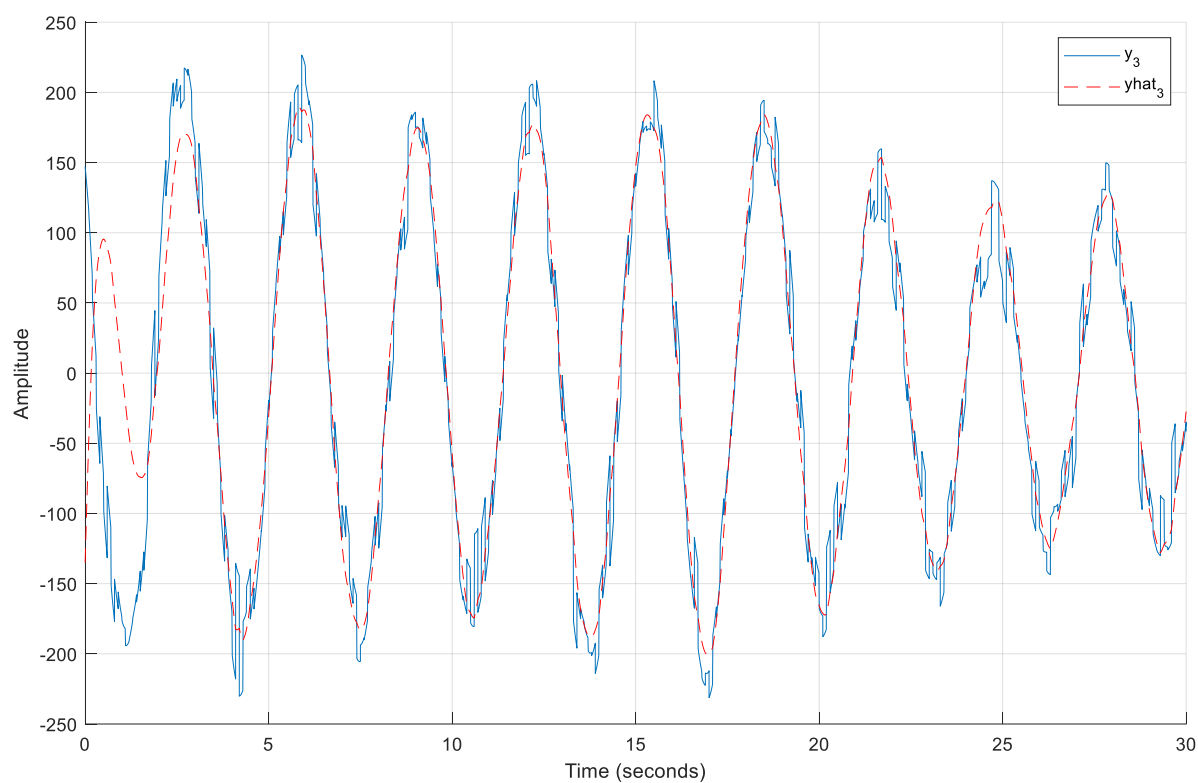


Рисунок 24 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

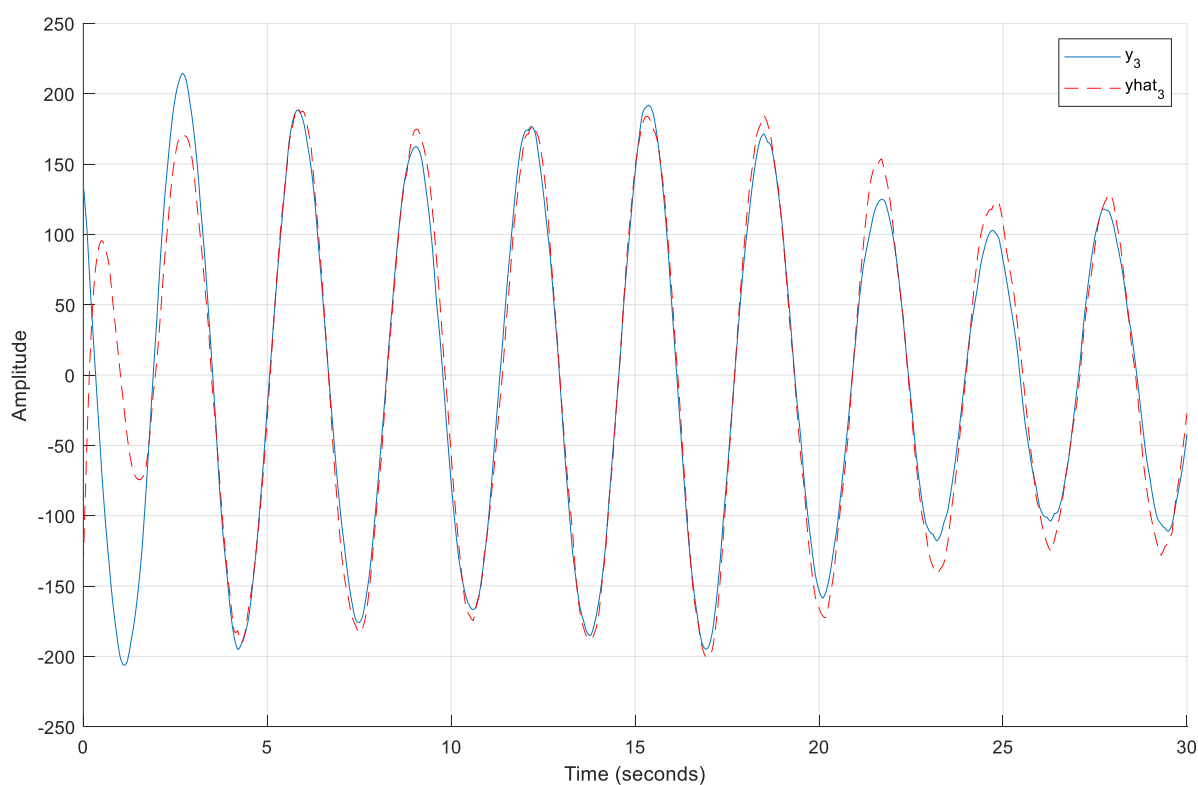


Рисунок 25 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Выход с наблюдателя не полностью повторяет выход с объекта, так как при синтезе наблюдателя предполагалось, что f – мало, а значит наблюдатель считает, что существенную часть вносит в изменение выхода вносит ξ . На рисунке 19 видно, что y с наблюдателя почти совпадает с реальным y .

Пусть f и ξ – белый шум. $f \sim N(0, 50), \xi \sim N(0, 50)$

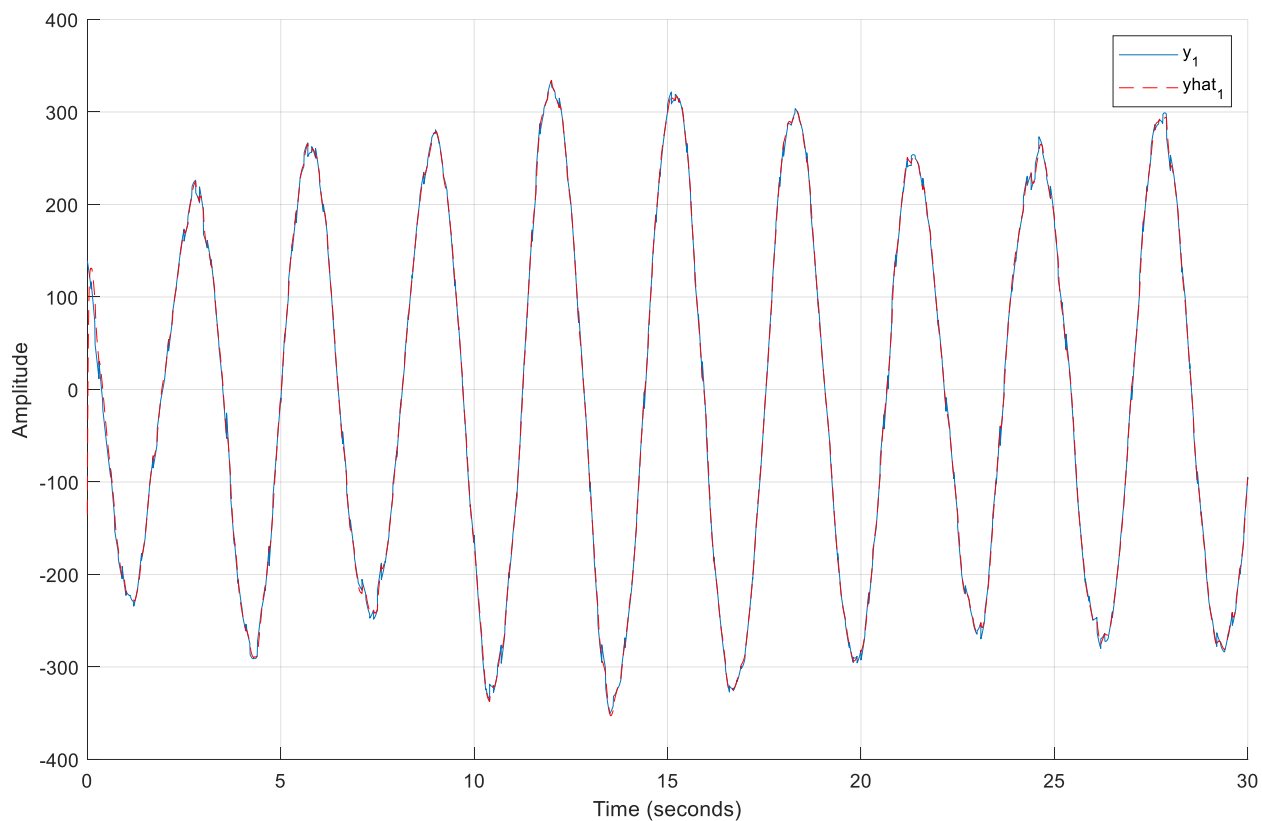


Рисунок 26 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

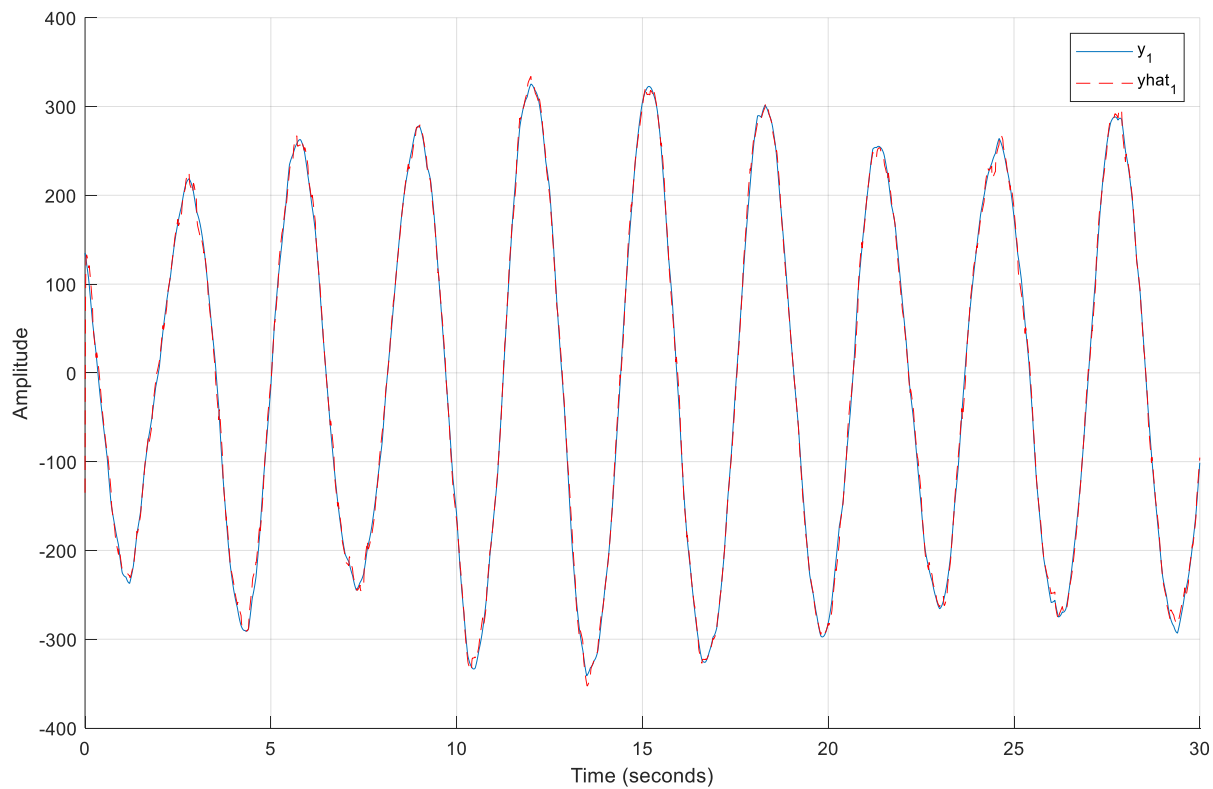


Рисунок 27 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

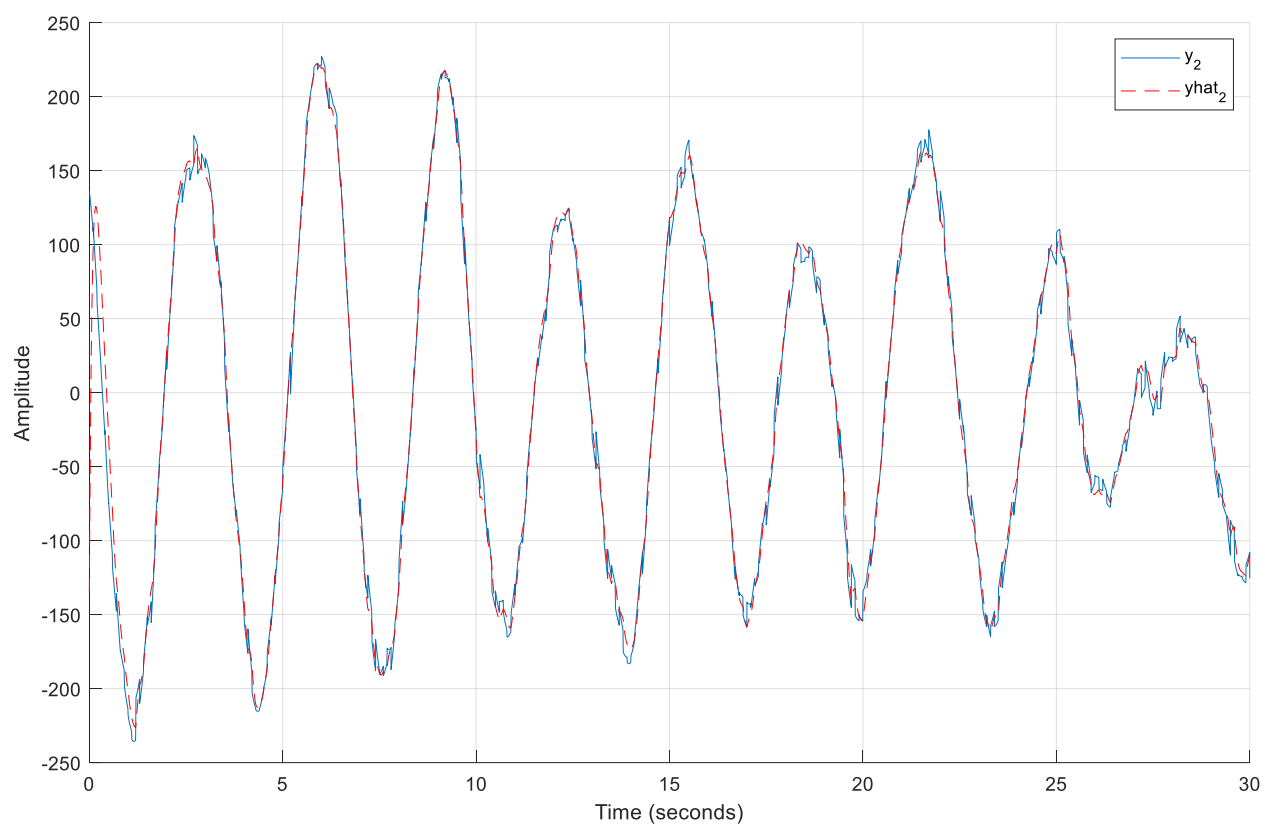


Рисунок 28 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

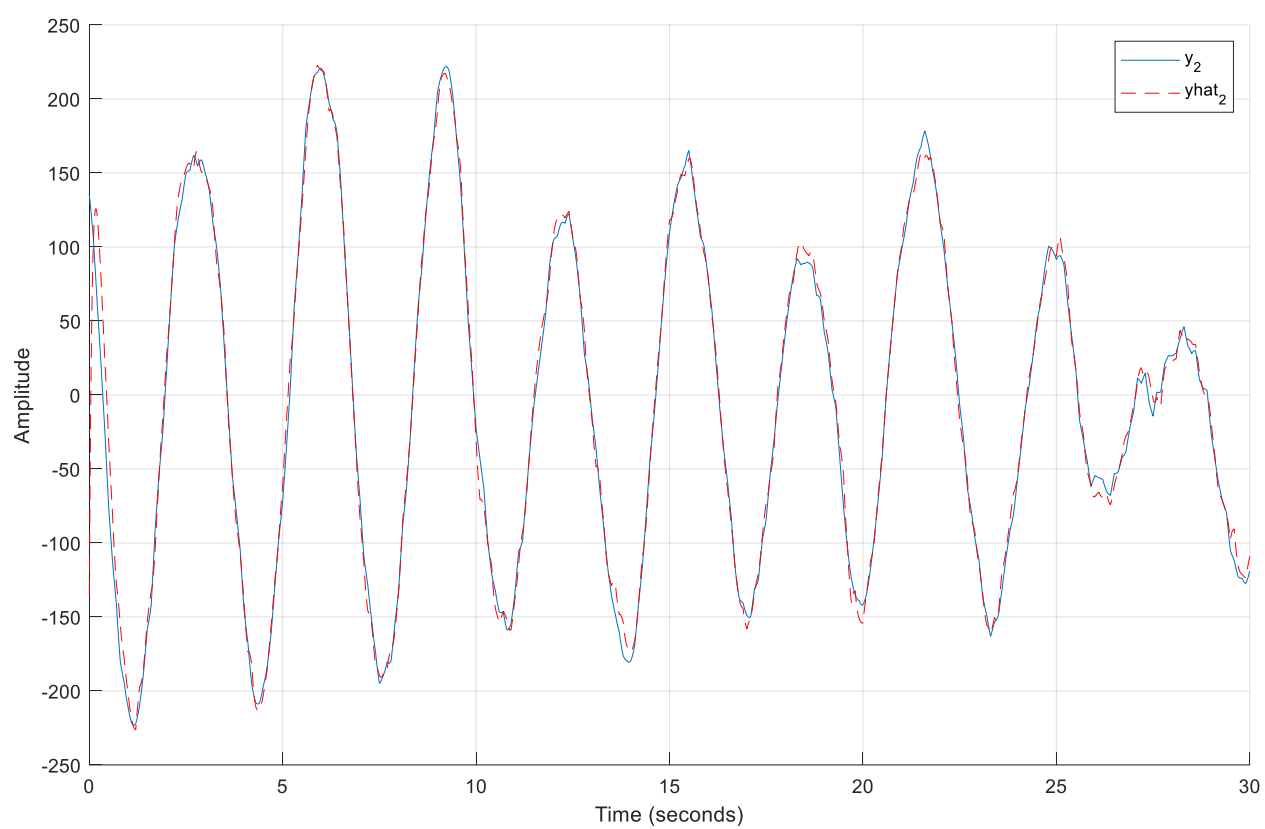


Рисунок 29 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

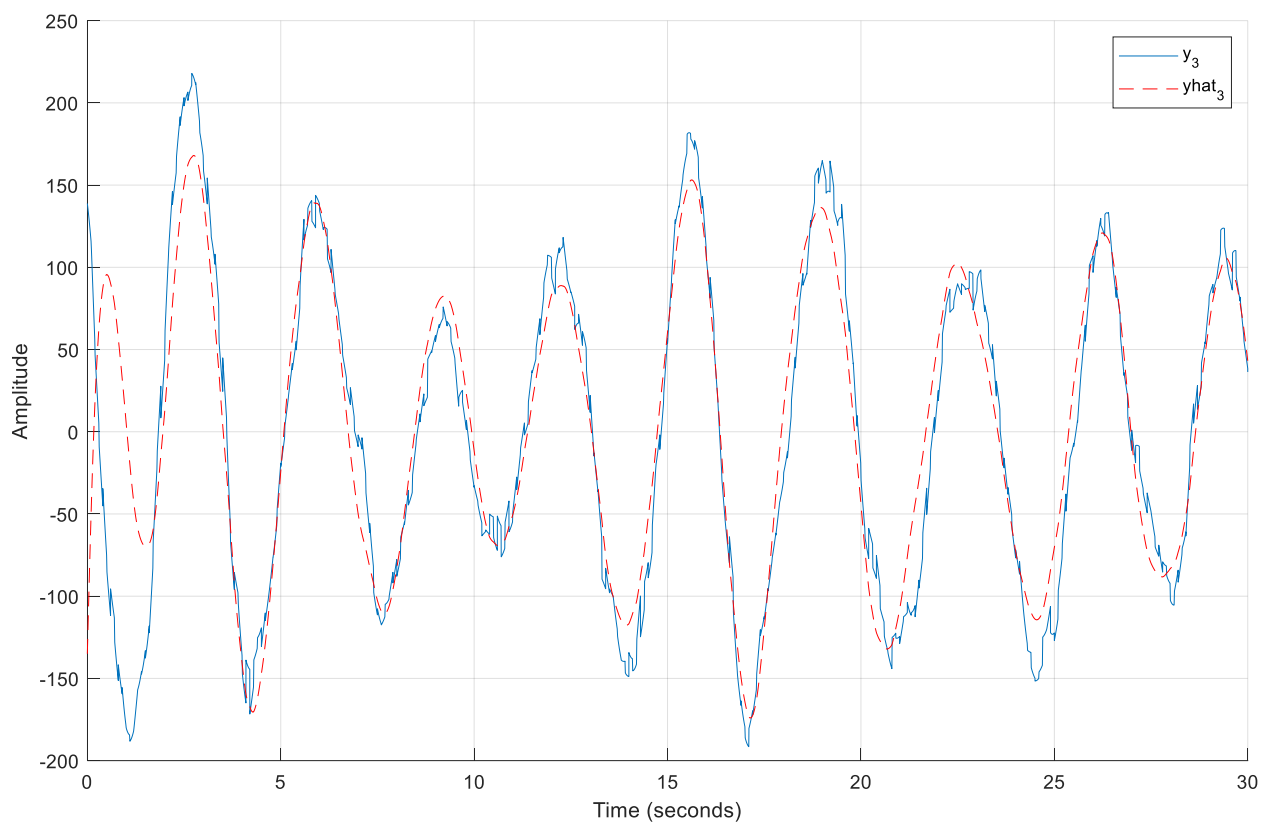


Рисунок 30 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

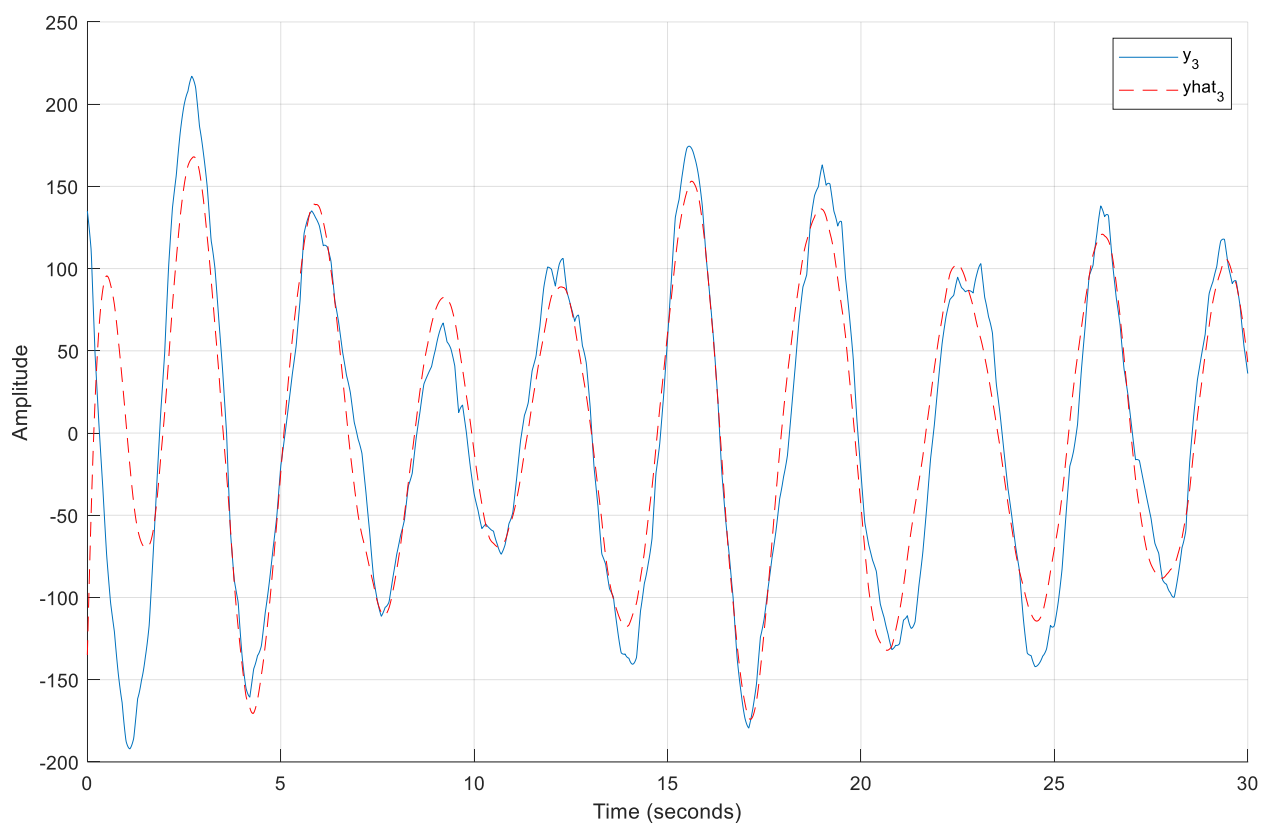


Рисунок 31 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Чтобы ошибка наблюдателя сошлась к нулю, нужно знать заранее дисперсию распределения. И выбрать матрицы Q и R , чтобы:

$$E(f(t)f^T(t)) = \delta(t - \tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \delta(t - \tau)Q \text{ и } E(\xi(t)\xi^T(t)) = \\ \delta(t - \tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \delta(t - \tau)R$$

Пусть $f \sim N(0, 65)$ и $\xi \sim N(0, 80)$. Тогда:

$$Q = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{bmatrix}, Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0154 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0154 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0154 \end{bmatrix} \\ R = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0125 & 0 \\ 0 & 0.0125 \end{bmatrix}$$

Тогда из уравнения Риккати:

$$L^T = \begin{bmatrix} -7.1461 & -3.7144 & -10.9777 & 2.5363 \\ 1.0852 & 1.7872 & 0.9928 & -1.6750 \end{bmatrix}$$

Графики для оптимального наблюдателя:

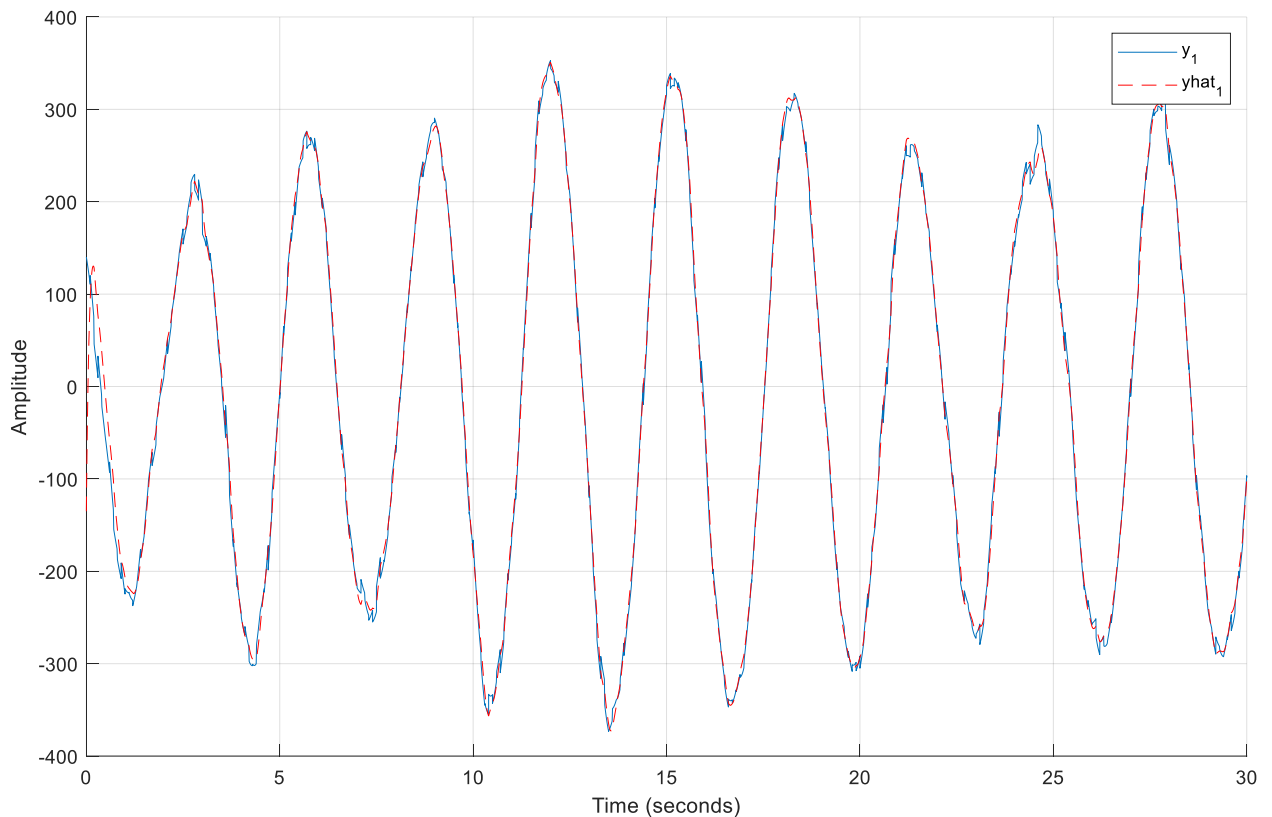


Рисунок 32 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя

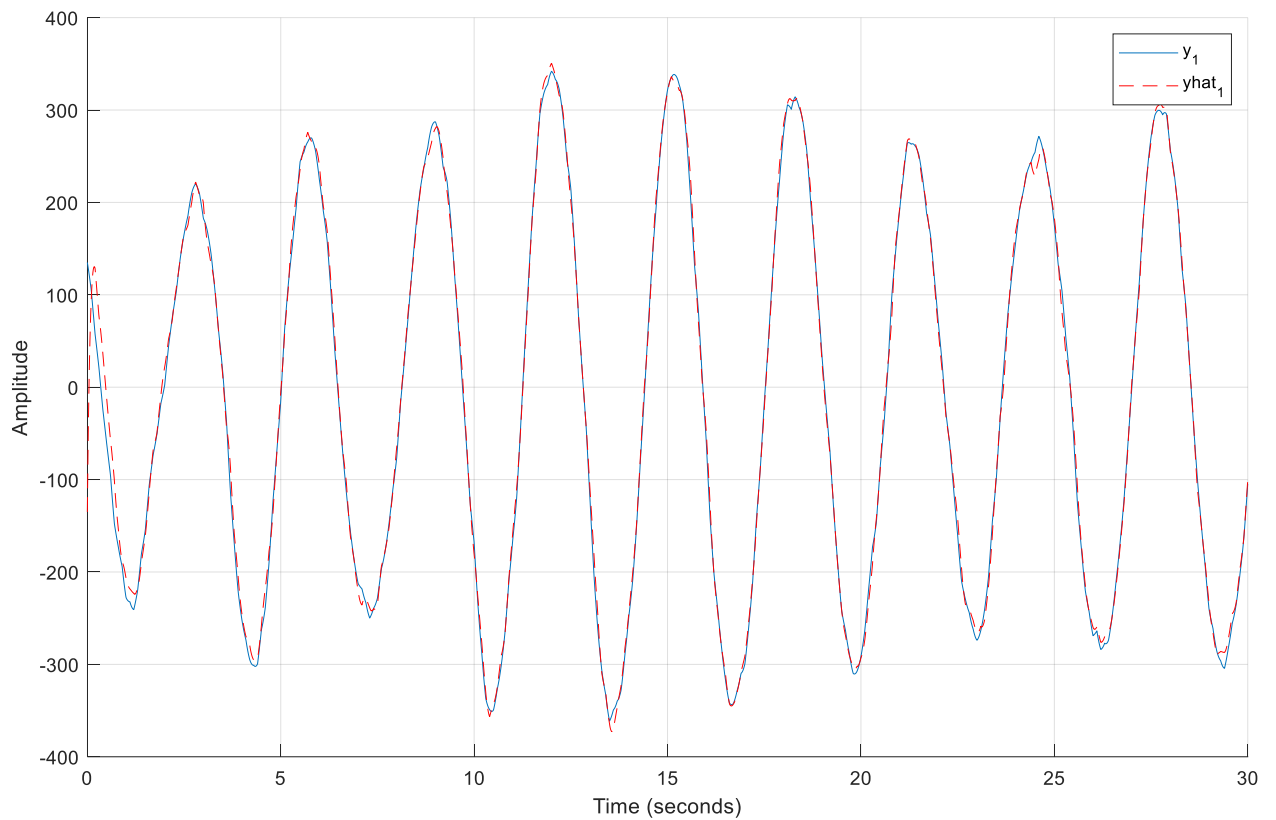


Рисунок 33 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя

Как видно из графика реальный y полностью сходится с y с наблюдателя, так как выбран оптимальный наблюдатель.

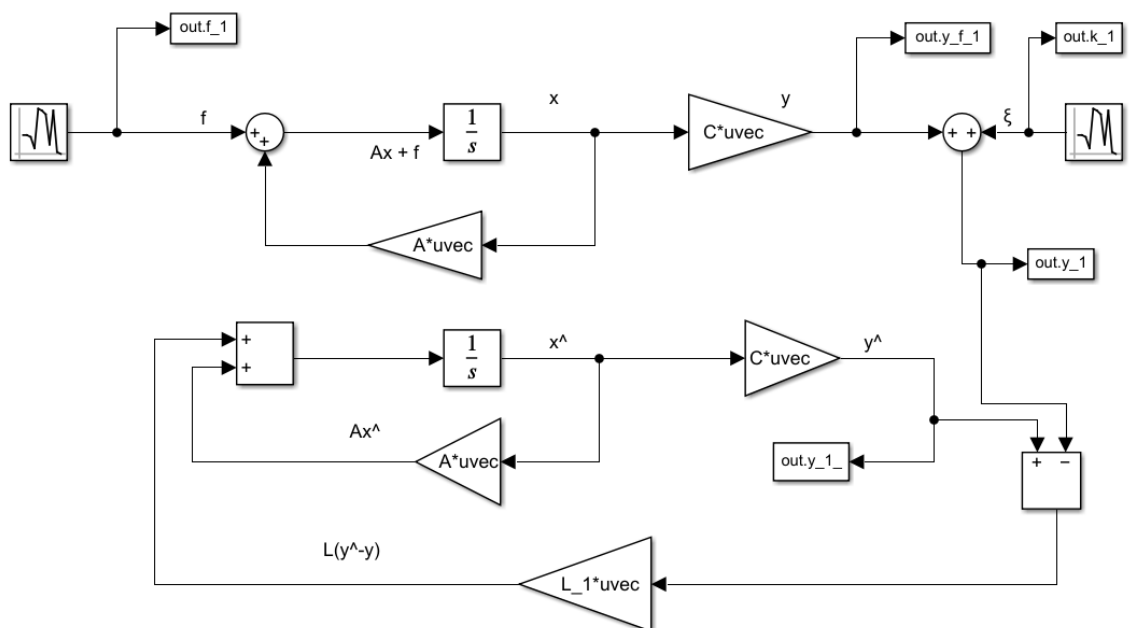


Рисунок 34 – схема моделирования LQE

Задание 4. Исследование LQG

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \\ -6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}, x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ -1000 \\ 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

Наблюдатель:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \\ -6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u + L(\hat{y} - y), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$
$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \\ -6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$u = K \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}$$

Синтез LQE:

$$f \sim N(0, 10), \quad \xi \sim N(0, 50) \text{ Тогда } Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Найдем L и K из уравнения Риккати:

$$L^T = \begin{bmatrix} -3.63 & -1.64 & -5.59 & 1.18 \\ 0.8581 & 0.99 & 0.87 & -0.899 \end{bmatrix}$$

Синтез LQR:

Введем функционал качества:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем K :

$$K = \begin{bmatrix} 2.8968 & 6.2374 & -0.7064 & 9.9238 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

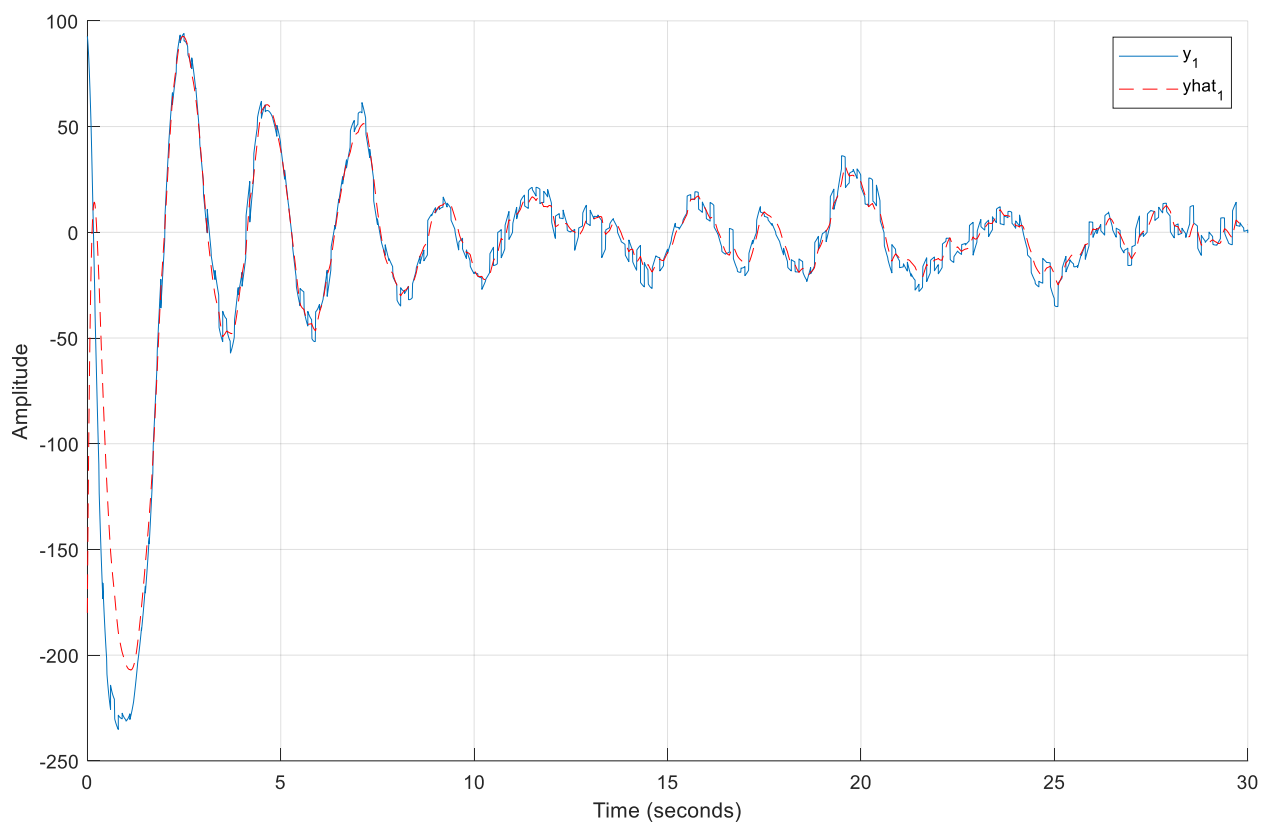


Рисунок 35 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя (первая компонента)

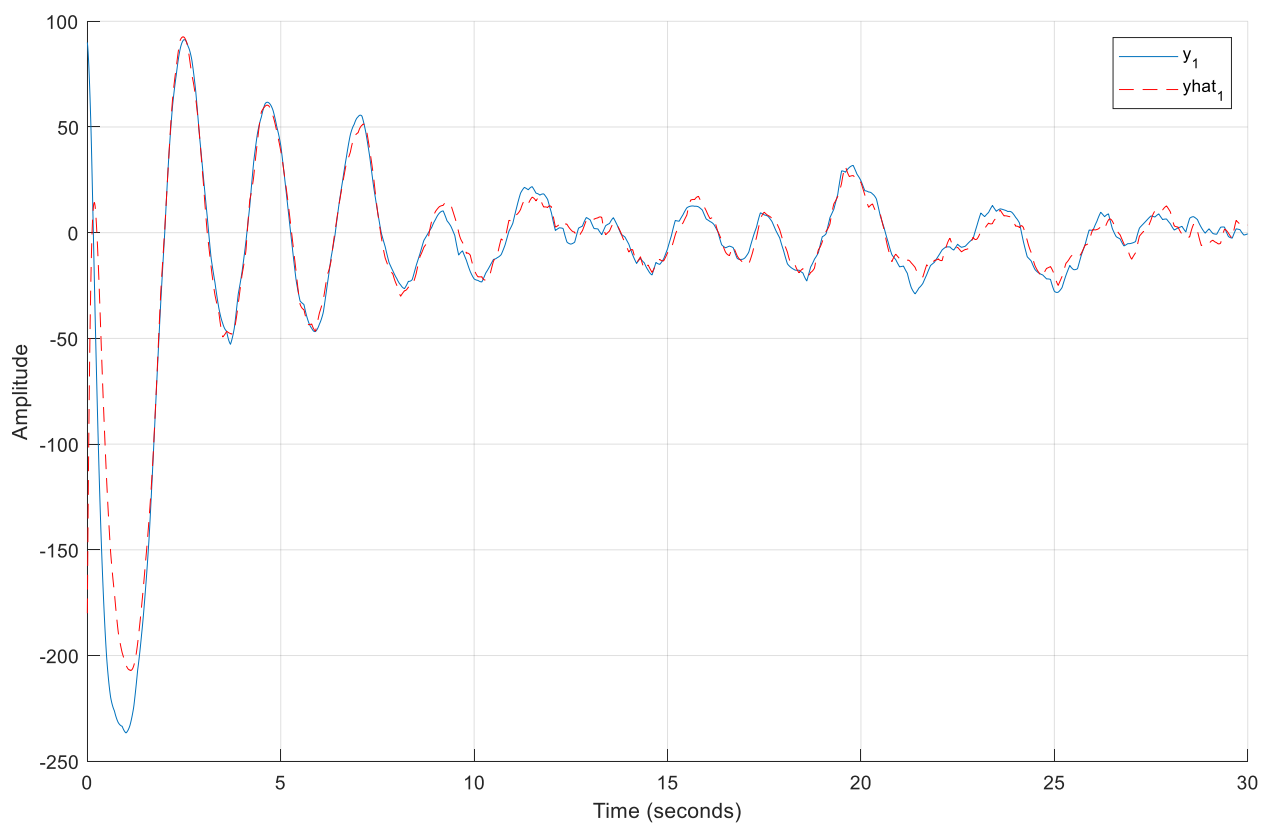


Рисунок 36 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя (первая компонента)

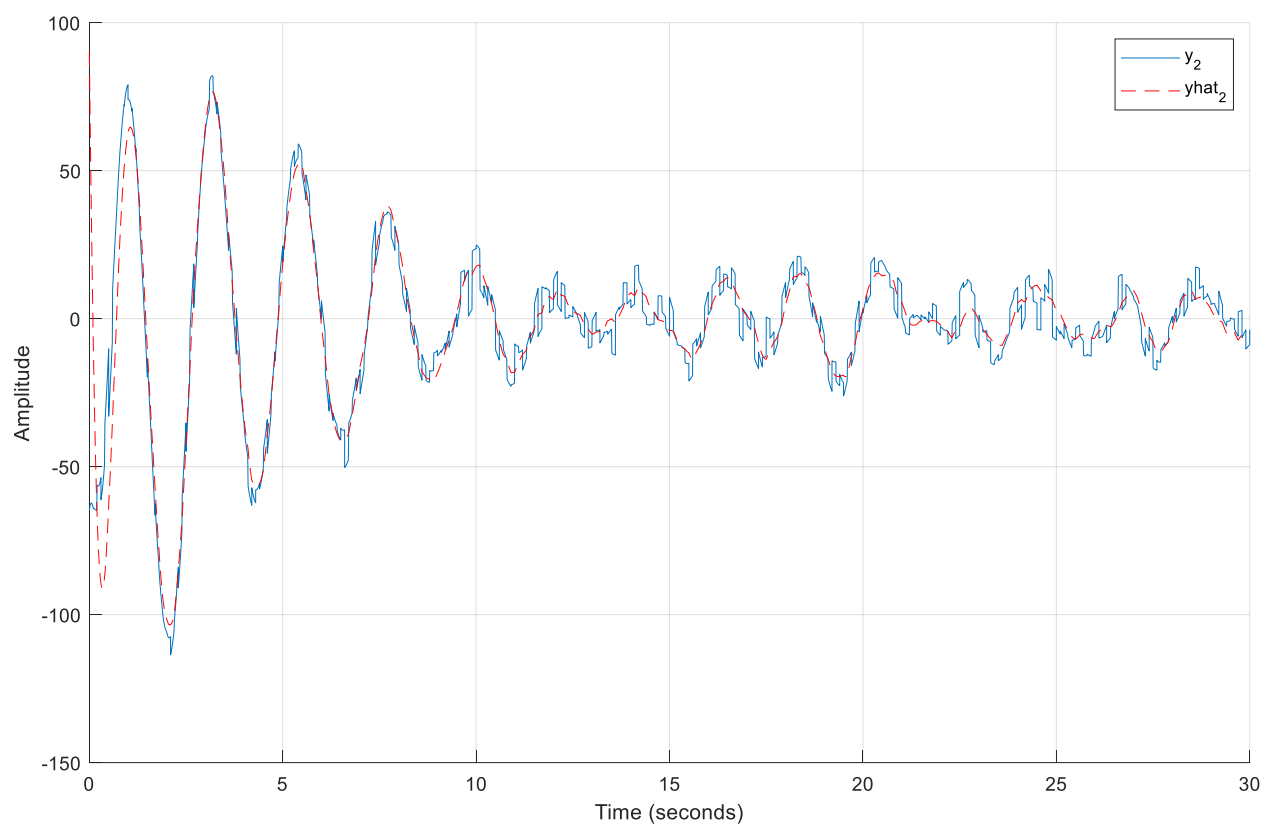


Рисунок 37 – сравнение y с шумом и \hat{y} с наблюдателя (вторая компонента)

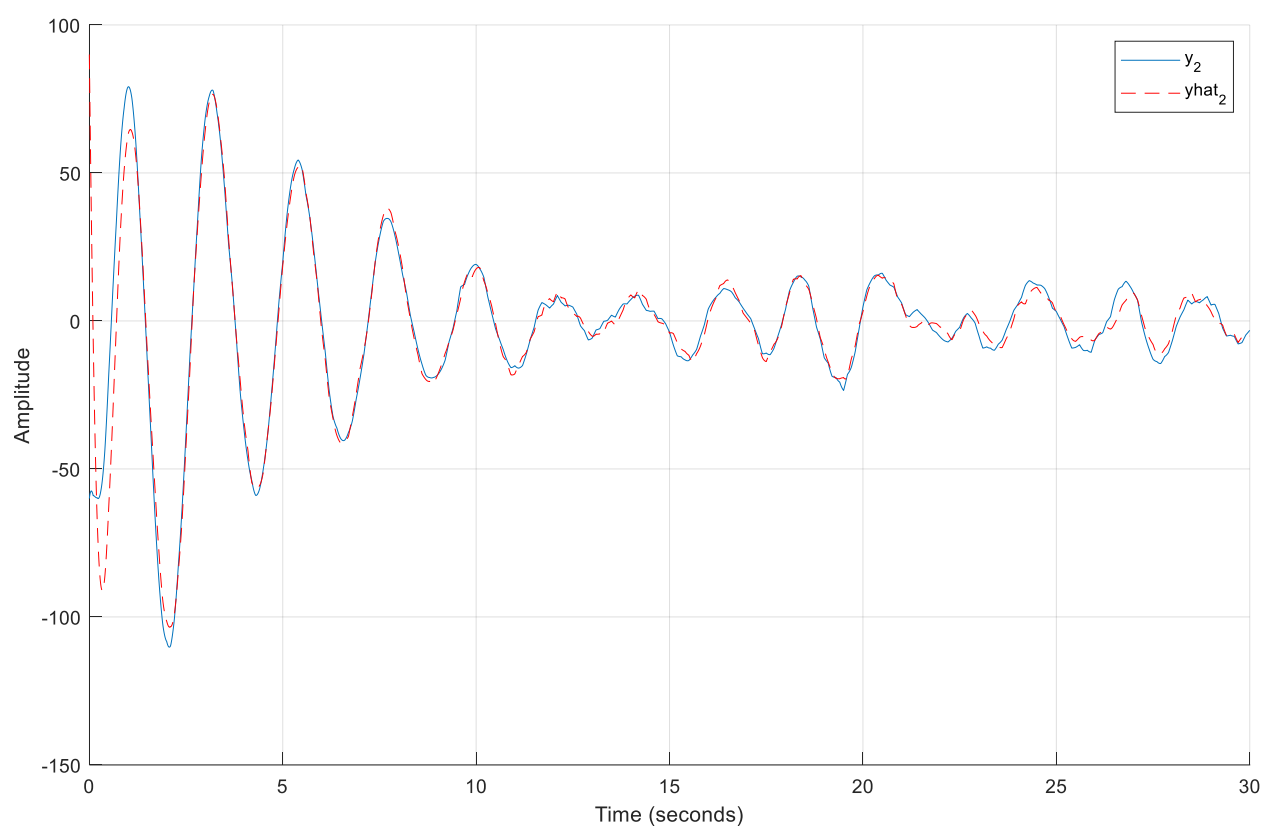


Рисунок 38 – сравнение Cx и \hat{y} с наблюдателя (вторая компонента)

В LQG мы одновременно используем LQR и LQE. Благодаря этому, LQG позволяет наблюдателя следить за объектом в соответствии с критерием доверия и строить оптимальный регулятор по управлению.

Выводы

В данной лабораторной работы мы синтезировали LQR, LQE (фильтр Кальмана) и LQG. Сравнили LQR и LMI регулятор, нашли установившиеся значение для каждого случая и сделали вывод, что LQR дает наилучший результат: имеет минимальный критерий качества в сравнении с любым другим регулятором. Далее исследовали LQE при разных критериях доверия, решали уравнения Риккати и находили наблюдатель. Фильтр Калмана является наилучшем наблюдателем, усредняющим результат вычислений.