

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники



Теория автоматического управления

Лабораторная работа №11

« $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty$ »

Выполнил студент:

Мысов М.С.

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1. Исследование передаточных матриц	3
Задание 2. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию	6
Задание 3. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу	16
Задание 4. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по состоянию	29
Задание 5. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу	36
Выводы	46

Задание 1. Исследование передаточных матриц

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+7}{s^2+2s+9} & \frac{2s-5}{s^2+2s+12} & \frac{s-2}{s^2+4s+7} & \frac{2}{s^2+6s+5} \\ \frac{s-2}{s^2+3s+1} & \frac{3s+15}{2s^2+7s+1} & \frac{s^2+s-3}{s^3+7s^2+s+2} & \frac{5s+2}{s^3+3s^2+8s+2} \\ \frac{3s+4}{5s^2+6s+7} & \frac{2s+5}{s^2+5s+3} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{6}{2s+2} & \frac{s+2}{2s+2} & \frac{s+1}{2s+2} & \frac{s+4}{s^2+2s+9} \\ \frac{2s+5}{2s^2+s+5} & \frac{s^2+2s+6}{3s-5} & \frac{s^2+s+9}{1} & \frac{2}{2s+3} \end{bmatrix}$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{7}{s^2+3s+2} & \frac{6}{2s^2+8s+9} & \frac{12s+3}{s^2+5s+1} & 0 & \frac{s^2+9s+1}{s^3+9s^2+9s+2} \\ \frac{4s+7}{s^2+3s+5} & \frac{2}{s+1} & 0 & \frac{3}{3s^2+5s+7} & \frac{3}{s^2+3s+4} \\ \frac{s+1}{s^2+2s+1} & \frac{2s-2}{s^2+2s+2} & 9 & \frac{s+2}{s^2+2s+3} & \frac{3s^2+2s+1}{s^3+2s^2+15s+6} \\ \frac{5s+4}{30s^2+3s+1} & \frac{6s+5}{s^2+8s+2} & \frac{s+2}{s^2+2s+8} & \frac{2s}{s^2+3s+4} & \frac{1}{s^2+5s+7} \end{bmatrix}$$

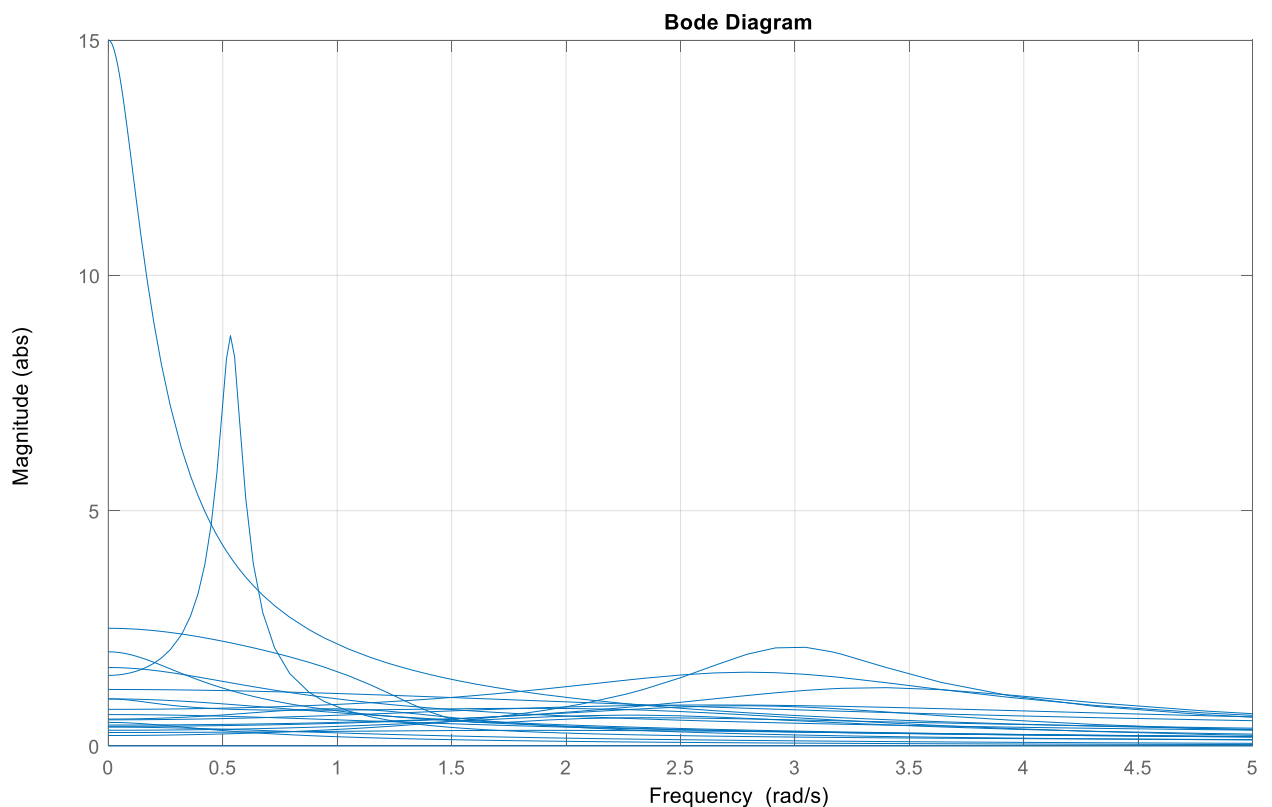


Рисунок 1 – АЧХ компонентов матрицы $W_1(s)$

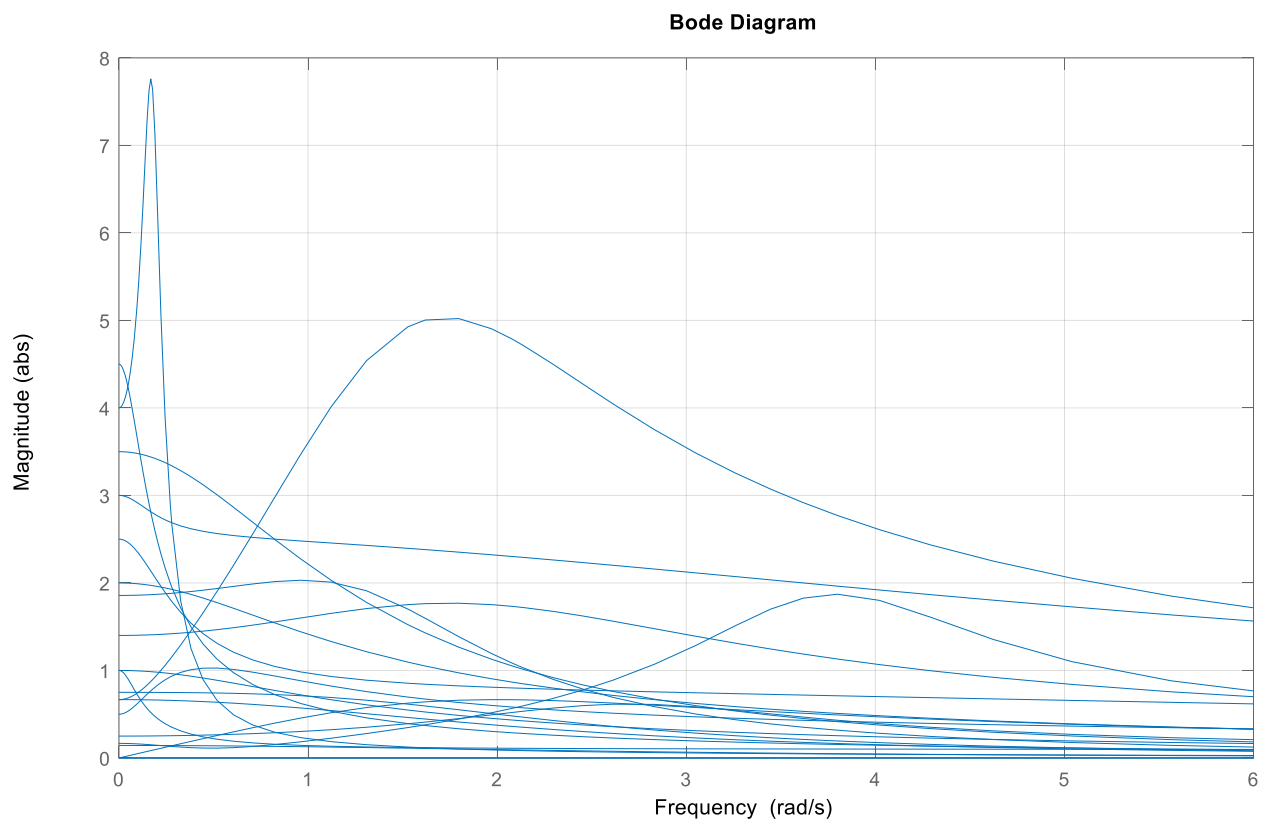


Рисунок 2 – АЧХ компонентов матрицы $W_2(s)$

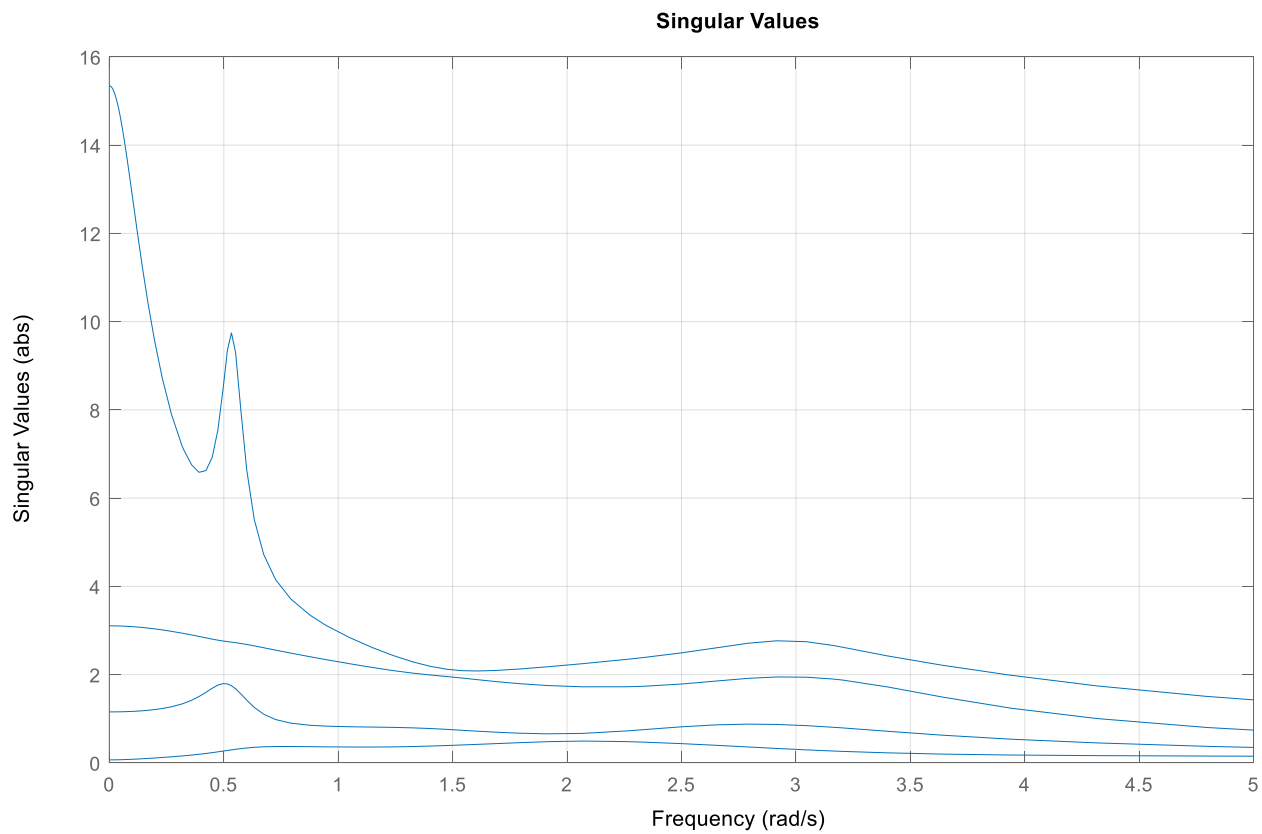


Рисунок 3 – сингулярные числа матрицы $W_1(s)$

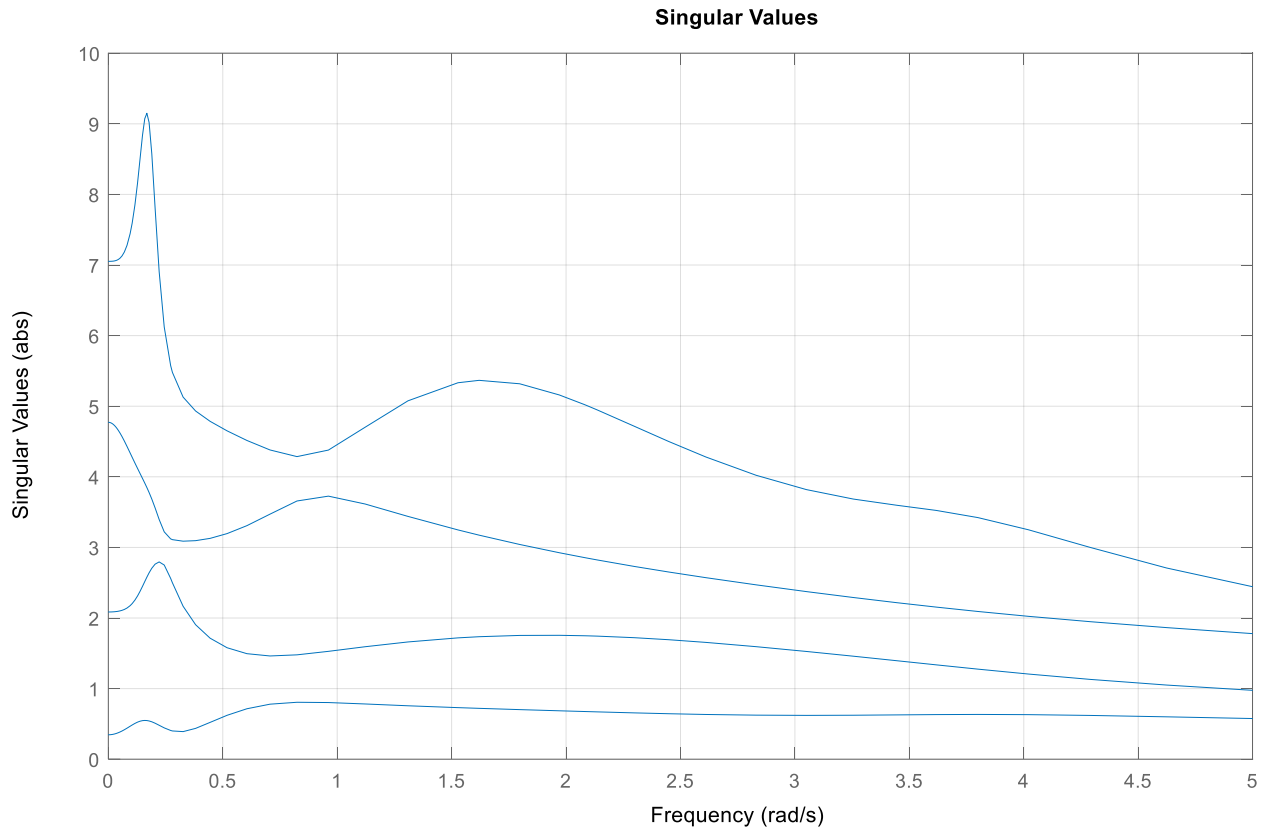


Рисунок 4 – сингулярные числа матрицы $W_2(s)$

$$\|W_1\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(W_1^*(j\omega)W_1(j\omega))d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = 6.11$$

$$\|W_2\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(W_2^*(j\omega)W_2(j\omega))d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = 8.17$$

$$\|W_1\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(W_1(j\omega)) = 15.34$$

$$\|W_2\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(W_2(j\omega)) = 9.15$$

Графики сингулярных чисел отражают влияние основных амплитудно-частотных характеристик передаточной матрицы. По ним можно оценить, насколько большое усиление дает система, т.е. найти $\sup_{\omega} \sigma_{\max}(W(j\omega))$.

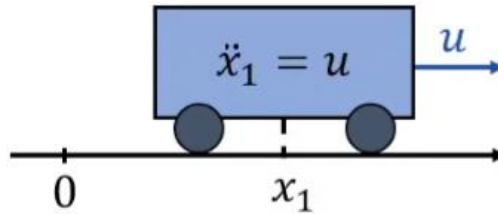
У первой системы пиковое значение $\sup_{\omega} \sigma_{\max}(W_1(j\omega)) = 15.34$ больше, чем у второй $\sup_{\omega} \sigma_{\max}(W_2(j\omega)) = 9.15$.

Но значение \mathcal{H}_2 нормы, наоборот, меньше: $\|W_1\|_{\mathcal{H}_2} = 6.11$ против $\|W_2\|_{\mathcal{H}_2} = 8.17$. Это значит, что первая система меньше подвержена возмущениям в среднем случае, но больше в пиковом.

Также замечено, что $\|W\|_{\mathcal{H}_2}$ вычисляется только для асимптотически устойчивых систем, иначе несобственный интеграл расходится.

Задание 2. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию

Существует математическая модель простого тела (тележки):



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$w(t)$ – внешние возмущения, $u(t)$ – управляющее воздействие

Система в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}, u = Kx.$$

$$W_{w \rightarrow z} = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1$$

Первый регулируемый выход:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -u \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем регулятор, который делает систему устойчивой, сводит к минимуму $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$:

Проверка условий:

$$C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(D_2^T D_2) = \det([1]) = 1 \neq 0, \text{ значит матрица } D_2^T D_2 \text{ обратима}$$

(A, B_2) – стабилизируема

(C_2, A) – обнаруживаема

Если четыре условия выполняются, то существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.24 & 1 \\ 1 & 4.24 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1 \quad -4.24]$$

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$W_{w \rightarrow z} = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1.243s - 1}{s^2 + 4.243s + 1} & \frac{9.485s + 2}{s^2 + 4.243s + 1} \\ \frac{-s + 0.27}{s^2 + 4.243s + 1} & \frac{9s + 2.243}{s^2 + 4.243s + 1} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 4.6518 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 3.2419$$

Так как система замкнута \mathcal{H}_2 -регулятором, то найденное значение является минимальным для данной системы.

График АЧХ компонентов передаточной матрицы:

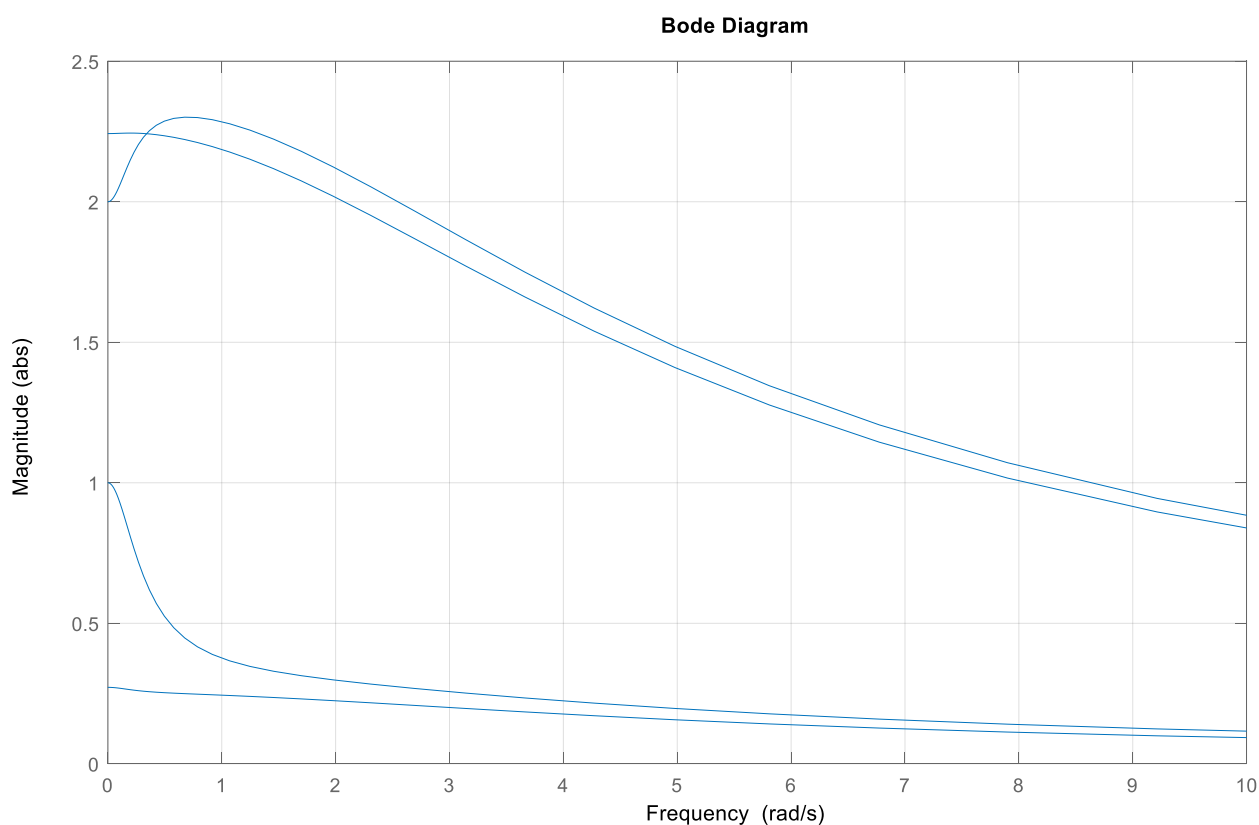


Рисунок 5 – АЧХ

График сингулярных чисел передаточной матрицы:

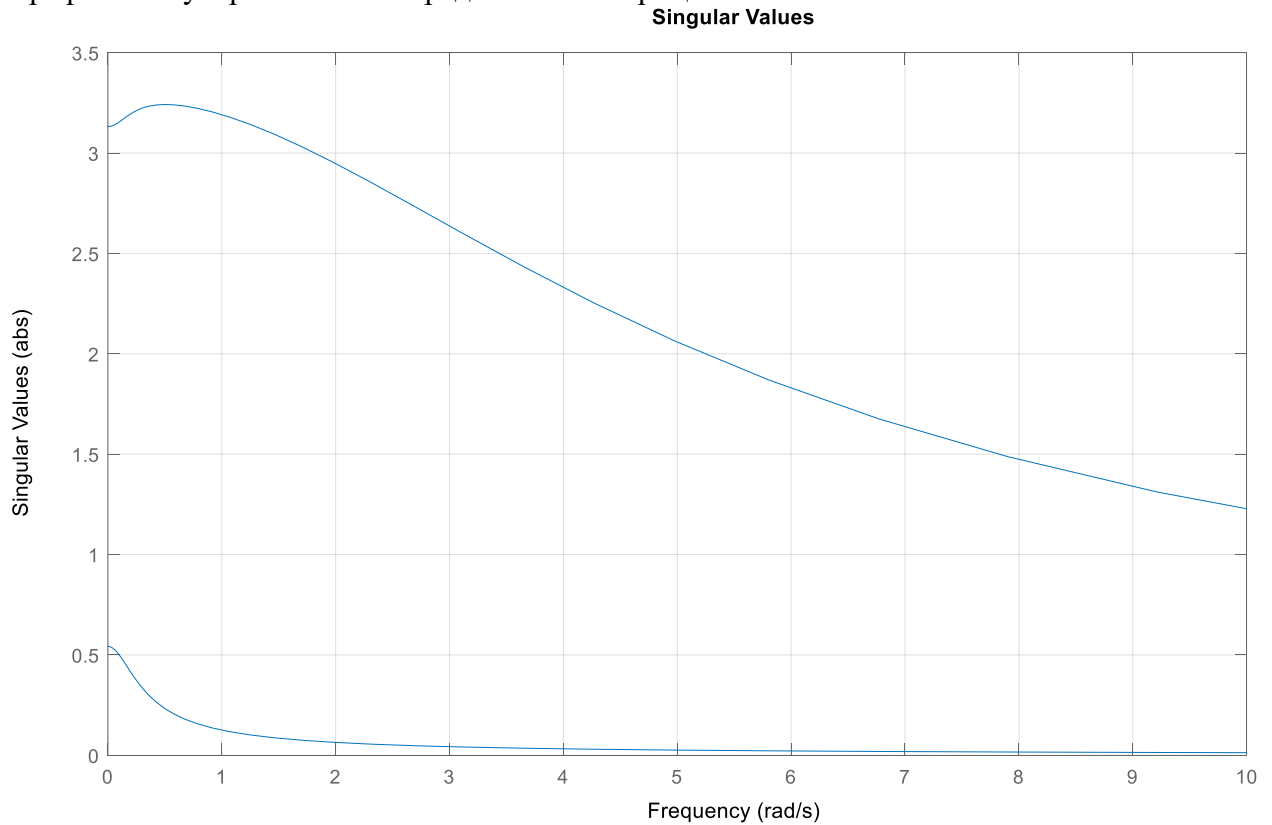


Рисунок 6 – сингулярные числа

Мы видим, что на графике сингулярных чисел передаточной матрицы наибольшее усиление система будет давать на частоте $\approx 0.5 \text{ rad/s}$. Сравним, так ли это?

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(0.5t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(0.5t) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(7t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(7t) \end{bmatrix}$$

На графиках возмущения, расположенных ниже, видно, что в первом случае выход системы при частоте 0.5 rad/s примерно в 2 раза больше, чем во втором при частоте 7 rad/s . Примерно такое соотношение амплитуд и показывает график сингулярных чисел.

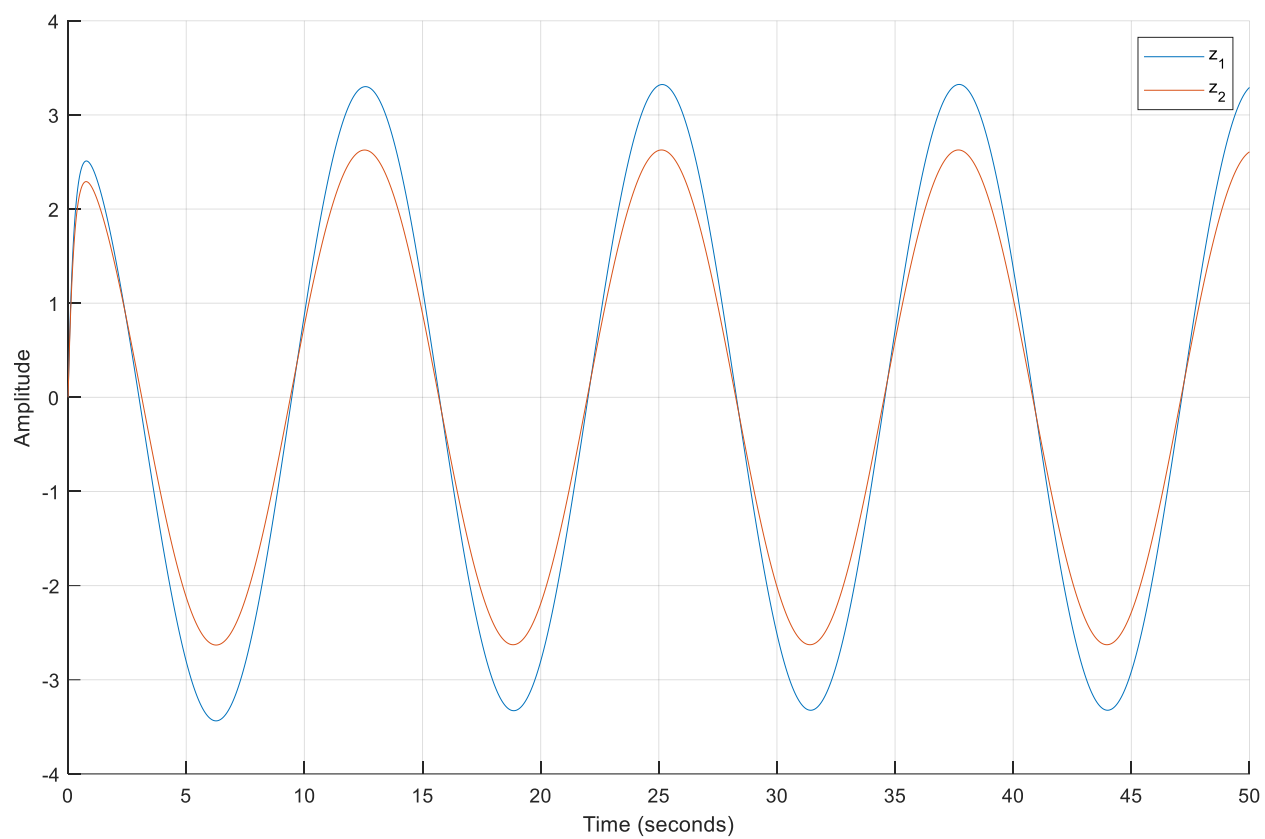


Рисунок 7 – система при возмущении w_1

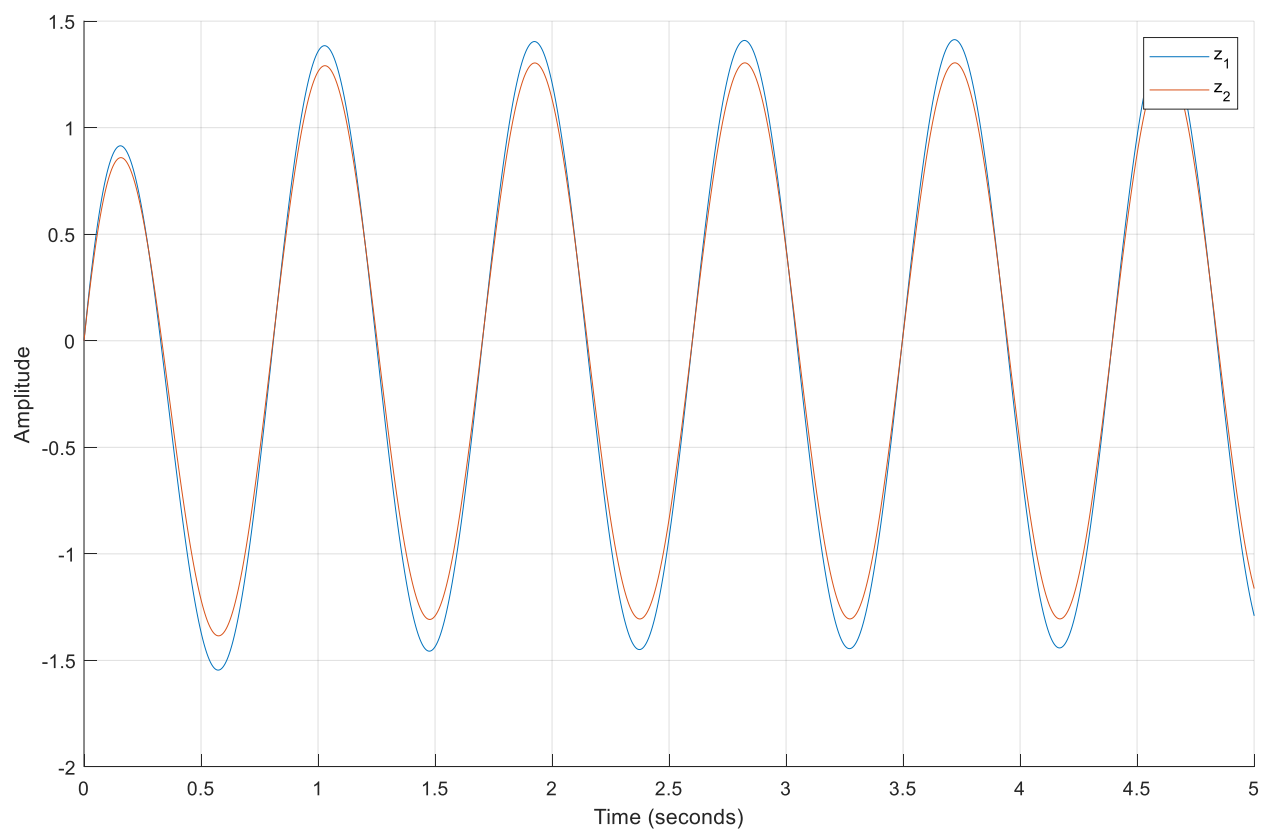


Рисунок 8 – система при возмущении w_2

Второй регулируемый выход:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 2u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем регулятор, который делает систему устойчивой, сводит к минимуму $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$:

Проверка условий:

$$C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(D_2^T D_2) = \det([4]) = 4 \neq 0, \text{ значит матрица } D_2^T D_2 \text{ обратима}$$

(A, B_2) – стабилизируема

(C_2, A) – обнаруживаема

Если четыре условия выполняются, то существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2.24 & 4 \\ 4 & 8.24 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1 \quad -2.06]$$

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$W_{w \rightarrow z} = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} \frac{6s + 2.739}{2s^2 + 4.123s + 2} & \frac{16s + 10.25}{2s^2 + 4.123s + 2} \\ \frac{-3.754s + 4}{2s^2 + 4.123s + 2} & \frac{-20.49s - 8}{2s^2 + 4.123s + 2} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 7.4628 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 7.5265$$

График АЧХ компонентов передаточной матрицы:

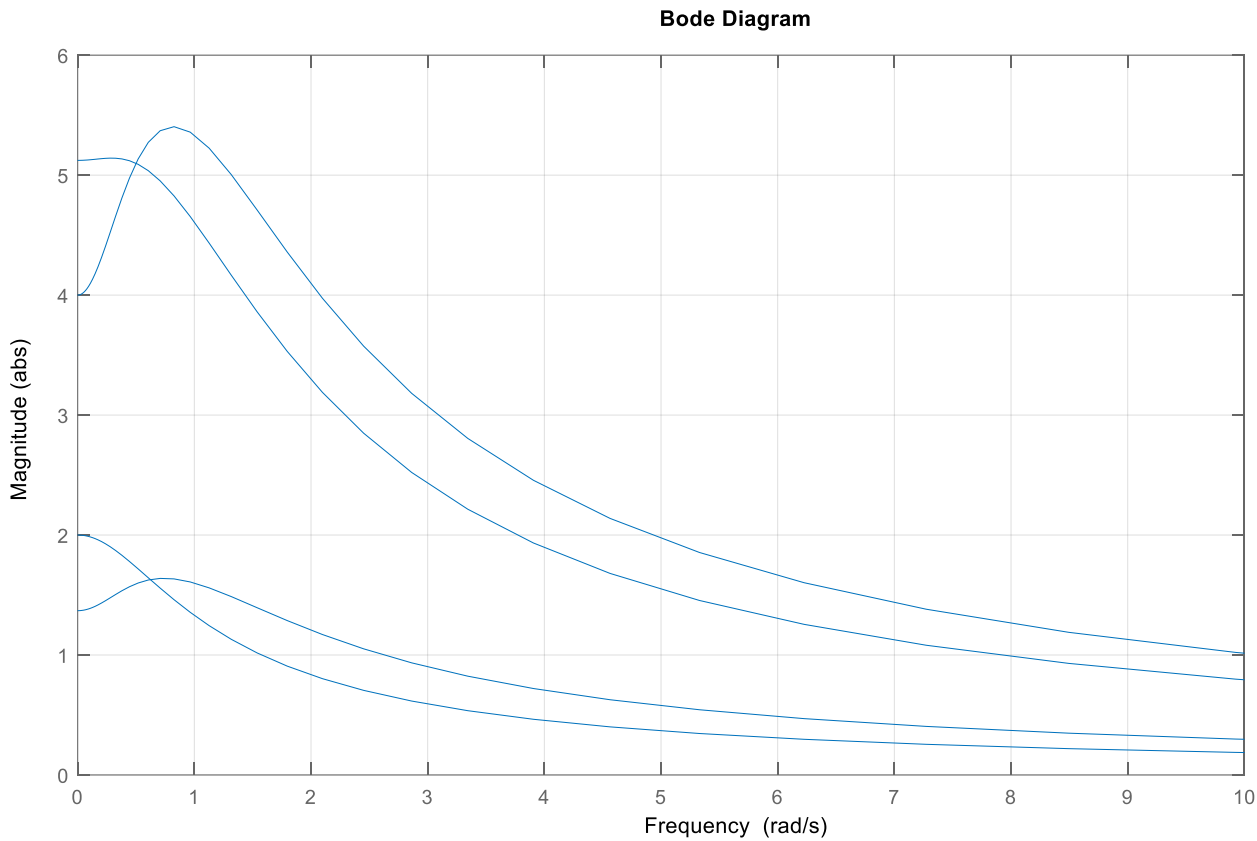


Рисунок 9 – АЧХ

График сингулярных чисел передаточной матрицы:

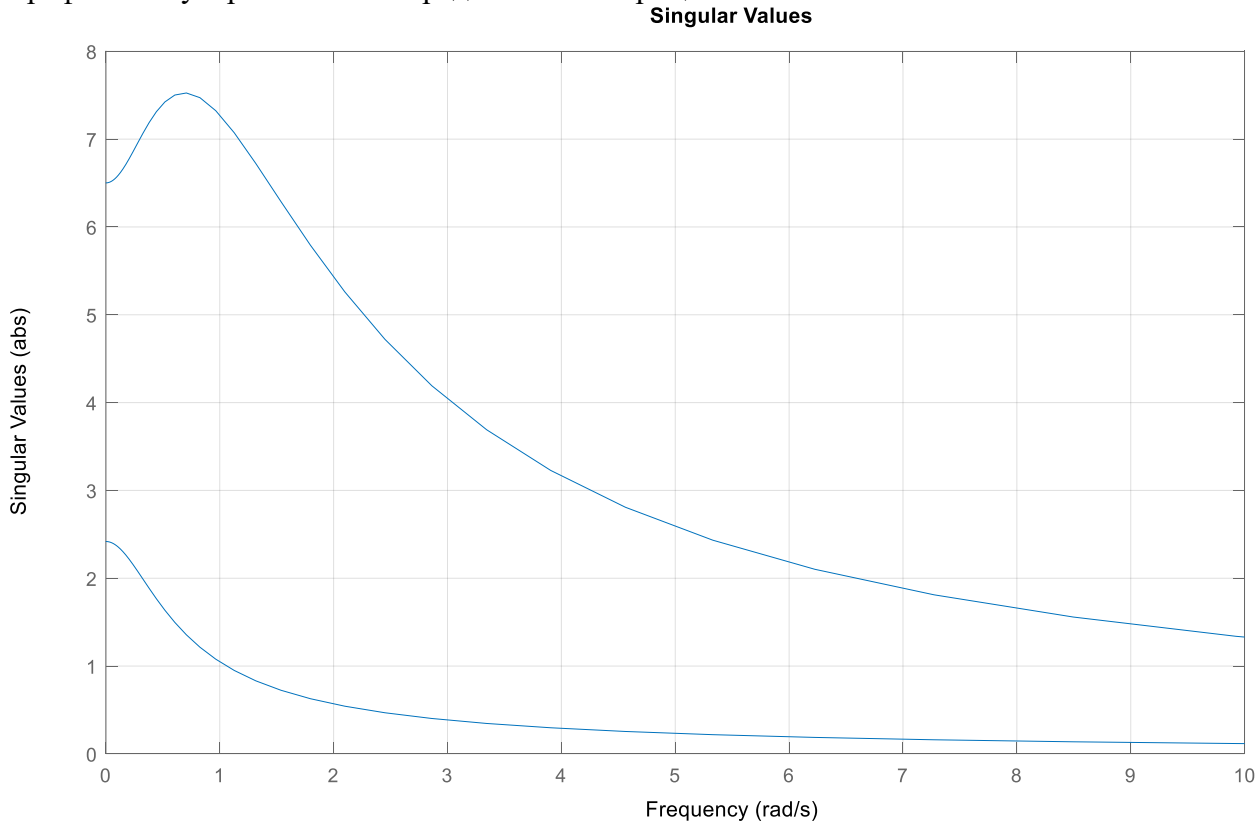


Рисунок 10 – сингулярные числа

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3 \sin \left(0.66t - \frac{\pi}{6} \right) \\ 2 \cos (0.66t) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \sin \left(3.3t - \frac{\pi}{6} \right) \\ 2 \cos (3.3t) \end{bmatrix}$$

По графику сингулярных чисел передаточной матрицы наибольшее усиление системы будет на частоте $\approx 0.66 \text{ rad/s}$.

При пиковой частоте выход системы в два раза больше, чем во втором случае. Такое соотношение амплитуд показывает график сингулярных чисел.

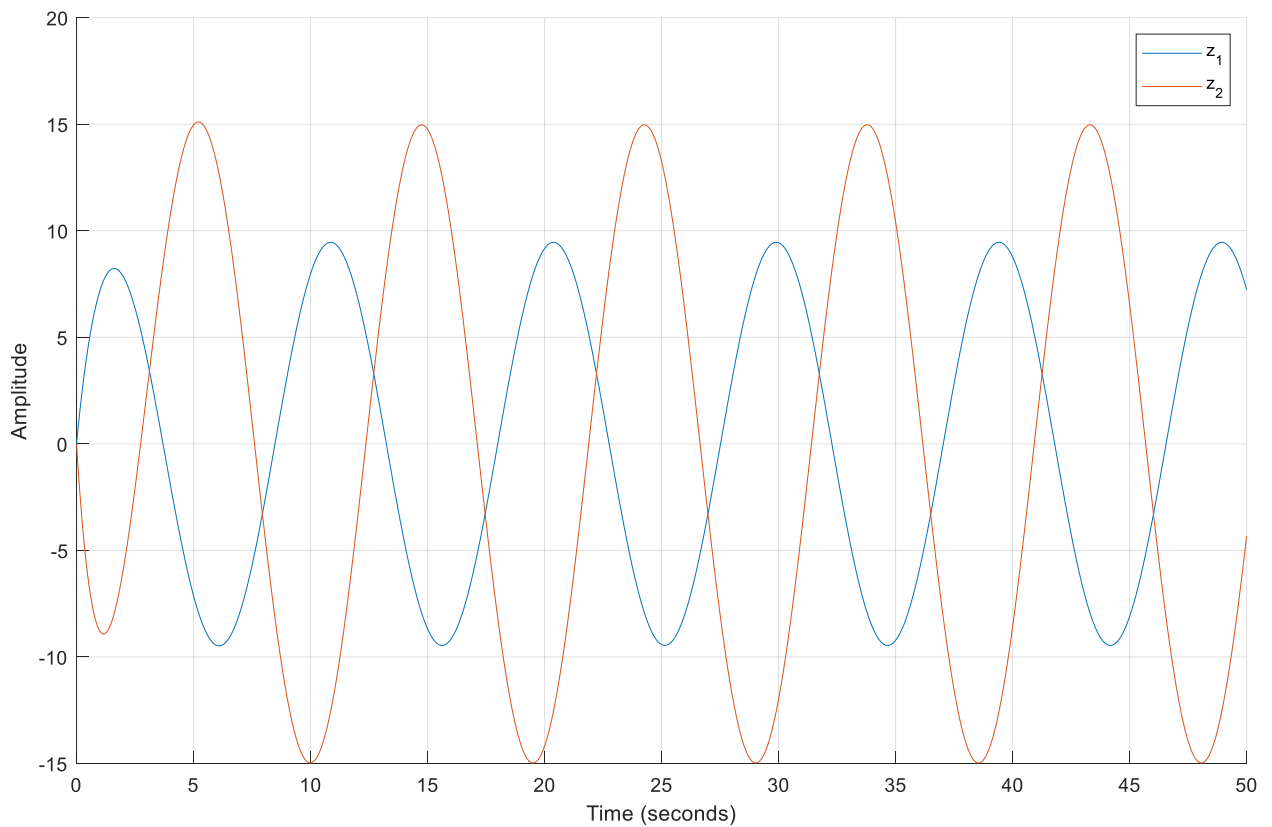


Рисунок 11 – система при возмущении w_1

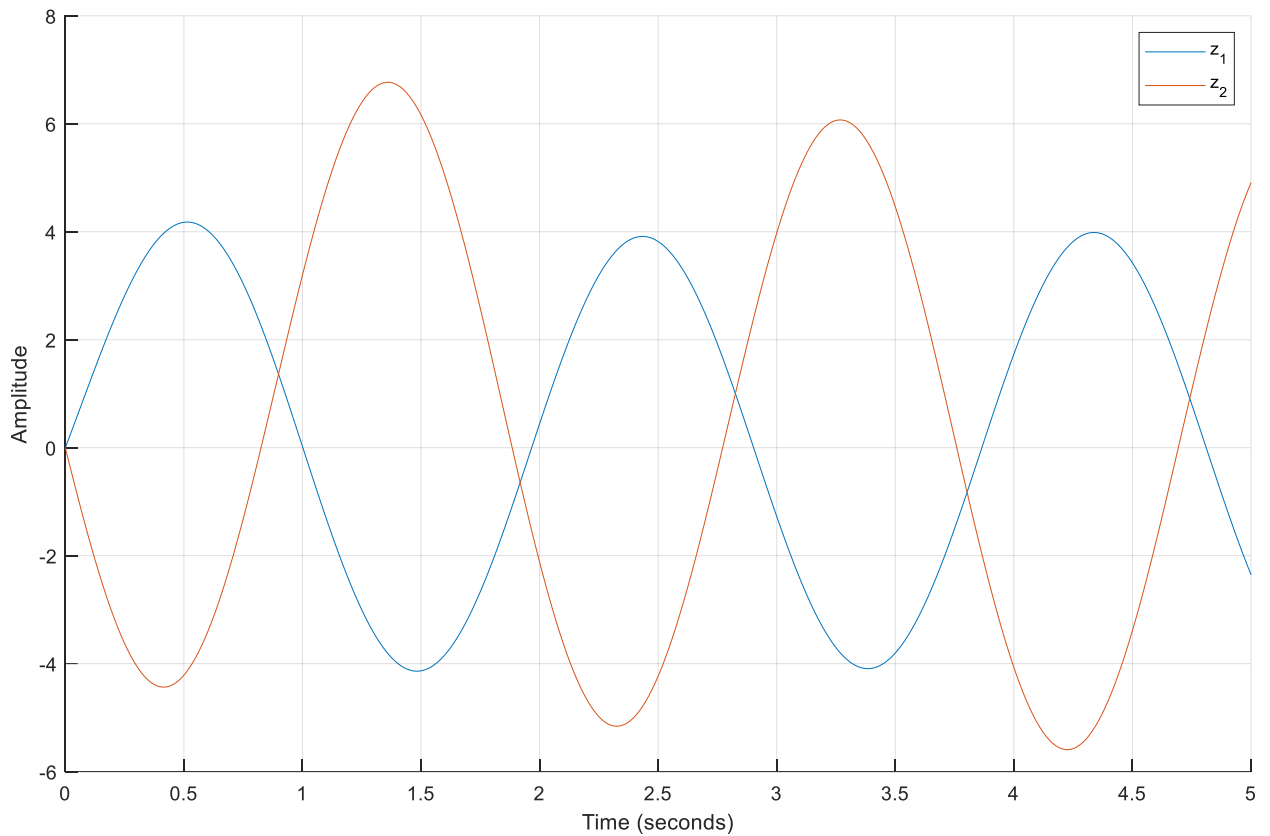


Рисунок 12 – система при возмущении w_2

Третий регулируемый выход:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 3u \\ 5x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем регулятор, который делает систему устойчивой, сводит к минимуму $\left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_2}$:

Проверка условий:

$$C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det(D_2^T D_2) = \det([9]) = 9 \neq 0$, значит матрица $D_2^T D_2$ обратима

(A, B_2) – стабилизируема

(C_2, A) – обнаруживаема

Если четыре условия выполняются, то существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати:

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1}B_2^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 16.67 & 15.29 \\ 16.29 & 19.8 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = \begin{bmatrix} -1.69 & -2.2 \end{bmatrix}$$

Найдем общий вид передаточной функции $W(s)$ системы:

$$W_{w \rightarrow z} = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-5.87e16s + 3.44e16}{6.75e15s^2 + 1.49e16s + 1.15e16} & \frac{-1.24e17s - 6.89e16}{6.76e15s^2 + 1.49e16s + 1.15e16} \\ \frac{8.1e16s + 8.6e16}{6.8e15s^2 + 1.49e16s + 1.15e16} & \frac{7.43e16s + 1.1e17}{6.76e15s^2 + 1.49e16s + 1.15e16} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 15.0431 \quad \|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 14.716$$

График АЧХ компонентов передаточной матрицы:

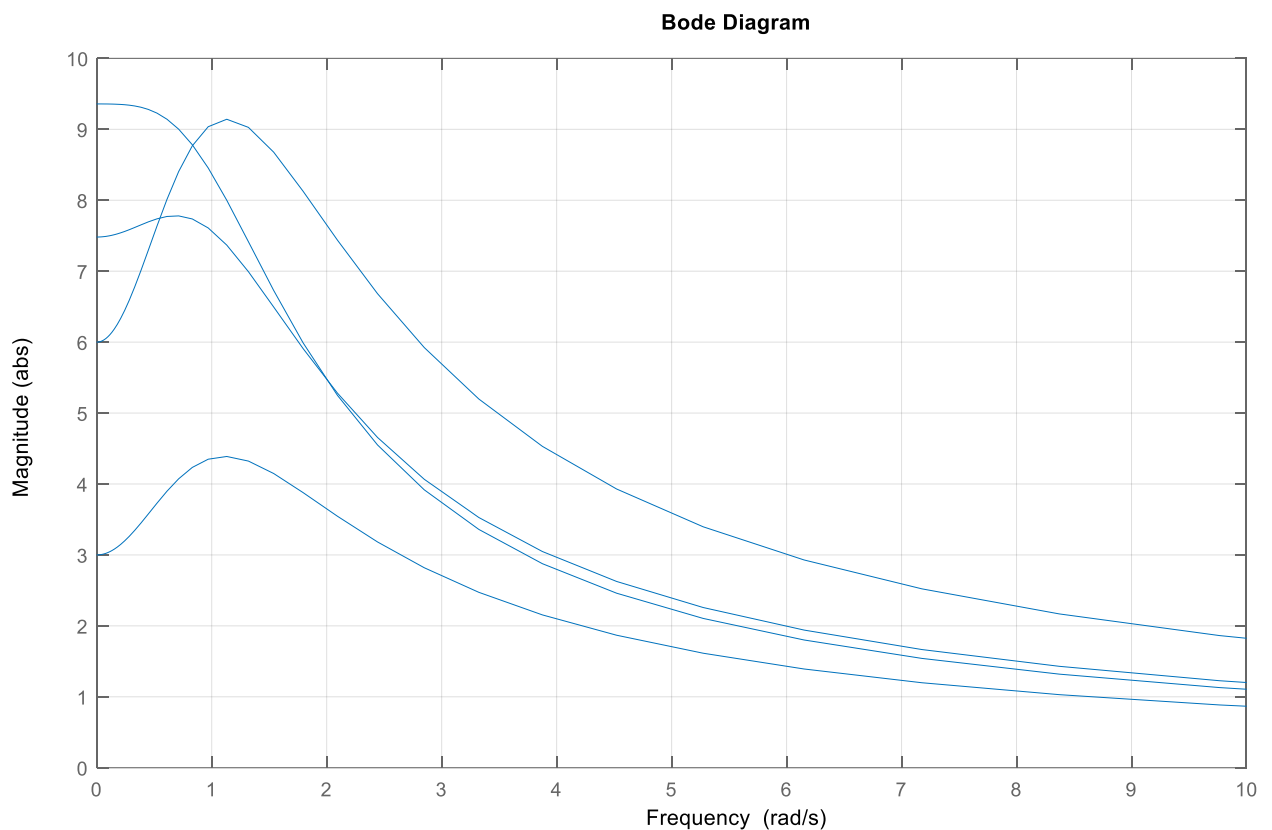


Рисунок 13 – АЧХ

График сингулярных чисел передаточной матрицы:

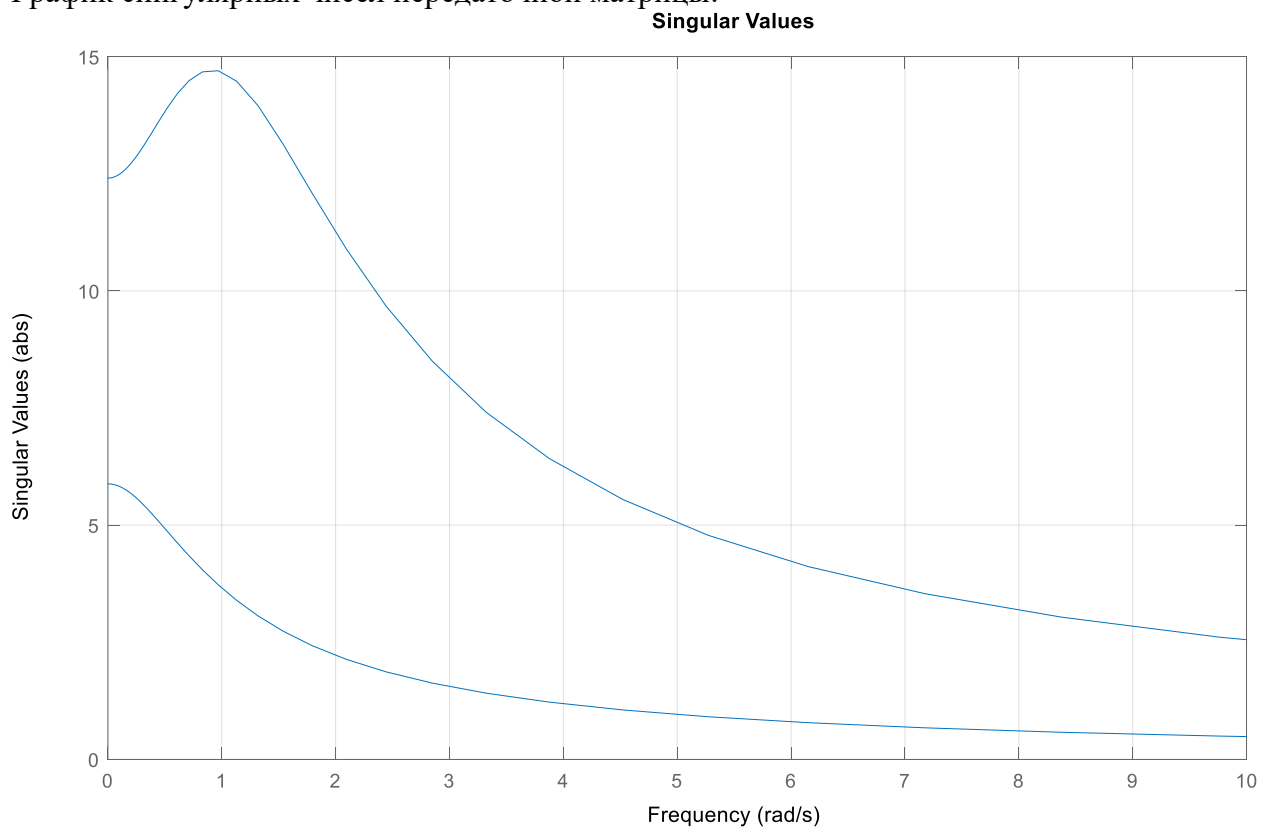


Рисунок 14 – сингулярные числа

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(0.9t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 3 \cos(0.9t) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(3.3t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 3 \cos(3.3t) \end{bmatrix}$$

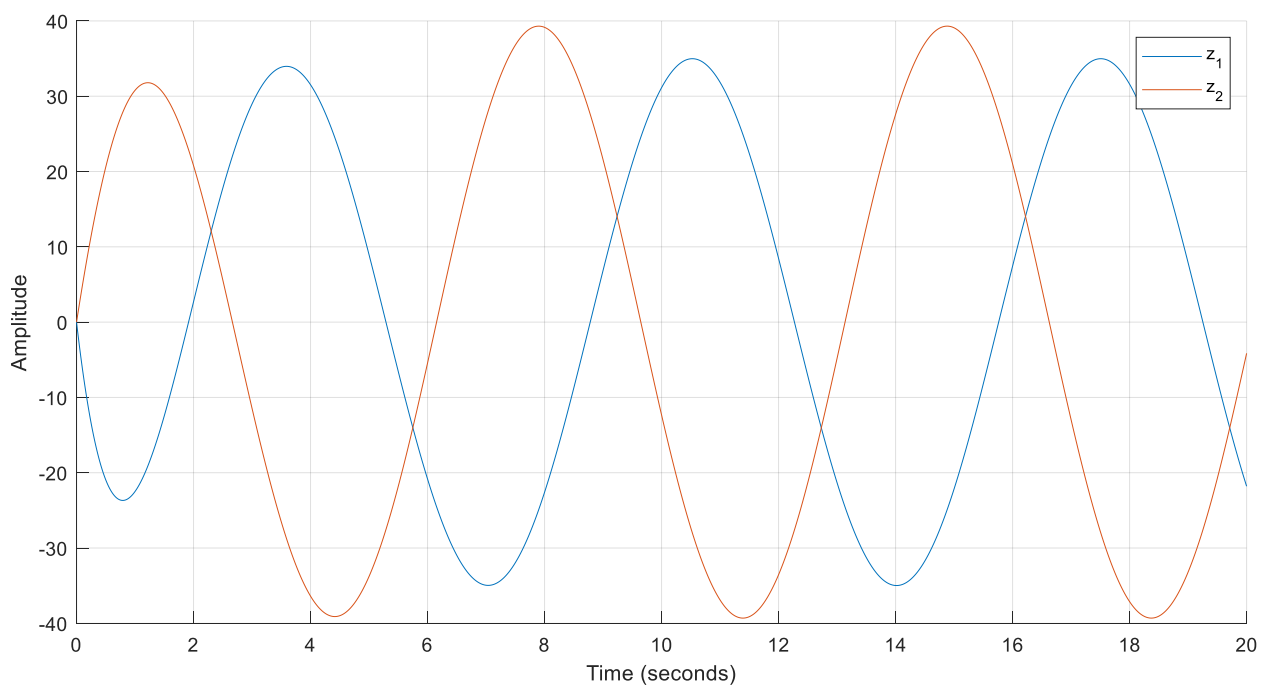


Рисунок 15 – система при возмущении w1

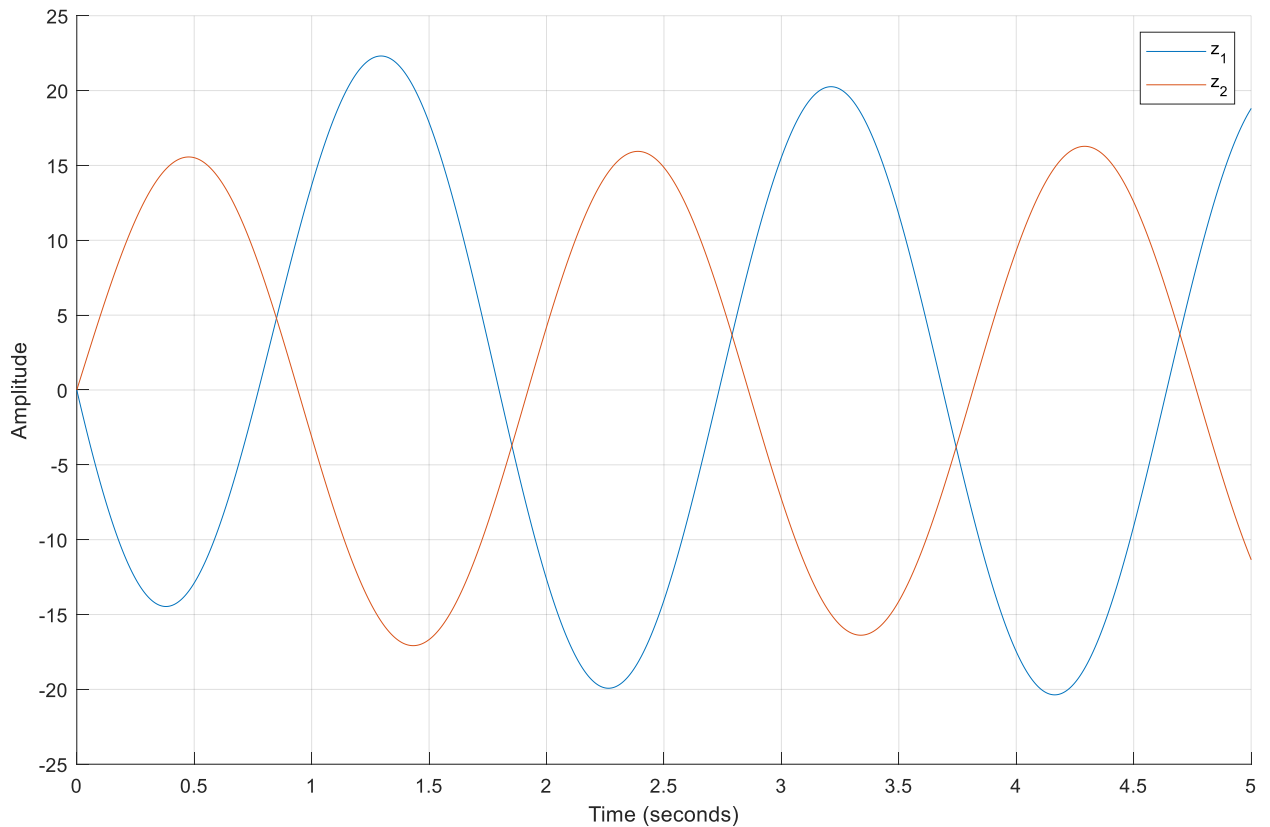


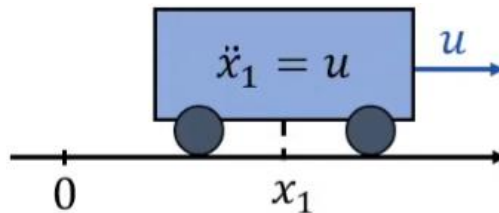
Рисунок 16 – система при возмущении w_2

По графику сингулярных чисел передаточной матрицы наибольшее усиление системы будет на частоте $\approx 0.9 \text{ rad/s}$.

Опять сравнили графики при наибольшем усилении и не очень. При пиковой частоте выход системы оказался в два раза больше, как и соотношение амплитуд на графике сингулярных чисел. Для каждого регулируемого выхода с помощью регулятора был достигнут минимум $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Задание 3. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу

Существует модель тележки, но с измеряемым выходом по её координате:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 2] w \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} f_1 - \text{внешние возмущения} \\ f_2 - \text{внешние возмущения} \\ \xi - \text{помехи измерений} \end{bmatrix}, \quad \text{причем } B_1 D_1^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 2]^T = 0$$

Система в общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{array} \right. - \text{объект.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{array} \right. - \text{наблюдатель.}$$

$$W_{w \rightarrow x}(s) = (I + (sI - A)^{-1} B_2 K (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1} LC_1)^{-1} (sI - A)^{-1} (B_1 - B_2 K (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1} LD_1)$$

$$W_{w \rightarrow \hat{x}}(s) = -(I + (sI - A - B_2 L - LC_1)^{-1} LC_1 (sI - A)^{-1} B_2 K)^{-1} (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1} (LC_1 (sI - A)^{-1} B_1 + LD_1)$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = C_2 W_{w \rightarrow x}(s) + D_2 K W_{w \rightarrow \hat{x}}(s)$$

Первый регулируемый выход:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Найдем \mathcal{H}_2 по выходу:

Проверка условий:

1. $C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det(D_2^T D_2) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_2^T D_2$ обратима
3. (A, B_2) – стабилизируема
4. (C_2, A) – обнаруживаема
5. $B_1 D_1^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = 0$
6. $\det(D_1 D_1^T) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_1 D_1^T$ обратима
7. (C_1, A) – обнаруживаема
8. (A, B_1) – стабилизируема

Найдем матрицу $Q \succ 0$ из уравнения Риккати

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = \begin{bmatrix} -1.5 & -2 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу $P \succ 0$ из уравнения Риккати

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 9.23 & 5.66 \\ 5.66 & 17.06 \end{bmatrix}$$

$$L = -PC_1^T(D_1D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2.3 \\ -1.41 \end{bmatrix}$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-4.25e16 s^2 + 1.4e16 s + 9.56e15}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

$$W_{21} = \frac{-5.63e15 s^3 - 1.75e16 s^2 + 2.92e16 s + 6.52e16}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

$$W_{12} = \frac{1.42e16 s^2 + 3.1e16 s + 9.5e15}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

$$W_{22} = \frac{7.88e15 s^3 + 4.07e16 s^2 + 7.4e16 s + 4.61e16}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

$$W_{13} = \frac{2.8e16 s^3 + 9.554e15 s^2}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

$$W_{23} = \frac{-2.8e16 s^2 - 5.2e16 s - 1.43e16}{1.13e15 s^4 + 4.85e15 s^3 + 8.48e15 s^2 + 7.08e15 s + 2.39e15}$$

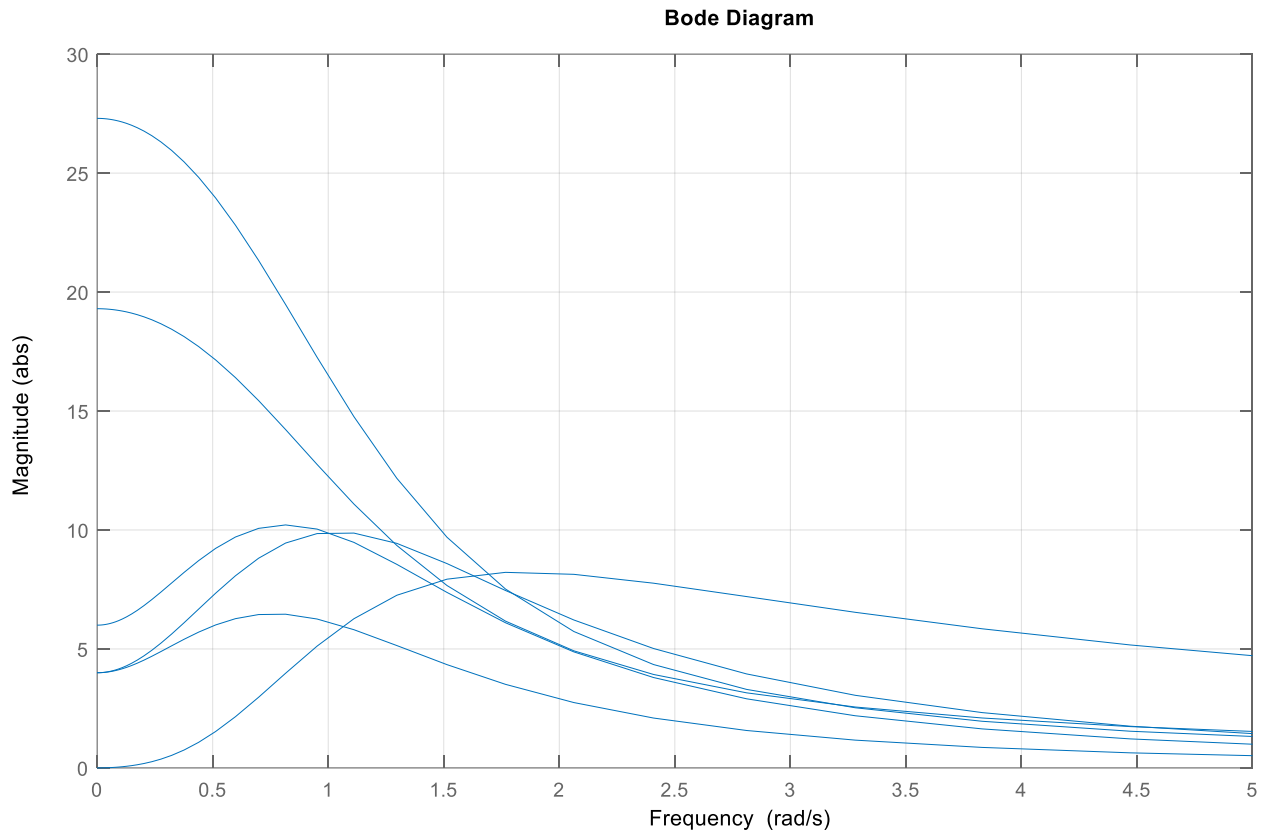


Рисунок 17 – АЧХ

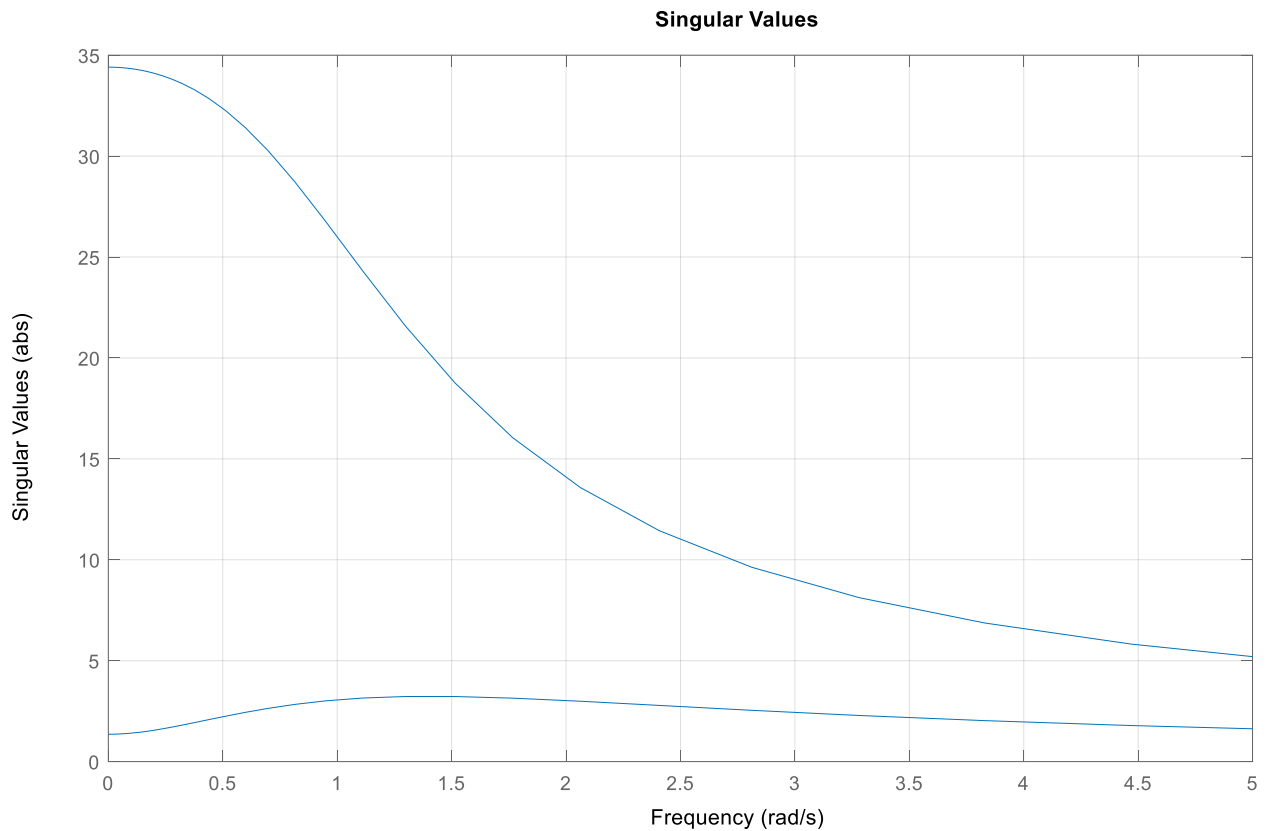


Рисунок 18 – сингулярные числа

Нормы системы:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 23.8284 \quad \|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 34.4$$

Так как система замкнута \mathcal{H}_2 -регулятором, найденное значение является минимальным для данной системы. Данный регулятор способствует уменьшению «площади» под графиком.

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(0.2t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(0.2t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(2t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix}$$

Исследуем систему с внешними возмущениями и помехами измерений. Аналогично возьмем возмущения на низкой и высокой частоте. По графику сингулярных чисел видно, что система будет наиболее усиливать сигнал на самой низкой частоте. Это также подтверждается графиками моделирования.

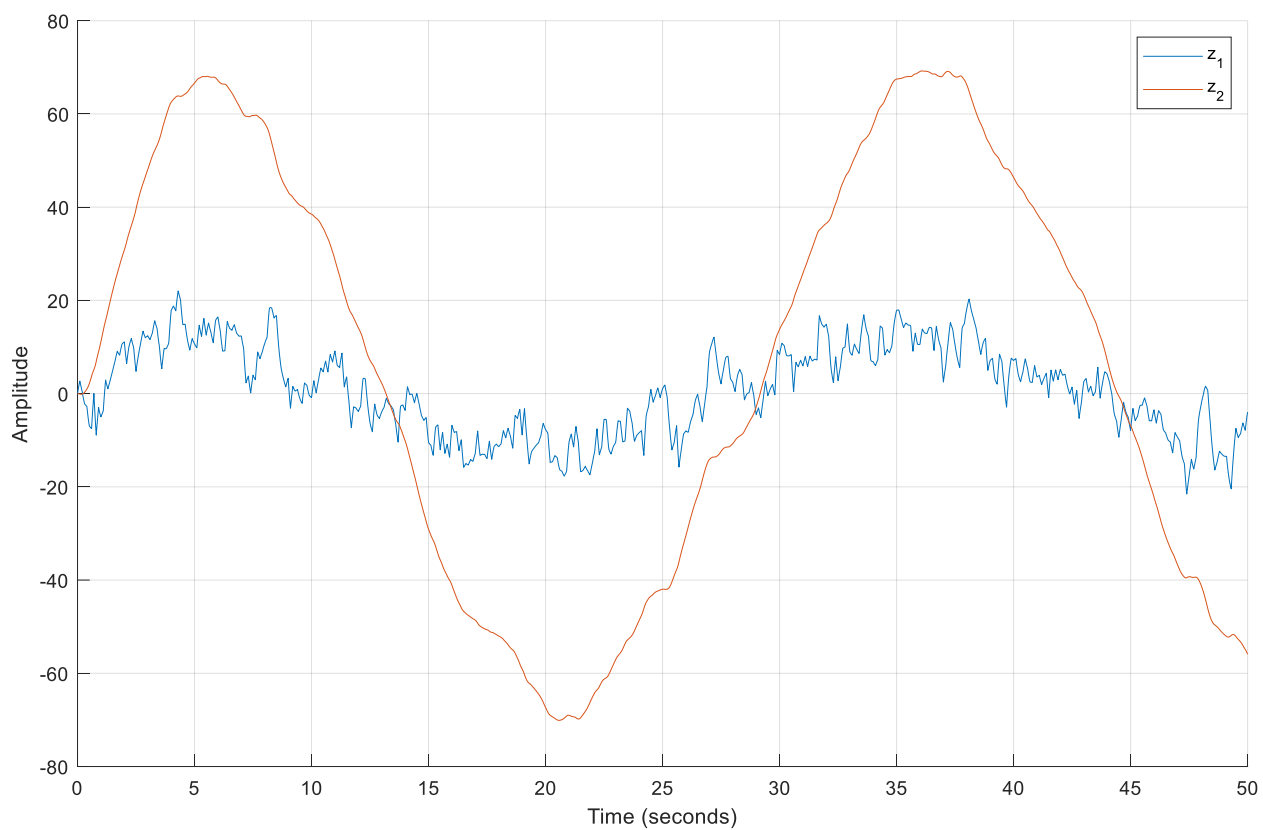


Рисунок 19 – система при возмущении w_1

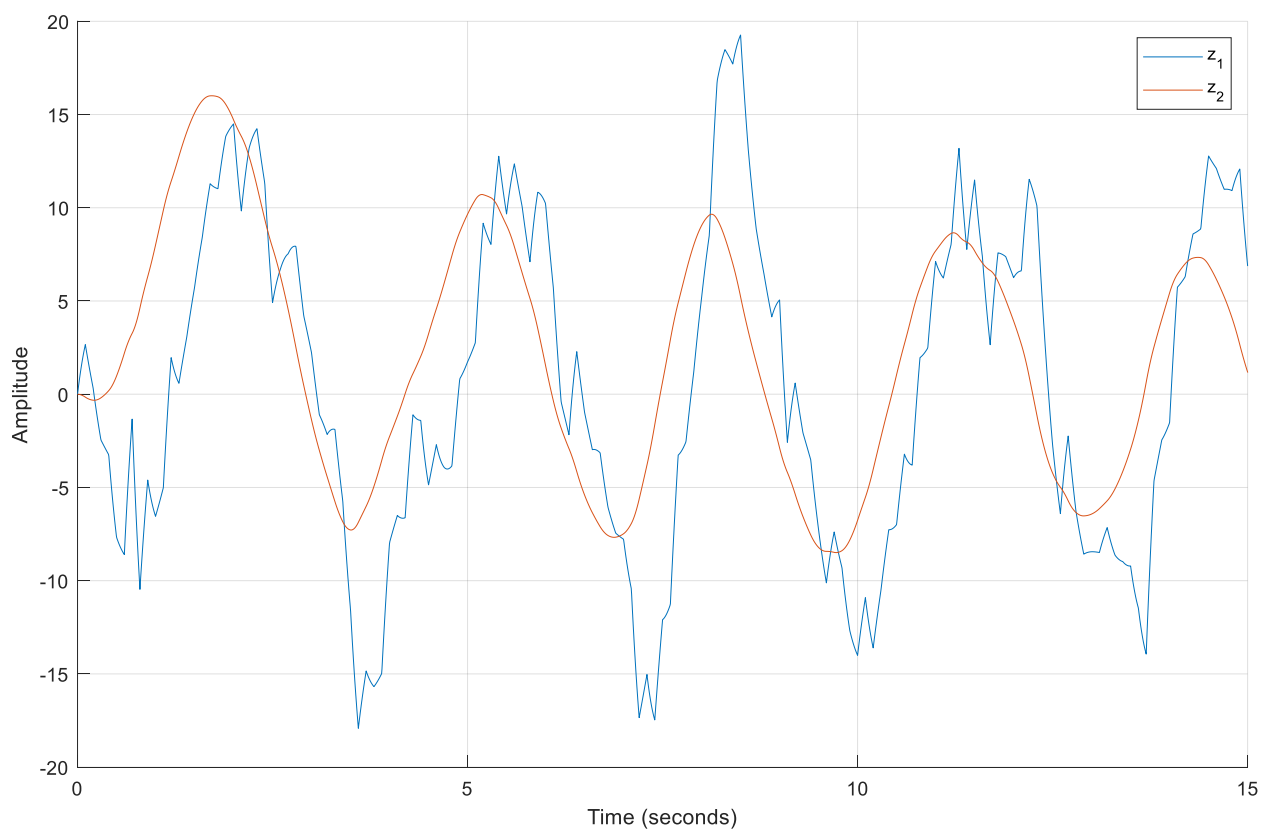


Рисунок 20 – система при возмущении w_2

Второй регулируемый выход:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 2u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 по выходу:

Проверка условий:

1. $C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det(D_2^T D_2) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_2^T D_2$ обратима
3. (A, B_2) – стабилизируема
4. (C_2, A) – обнаруживаема
5. $B_1 D_1^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = 0$
6. $\det(D_1 D_1^T) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_1 D_1^T$ обратима
7. (C_1, A) – обнаруживаема
8. (A, B_1) – стабилизируема

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу $P > 0$ из уравнения Риккати

$$A P + P A^T + B_1 B_1^T - P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 9.23 & 5.66 \\ 5.66 & 17.06 \end{bmatrix}$$

$$L = -P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2.3 \\ -1.41 \end{bmatrix}$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-6.76e15 s^3 - 2.35e16 s^2 + 6.39e16 s + 1.1e17}{1.13e15 s^4 + 5.4e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

$$W_{21} = \frac{5.5e16 s^2 - 1.76e16 s - 1.27e16}{1.13e15 s^4 + 5.41e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

$$W_{12} = \frac{1.13e15 s^3 + 6.31e16 s^2 + 1.2e17 s + 7.3e16}{1.13e15 s^4 + 5.4e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

$$W_{22} = \frac{-1.84e16 s^2 - 4.3e16 s - 1.27e16}{1.13e15 s^4 + 5.4e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

$$W_{13} = \frac{-5.5e16 s^2 - 9.254e16 s - 2.55e16}{1.13e15 s^4 + 5.4e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

$$W_{23} = \frac{-3.67e16 s^3 - 1.27e16 s^2}{1.13e15 s^4 + 5.4e15 s^3 + 1.03e16 s^2 + 9.18e15 s + 3.19e15}$$

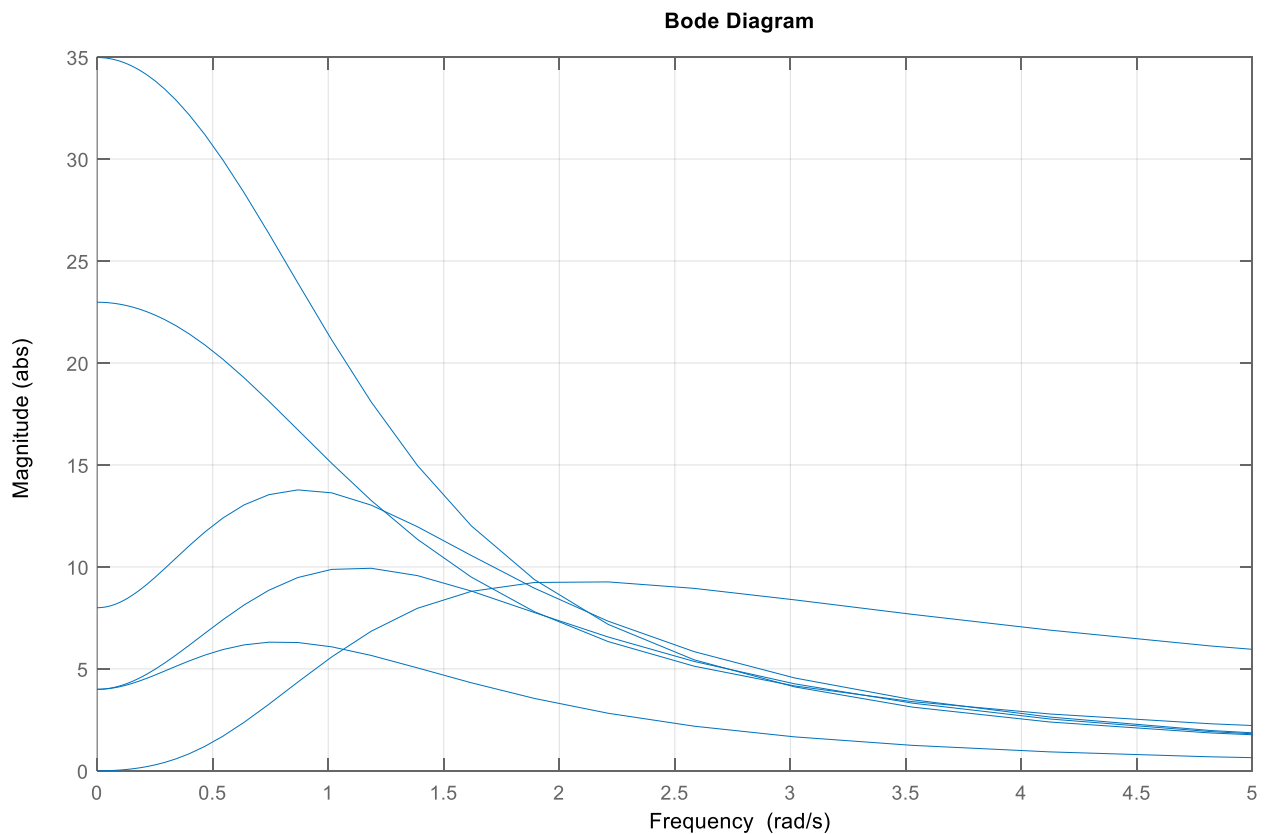


Рисунок 21 – АЧХ

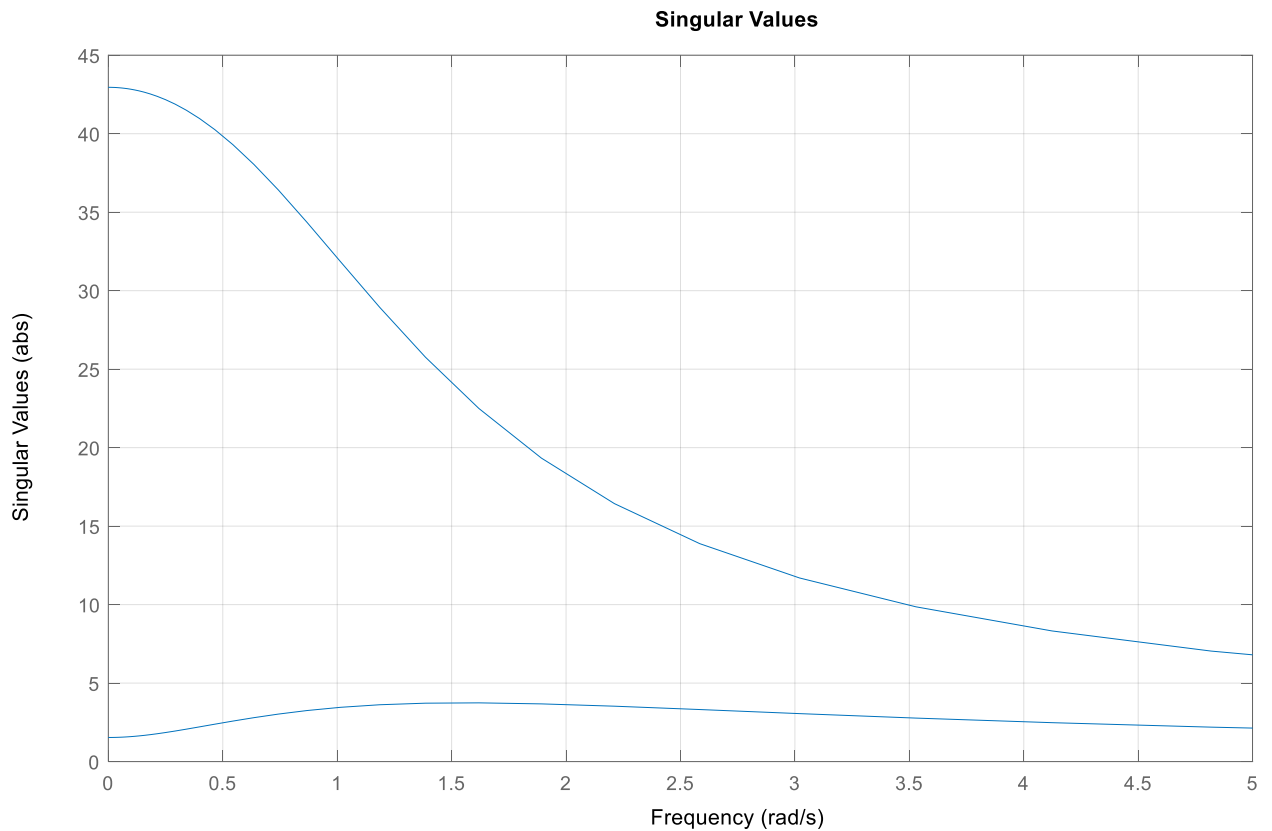


Рисунок 22 – сингулярные числа

Нормы системы:

$$\left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} = 29.94 \quad \left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} = 42.96$$

Так как система замкнута \mathcal{H}_2 -регулятором, найденное значение является минимальным для данной системы. Данный регулятор способствует уменьшению «площади» под графиком.

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3 \sin\left(0.3t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos(0.3t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(3t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix}$$

Замоделлируем систему с внешними возмущениями и помехами измерений. Как и раньше, возьмем возмущения на низкой частоте и высокой. По графику сингулярных чисел видно, что система будет давать наибольшее усиление на наименьшей частоте. Теперь это видно и по графикам моделирования.

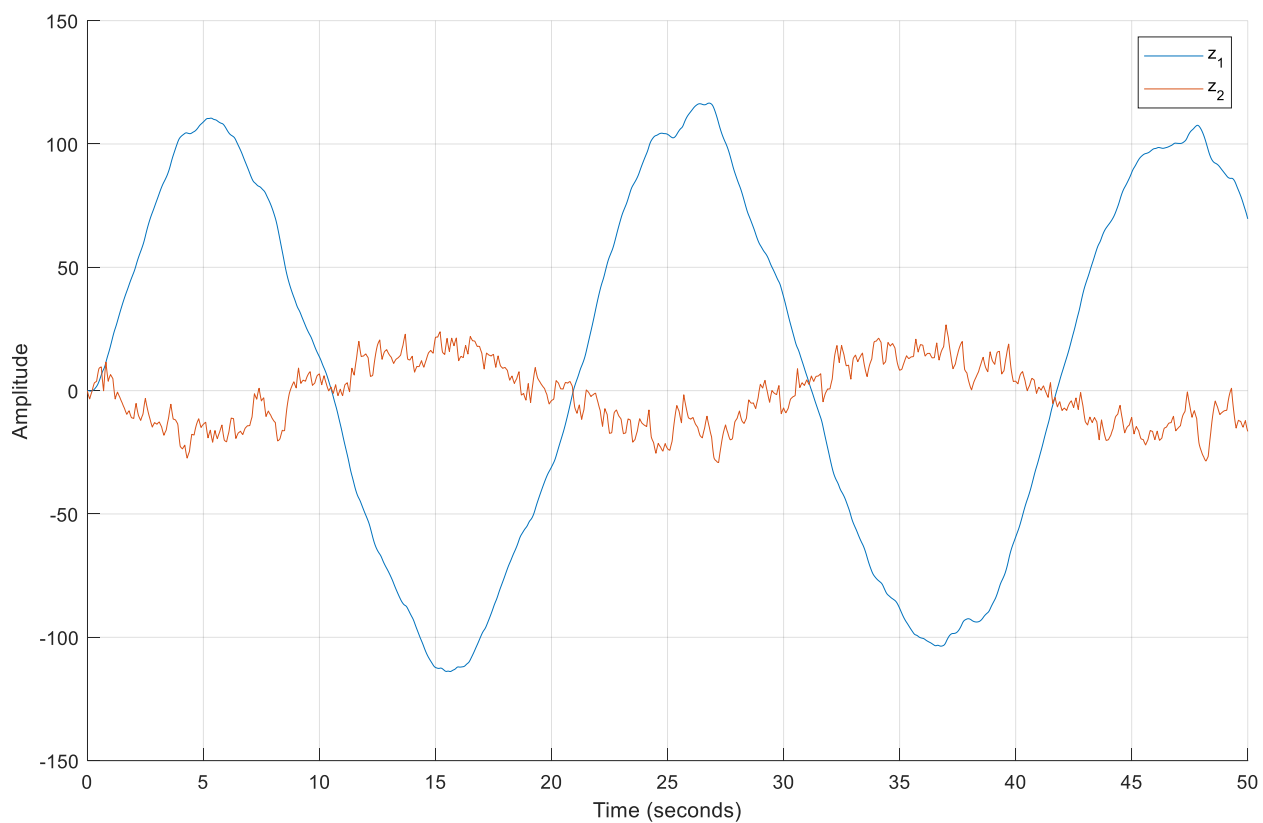


Рисунок 23 – система при возмущении w_1

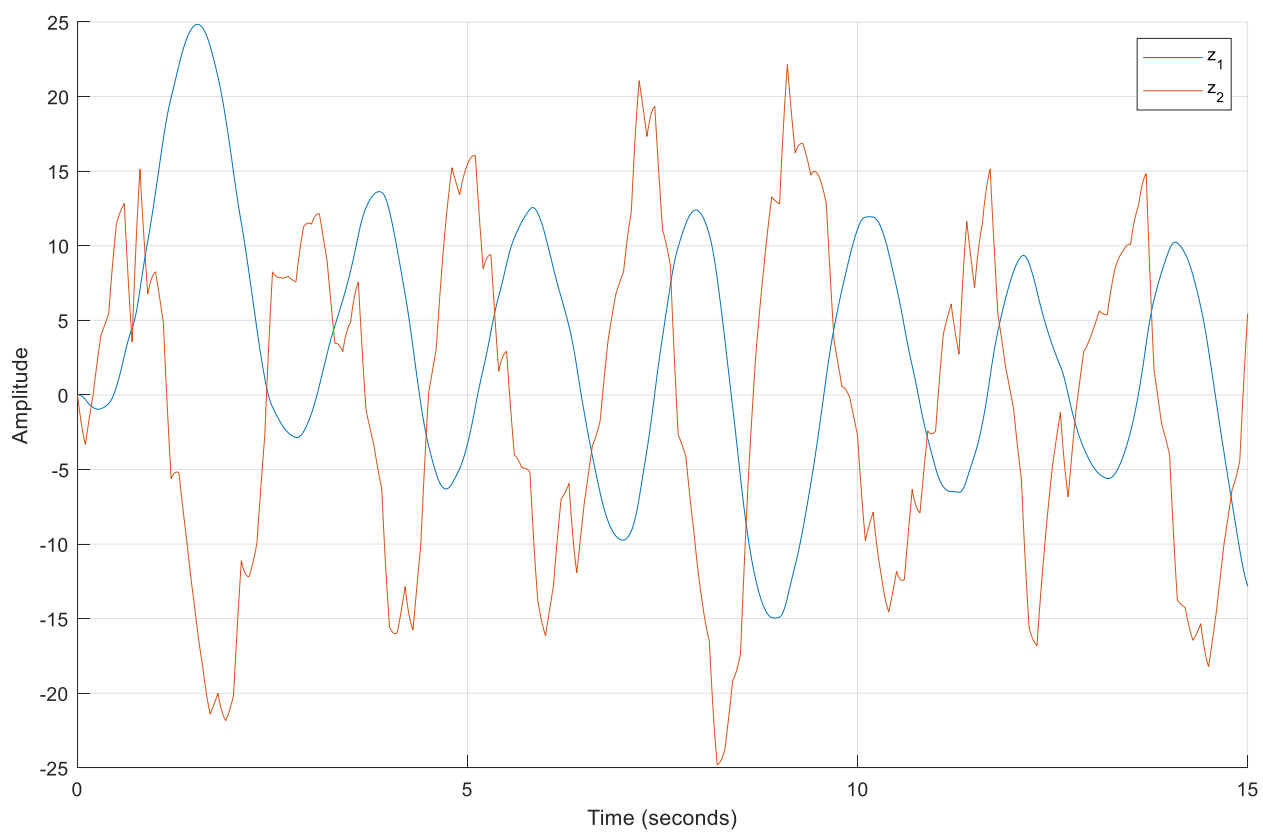


Рисунок 24 – система при возмущении w_2

Третий регулируемый выход:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_2 \\ 2u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 по выходу:

Проверка условий:

1. $C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det(D_2^T D_2) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_2^T D_2$ обратима
3. (A, B_2) – стабилизируема
4. (C_2, A) – обнаруживаема
5. $B_1 D_1^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = 0$
6. $\det(D_1 D_1^T) = \det([4]) = 4 \neq 0$, значит матрица $D_1 D_1^T$ обратима
7. (C_1, A) – обнаруживаема
8. (A, B_1) – стабилизируема

Найдем матрицу $Q \succ 0$ из уравнения Риккати

$$\begin{aligned} A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q &= 0 \\ Q &= \begin{bmatrix} 1.69 & 2 \\ 2 & 9.38 \end{bmatrix} \\ K &= -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = \begin{bmatrix} -0.5 & -2.3452 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Найдем матрицу $P \succ 0$ из уравнения Риккати

$$\begin{aligned} A P + P A^T + B_1 B_1^T - P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P &= 0 \\ P &= \begin{bmatrix} 9.23 & 5.66 \\ 5.66 & 17.06 \end{bmatrix} \\ L &= -P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2.3 \\ -1.41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{13} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{3.38e15 s^3 + 1.797e16 s^2 + 8.05e16 s + 2.367e16}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{21} = \frac{6.75e15 s^3 + 3.14e16 s^2 + 9.48e16 s + 7.165e15}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{31} = \frac{3.4e31 s^4 + 1.409e32 s^3 + 1.651e32 s^2 - 1.434e32 s - 2.627e31}{1.268e30s^6 + 1.18e31 s^5 + 4.6e31s^4 + 9.212e31s^3 + 9.534e31s^2 + 4.57e31s + 6.568e30}$$

$$W_{12} = \frac{7.88e15 s^3 + 3.89e16 s^2 + 5.313e16 s + 1.41e16}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{22} = \frac{6.75e15 s^3 + 3.14e16 s^2 + 3.44e16 s - 2.38e15}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{32} = \frac{-1.133e31 s^4 - 7.72e31 s^3 - 2e32 s^2 - 1.95e32 s - 2.627e31}{1.268e30s^6 + 1.18e31 s^5 + 4.6e31s^4 + 9.212e31s^3 + 9.534e31s^2 + 4.57e31s + 6.568e30}$$

$$W_{13} = \frac{-3.02e16 s^2 - 1.484e16 s - 1.592e15}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{23} = \frac{-3.02e16 s^2 - 4.77e15 s}{1.126e15 s^4 + 5.24e15 s^3 + 8.25e15 s^2 + 5.034e15 s + 7.961e14}$$

$$W_{33} = \frac{-2.267e31 s^5 - 1.091e32 s^4 - 1.828e31 s^3 + 9.534e31 s^2 + 4.57e31 s + 6.568e30}{1.268e30s^6 + 1.18e31 s^5 + 4.6e31s^4 + 9.212e31s^3 + 9.534e31s^2 + 4.57e31s + 6.568e30}$$

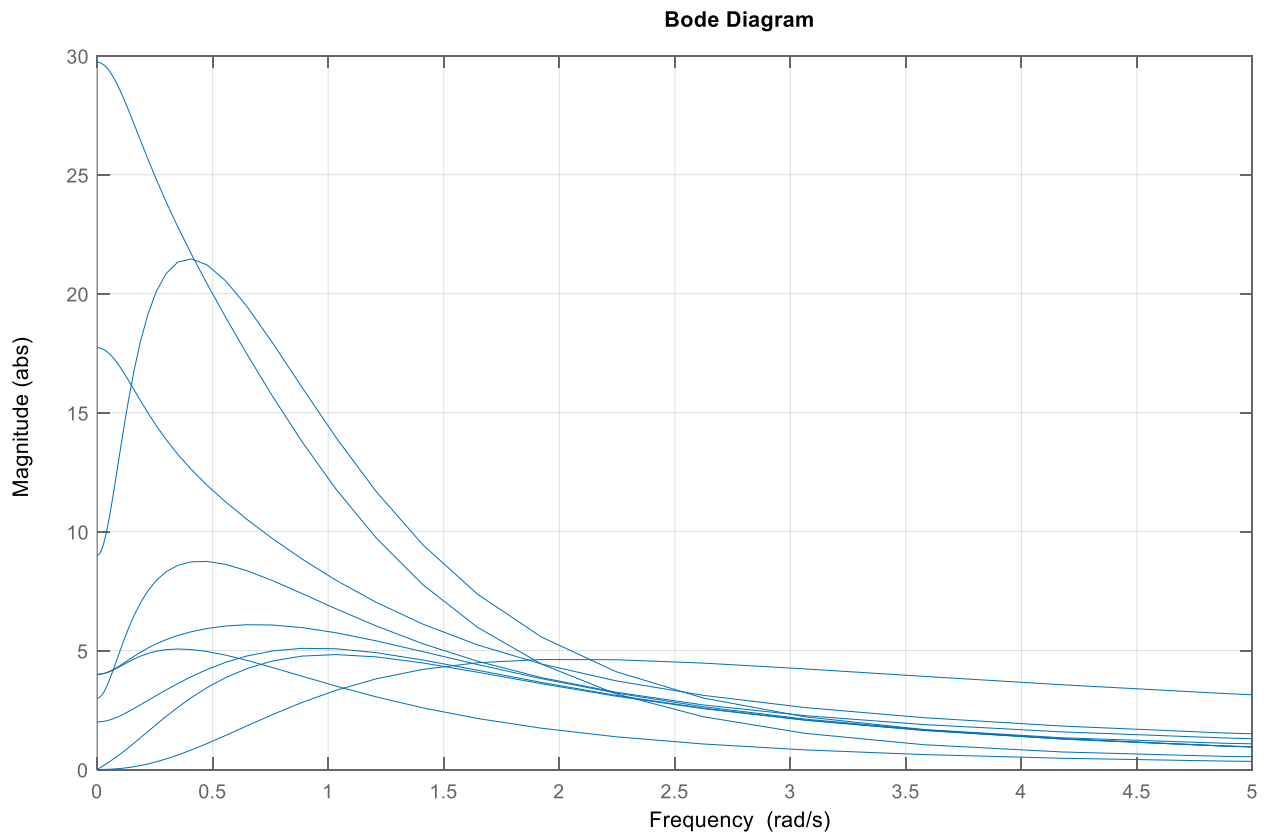


Рисунок 25 – АЧХ

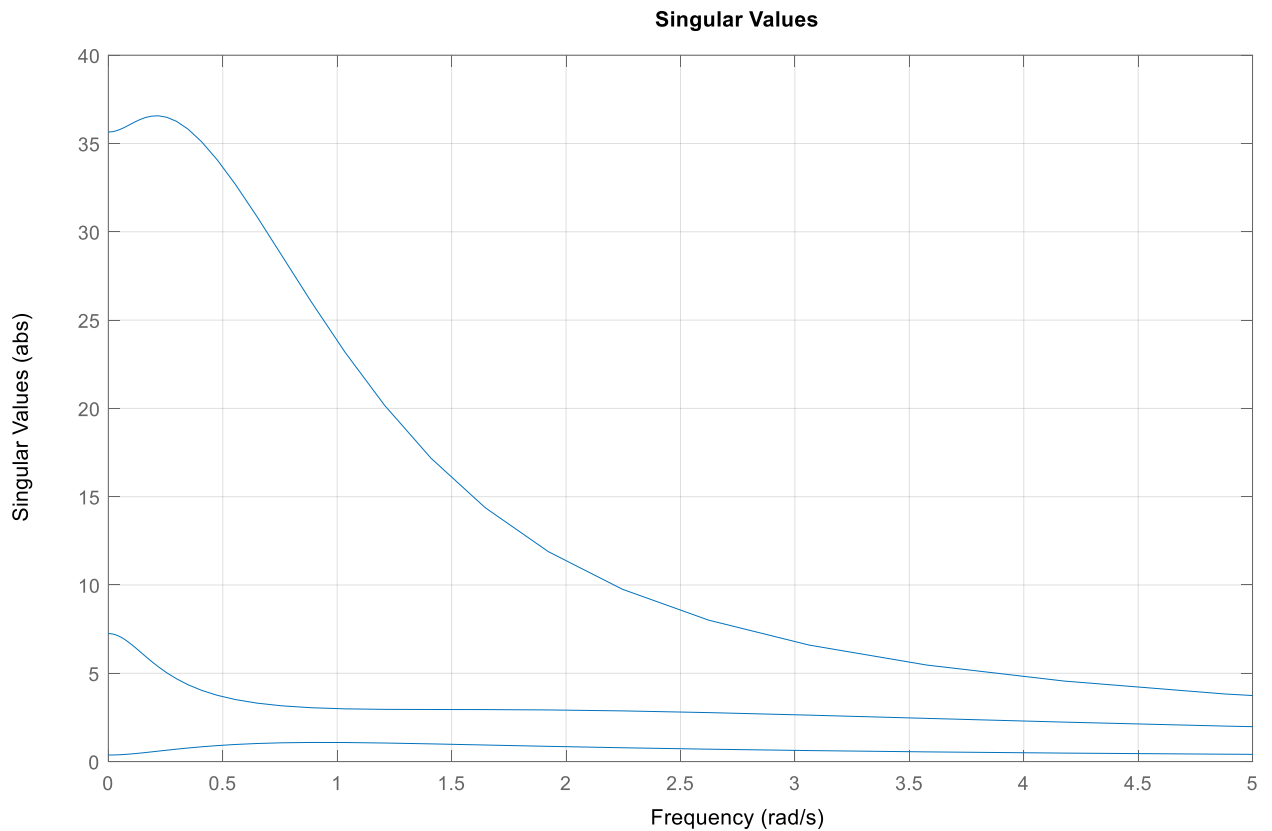


Рисунок 26 – сингулярные числа

Нормы системы:

$$\left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} = 22.6611 \quad \left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} = 36.57$$

Так как система замкнута \mathcal{H}_2 -регулятором, найденное значение является минимальным для данной системы. Данный регулятор способствует уменьшению «площади» под графиком.

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(0.2t - \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 \cos(0.2t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 \cos(3t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \end{bmatrix}$$

И еще раз возьмем возмущения на низкой частоте и высокой. По графику сингулярных чисел видно, что система дает наибольшее усиление на наименьшей частоте. Это подтверждается графиками моделирования.

Мы выяснили, что благодаря \mathcal{H}_2 -регулятору, а он же переформулированный LQG, можно оптимально уменьшить общие шумы системы, в отличие от помех на пиковых частотах. С ними лучше справляется \mathcal{H}_∞ -регулятор.

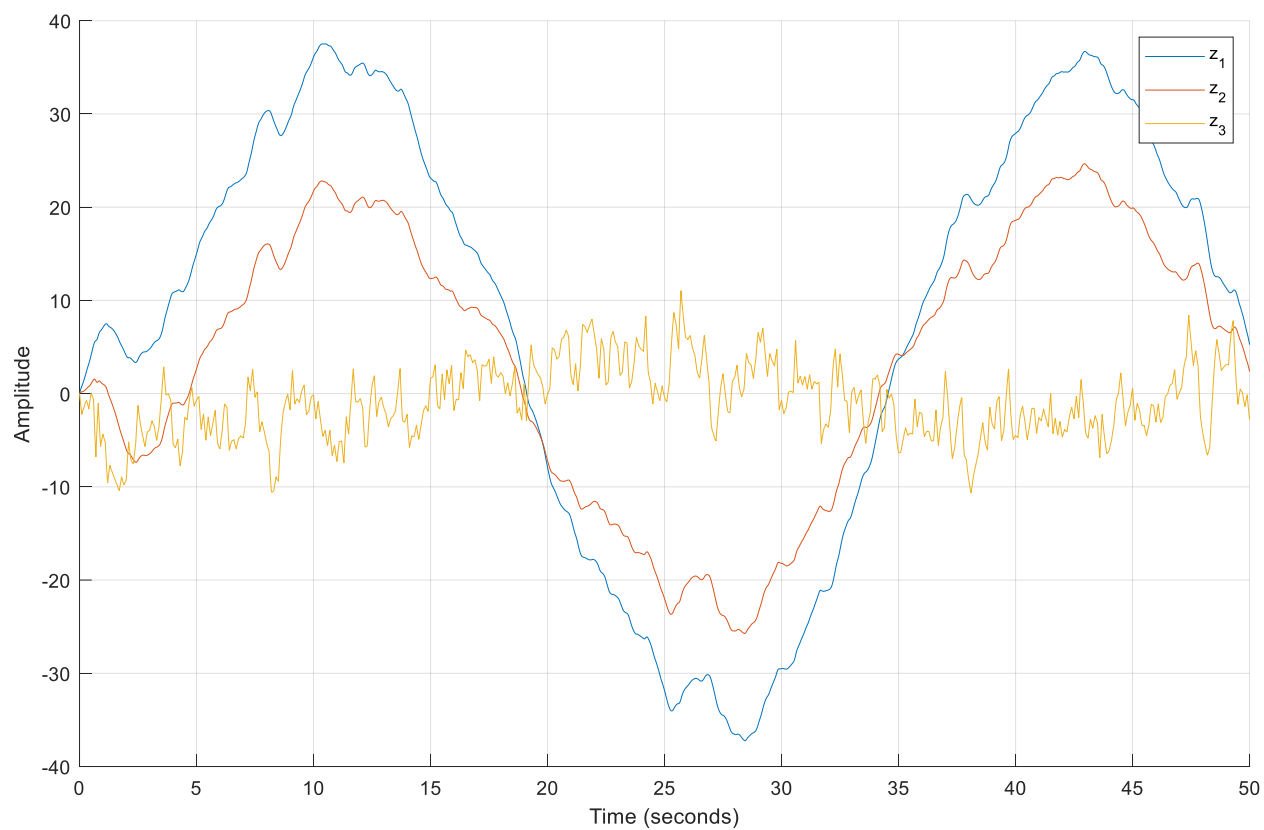


Рисунок 27 – система при возмущении w_1

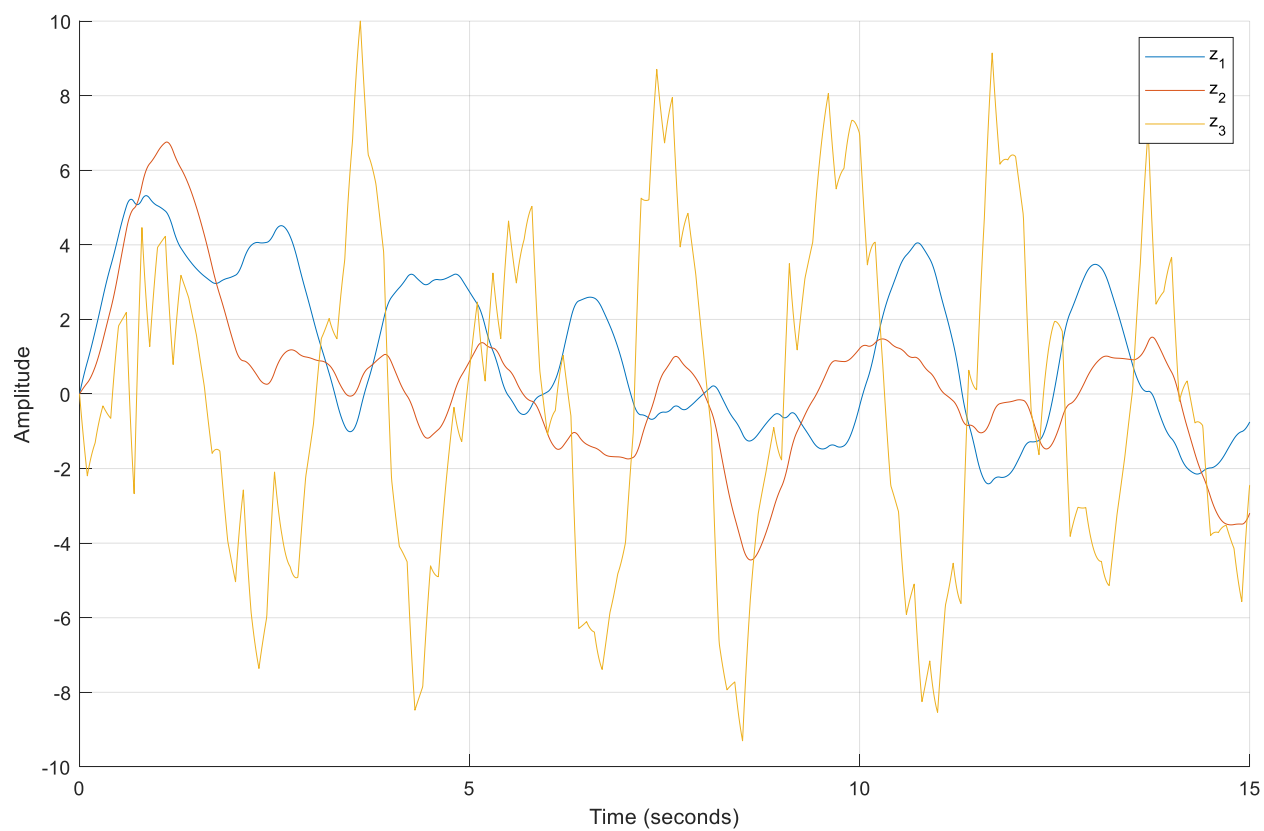


Рисунок 28 – система при возмущении w_2

Задание 4. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по состоянию

Возьмем тележку из задания 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -u \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Требуемые условия на синтез \mathcal{H}_∞ регулятора по состоянию совпадают с условиями на синтез \mathcal{H}_2 регулятора. При $\gamma > 0$, конечно же. $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 0$

$$W_{w \rightarrow z} = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1} B_1$$

Первое значение $\gamma = 15$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2454 & 1.0115 \\ 1.0115 & 4.2941 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.0115 \quad -4.2941]$$

$$W_{w \rightarrow z} = \begin{bmatrix} \frac{-2.2836e15 s - 2.278e15}{2.252e15 s^2 + 9.67e15 s + 2.278e15} & \frac{2.162e16 s + 4.556e15}{2.252e15 s^2 + 9.67e15 s + 2.278e15} \\ \frac{-2.252e15 s - 5.765e14}{2.252e15 s^2 + 9.67e15 s + 2.278e15} & \frac{2.027e16 s + 5.062e15}{2.252e15 s^2 + 9.67e15 s + 2.278e15} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 4.652 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 3.222$$

Bode Diagram

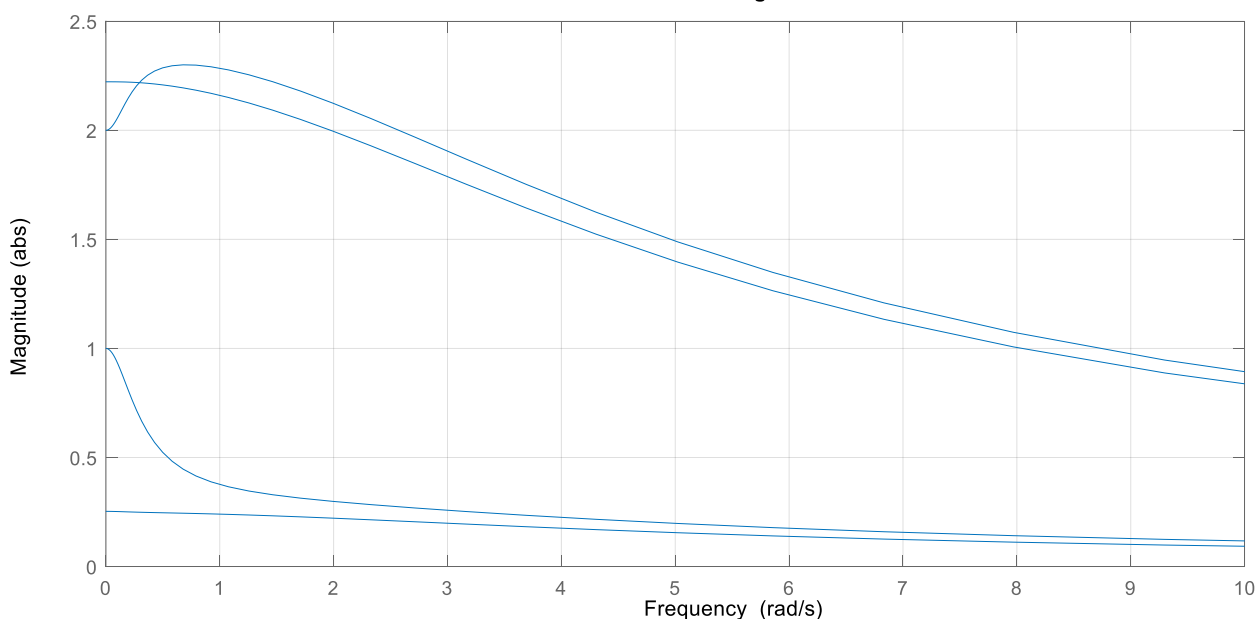


Рисунок 29 – АЧХ

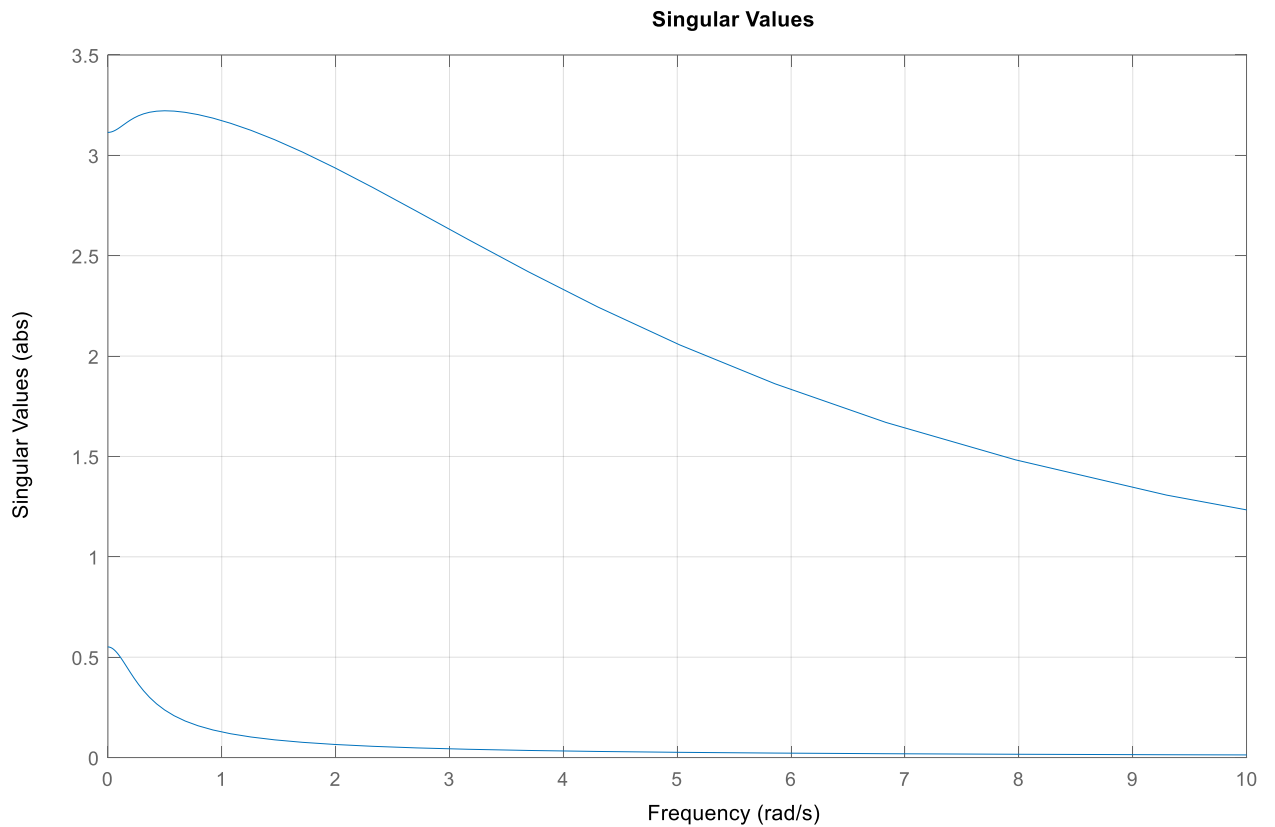


Рисунок 30 – сингулярные числа

Второе значение $\gamma = 10$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2489 & 1.0265 \\ 1.0265 & 4.3612 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.0265 \quad -4.3612]$$

$$W_{w \rightarrow z} = \begin{bmatrix} \frac{-2.286e15 s - 2.312e15}{2.252e15 s^2 + 9.821e15 s + 2.312e15} & \frac{2.195e16 s + 4.623e15}{2.252e15 s^2 + 9.821e15 s + 2.312e15} \\ \frac{-2.252e15 s - 5.289e14}{2.252e15 s^2 + 9.821e15 s + 2.312e15} & \frac{2.027e16 s + 5.078e15}{2.252e15 s^2 + 9.821e15 s + 2.312e15} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 4.6528 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 3.1972$$

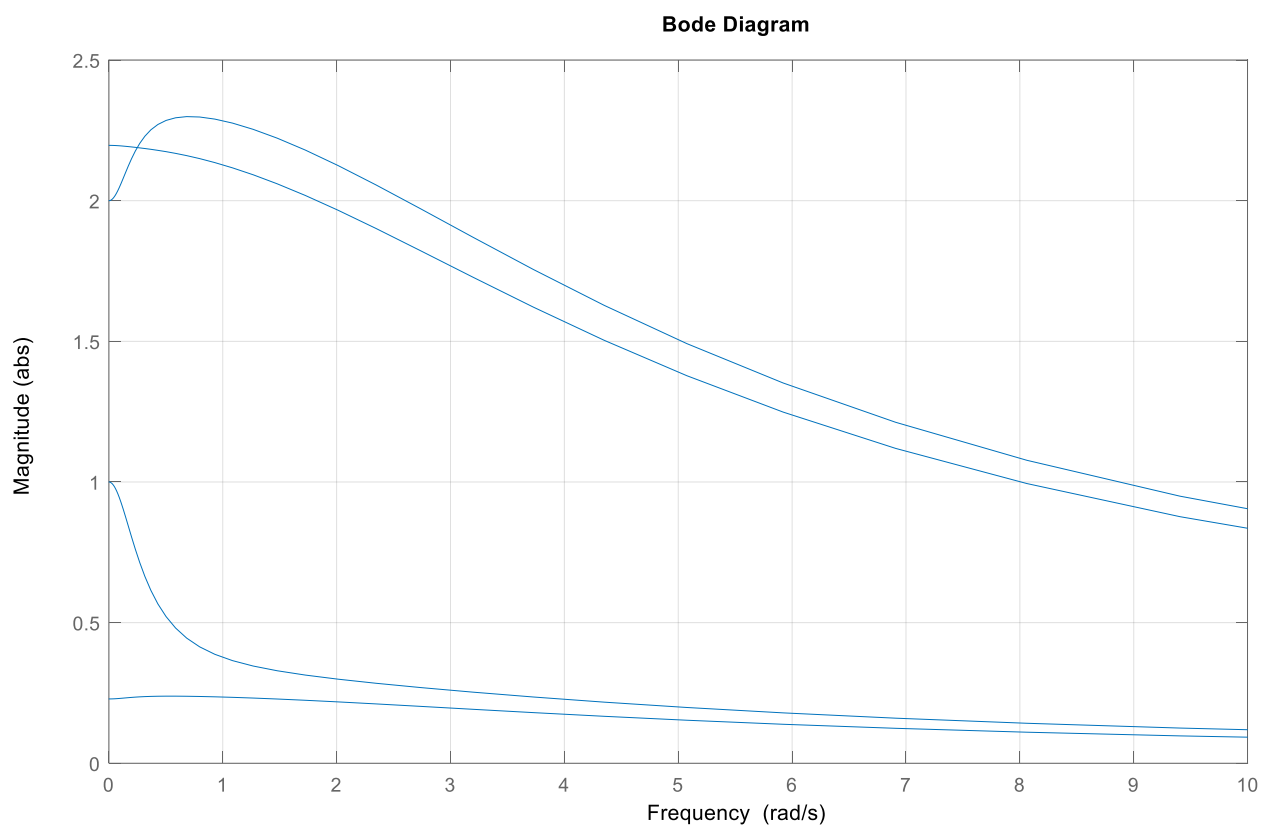


Рисунок 31 – АЧХ

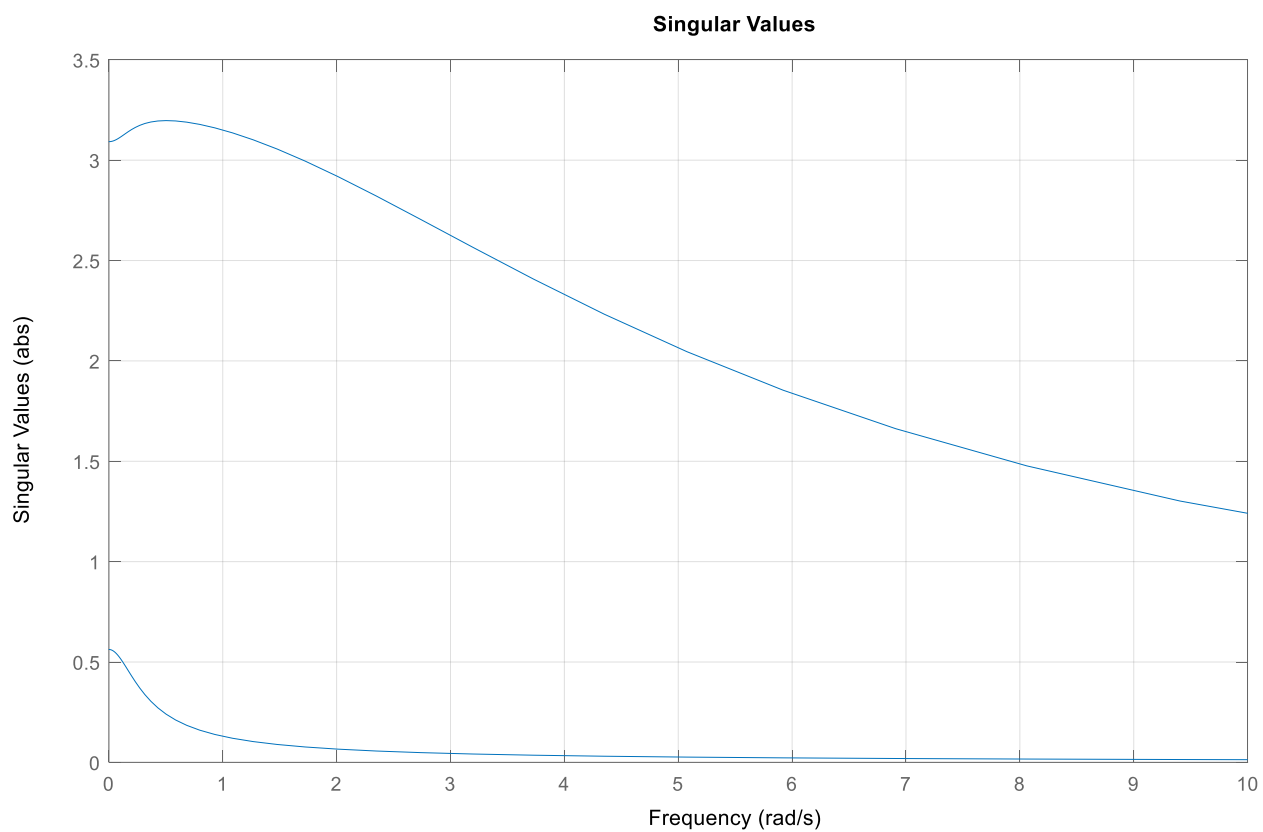


Рисунок 32 – сингулярные числа

Третье значение $\gamma = 5$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2711 & 1.1209 \\ 1.1209 & 4.7848 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.1209 \quad -4.7848]$$

$$W_{w \rightarrow z} = \begin{bmatrix} \frac{-1.601e15 s - 1.262e15}{1.126e15 s^2 + 5.387e15 s + 1.262e15} & \frac{1.204e16 s + 2.524e15}{1.126e15 s^2 + 5.387e15 s + 1.262e15} \\ \frac{-1.126e15 s - 1.083e14}{1.126e15 s^2 + 5.387e15 s + 1.262e15} & \frac{1.013e16 s + 2.591e15}{1.126e15 s^2 + 5.387e15 s + 1.262e15} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 4.6694 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 3.0599$$

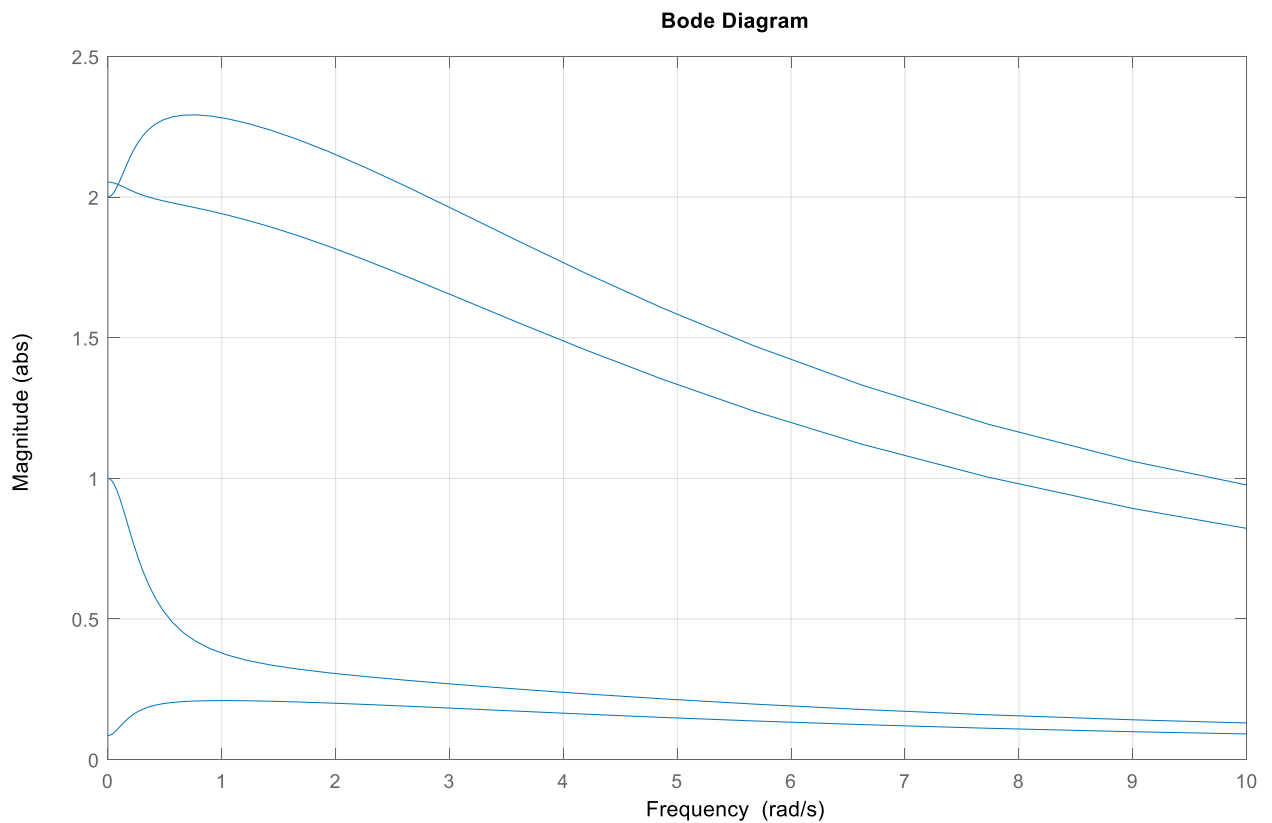


Рисунок 33 – АЧХ

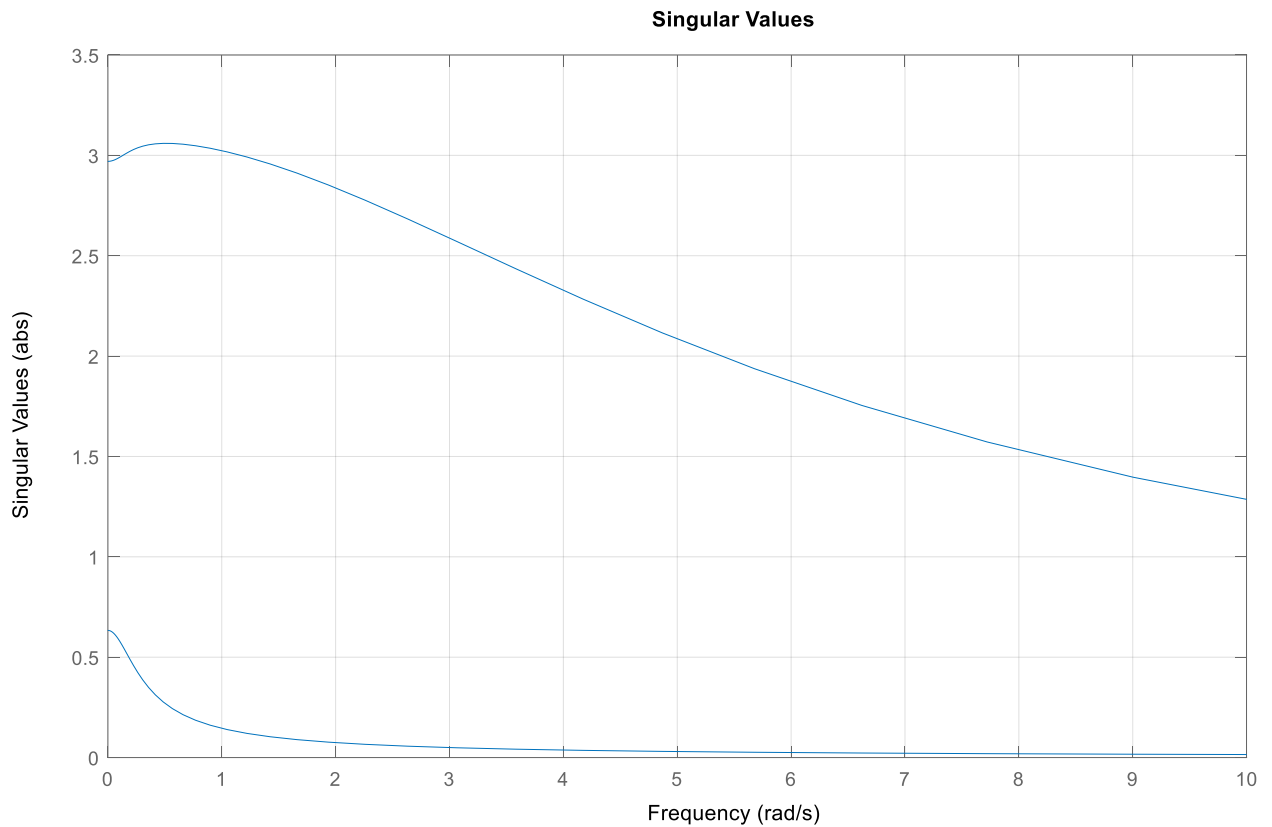


Рисунок 34 – сингулярные числа

Четвертое значение $\gamma = 2.249$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} -23.1601 & -102.7822 \\ -102.7822 & -452.0319 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [102.7822 \quad 452.0319]$$

$$W_{w \rightarrow z} = \begin{bmatrix} \frac{-1.559e15 s - 1.089e15}{2.749e11 s^2 + 4.825e15 s + 1.089e15} & \frac{1.074e16 s + 2.178e15}{2.749e11 s^2 + 4.825e15 s + 1.089e15} \\ \frac{-2.749e11 s + 1.41e15}{2.749e11 s^2 + 4.825e15 s + 1.089e15} & \frac{2.474e12 s + 4.706e14}{2.749e11 s^2 + 4.825e15 s + 1.089e15} \end{bmatrix}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 210.7 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 2.249$$

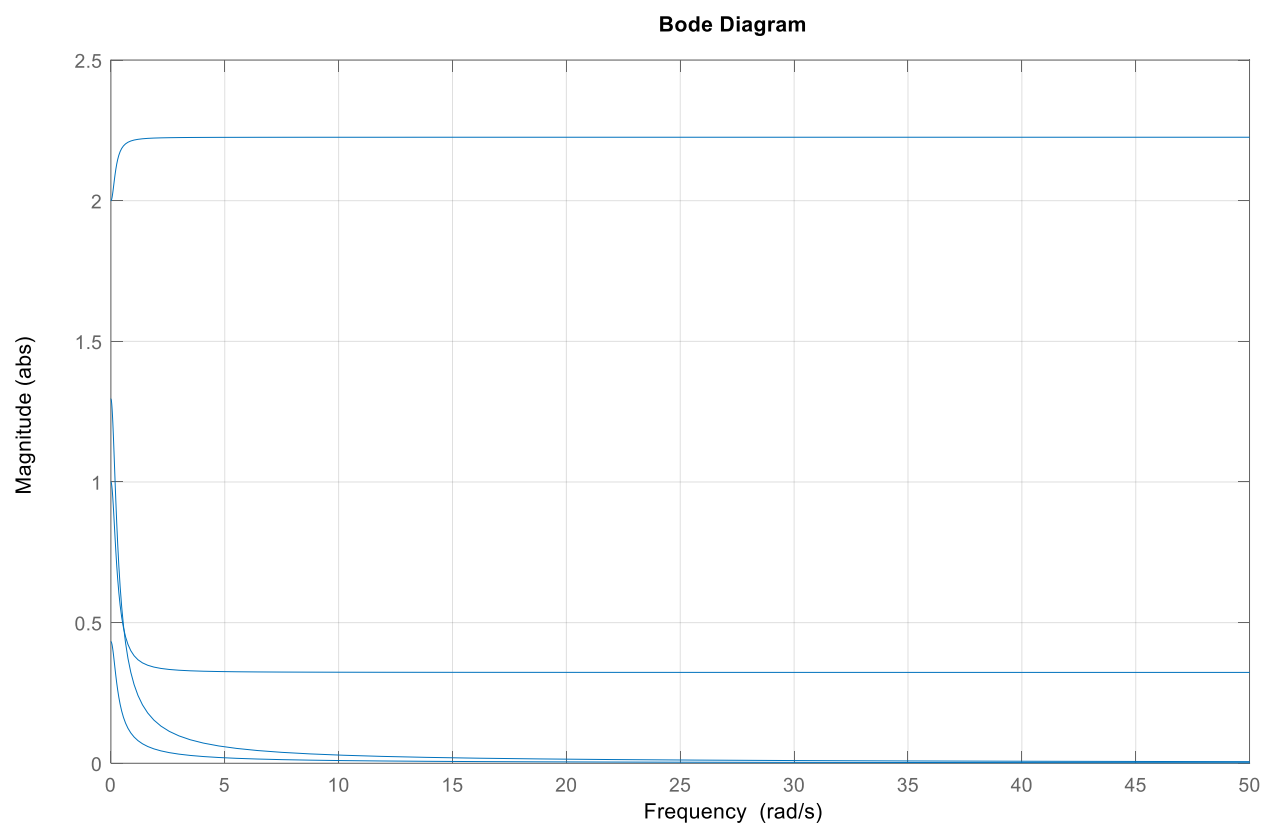


Рисунок 35 – АЧХ

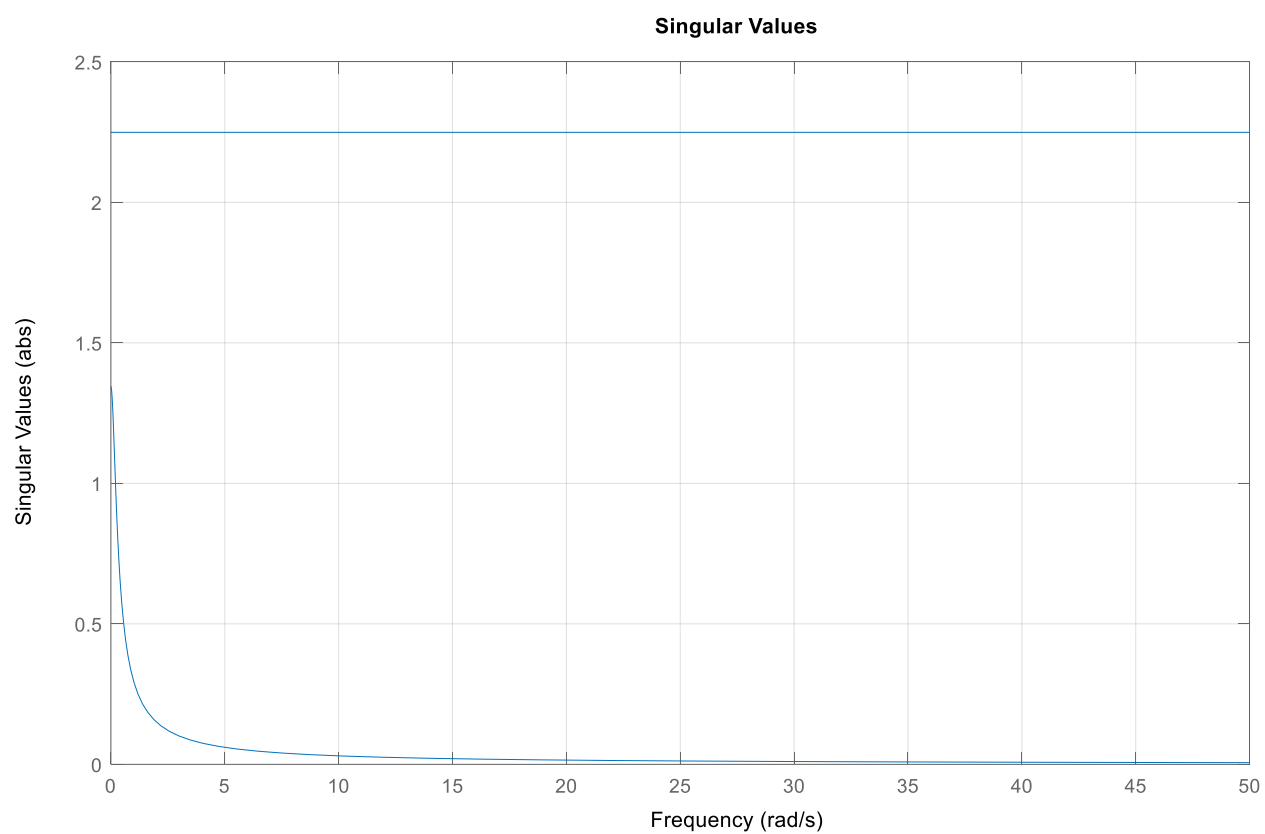


Рисунок 36 – сингулярные числа

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin \left(0.9t + \frac{\pi}{4} \right) \\ 3 \cos (0.9t) \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin \left(9t + \frac{\pi}{4} \right) \\ 3 \cos (9t) \end{bmatrix}$$

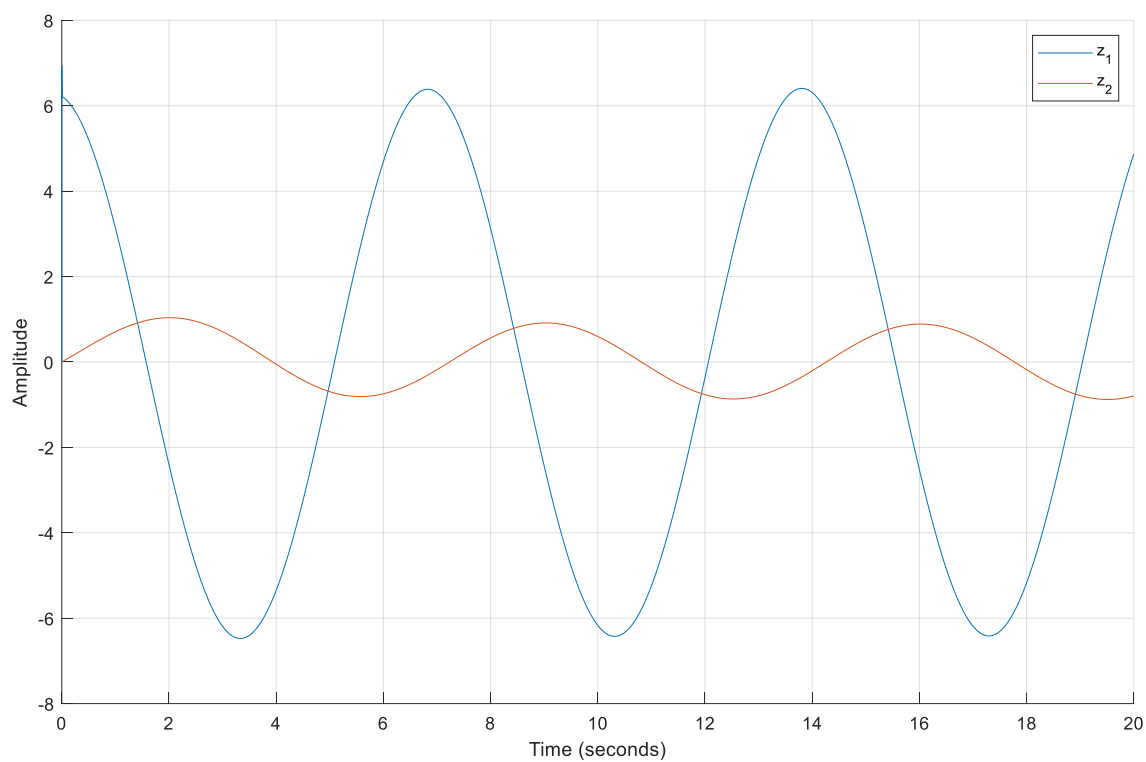


Рисунок 37 – система при возмущении w_1

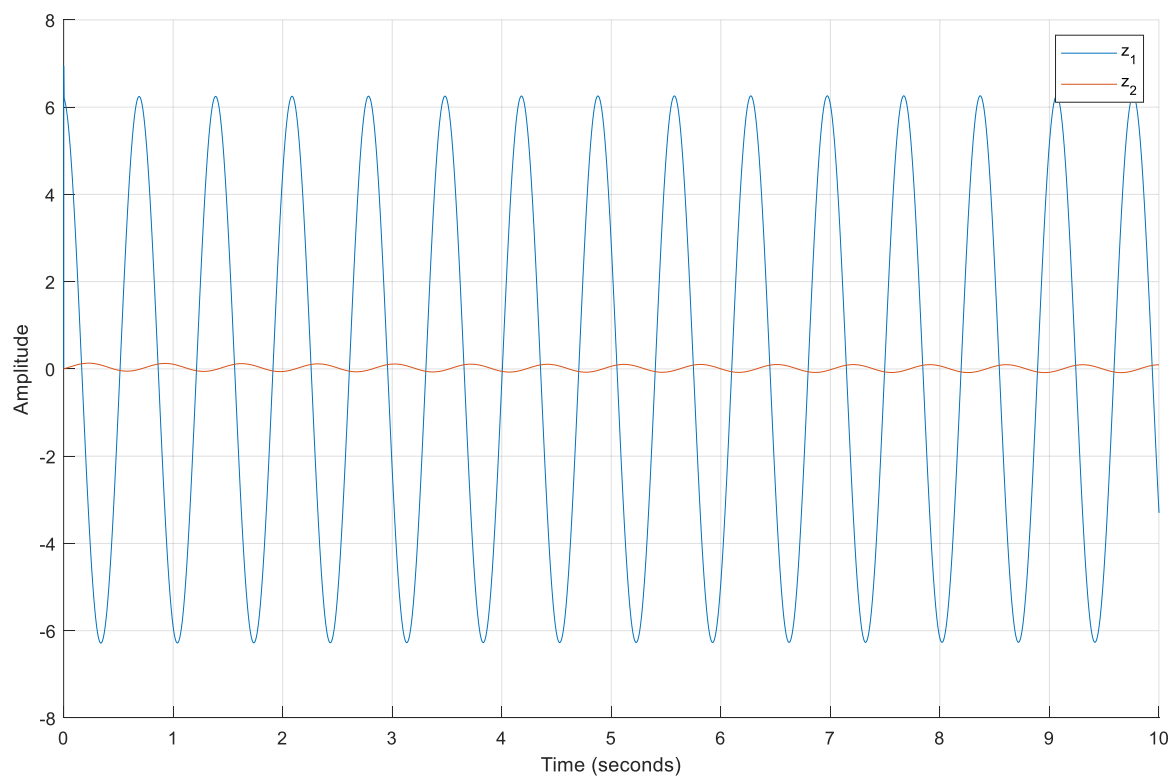


Рисунок 38 – система при возмущении w_2

Было смоделировано четыре регулятора с различными параметрами γ . Четвертое ограничение являлось наиболее сильным, условие $\left\| W(s) \right\|_{w \rightarrow z} \Big|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2.249$ было выполнено.

Но каким трудом. Пиковое значение хоть и уменьшилось до границы нереализуемости системы, но среднечастотное усиление стало больше 210, это наша «площадь» под графиком.

Теперь наша система стала более «бронейбойной», она меньше подвержена усилениям на определенных частотах, но обратная сторона этого факта заключается в том, что произошло среднестатическое усиление системы.

Задание 5. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 2] w \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Система в общем виде:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases} & \text{— объект} \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 \hat{w} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ \hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T Q \hat{x} \end{cases} & \text{— наблюдатель} \end{cases}$$

Если написанные ранее условия соблюдаются, то будет выполнено ограничение на норму матрицы: $\lambda_{\max}(PQ) \leq \gamma^2 \Rightarrow \left\| W(s) \right\|_{w \rightarrow z} \Big|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma$.

Передаточная функция:

$$W(s)_{w \rightarrow x} = (I + (sI - A)^{-1} B_2 K (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1} LC_1)^{-1} (sI - A)^{-1} (B_1 - B_2 K (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1} LD_1)$$

$$W(s)_{w \rightarrow \hat{x}} = -(I + (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 L - LC_1)^{-1} LC_1 (sI - A)^{-1} B_2 K)^{-1} (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1} (LC_1 (sI - A)^{-1} B_1 + LD_1)$$

$$W(s)_{w \rightarrow z} = C_2 W(s)_{w \rightarrow x} + D_2 K W(s)_{w \rightarrow \hat{x}}$$

Первое значение $\gamma = 50$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} QB_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.0425 & 6.0485 \\ 6.0485 & 8.0736 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.5121 \quad -2.0184]$$

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $P > 0$:

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} PC_2^T C_2 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 9.5397 & 6.0443 \\ 6.0443 & 17.5484 \end{bmatrix}$$

$$L = -P(I - \gamma^{-2} QP)^{-1} (C_1 - \gamma^{-2} D_1 B_1^T Q)^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5573 \\ -1.7842 \end{bmatrix}$$

Условия согласованности выполнены:

$$\lambda_{\max}(PQ) = 266.4478 \leq \gamma^2 = 2500$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-1.31e50 s^2 + 4.06e49 s + 3.114e49}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

$$W_{21} = \frac{-1.462e49 s^3 - 4.889e49 s^2 + 8.77e49 s + 1.943e50}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

$$W_{12} = \frac{4.366e49 s^2 + 1.029e50 s + 3.114e49}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

$$W_{22} = \frac{2.046e49 s^3 + 1.105e50 s^2 + 2.082e50 s + 1.32e50}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

$$W_{13} = \frac{8.732e49 s^3 + 3.114e49 s^2}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

$$W_{23} = \frac{-8.732e49 s^2 - 1.621e50 s - 4.672e49}{2.923e48 s^4 + 1.329e49 s^3 + 2.46e49 s^2 + 2.183e49 s + 7.786e48}$$

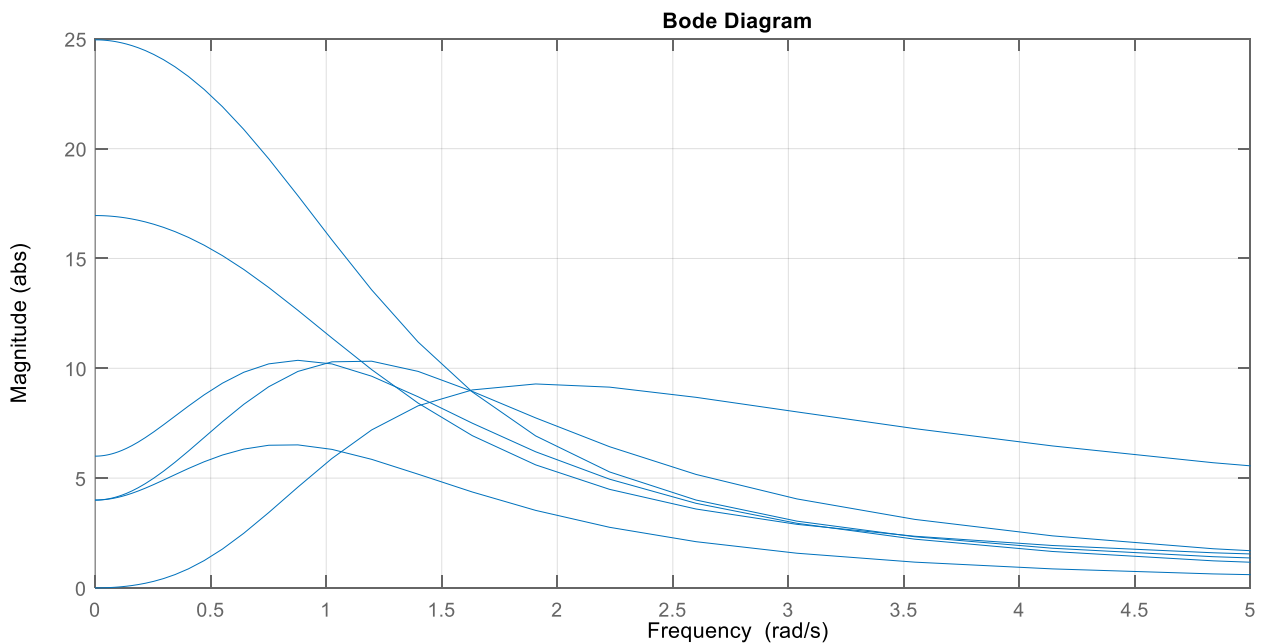


Рисунок 39 - АЧХ

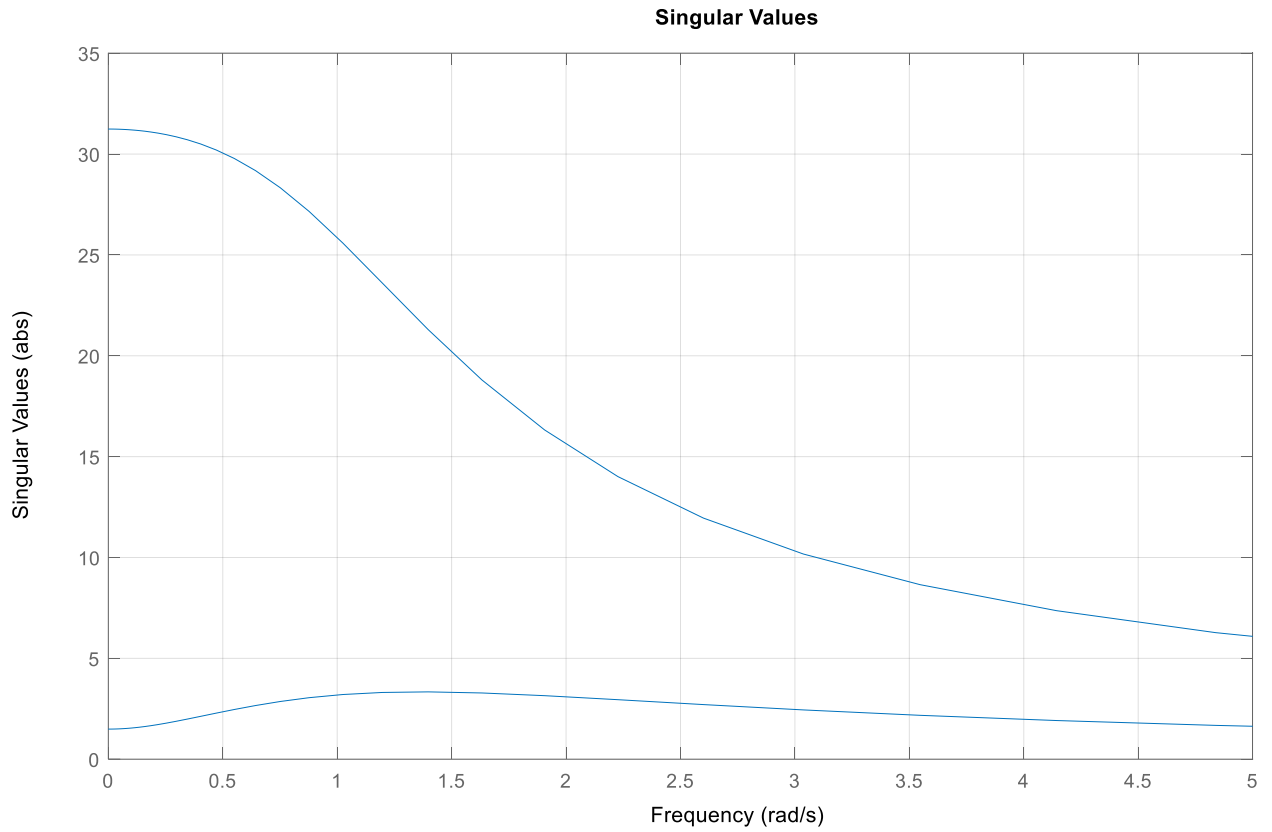


Рисунок 40 – сингулярные числа

Нормы системы:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 24.02 \quad \|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 31.24$$

Второе значение $\gamma = 30$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} QB_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.1203 & 6.1375 \\ 6.1375 & 8.2084 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.5344 \quad -2.0521]$$

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $P > 0$:

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} PC_2^T C_2 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 10.1674 & 6.8377 \\ 6.8377 & 18.5523 \end{bmatrix}$$

$$L = -P(I - \gamma^{-2} QP)^{-1} (C_1 - \gamma^{-2} D_1 B_1^T Q)^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3.308 \\ -2.9098 \end{bmatrix}$$

Условия согласованности выполнены:

$$\lambda_{\max}(PQ) = 292.3452 \leq \gamma^2 = 900$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-2.422e49s^2 + 6.681e48s + 6.309e48}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

$$W_{21} = \frac{-1.827e48s^3 - 7.442e48s^2 + 1.548e49s + 3.383e49}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

$$W_{12} = \frac{8.073e48s^2 + 1.93e49s + 6.309e48}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

$$W_{22} = \frac{2.558e48s^3 + 1.568e49s^2 + 3.191e49s + 2.121e49}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

$$W_{13} = \frac{1.615e49s^3 + 6.309e48s^2}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

$$W_{23} = \frac{-1.615e49s^2 - 3.053e49s - 9.464e48}{3.654e47s^4 + 1.927e48s^3 + 4.06e48s^2 + 4.036e48s + 1.577e48}$$

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 25.7048 \quad \|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 26.5626$$

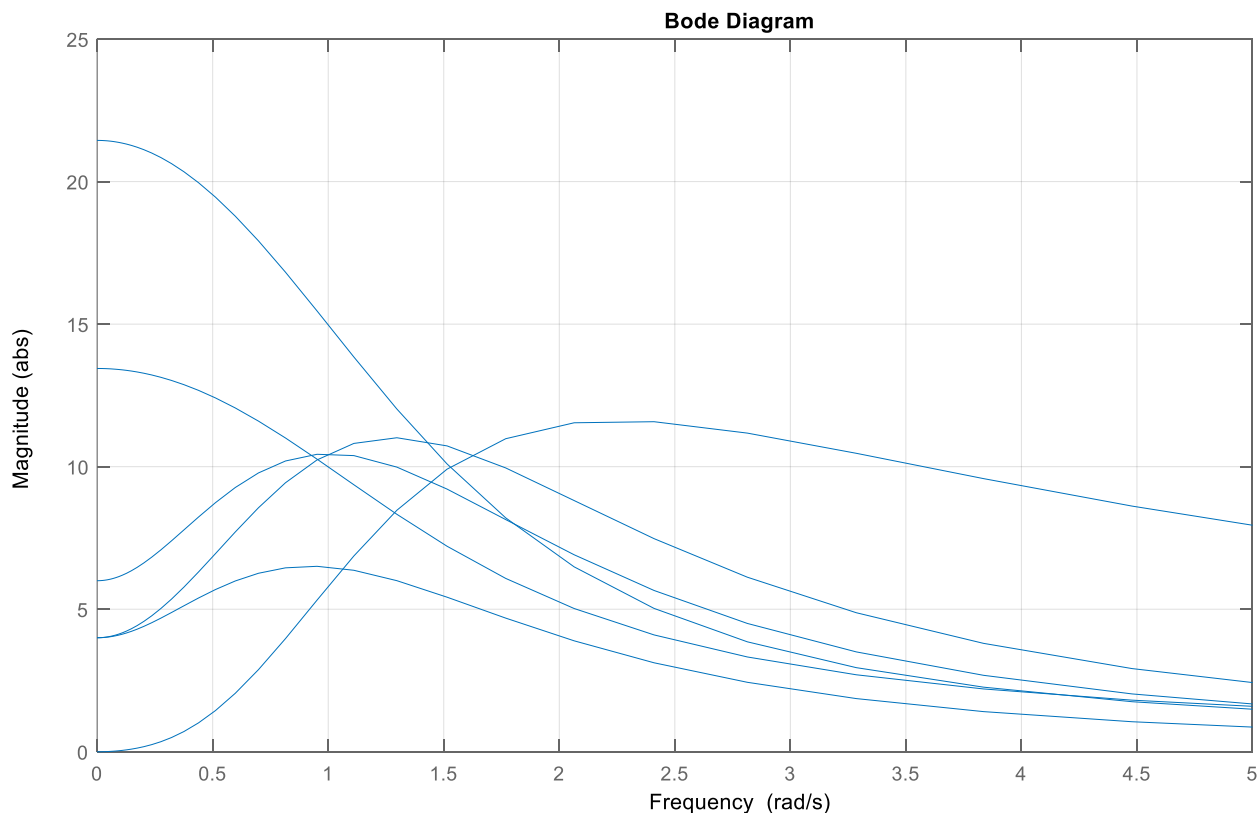


Рисунок 41 - АЧХ

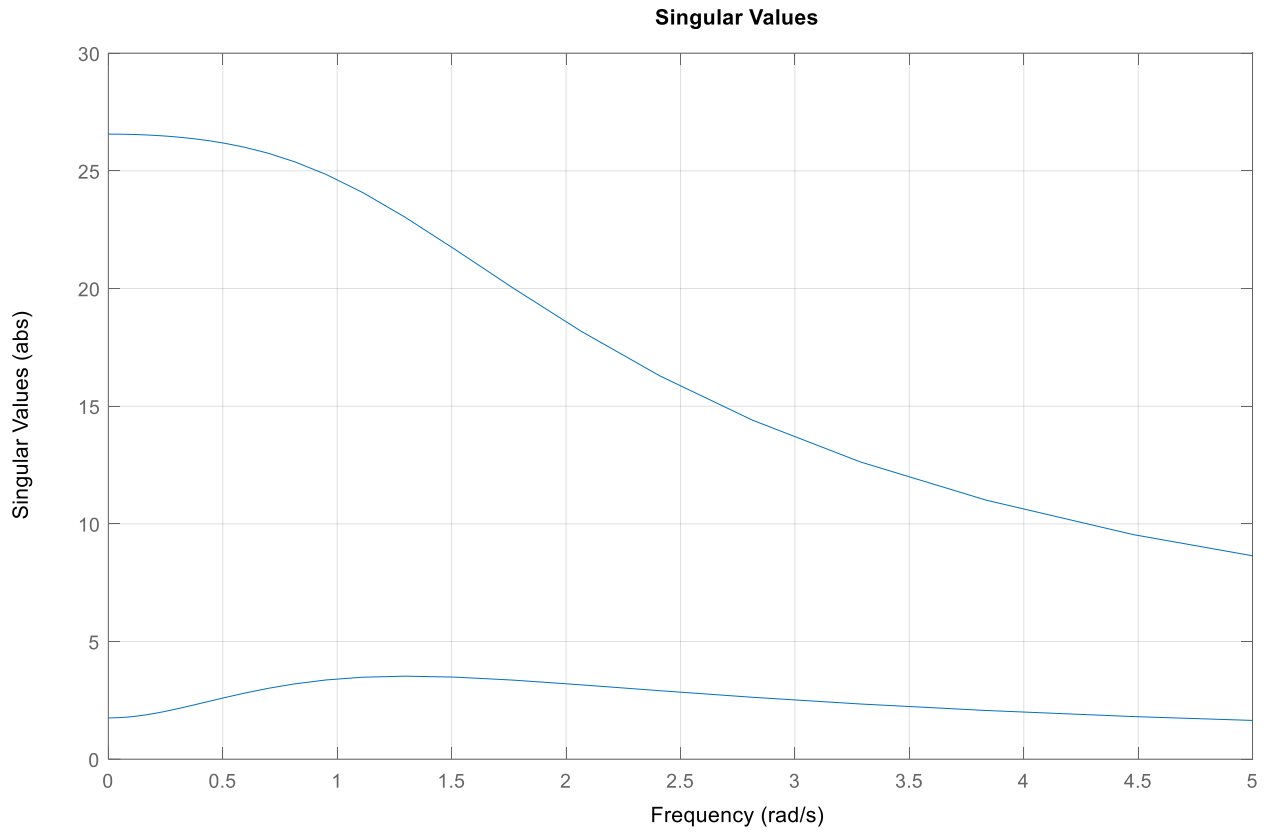


Рисунок 42 – сингулярные числа

Третье значение $\gamma = 25$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.1756 & 6.2007 \\ 6.2007 & 8.3043 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.5502 \quad -2.0761]$$

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $P > 0$:

$$A P + P A^T + B_1 B_1^T - P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} P C_2^T C_2 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 10.6755 & 7.4796 \\ 7.4796 & 19.3638 \end{bmatrix}$$

$$L = -P(I - \gamma^{-2} Q P)^{-1} (C_1 - \gamma^{-2} D_1 B_1^T Q)^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -4.3908 \\ -4.5443 \end{bmatrix}$$

Условия согласованности выполнены:

$$\lambda_{\max}(PQ) = 313.31 \leq \gamma^2 = 625$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-1.78e49s^2 + 4.501e48s + 4.911e48}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

$$W_{21} = \frac{-9.134e47s^3 - 4.696e48s^2 + 1.102e49s + 2.385e49}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

$$W_{12} = \frac{5.934e48s^2 + 1.432e49s + 4.911e48}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

$$W_{22} = \frac{1.279e48s^3 + 9.205e48s^2 + 2.025e49s + 1.403e49}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

$$W_{13} = \frac{1.187e49s^3 + 4.911e48s^2}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

$$W_{23} = \frac{-1.187e49s^2 - 2.271e49s - 7.367e48}{1.827e47s^4 + 1.158e48s^3 + 2.747e48s^2 + 2.967e48s + 1.228e48}$$

Нормы системы:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 28.8099 \quad \|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 23.9172$$

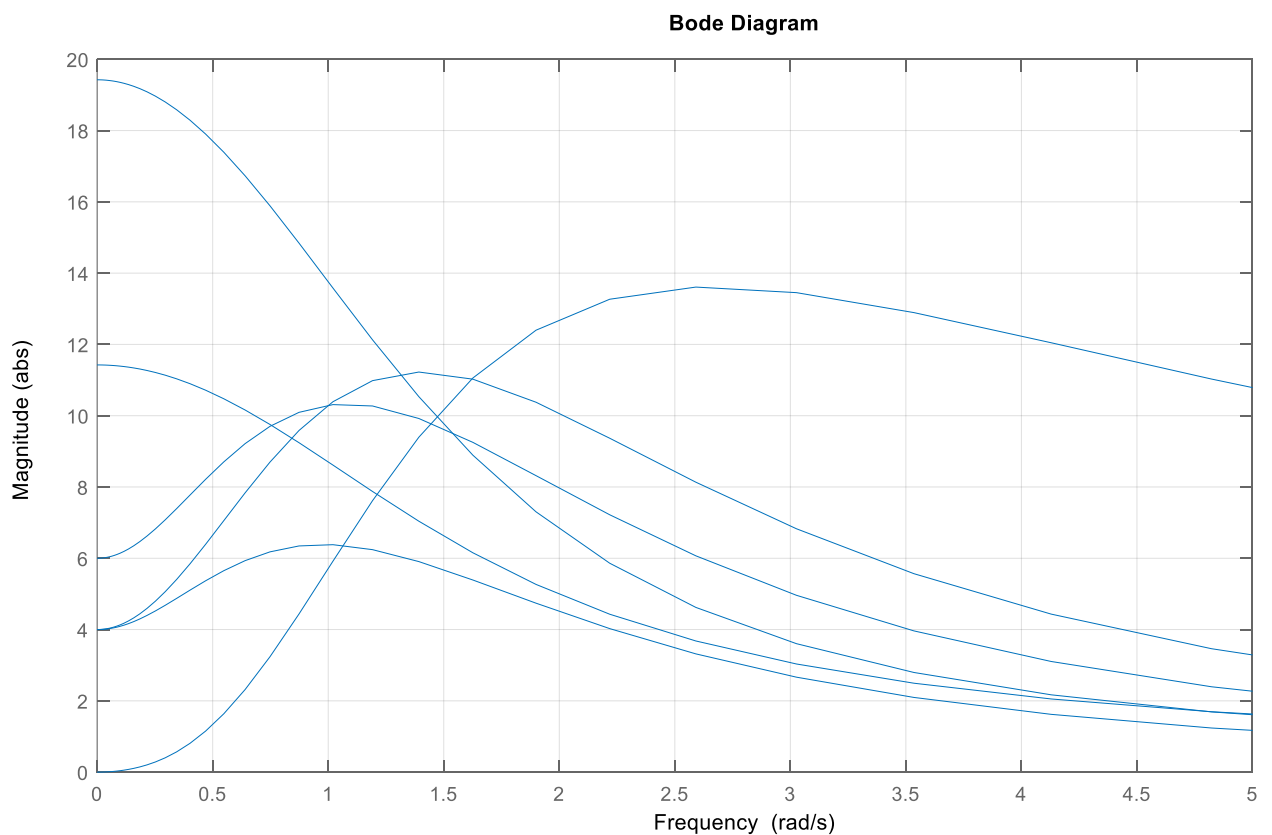


Рисунок 43 - АЧХ

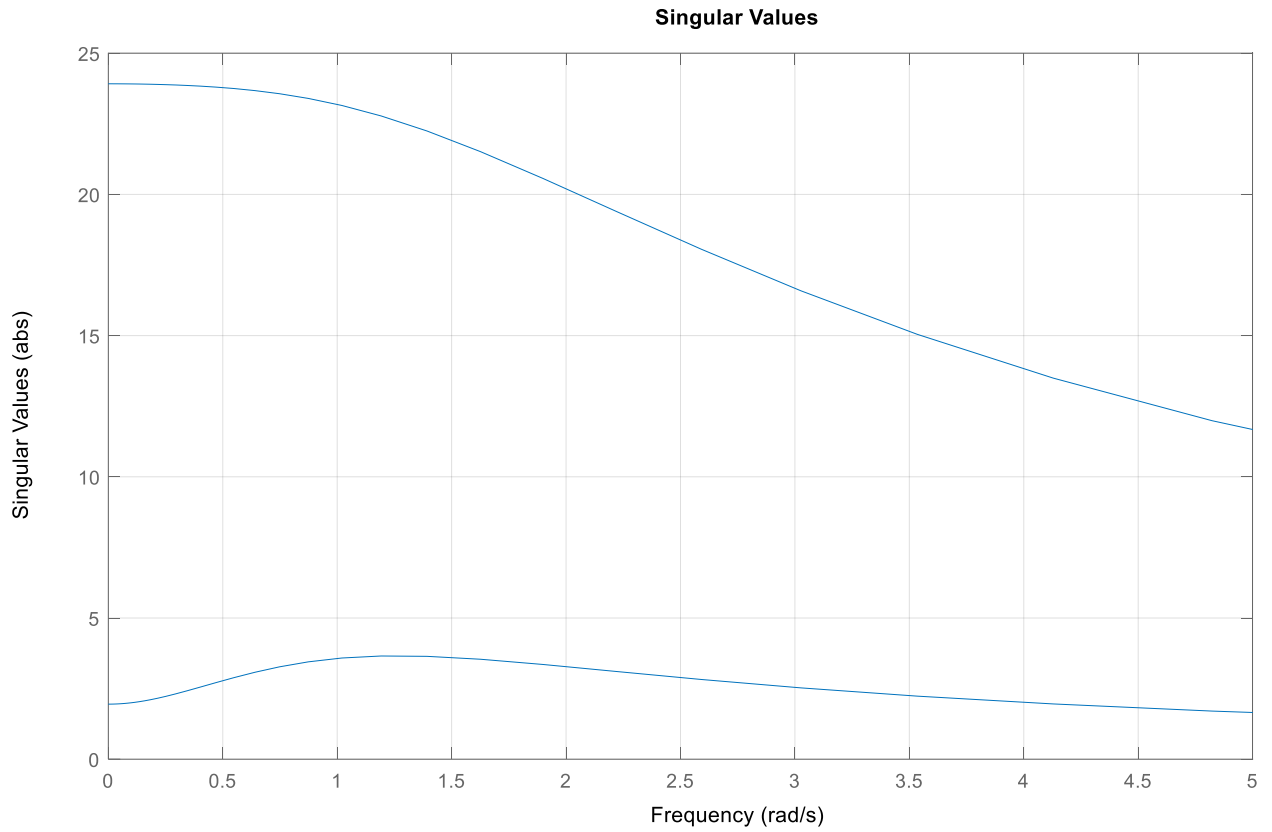


Рисунок 44 – сингулярные числа

Четвертое значение $\gamma = 19.4$:

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $Q > 0$:

$$A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.3006 & 6.3437 \\ 6.3437 & 8.5208 \end{bmatrix}$$

$$K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = [-1.5859 \quad -2.1302]$$

Из алгебраического уравнения Риккати находим матрицу $P > 0$:

$$A P + P A^T + B_1 B_1^T - P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} P C_2^T C_2 P = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 12.0731 & 9.244 \\ 9.244 & 21.5925 \end{bmatrix}$$

$$L = -P(I - \gamma^{-2} Q P)^{-1} (C_1 - \gamma^{-2} D_1 B_1^T Q)^T (D_1 D_1^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -144.3296 \\ -217.1901 \end{bmatrix}$$

Условия согласованности выполнены:

$$\lambda_{\max}(PQ) = 370.9851 \leq \gamma^2 = 376.36$$

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{-4.738e49s^2 + 9.669e48s + 1.461e49}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

$$W_{21} = \frac{-5.709e46s^3 - 8.281e48s^2 + 2.733e49s + 5.799e49}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

$$W_{12} = \frac{1.579e49s^2 + 3.889e49s + 1.461e49}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

$$W_{22} = \frac{7.993e46s^3 + 1.176e49s^2 + 3.632e49s + 2.877e49}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

$$W_{13} = \frac{3.158e49s^3 + 1.461e49s^2}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

$$W_{23} = \frac{-3.158e49s^2 - 6.199e49s - 2.192e49}{1.142e46s^4 + 1.67e48s^3 + 6.013e48s^2 + 7.896e48s + 3.653e48}$$

Нормы системы:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 163.8614 \quad \|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 19.3997$$

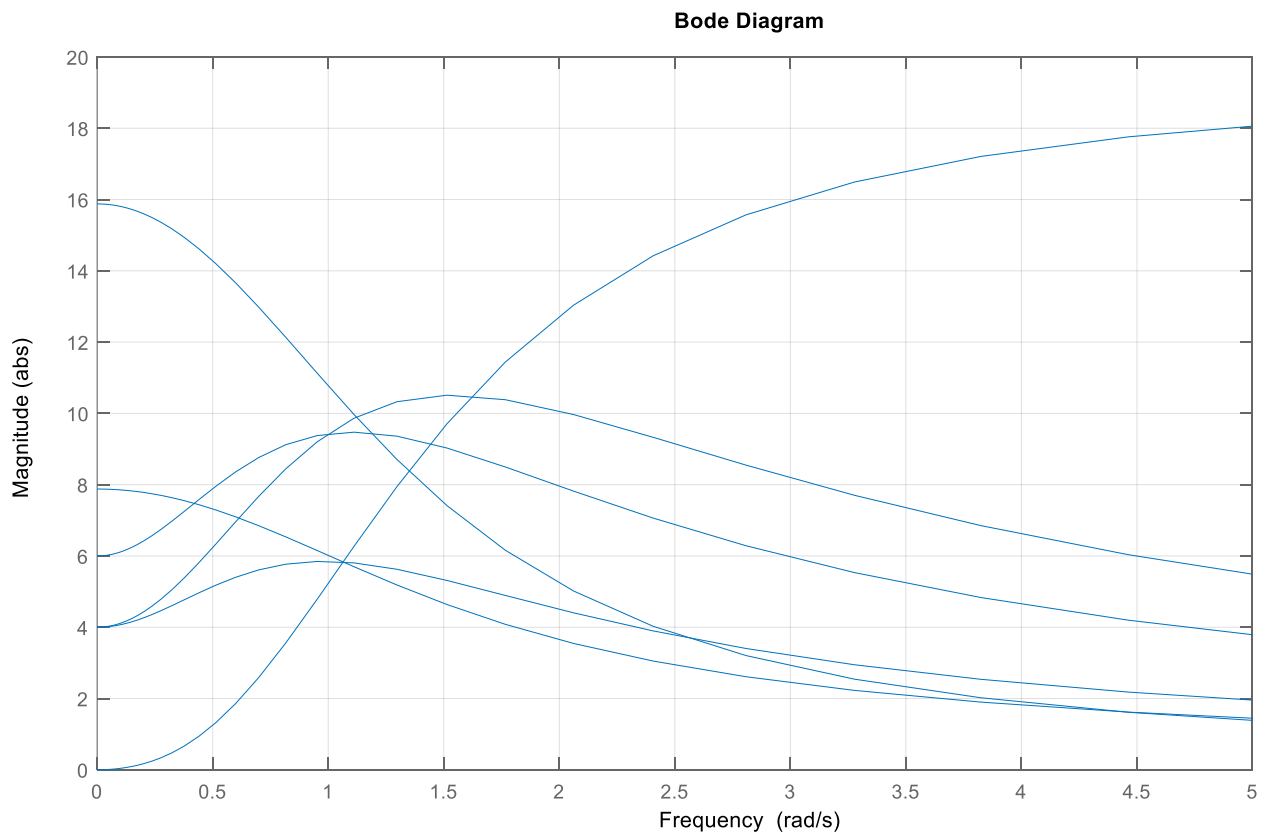


Рисунок 45 - АЧХ

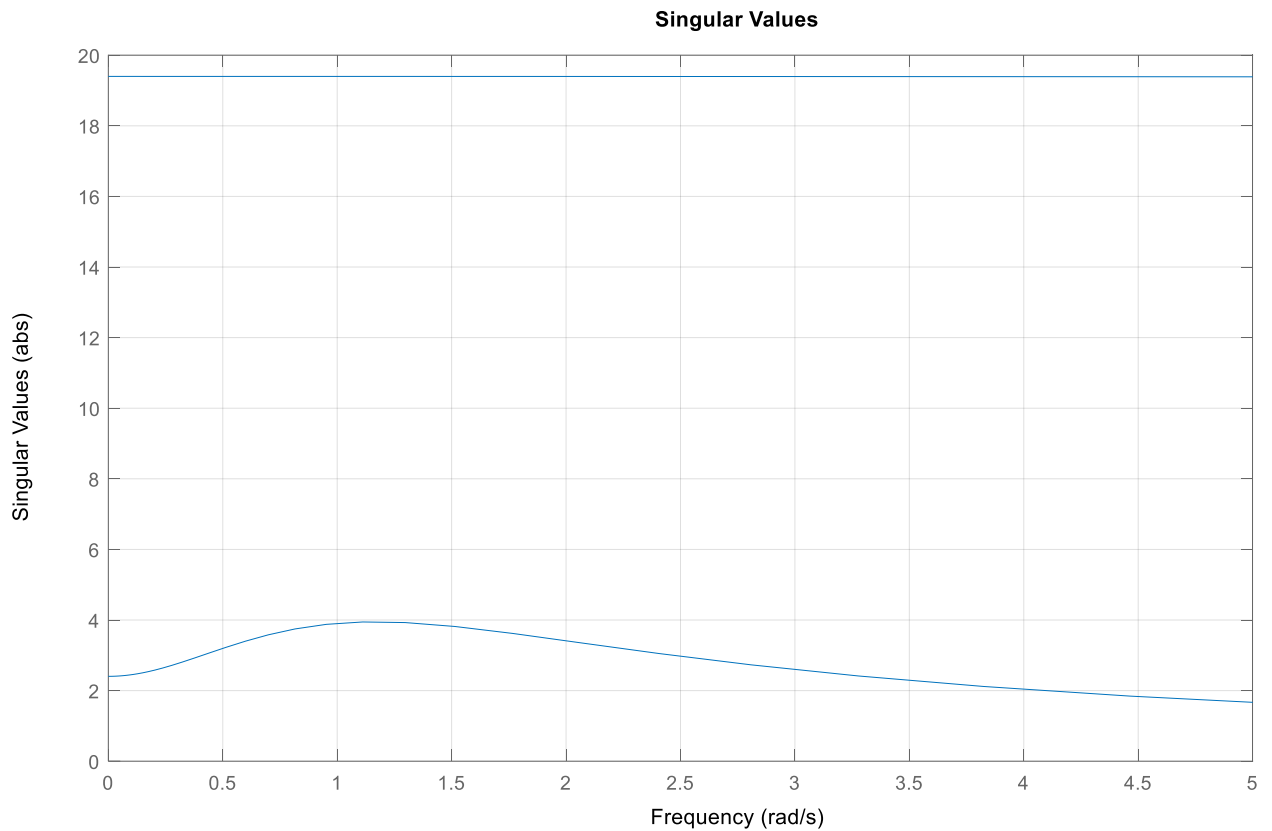


Рисунок 46 – сингулярные числа

Моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \sin \left(0.2t - \frac{\pi}{4} \right) \\ 2 \cos (0.2t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{bmatrix} w_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) \\ 2 \cos (3t) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{bmatrix}$$

В данном задании было исследовано четыре регулятора с различными параметрами γ . Наиболее сильным является четвертое ограничение, условие $\left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 19.4$ было выполнено. При уменьшении ограничения γ возникали проблемы с условием согласованности $\lambda_{\max}(PQ) \leq \gamma^2$. Оно не выполнялось.

Все же, в этом задании мы получили такой регулятор, который находится ближе всех по оптимальности критерия минимизации $\left\| W(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty}$. Данный регулятор помогает убирать наибольшее значение АЧХ, т.е. делать график сингулярных чисел более пологим, что дает почти равное усиление на всех частотах. Система становится более «прочной», меньше подвержена усилениям на определенных частотах, резонансам. И это хорошо.

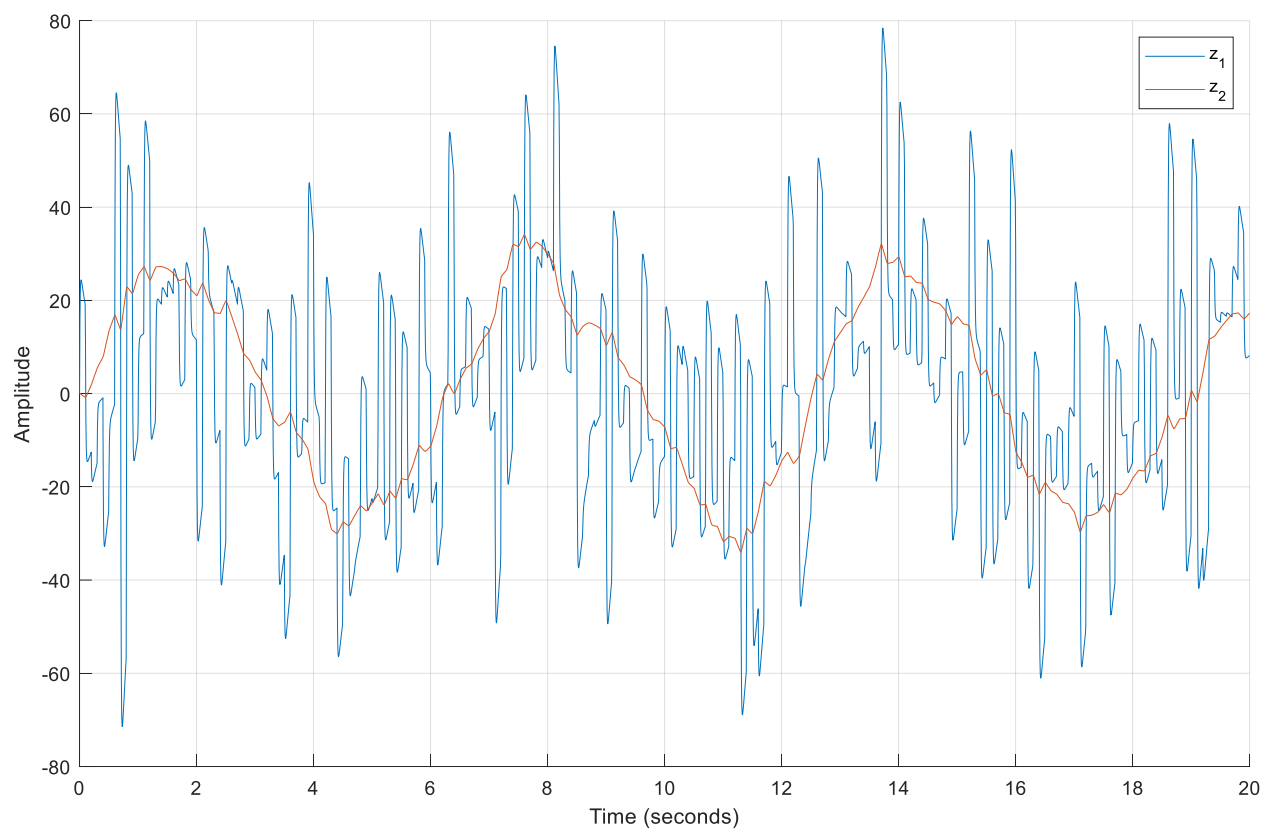


Рисунок 47 – система при возмущении w_1

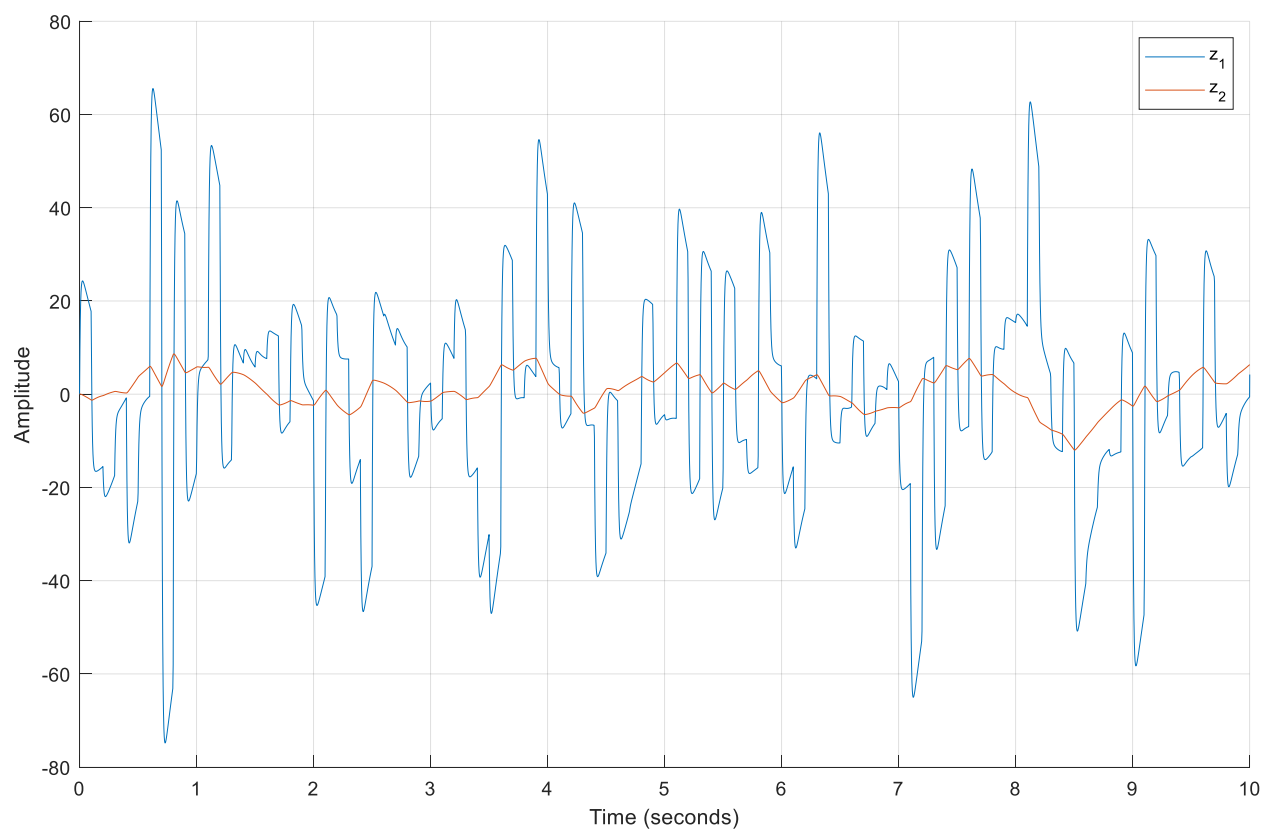


Рисунок 48 – система при возмущении w_2

Выводы

В ходе данной лабораторной работы было проведено большое исследование по синтезированию \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ регуляторов по выходу и состоянию для простой математической модели тележки. Исследовали зависимости сингулярных чисел передаточных матриц от АЧХ их компонентов. Оценивали свойства замкнутых систем при различных значениях параметра γ и при наличии внешних возмущений и помех. Выяснили, что \mathcal{H}_2 – регуляторы обеспечивают оптимальное уменьшение общих помех системы, а \mathcal{H}_∞ – регуляторы улучшают устойчивость системы к помехам на пиковых частотах, но увеличивают среднее усиление сигнала замкнутой системы. Также сравнили LQG с \mathcal{H}_2 – регулятором, а LQR с \mathcal{H}_∞ – регулятором.