

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Теория автономного управления

Лабораторная работа №2

**«Переходные процессы, свободное движение,
устойчивость»**

Выполнил студент:

Мысов М.С.

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2022

Вариант – 10

Задание 1

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

Придумываем корни характеристического уравнения, соответствующие:

1. Двум устойчивым аperiodическим модам $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -5$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$(\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 10, a_1 = 7$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} + 7\dot{y} + 10y = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-5t} \quad \dot{y}_{\text{св}}(t) = -2c_1 \cdot e^{-2t} - 5c_2 \cdot e^{-5t}$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 3$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - 5c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{8}{3} \\ c_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{8}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{5}{3} \cdot e^{-5t}$$

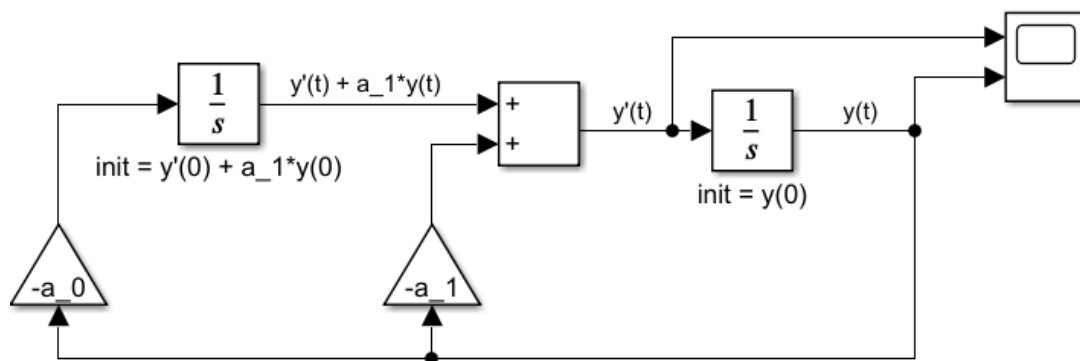


Схема 1. Моделирование свободного движения системы

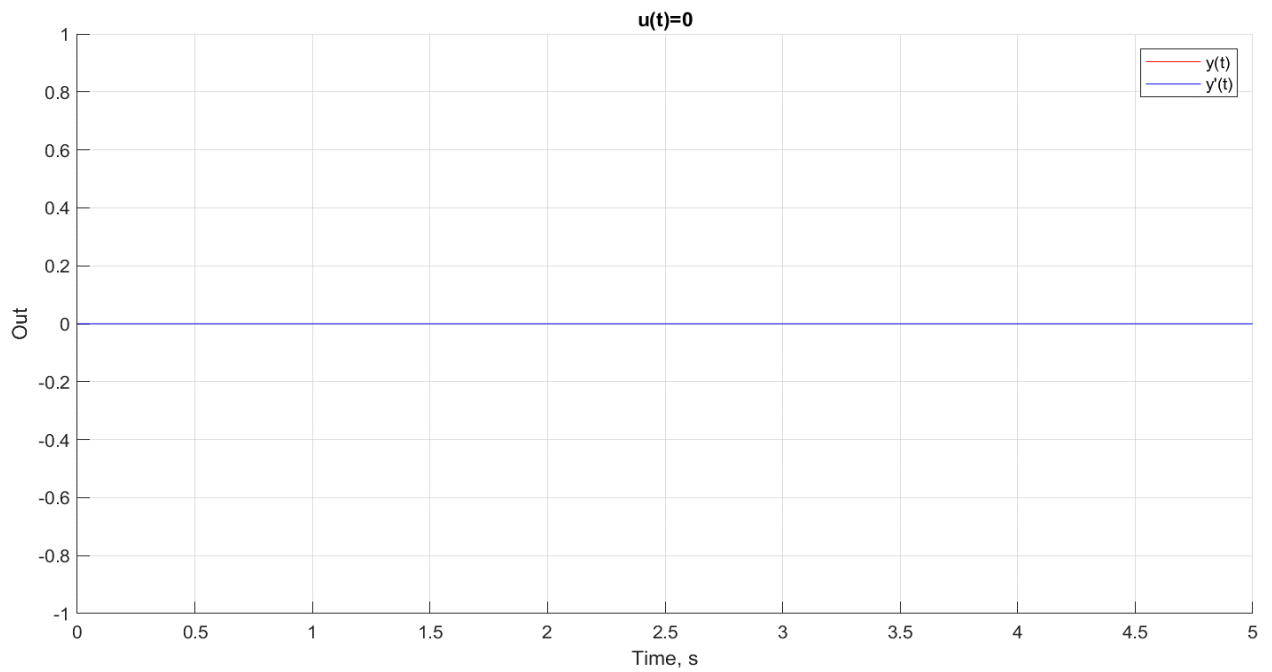


График 1. Моделирование свободного движения с нулевыми начальными условиями

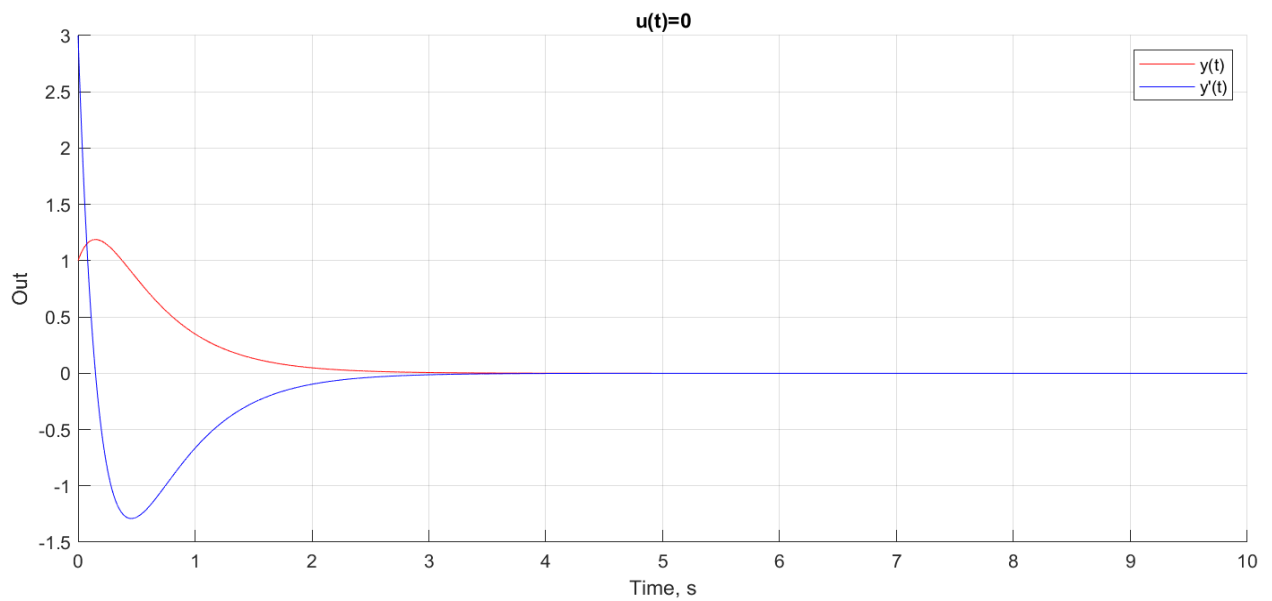


График 2. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

Так как корни характеристического полинома данной системы вещественные и отрицательные, то соответствующие моды e^{-2t} , e^{-5t} затухающие и устойчивые. Система в данном случае является асимптотически **устойчивой**, что мы и наблюдаем на графике.

2. Устойчивой и неустойчивой аperiodическим модам $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 7$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$(\lambda + 3)(\lambda - 7) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -21, a_1 = -4$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} - 4\dot{y} - 21y = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^{7t} \quad \dot{y}_{\text{св}}(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} + 7c_2 \cdot e^{7t}$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 2$; $\dot{y}(0) = 4$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -3c_1 + 7c_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = e^{-3t} + e^{7t}$$

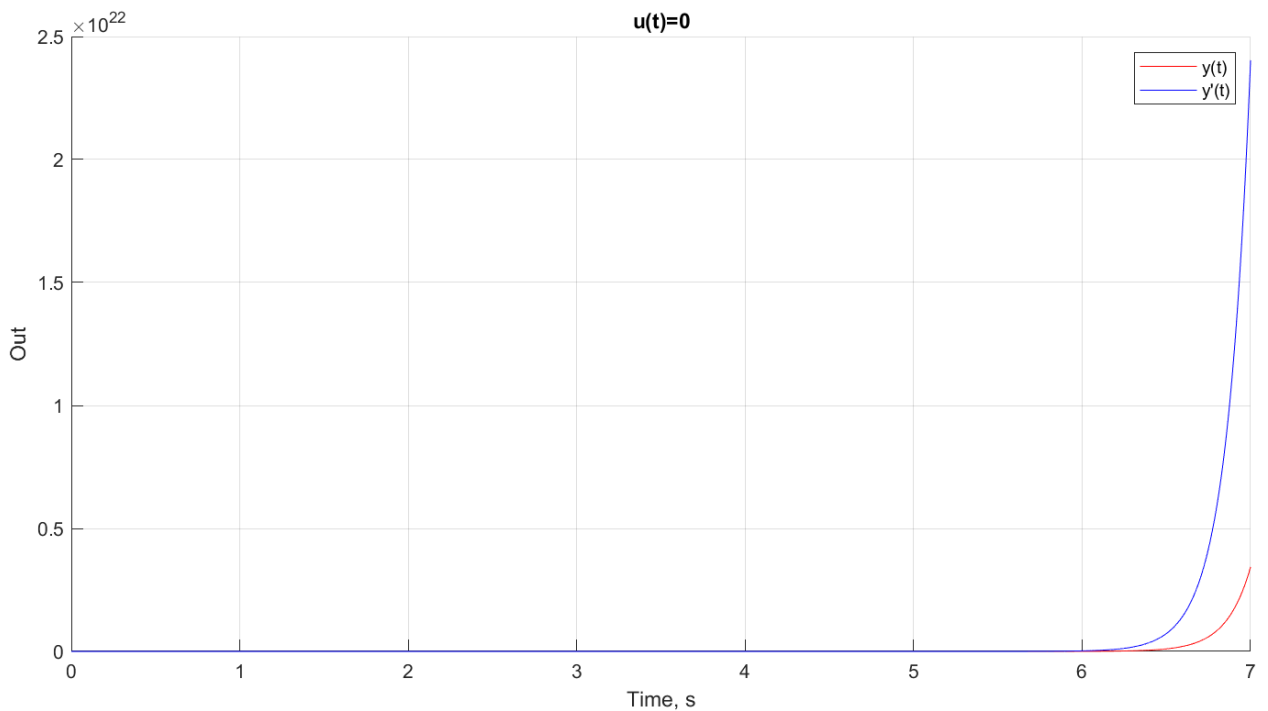


График 3. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

Корень $\lambda_1 = -3$ вещественный и отрицательный, его мода e^{-3t} затухающая и устойчивая. Но второй корень $\lambda_2 = 7$ вещественный и положительный, его мода e^{7t} растущая и неустойчивая. Из-за второй моды, можно сделать вывод, что **система в данном случае неустойчивая**, что подтверждается графиком.

3. Нейтральной и апериодической модам $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 11$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$\lambda(\lambda - 11) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0, a_1 = -11$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} - 11\dot{y} = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{11t} \quad \dot{y}_{\text{св}}(t) = 11c_2 \cdot e^{11t}$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 22$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 11c_2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{CB}(t) = -1 + 2e^{11t}$$

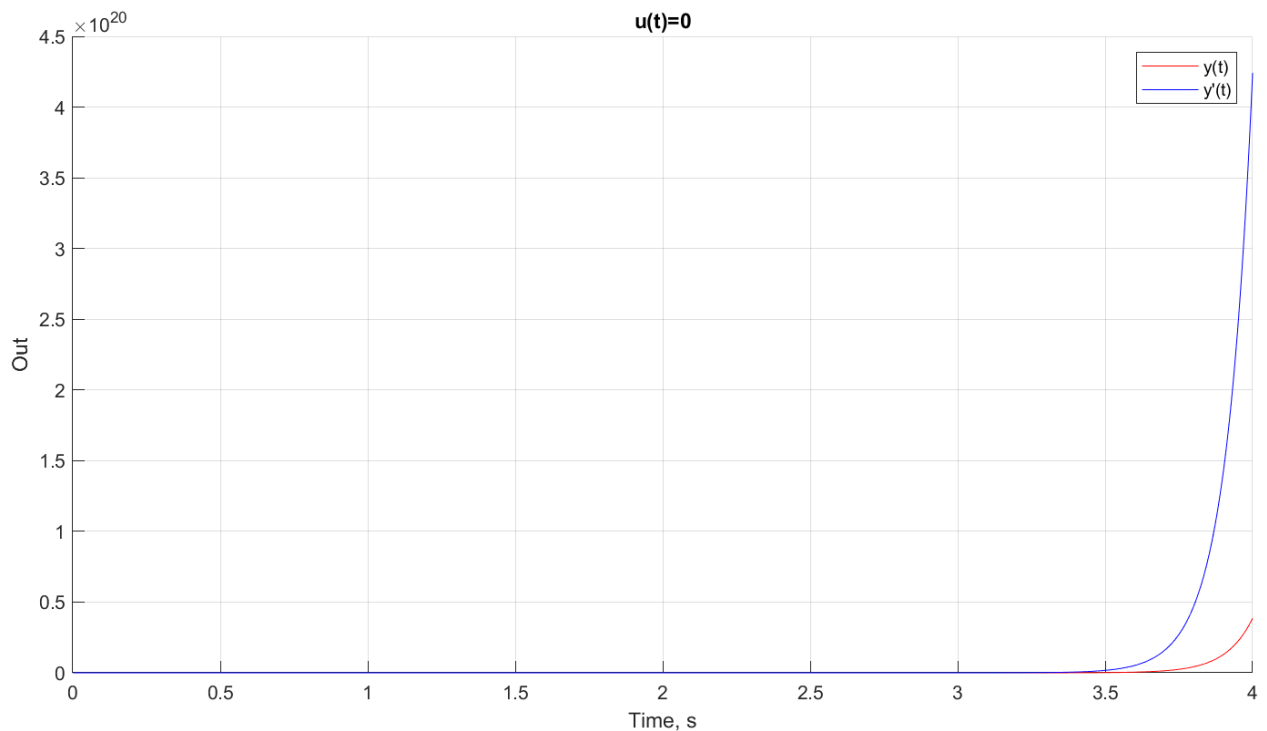


График 4. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

Корень $\lambda_1 = 0$ имеет нейтральную моду 1. А корень $\lambda_2 = 11$ вещественный и положительный, его мода e^{11t} растущая и неустойчивая. Из-за второй моды, можно сделать вывод, что **система в данном случае неустойчивая**.

4. Нейтральной и линейной модам $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$\lambda \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0, a_1 = 0$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} = 0$.

$$y_{CB}(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t \quad \dot{y}_{CB}(t) = c_2$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 3$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_{CB}(t) = 1 + 3t$$

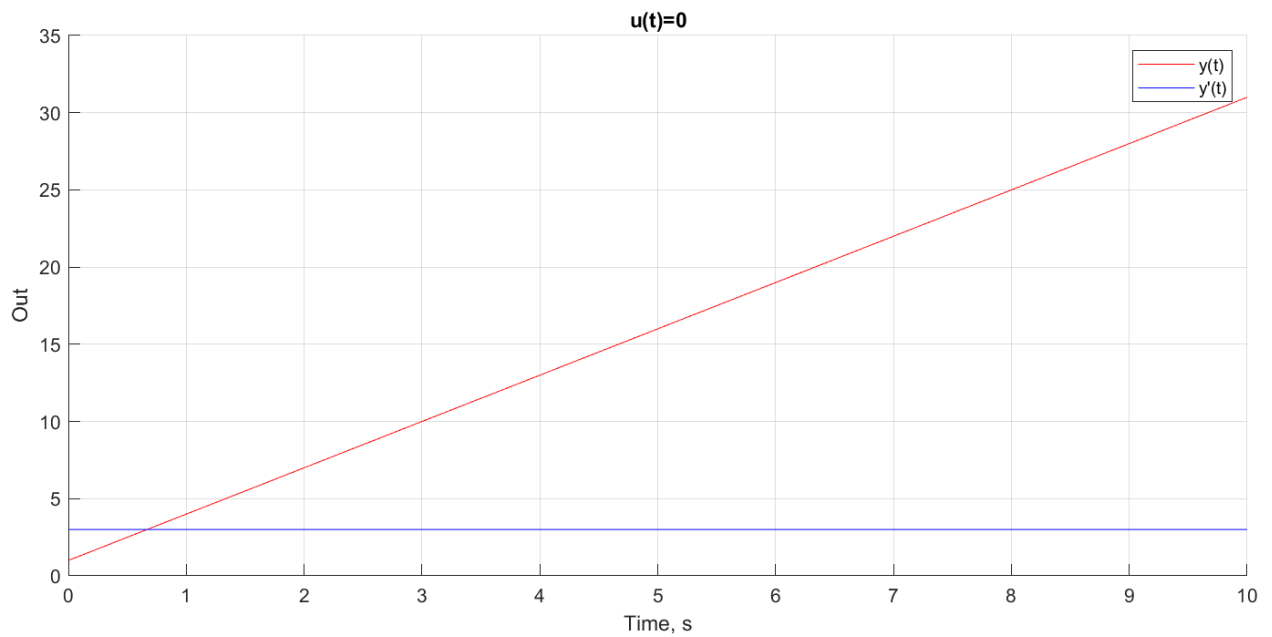


График 5. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

В этой ситуации система имеет кратные корни с нулевой вещественной частью. Система неустойчивая.

5. Паре консервативных мод $\lambda_1 = 4i$; $\lambda_2 = -4i$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$(\lambda - 4i)(\lambda + 4i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 16, a_1 = 0$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} + 16y = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot \sin 4t + c_2 \cdot \cos 4t \quad \dot{y}_{\text{св}}(t) = 4c_1 \cdot \cos 4t - 4c_2 \cdot \sin 4t$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 3$; $\dot{y}(0) = 8$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_2 = 3 \\ 4c_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{7}{4} \cdot \sin 4t + \frac{5}{4} \cdot \cos 4t$$

В этой ситуации корни чисто мнимые и имеют консервативные моды $\sin 4t$ и $\cos 4t$.

Система находится в колебательной границе устойчивости.

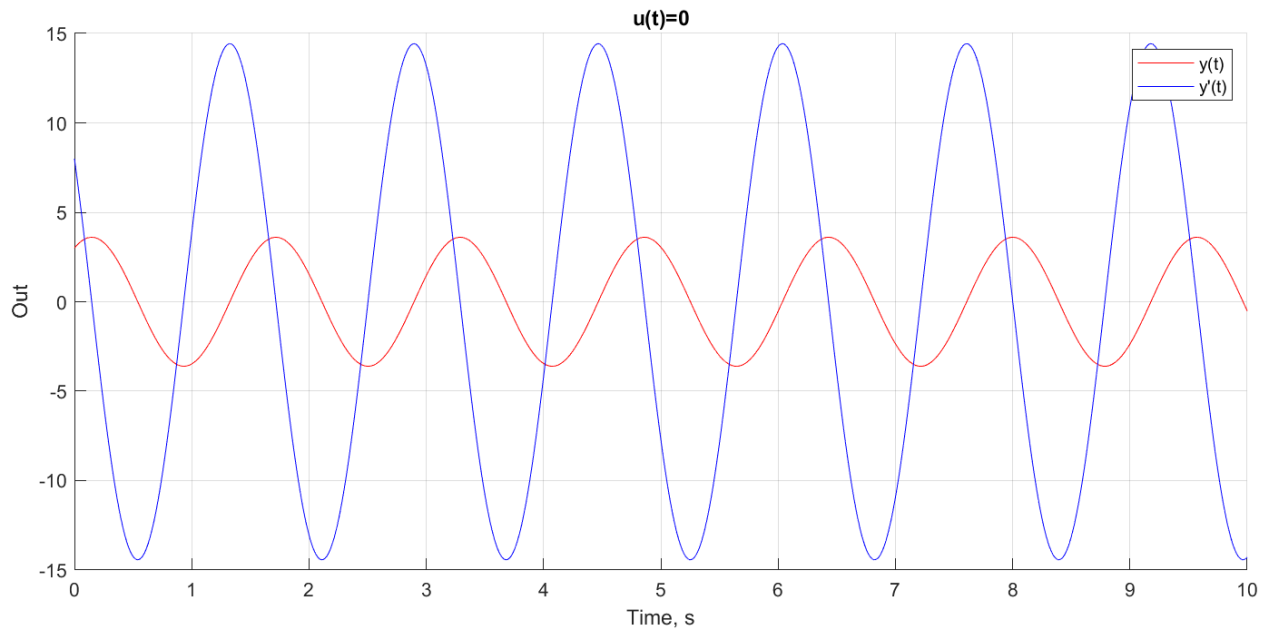


График 6. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

6. Паре устойчивых колебательных мод $\lambda_{1,2} = -6 \pm 2i$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$(\lambda + 6 + 2i)(\lambda + 6 - 2i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 12\lambda + 40 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 40, a_1 = 12$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} + 12\dot{y} + 40y = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot e^{-6t} \cdot \sin 2t + c_2 \cdot e^{-6t} \cdot \cos 2t$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = e^{-6t}((6c_1 + 2c_2) \cdot \sin 2t + (6c_2 - 2c_1) \cdot \cos 2t)$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 2$; $\dot{y}(0) = 4$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_2 = 2 \\ 6c_2 - 2c_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = 4 \cdot e^{-6t} \cdot \sin 2t + 2 \cdot e^{-6t} \cdot \cos 2t$$

Корни комплексно-сопряженные и вещественная часть у них отрицательная, график выглядит как затухающая экспонента. Моды устойчивые колебательные. Система тоже устойчивая.

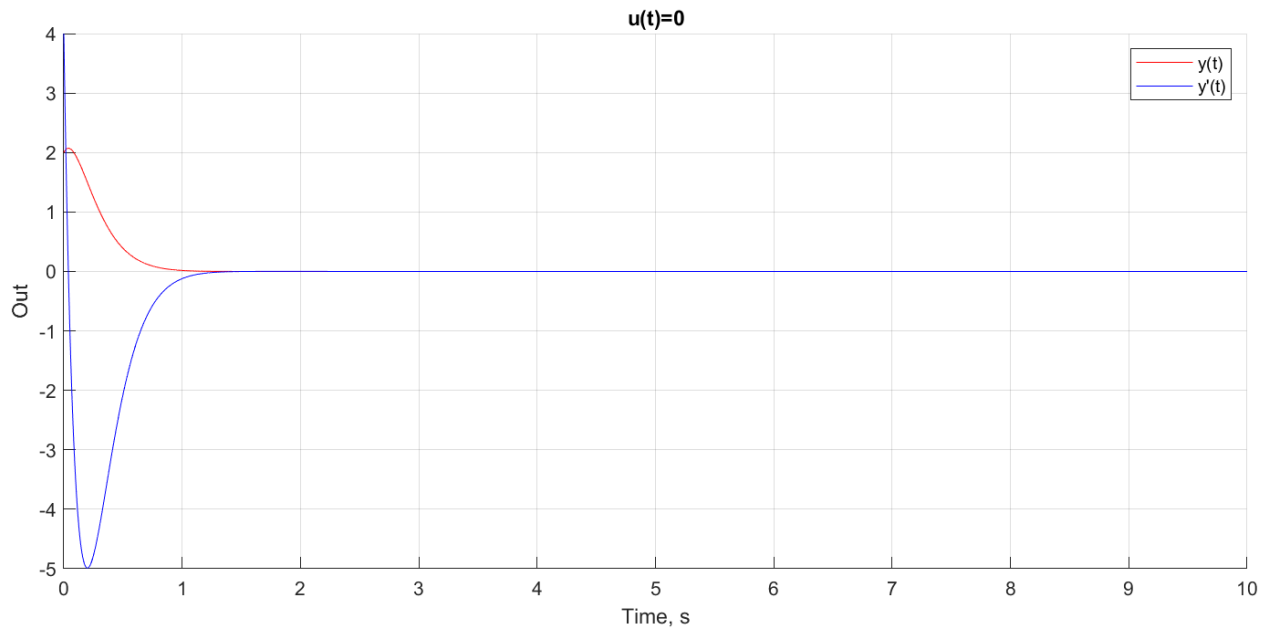


График 7. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

7. Паре неустойчивых колебательных $\lambda_{1,2} = 7 \pm 4i$.

Вычисляем коэффициенты a_0, a_1 :

$$(\lambda - 7 + 4i)(\lambda - 7 - 4i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 65 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 65, a_1 = -14$$

Находим уравнение, описывающее свободное движение системы $\ddot{y} - 14\dot{y} + 65y = 0$.

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 \cdot e^{7t} \cdot \sin 4t + c_2 \cdot e^{7t} \cdot \cos 4t$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = e^{7t}((7c_1 - 4c_2) \cdot \sin 4t + (4c_1 + 7c_2) \cdot \cos 4t)$$

Используя выбранные начальные условия ($y(0) = 5$; $\dot{y}(0) = 7$), найдем c_1, c_2 .

$$\begin{cases} c_2 = 5 \\ 4c_1 + 7c_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -7 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = -7 \cdot e^{7t} \cdot \sin 4t + 5 \cdot e^{7t} \cdot \cos 4t$$

Корни комплексно-сопряженные, но вещественная часть в этом случае положительная, график выглядит как растущая экспонента. Моды неустойчивые колебательные. Система тоже неустойчивая.

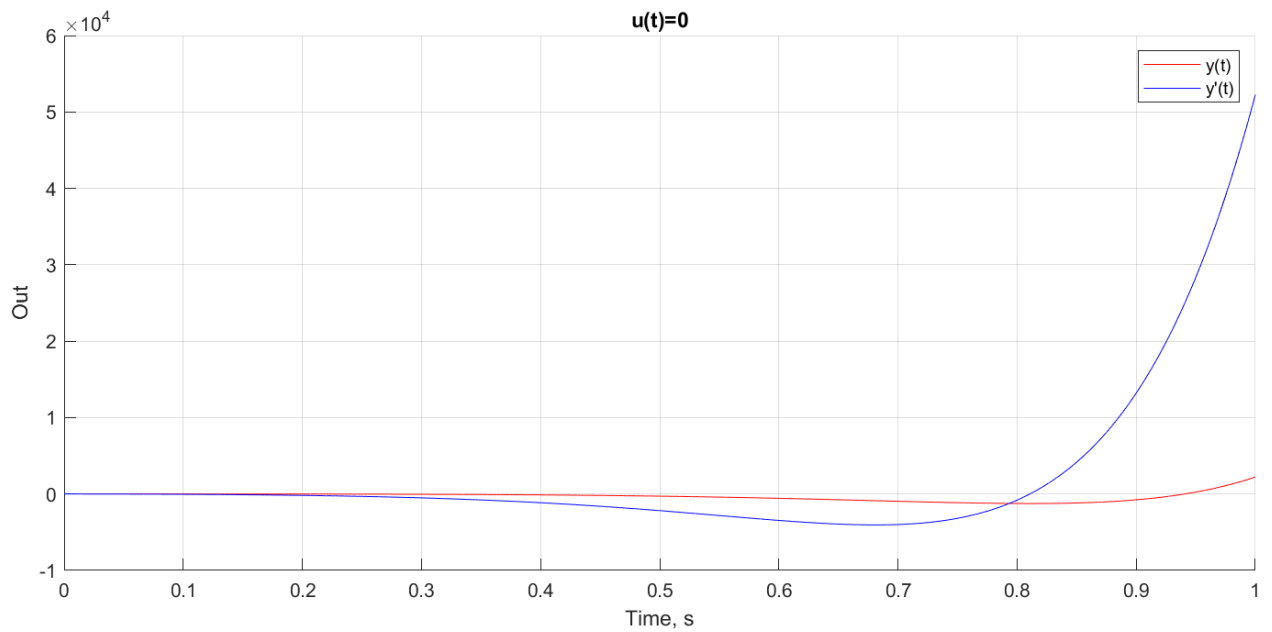


График 8. Моделирование свободного движения системы с ненулевыми начальными условиями

Задание 2

1. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$

$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$; $y(0) = -1, \dot{y}(0) = -6$; $y(0) = -0.5, \dot{y}(0) = 5$

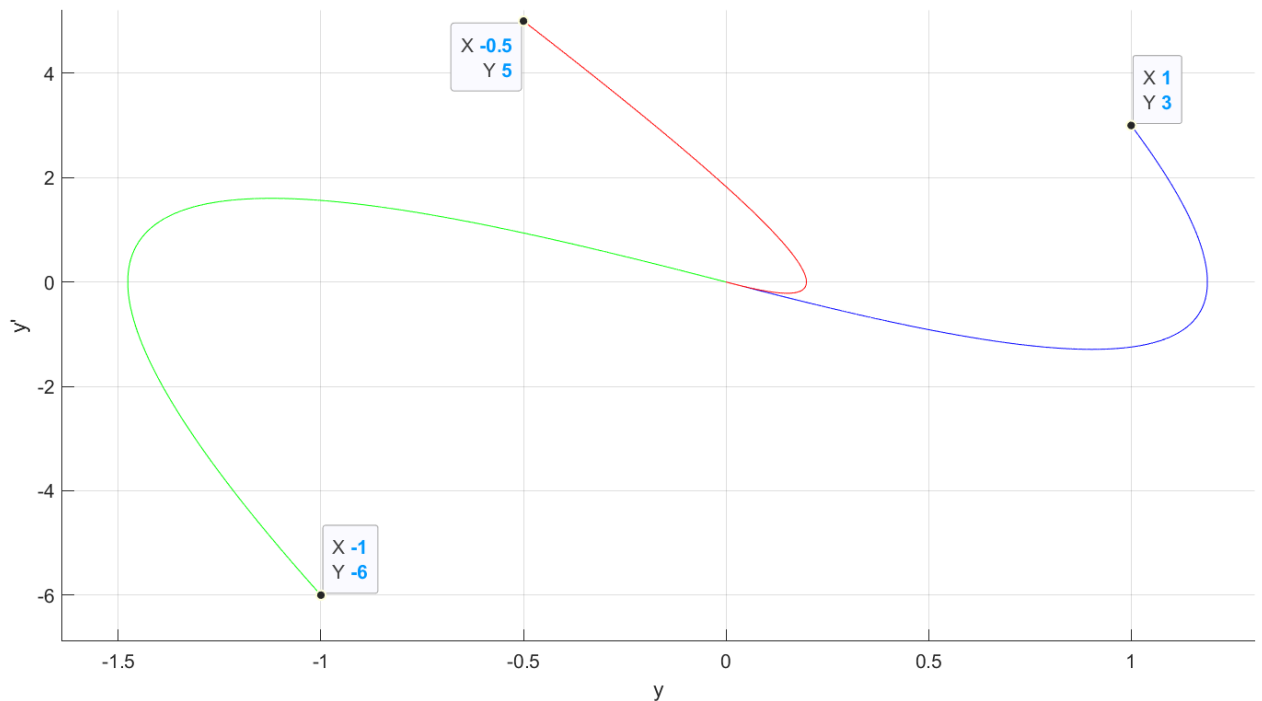


График 9. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 1

Так как **система устойчивая**, то все **траектории сходятся** в нуль.

2. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 7$

$y(0) = 2, \dot{y}(0) = 4$; $y(0) = -5, \dot{y}(0) = 20$; $y(0) = -5, \dot{y}(0) = 10$

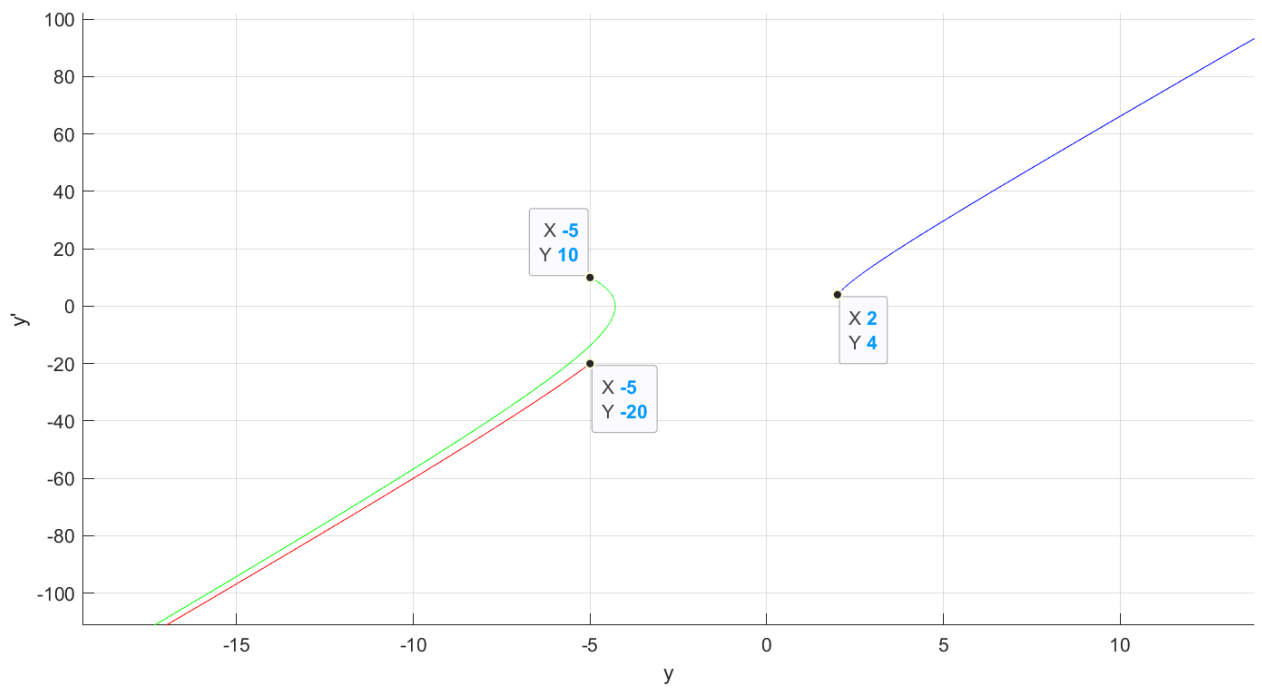


График 10. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 2

Так как **система неустойчивая**, то все траектории не сходятся в нуль.

3. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 11$

$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 22; y(0) = -20, \dot{y}(0) = -50; y(0) = 40, \dot{y}(0) = -98$

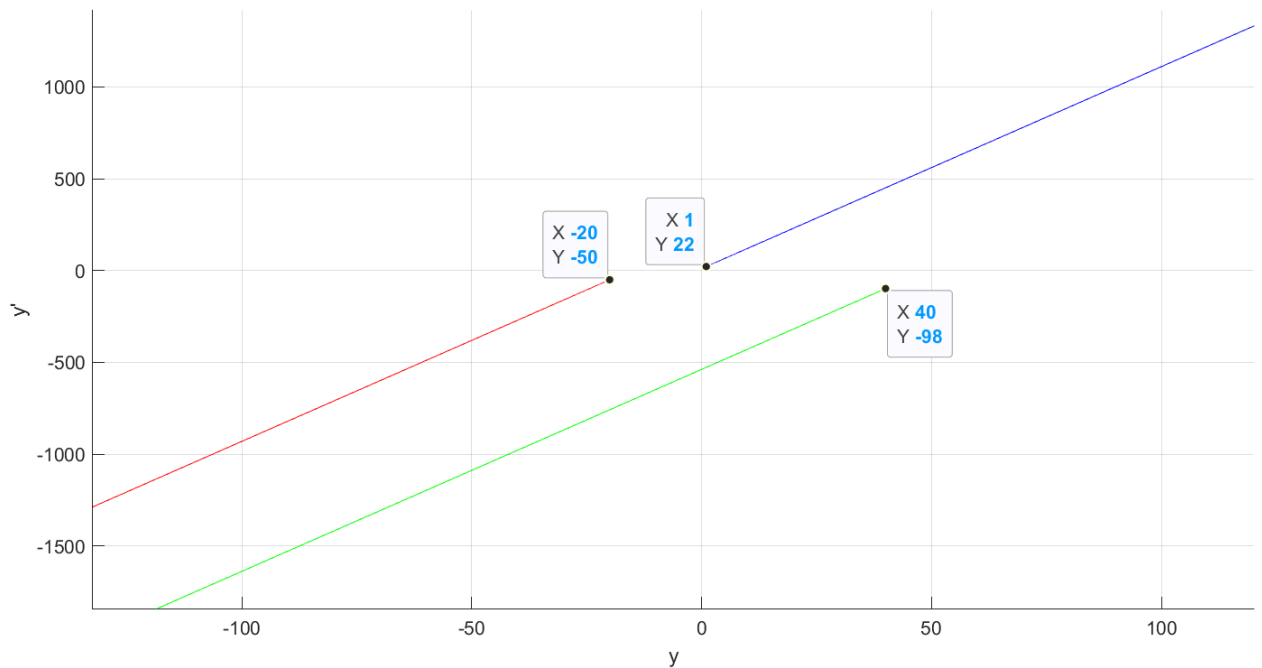


График 11. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 3

Так как **система неустойчивая**, то все траектории не сходятся в нуль.

4. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$y(0) = -6, \dot{y}(0) = 7; y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3; y(0) = -4, \dot{y}(0) = -5$

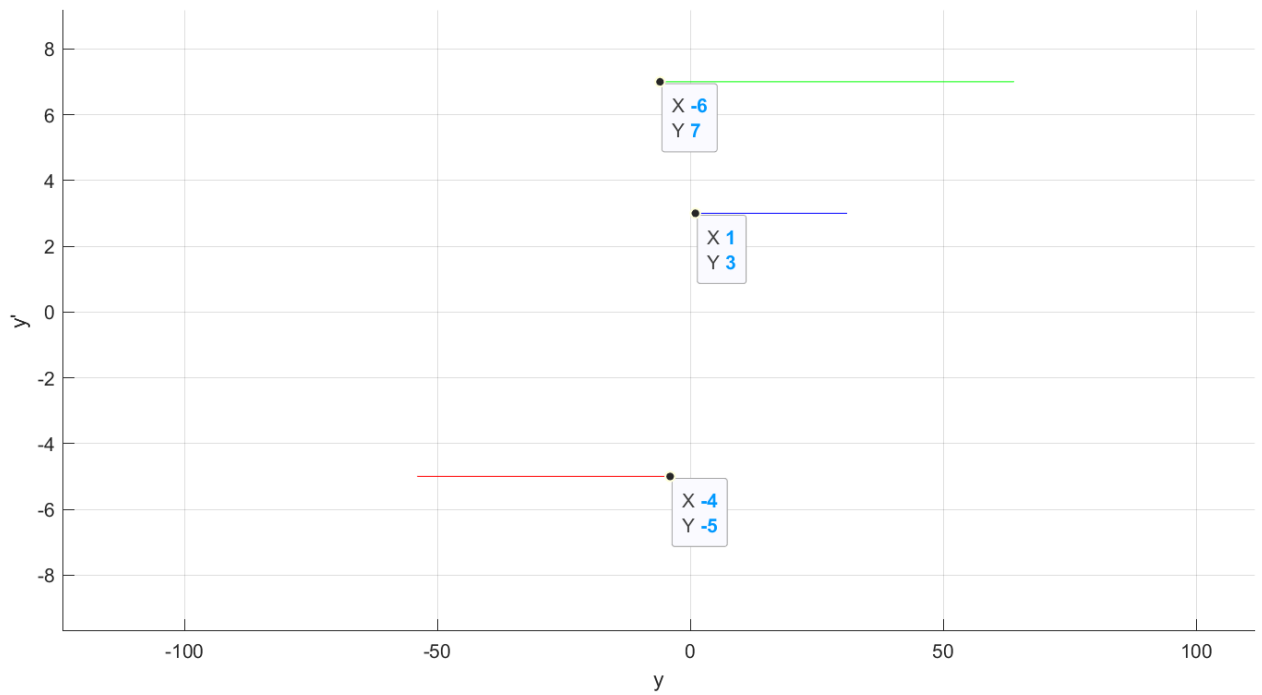


График 12. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 4

Так как **система неустойчивая**, то все **траектории не сходятся** в нуль. И находятся параллельно Ох, потому что $\dot{y}_{св}(t) = c_2$, т.е. равняется константе.

5. $\lambda_1 = 4i$; $\lambda_2 = -4i$

$y(0) = 3, \dot{y}(0) = 8$; $y(0) = -4, \dot{y}(0) = -2$; $y(0) = -9, \dot{y}(0) = 6$

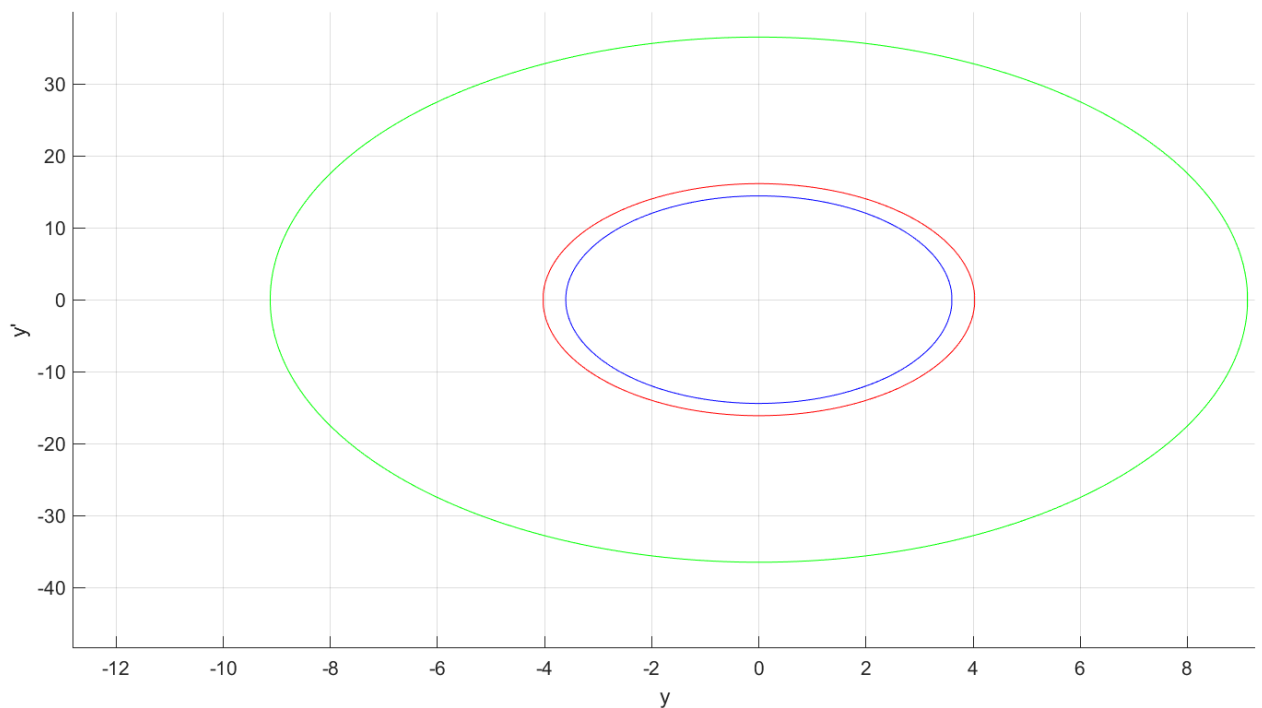


График 13. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 5

Система находится в колебательной границе устойчивости. Фазовая траектория замкнута в виде овала. При увеличении модуля как чисто мнимых чисел, так и начальных условий, увеличивается и радиус.

6. $\lambda_1 = -3 + 19i$; $\lambda_2 = -3 - 19i$

$y(0) = -4, \dot{y}(0) = -5$; $y(0) = -2, \dot{y}(0) = 10$; $y(0) = 2, \dot{y}(0) = 4$

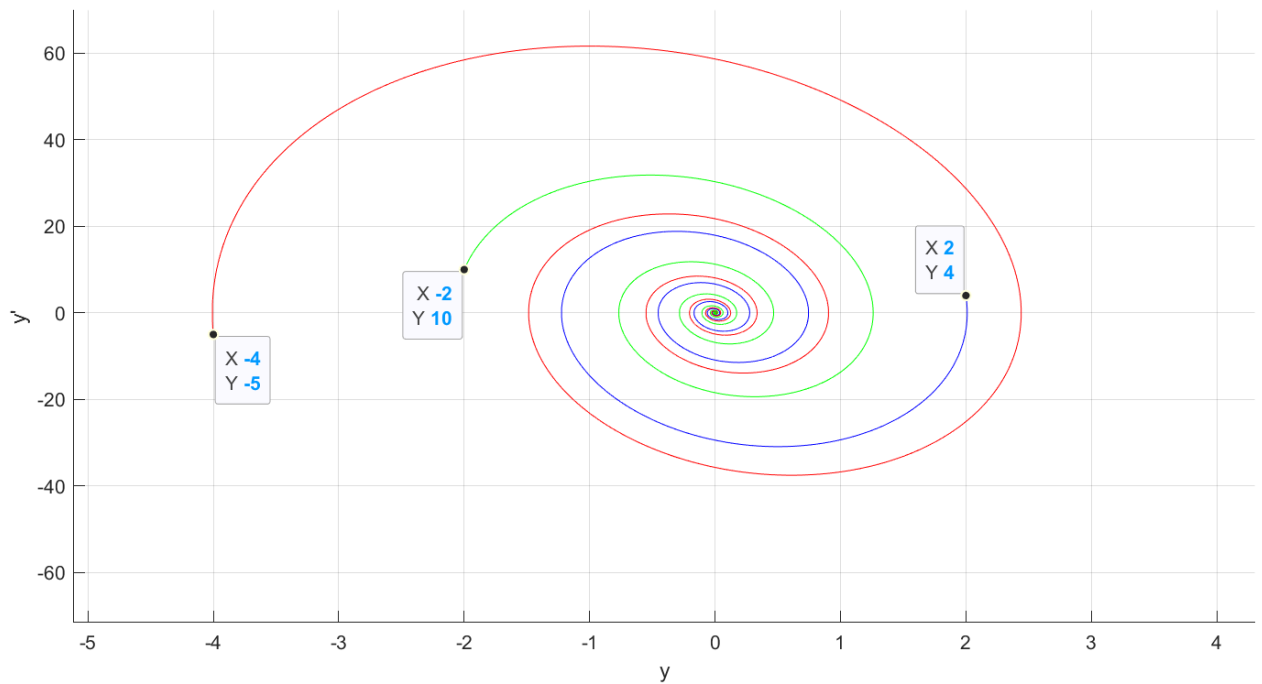


График 14. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 6

На данном графике **система устойчивая** и сходится в нуль. Отношение мнимой части к вещественной будет влиять на «закрученность» системы. Чем отношение выше, тем система более «закрученная».

7. $\lambda_1 = 2 + 13i$; $\lambda_2 = 2 - 13i$

$y(0) = -2, \dot{y}(0) = 2$; $y(0) = 5, \dot{y}(0) = 7$; $y(0) = 20, \dot{y}(0) = 25$

На данном графике **система неустойчивая** и расходится. Здесь отношение мнимой части к вещественной также влияет на «закрученность» системы.

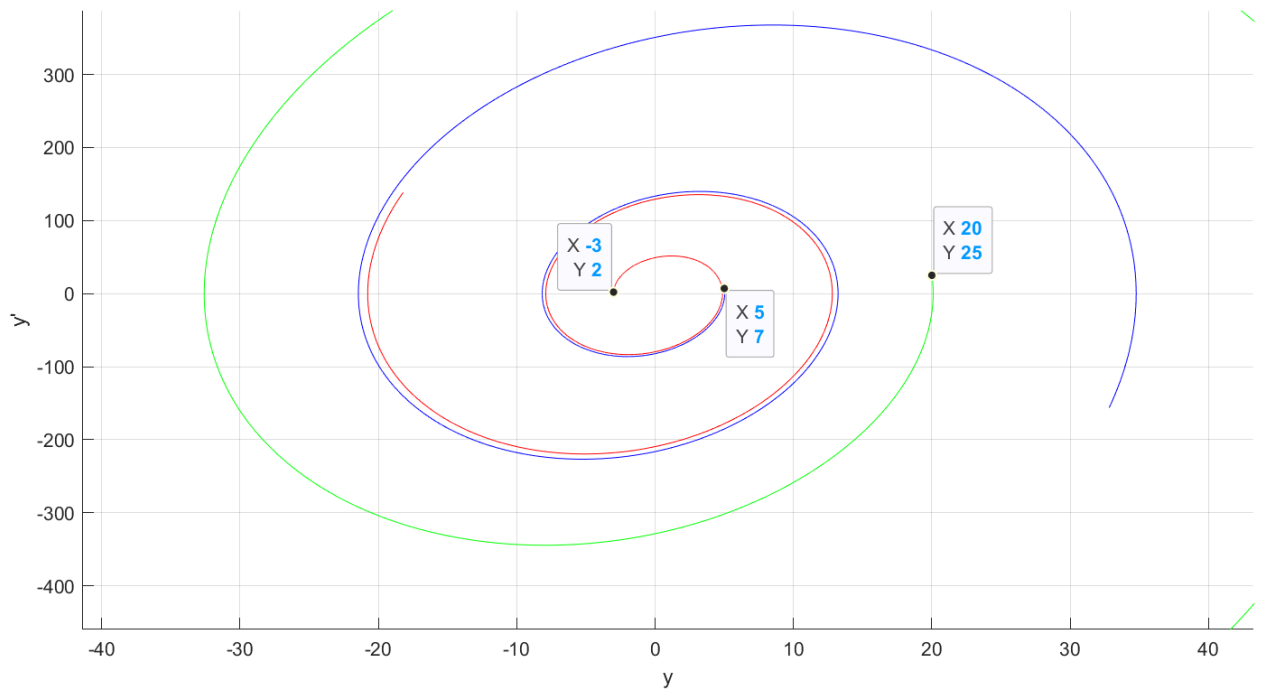


График 15. Фазовая траектория $y'(y)$ для системы 7

Задание 3

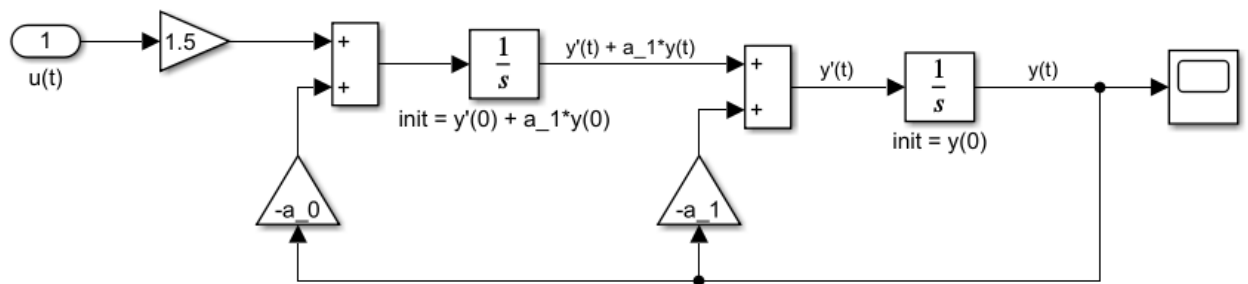


Схема 2. Моделирование полного движения системы

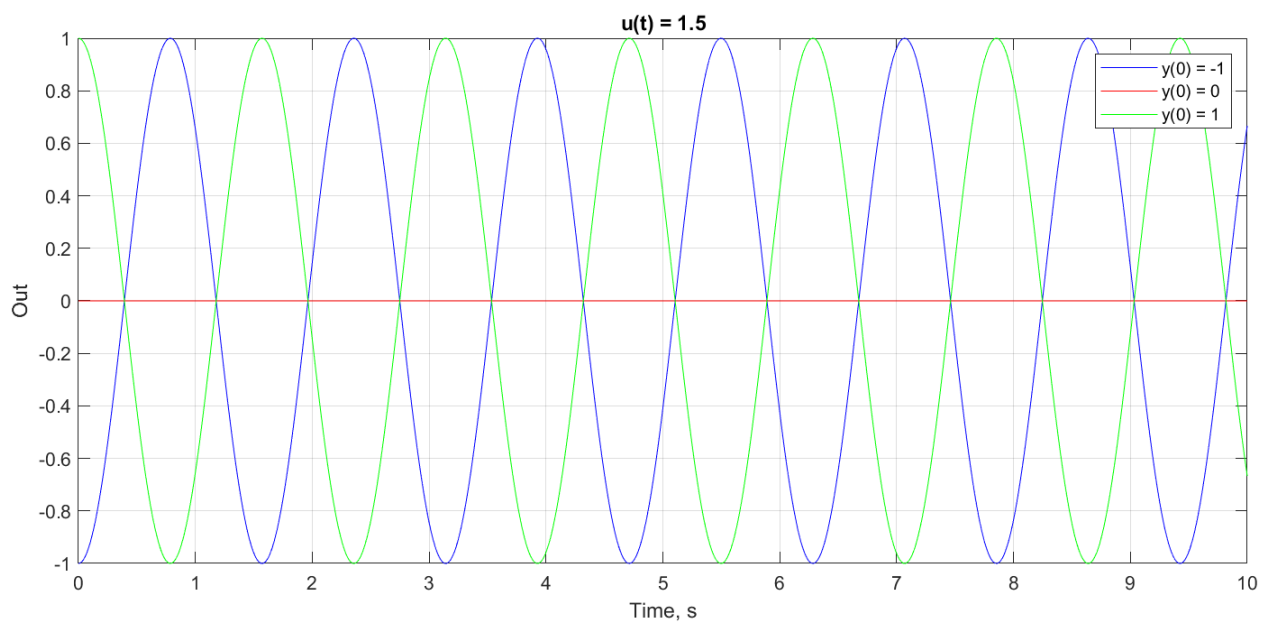


График 16. Выходные сигналы системы, которая находится в колебательной границе

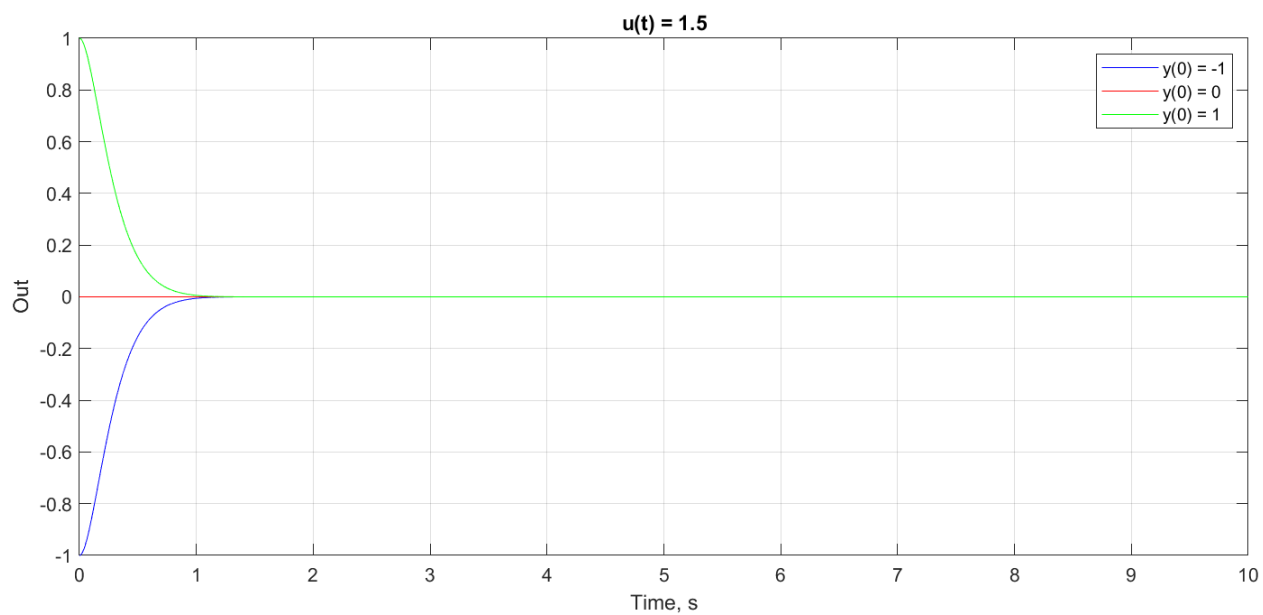


График 17. Выходные сигналы устойчивой системы

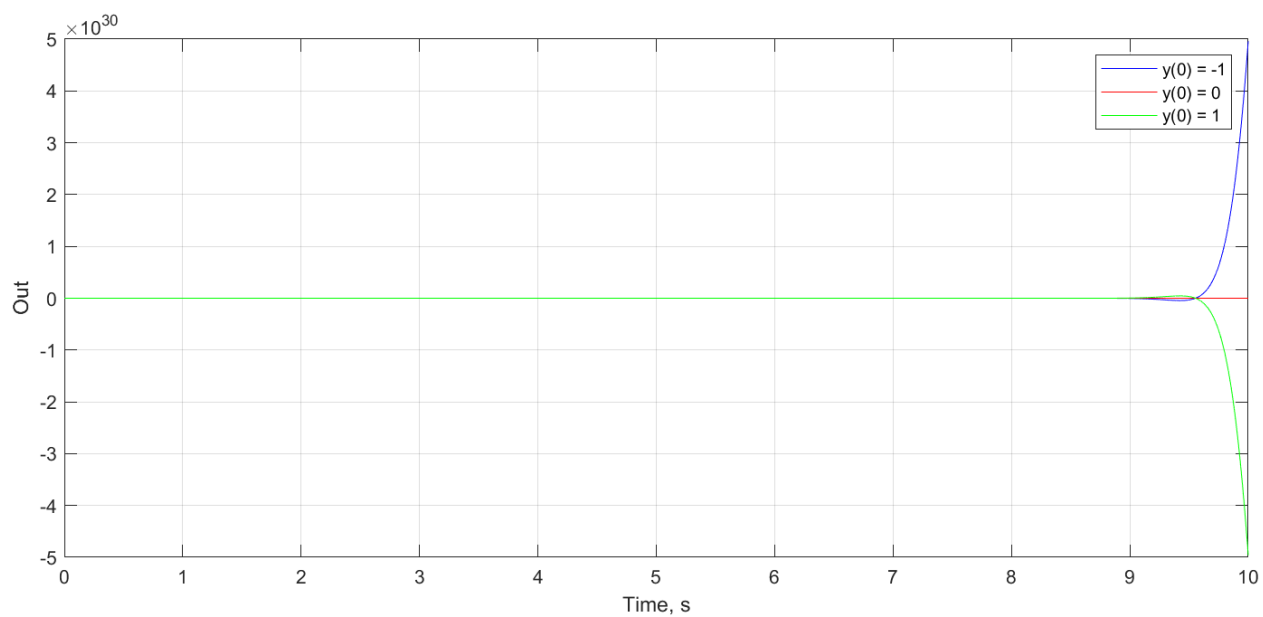


График 18. Выходные сигналы неустойчивой системы

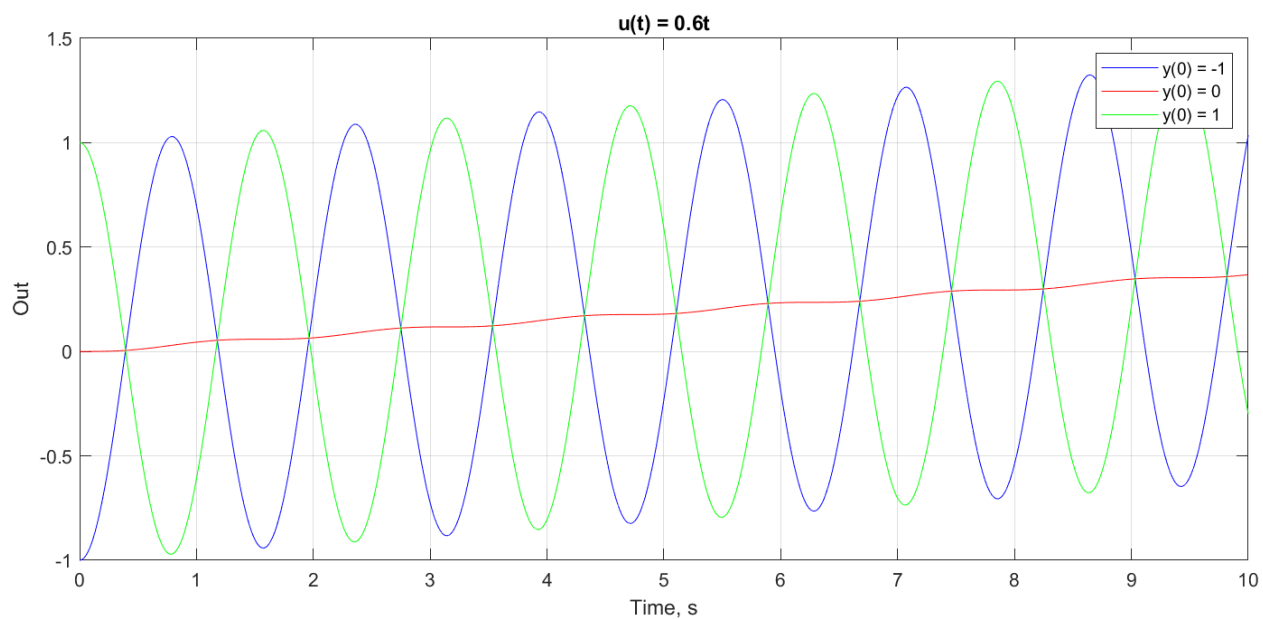


График 19. Выходные сигналы системы, которая находится в колебательной границе

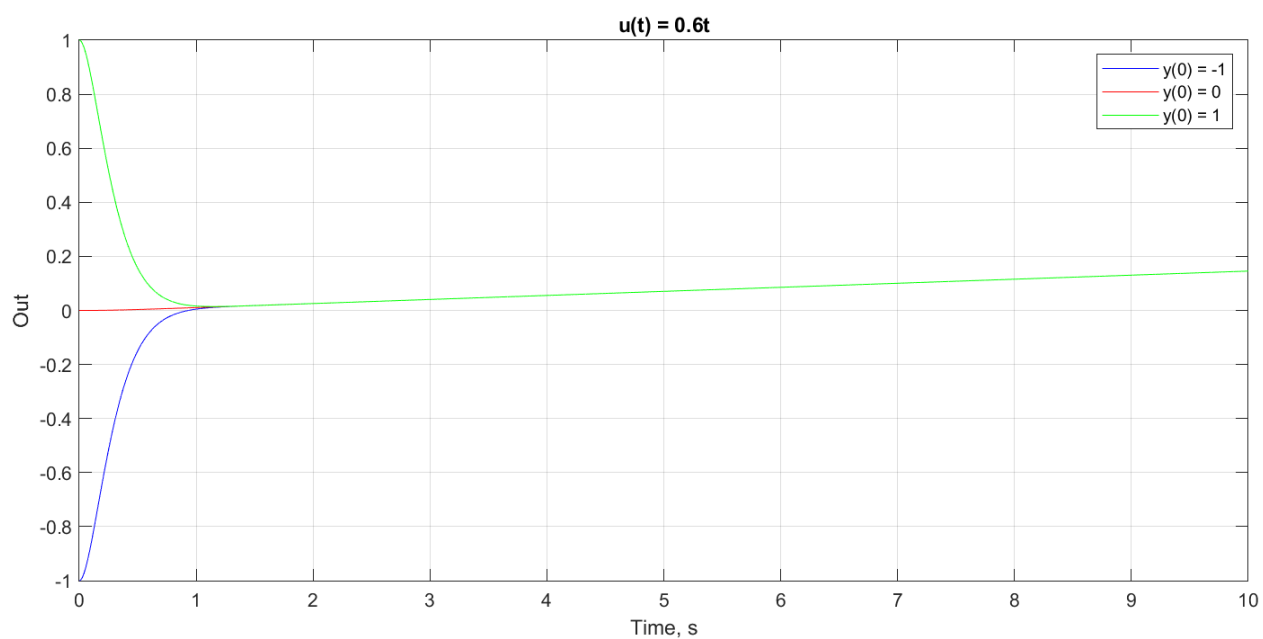


График 20. Выходные сигналы устойчивой системы

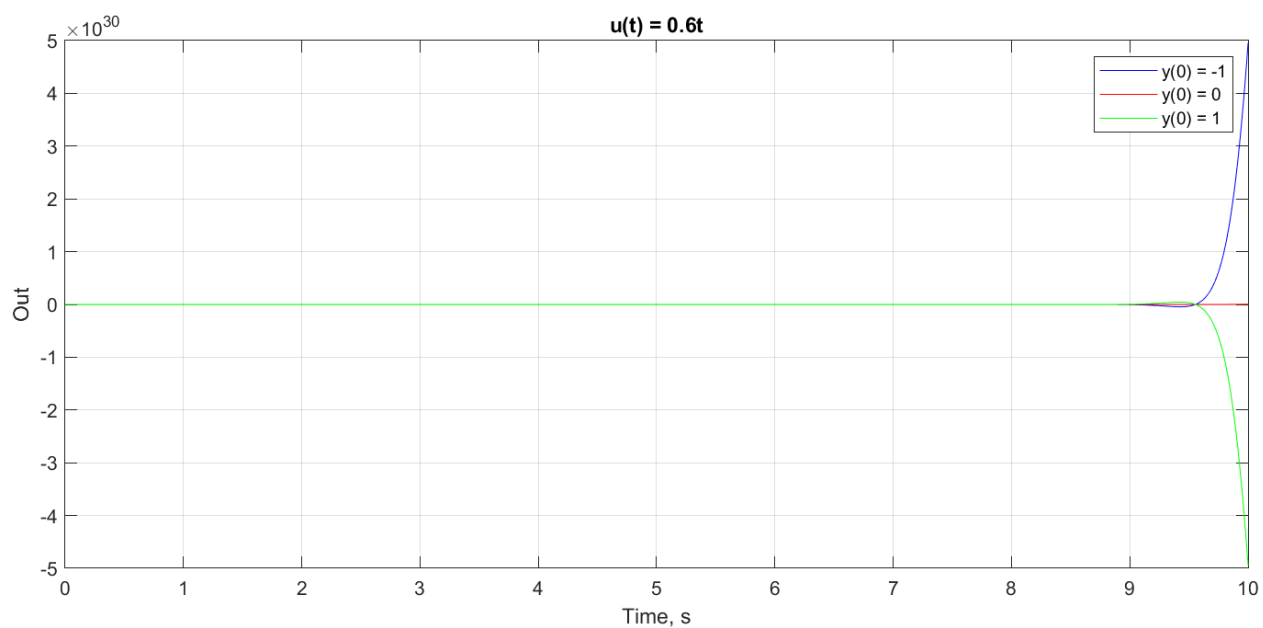


График 21. Выходные сигналы неустойчивой системы

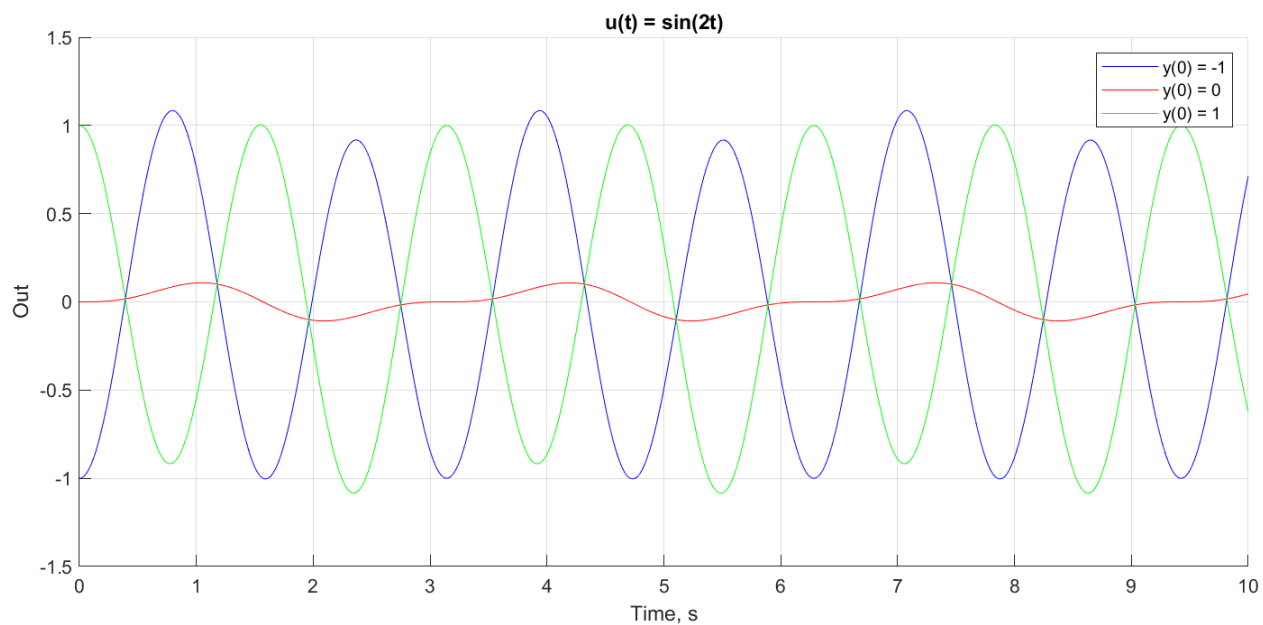


График 22. Выходные сигналы системы, которая находится в колебательной границе

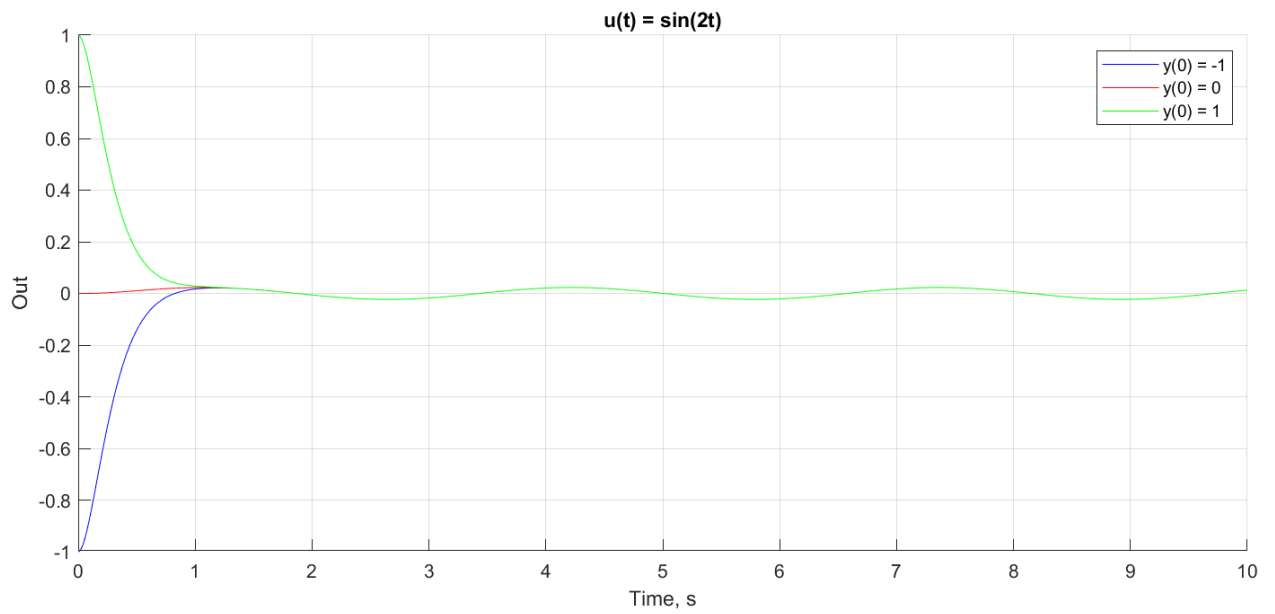


График 23. Выходные сигналы устойчивой системы

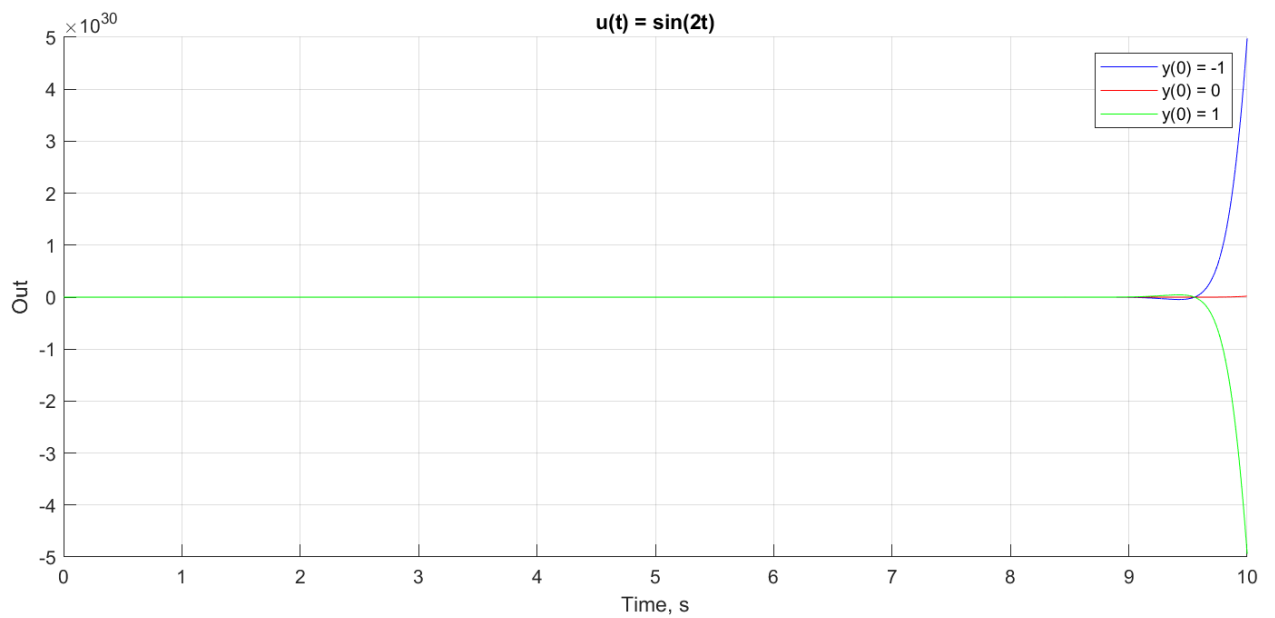


График 24. Выходные сигналы неустойчивой системы

Задание 4

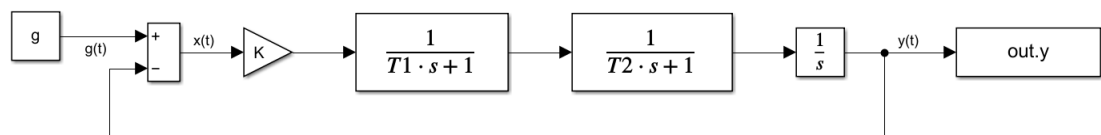


Схема 3. Моделирование системы

Найдем математическую модель системы:

$$(g - y)K \frac{1}{T_1 s + 1} \frac{1}{T_2 s + 1} \frac{1}{s} = y$$

$$(T_1 s^2 + s + T_1 T_2 s^3 + T_2 s^2)y = Kg - Ky$$

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2) \dot{y} + y + Ky = Kg$$

Система асимптотически устойчива, если

$$\begin{cases} T_1 T_2 > 0 \\ T_1 + T_2 > 0 \\ T_1 + T_2 - K T_1 T_2 > 0 \\ K T_1 + T_2 K - K^2 T_1 T_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 > 0 \\ T_2 > 0 \\ K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \\ K > 0 \end{cases}$$

Найдем значения T_1, T_2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{T_1 s + 1} = \frac{1}{s - \lambda_1} \\ \frac{1}{T_2 s + 1} = \frac{1}{s - \lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \\ T_2 = -\frac{1}{\lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} \\ T_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Пространство параметров (T_1, K)

$$K = \frac{1}{T_1} + 5. \text{ При зафиксированной } T_2 = \frac{1}{5}.$$

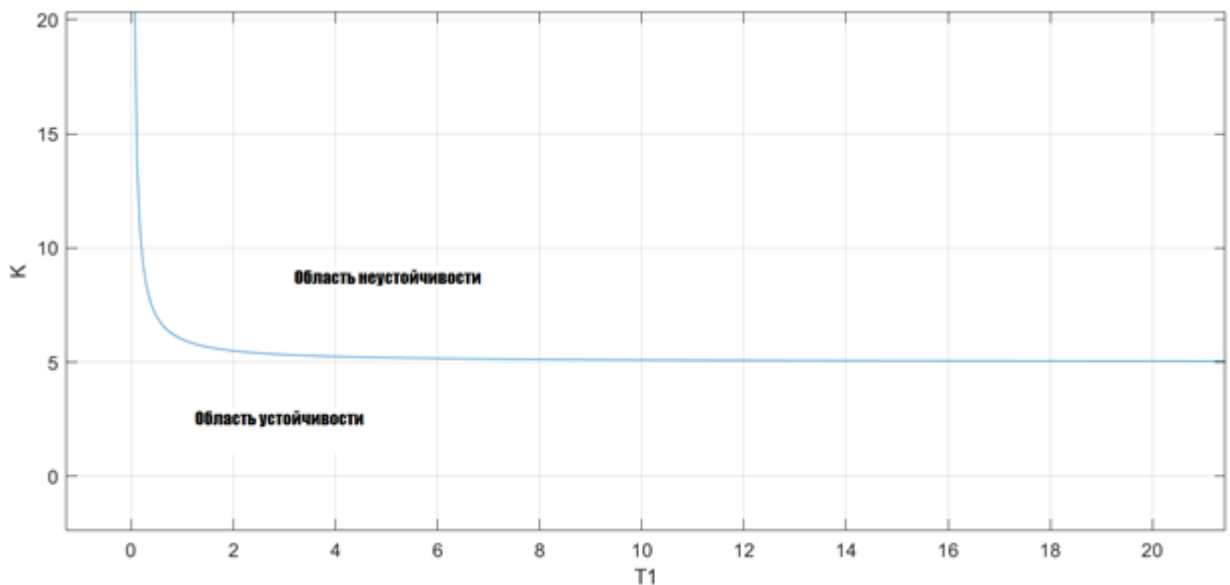


График 25. Границы устойчивости системы на плоскости $T_1 K$

Пространство параметров (T_2, K)

$$K = \frac{1}{T_2} + 2. \text{ При зафиксированной } T_1 = \frac{1}{2}$$

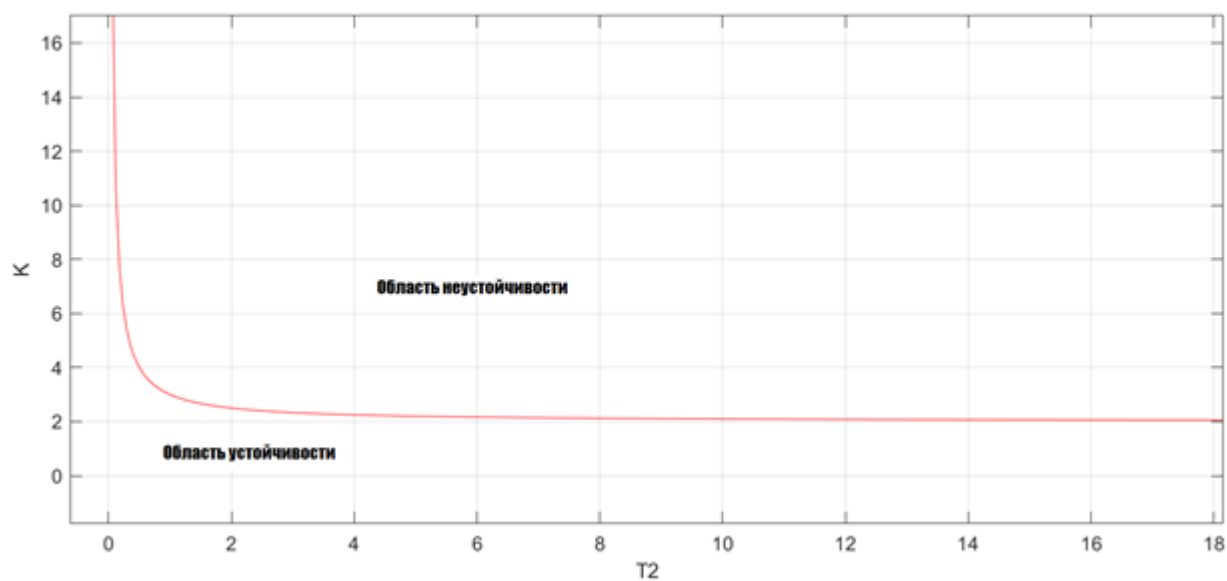


График 26. Границы устойчивости системы на плоскости $\sigma T_2 K$

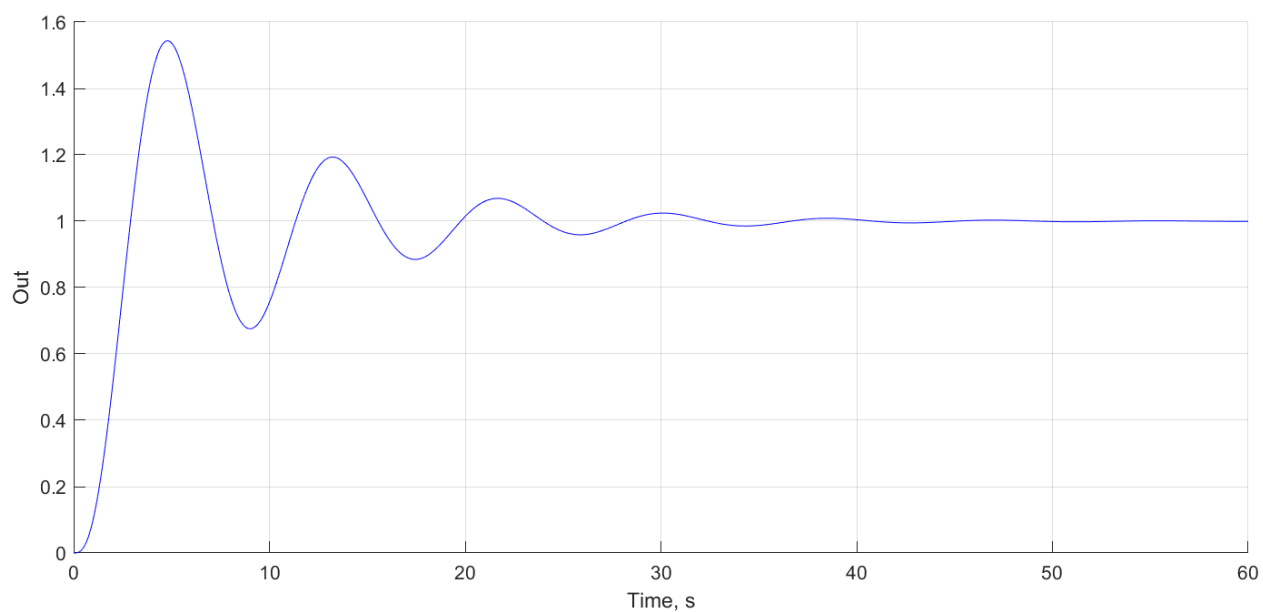


График 27. Моделирование при $T_1 = 1, T_2 = 1, K = 1$

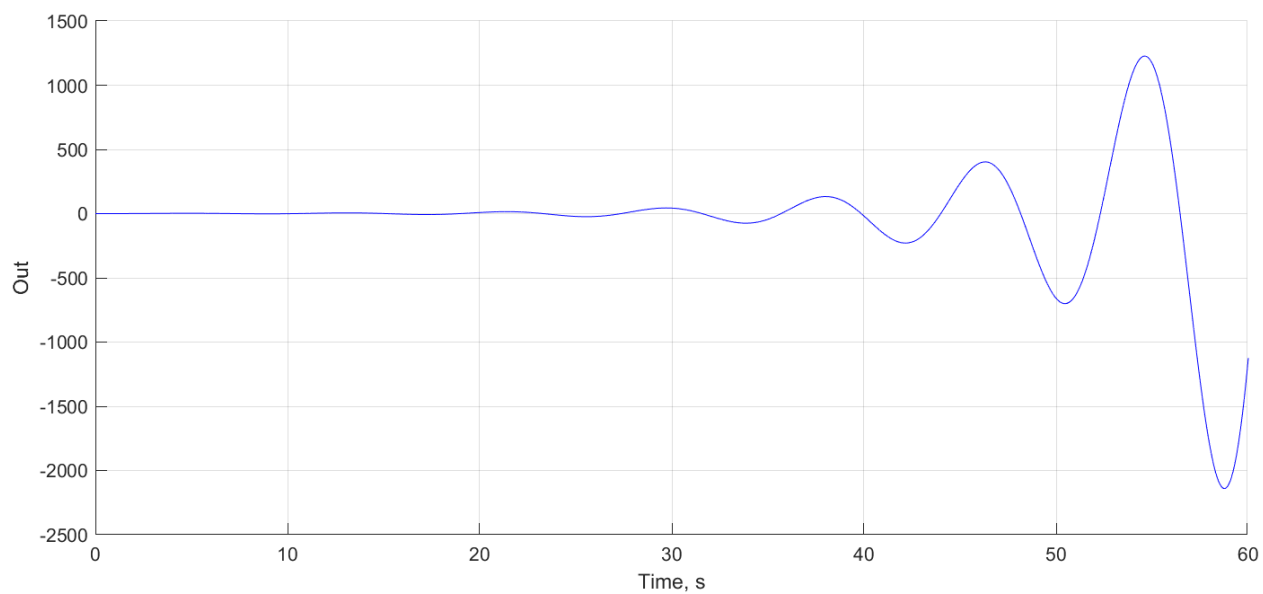


График 28. Моделирование при $T1 = 2$, $T2 = 2$, $K = 3$

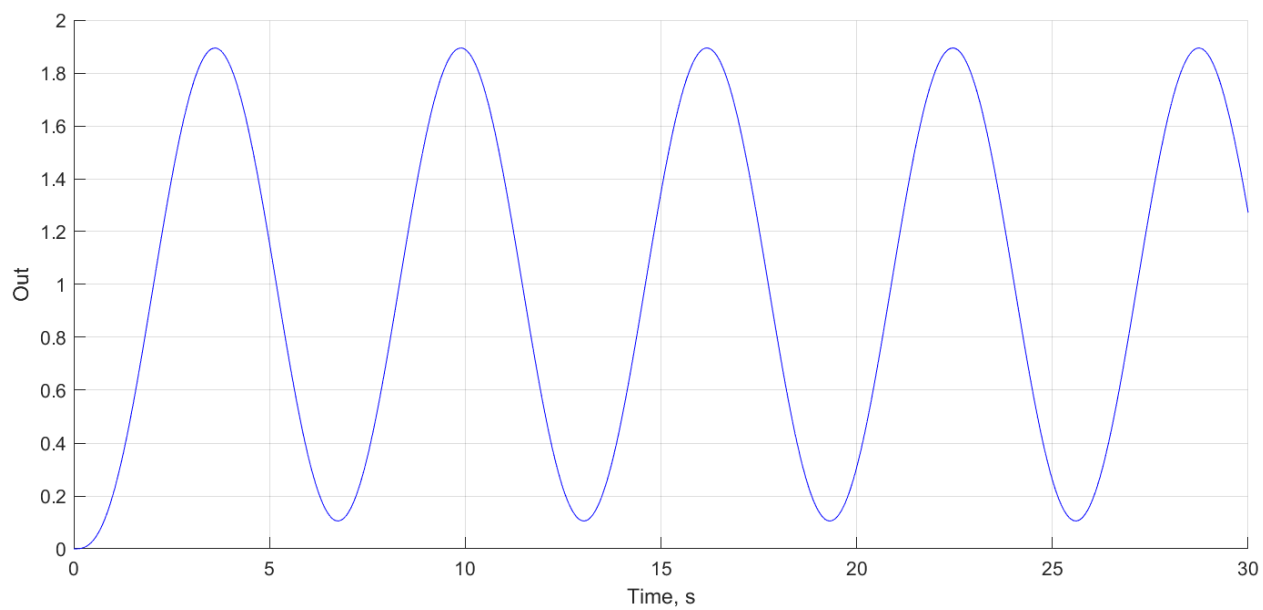


График 29. Моделирование при $T1 = 1$, $T2 = 1$, $K = 2$

Системы устойчивы и неустойчивы согласно нашим условиям, графики подтверждают наши расчеты.

Задание 5

Желаемый выход системы $y(t) = \cos(6t) + e^{-4t} \cdot \cos(8t)$

Подумав, можно записать полную систему с начальными условиями

$$y(t) = 0 \cdot \sin(6t) + 1 \cdot \cos(6t) + 0 \cdot e^{-4t} \cdot \sin(8t) + 1 \cdot e^{-4t} \cdot \cos(8t)$$

Запишем корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm 6i$$

$$\lambda_{3,4} = -4 \pm 8i$$

Из них можно составить вещественную жорданову матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \end{cases}$$

Возведем экспоненту в At:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(6t) & \sin(6t) & 0 & 0 \\ -\sin(6t) & \cos(6t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \cdot \cos(8t) & e^{-4t} \cdot \sin(8t) \\ 0 & 0 & -e^{-4t} \cdot \sin(8t) & e^{-4t} \cdot \cos(8t) \end{bmatrix}$$

Составим уравнение:

$$y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) = \cos(6t) + e^{-4t} \cdot \cos(8t)$$

И подберем C и x(0):

$$[1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \cos(6t) + e^{-4t} \cdot \cos(8t)$$

Промоделируем систему и получим графики:

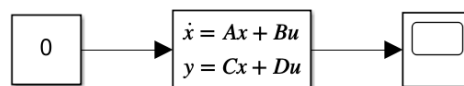


Схема 4

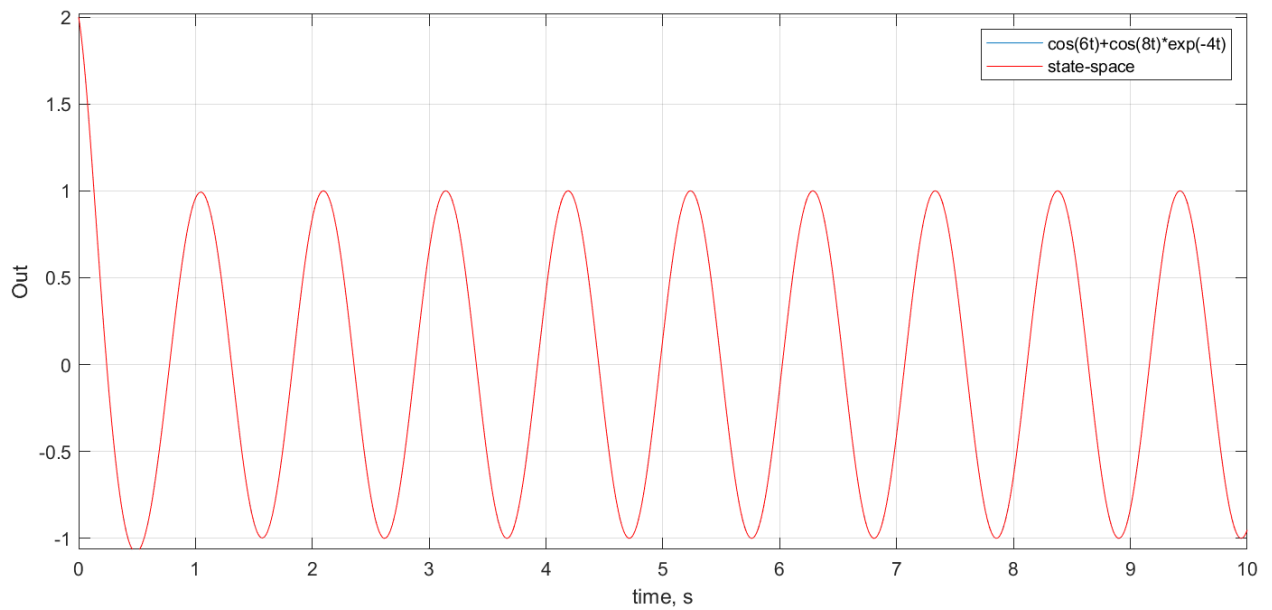


График 30. Выходные сигналы желаемой и найденной системы

Как видим, графики полностью накладываются друг на друга, значит расчёты выполнены верно.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы на устойчивость различные системы. Проанализированы влияние корневых критериев на устойчивость, начальных условий. Изучены фазовые портреты системы, исследована зависимость корней, типа системы и их влияние на фазовые траектории. Также была построена схема моделирования линейной системы третьего порядка и аналитически определена граница устойчивости данной системы с помощью критерия Гурвица