НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Теория автоматического управления

Лабораторная работа №12

«Слежение и компенсация»

Выполнил студент:

Мысов М.С.

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Объект:

$$\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} w$$

Генератор внешних воздействий:

$$\dot{w} = A_2w$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} w$$

Целевая переменная (регулируемый выход):

$$z = C_2x$$

$$z = [1 \quad 1 \quad 1\,]x$$

Спектр матриц A_1 и A_2:

$$\lambda(A_1) = \{6 \pm 2i,\ -4\} \not\subset \mathbb{C}_- \qquad \lambda(A_2) = \{1 \pm 3i,\ \pm 2i\} \subset \overline{\mathbb{C}_+}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема. Ранг матрицы управляемости = 3.

Найдем регулятор вида:

$$u = K_1x + K_2w$$

Где K_1 находим модальным методом (feedback):

$$\sigma(A_1 + B_1K_1) = \{-6, -2 \pm 3i\} \subset \mathbb{C}_-$$

$$K_1 = [-14.875 \quad 6 \quad -0.0313]$$

Где K_2 ищем как компенсирующий регулятор (feedforward):

$$B_2 \neq 0, D_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$K_2 = [1.64 \quad 3.26 \quad -1.96 \quad -6.32]$$

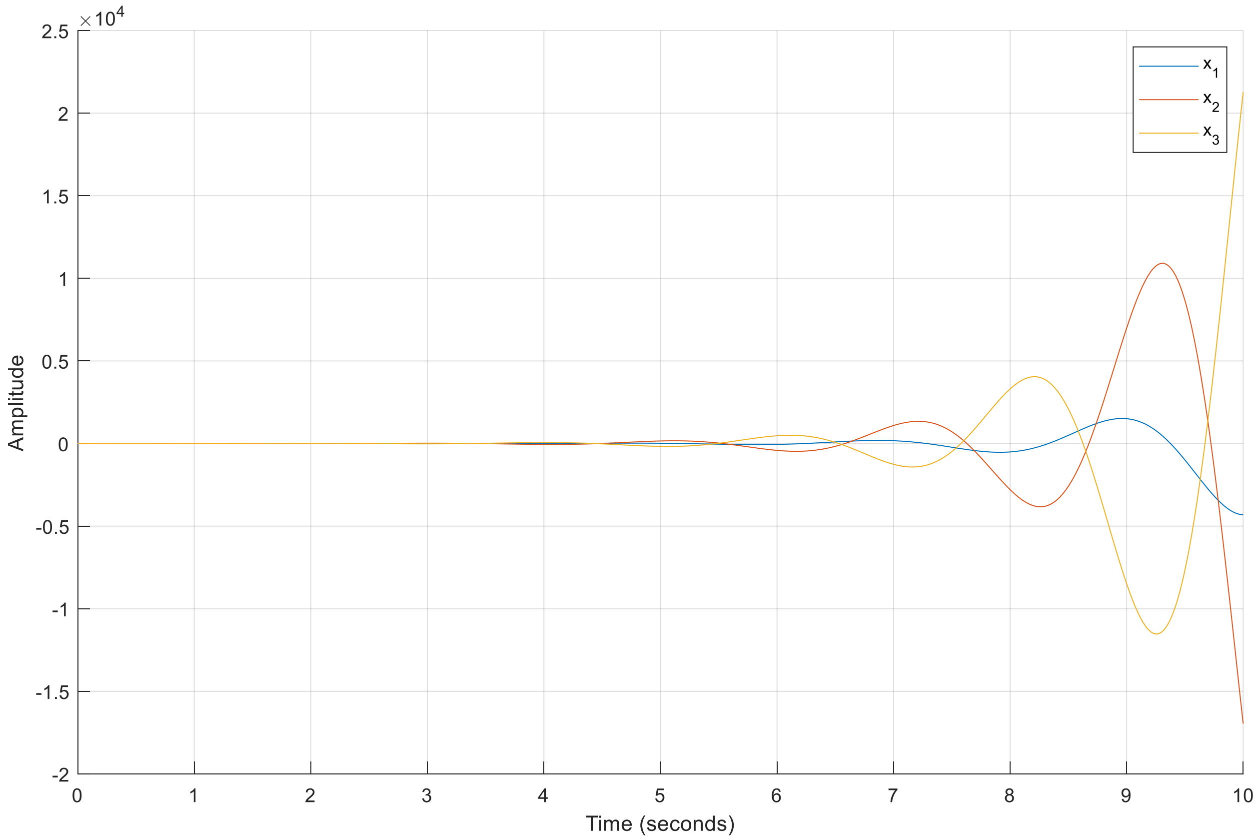

Рисунок 1 – вектор состояния

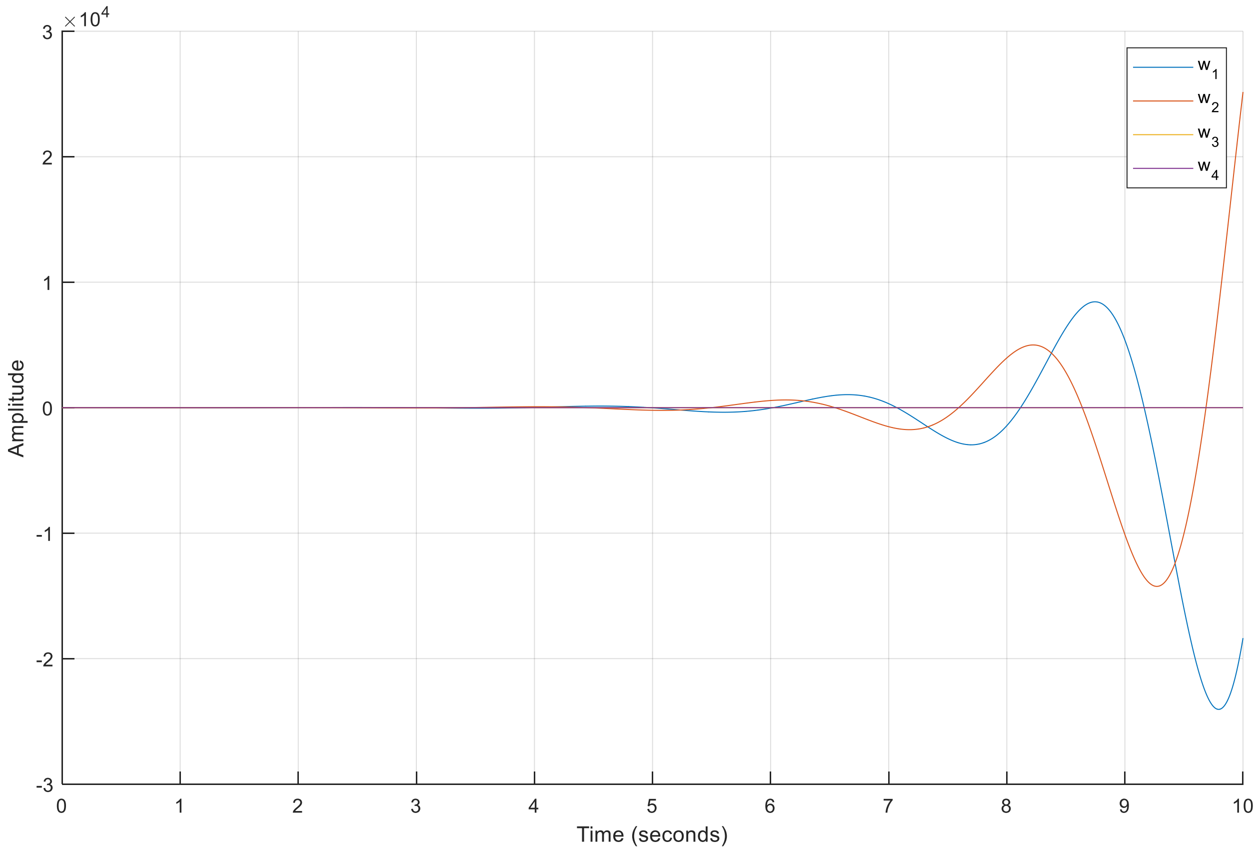

Рисунок 2 – внешнее воздействие

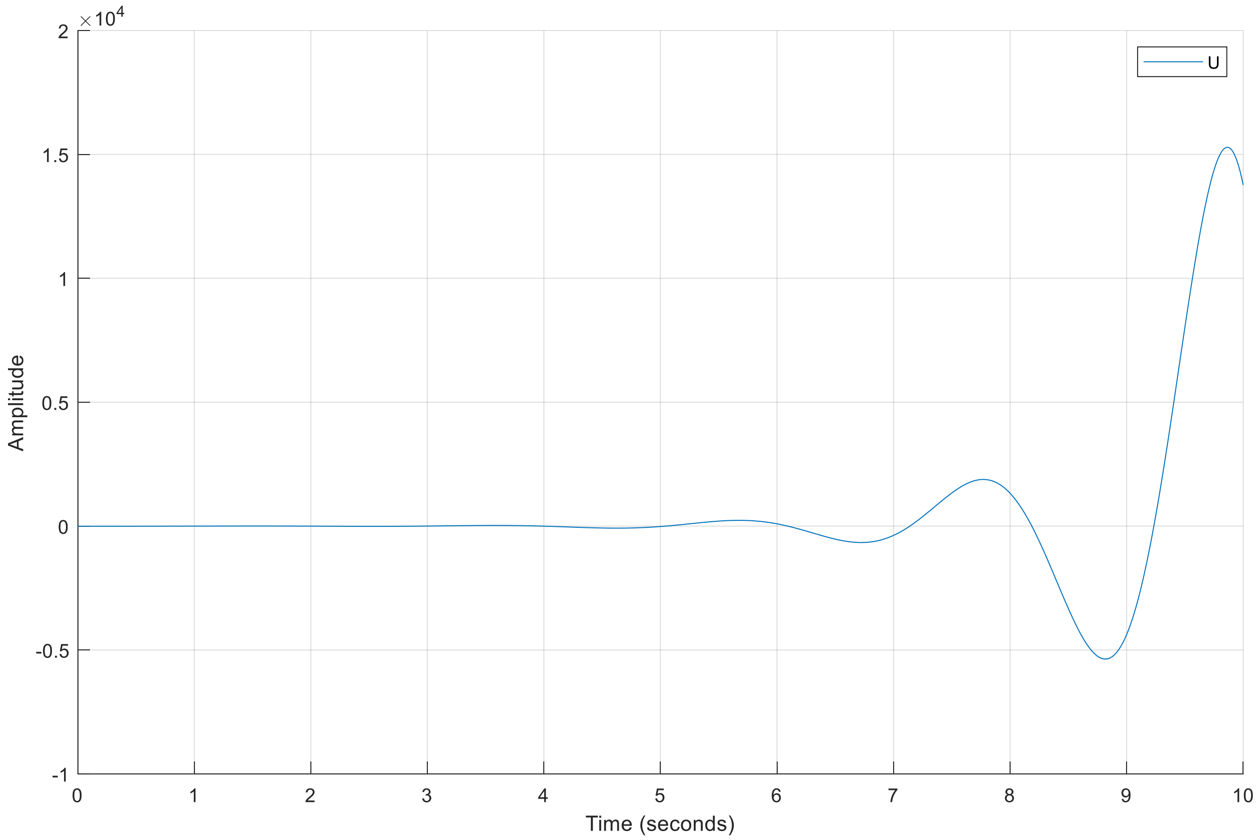

Рисунок 3 – управляющее воздействие

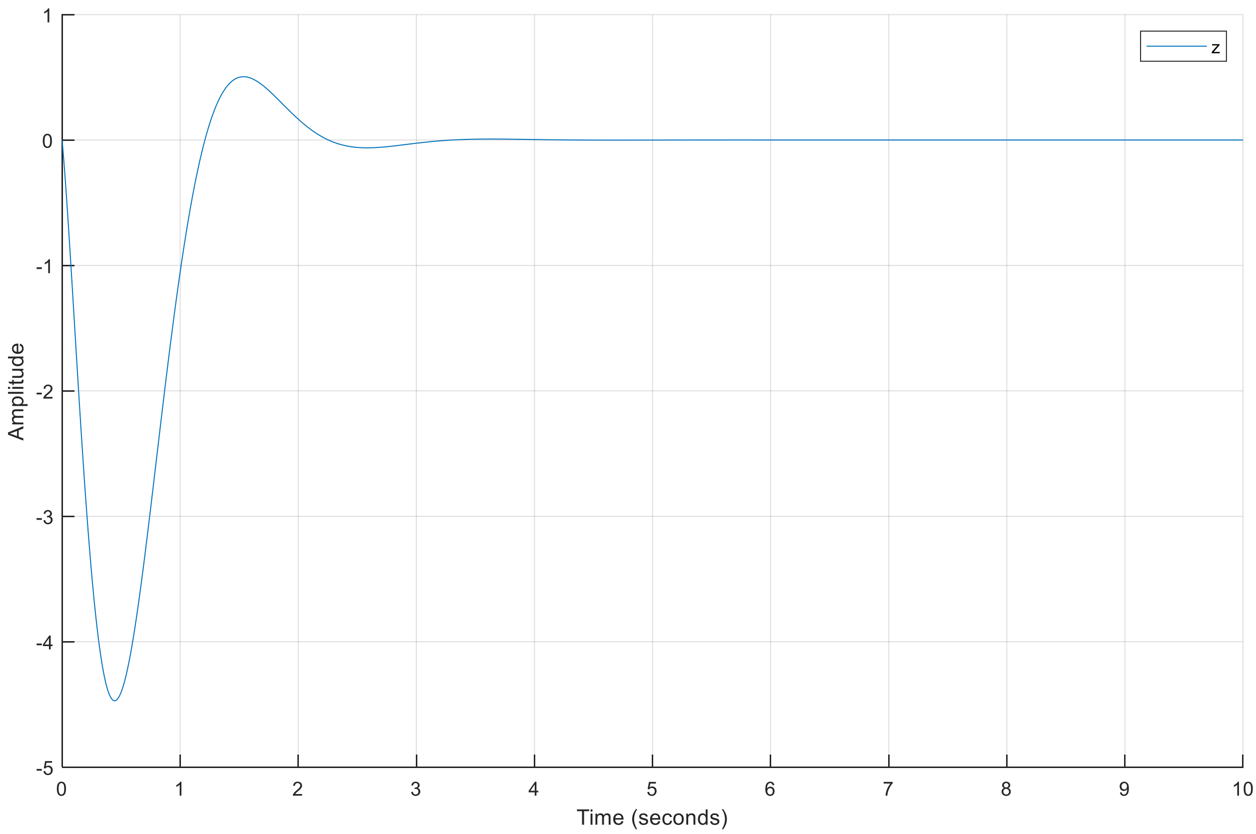

Рисунок 4 – регулируемый выход

По графику видно, что $\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$. Таким образом, регулятор компенсирует внешние воздействия, задаваемые генератором.

Рассмотрим уравнения объединенной системы с вектором состояния (x, w) и выходом z в двух вариантах:

1. **Разомкнутая $\boldsymbol{u \equiv 0}$:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости O и её ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 56 & 16 & 11 & 49 & 0 & 38 \\ -64 & 352 & -64 & 128 & 314 & 124 & 104 \\ -1088 & 1984 & 256 & 402 & 1434 & 48 & 280 \\ -10496 & 9728 & -1024 & 3460 & 7184 & 1168 & -2016 \\ -82432 & 37376 & 4096 & 8276 & 22684 & -12096 & -30944 \end{bmatrix}$$

$rank(O) = 7$

2. **Замкнутая $\boldsymbol{u \equiv K_1 x + K_2 w}$:**

Матрица наблюдаемости O и её ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -174 & 80 & -4 & 26 & 47 & -14 & -69 \\ 2124 & -1212 & 24 & -345 & -725 & 197 & 763 \\ -14871 & 9091 & -161 & 2467 & 5512 & -1440 & -5050 \\ 83701 & -52278 & 1046 & -13971 & -31953 & 8217 & 27709 \\ -452514 & 281000 & -6409 & 75374 & 172166 & -44312 & -149750 \\ 2588185 & -1584853 & 37959 & -429241 & -969394 & 251419 & 866226 \end{bmatrix}$$

$rank(O) = 3$

Разомкнутая система, в отличие от замкнутой, является наблюдаемой.

Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

Объект:

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} u$$

Так как регулятор следящий, $B_2 = 0, D_2 \neq 0$

Генератор внешних воздействий:

$$\dot{w} = A_2 w$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} w$$

Целевая переменная (регулируемый выход):

$$z = C_2 x + D_2 w$$

$$z = [1 \quad 1 \quad 1\,]x + [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]w$$

Спектр матриц A_1 и A_2:

$$\lambda(A_1) = \{6 \pm 2i,\ -4\} \not\subset \mathbb{C}_- \qquad \lambda(A_2) = \{1 \pm 3i,\ \pm 2i\} \subset \overline{\mathbb{C}_+}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема. Ранг матрицы управляемости = 3.

Найдем регулятор вида:

$$u = K_1 x + K_2 w$$

$$K_1 = [-14.875 \quad 6 \quad -0.0313] \qquad K_2 = [0.91 \quad 2.74 \quad -2.32 \quad -6.15]$$

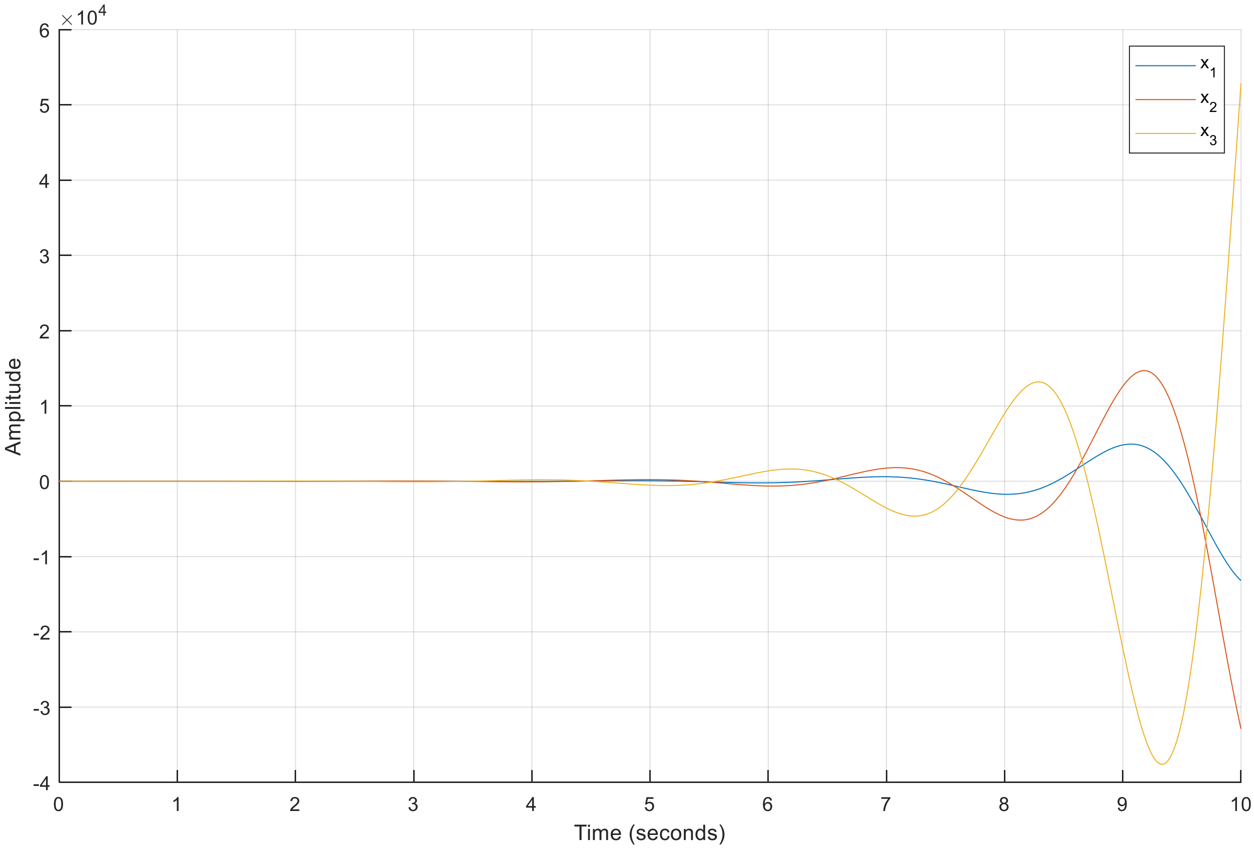

Рисунок 5 – вектор состояния

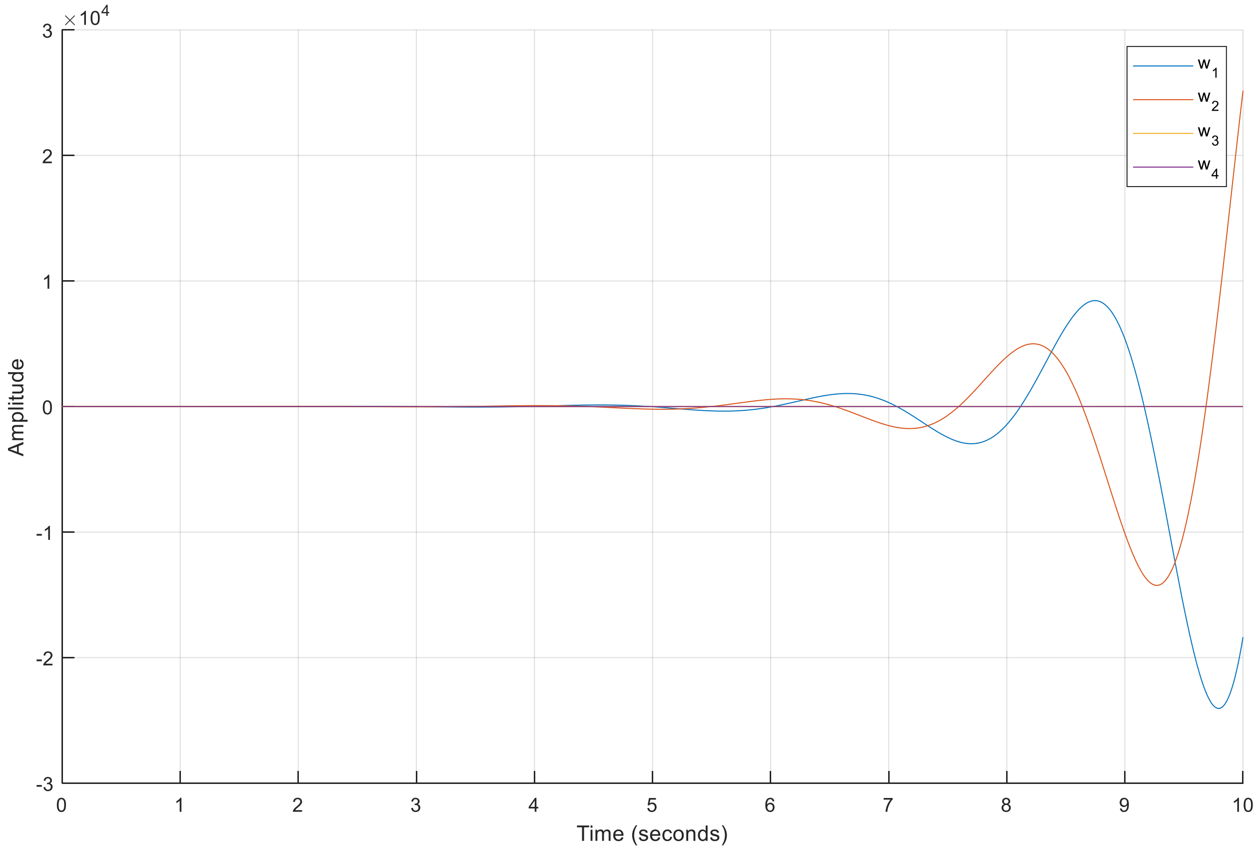

Рисунок 6 – внешнее воздействие

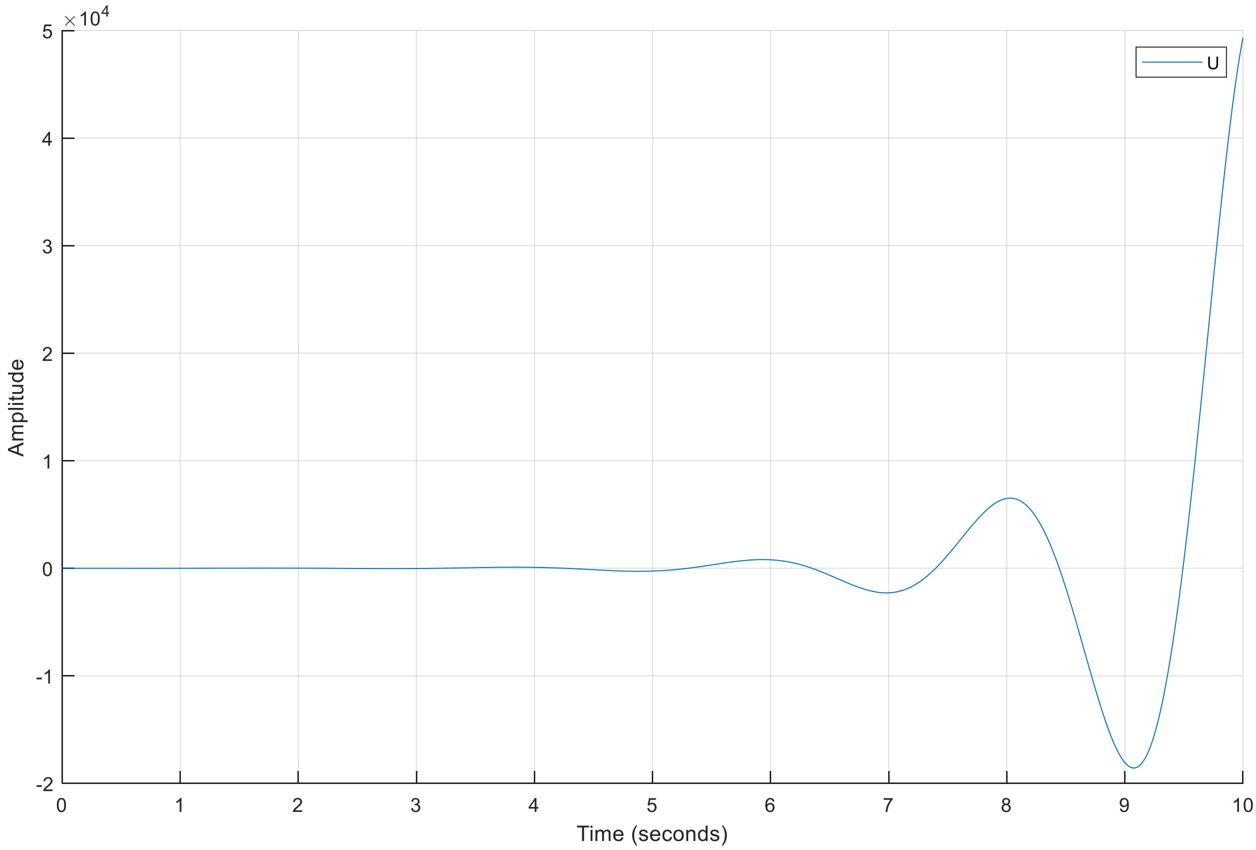

Рисунок 7 – управляющее воздействие

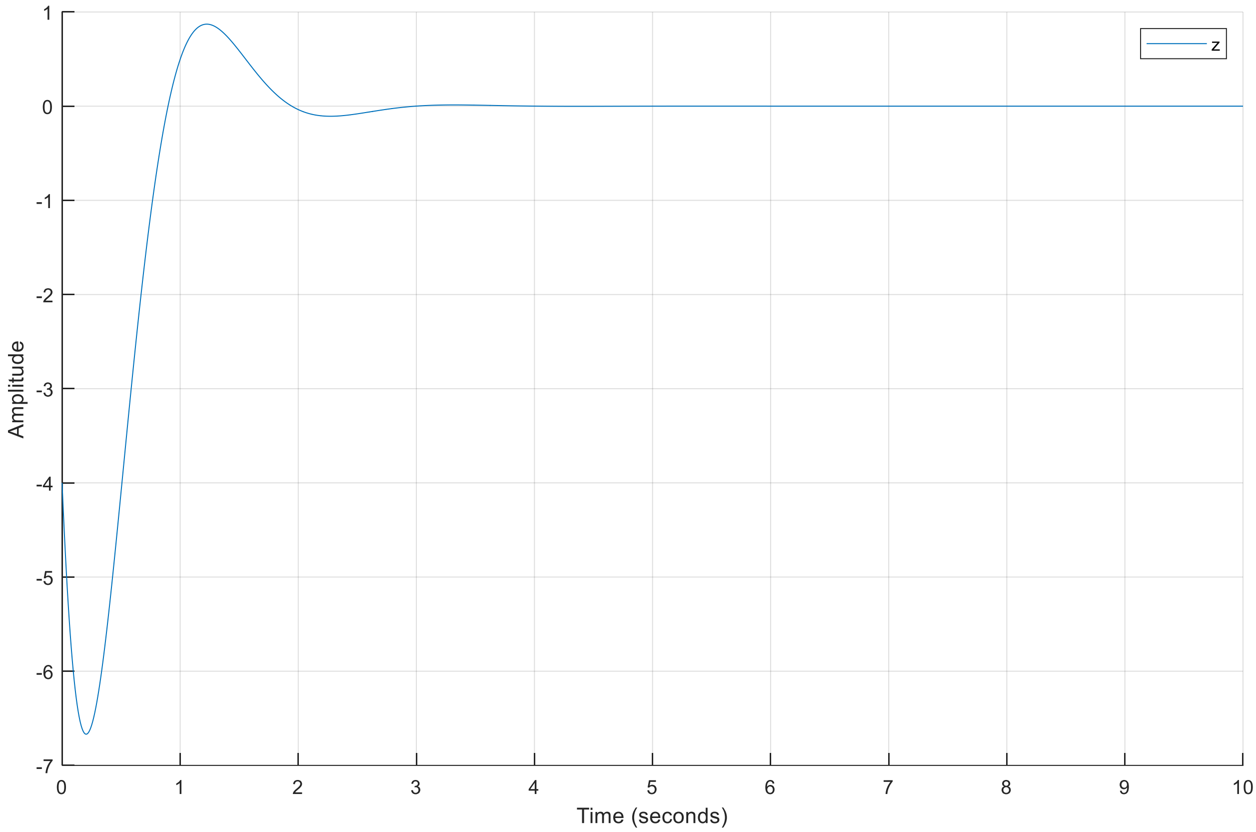

Рисунок 8 – регулируемый выход

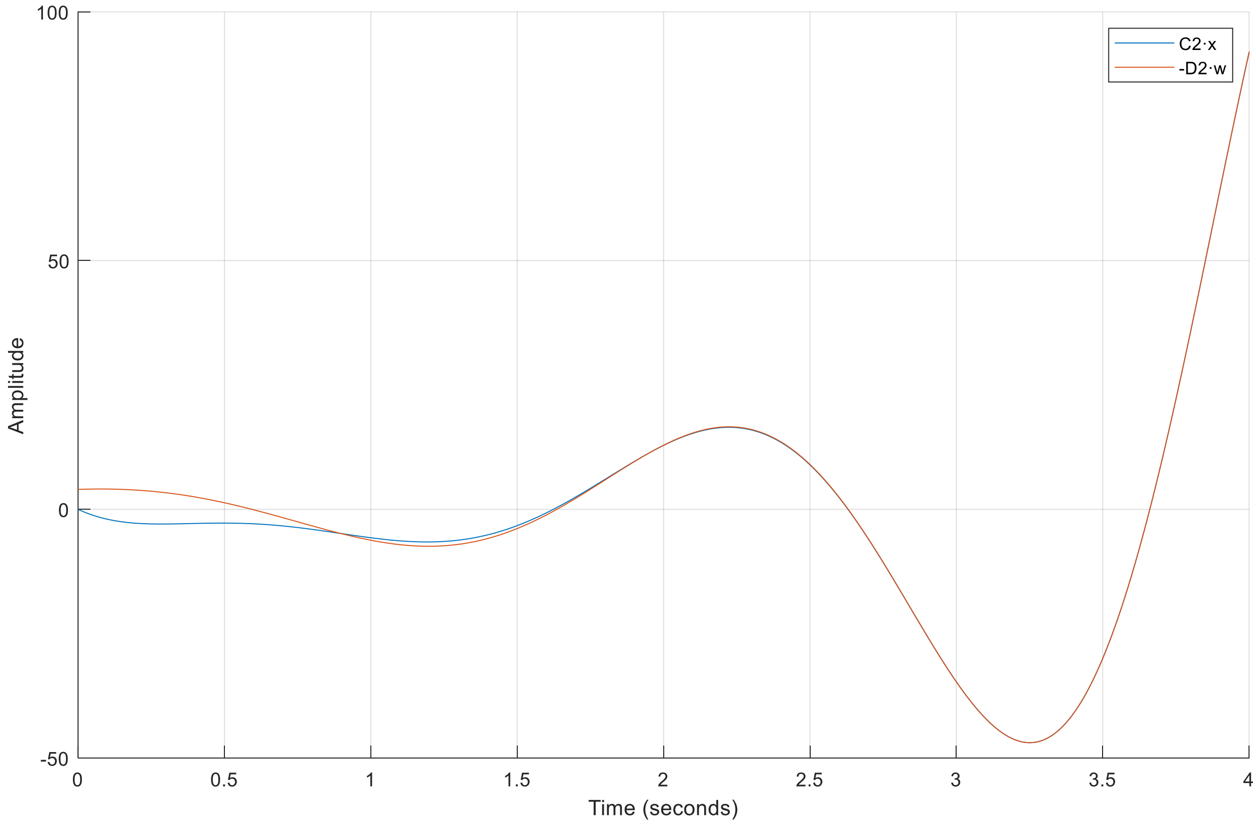

Рисунок 9 – компоненты регулируемого выхода

По графику видно, что $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. Таким образом, регулятор действует таким образом, что $C_2 x \to D_2 w, t \to \infty$.

Рассмотрим уравнения объединенной системы с вектором состояния (x, w) и выходом z в двух вариантах:

1. **Разомкнутая $\boldsymbol{u \equiv 0}$:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости O и её ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 8 & -4 & 9 & 4 & 11 & 4 \\ 8 & 56 & 16 & 25 & 51 & 4 & 42 \\ -64 & 352 & -64 & 136 & 358 & 116 & 112 \\ -1088 & 1984 & 256 & 278 & 1502 & 32 & 264 \\ -10496 & 9728 & -1024 & 3132 & 6880 & 1200 & -2048 \\ -82432 & 37376 & 4096 & 8860 & 21396 & -12032 & -30880 \end{bmatrix}$$

$rank(O) = 7$

2. **Замкнутая $\boldsymbol{u \equiv K_1 x + K_2 w}$:**

Матрица наблюдаемости O и её ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -174 & 80 & -4 & 19 & 36 & -16 & -69 \\ 2124 & -1212 & 24 & -158 & -638 & 277 & 721 \\ -14871 & 9091 & -161 & 921 & 5097 & -2078 & -4550 \\ 83701 & -52278 & 1046 & -4920 & -30231 & 11814 & 24272 \\ -452514 & 281000 & -6409 & 27438 & 163497 & -62916 & -130585 \\ 2588185 & -1584853 & 37959 & -164225 & -913986 & 354155 & 762733 \end{bmatrix}$$

$rank(O) = 3$

При анализе каждого регулятора по состоянию матрица наблюдаемости для разомкнутой системы имеет полный ранг 7, что означает, что система наблюдаема. Однако для замкнутой системы ранг снижается до 3, и система становится ненаблюдаемой. Получается, когда система замыкается регулятором для устранения внешнего воздействия, происходит потеря информации о нем.

Задание 3. Регулятор по выходу при различных y и z

Расширенный объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Измеряемый выход:

$$y = C_1 x + D_1 w$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Регулируемый выход:

$$z = C_2 x + D_2 w$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Расширенный наблюдатель:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1\hat{x} + B_1 u + B_2\hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = A_2\hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1\hat{x} + D_1\hat{w} \end{cases}$$

Регулятор:

$$u = K_1\hat{x} + K_2\hat{x}$$

Условия:

$$\sigma(A_2) = \{\pm 3i, \pm 2i\} \subset \overline{\mathbb{C}_+}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема

Пара $\left(\begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$ – обнаруживаема

Результаты расчетов:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.4615 & -45.9231 & 22.3846 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7.7634 & -17.8729 & 16.2692 & 8.3462 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.104 \\ 22.7692 \\ 5.7902 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.46 \\ 2.5086 \\ -6.2 \\ 0.275 \end{bmatrix}$$

Регулятор в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Собственные числа регулятора*:*

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \{-0.3253, -18.4 \pm 36.613i, 0.46 \pm 1.87i, 0.11 \pm 2.8429i\}$$

Собственные числа матрицы A_2 не совпадают с собственными числами регулятора, но имею некоторую схожесть.

Опять же, долго не получалось воспроизвести регулятор при выборе $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$, но при чисто комплексных собственных числах данная проблема несходимости компонент разрешилась.

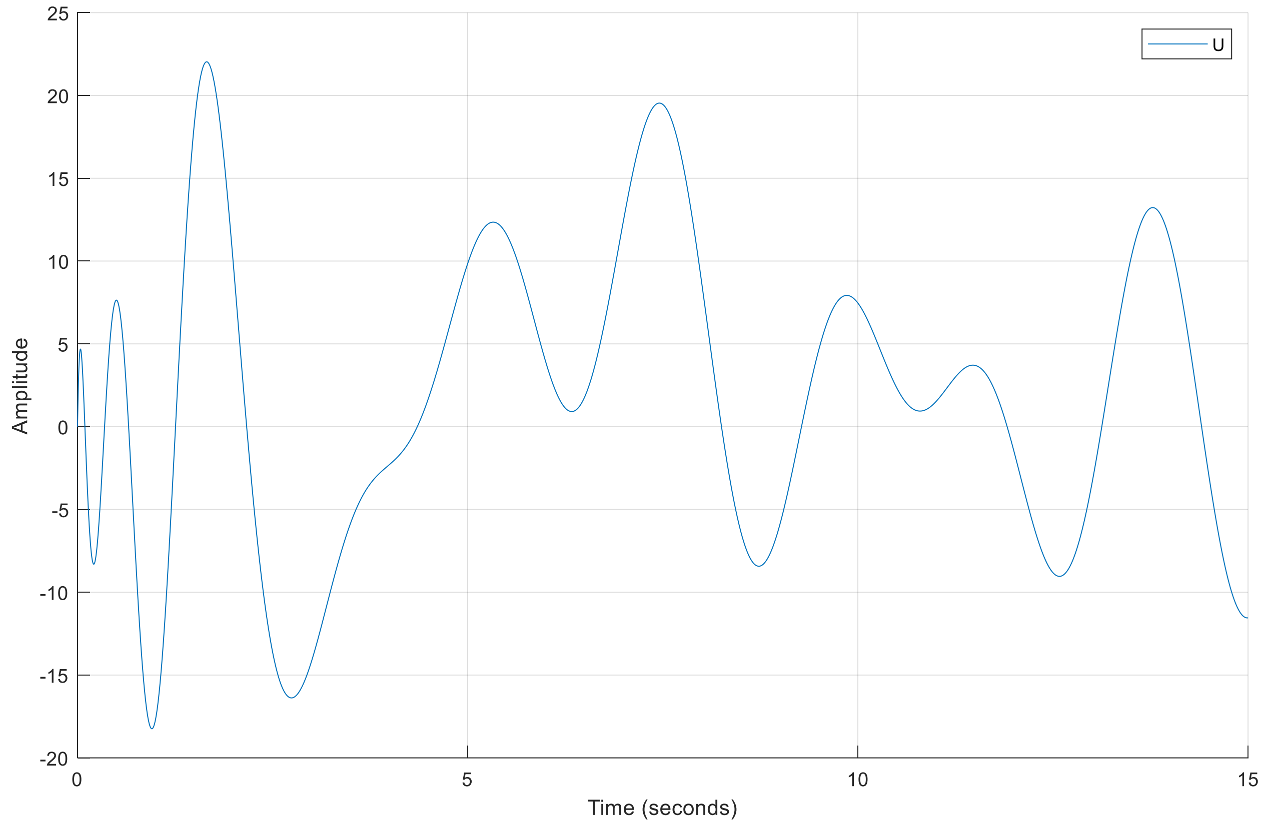

Рисунок 10 – управляющее воздействие

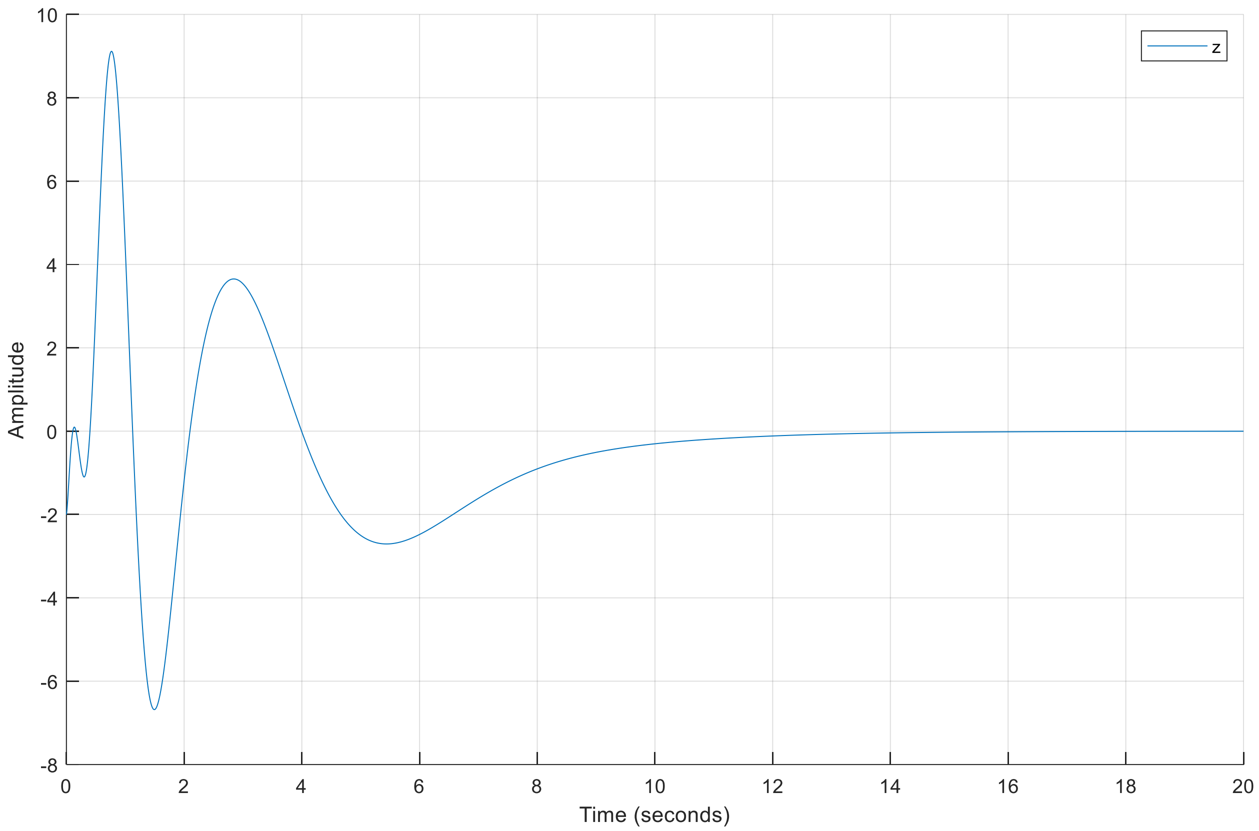

Рисунок 11 – регулируемый выход

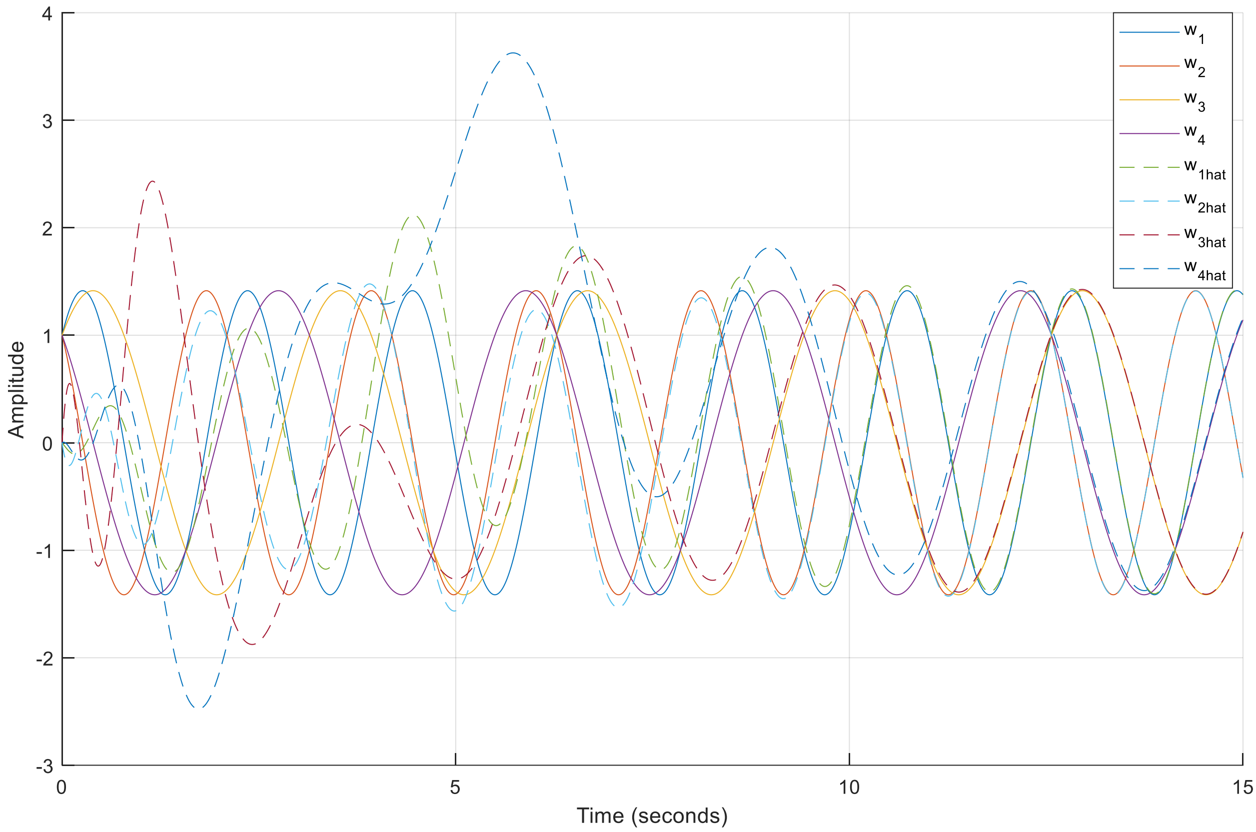

Рисунок 12 – задающее воздействия

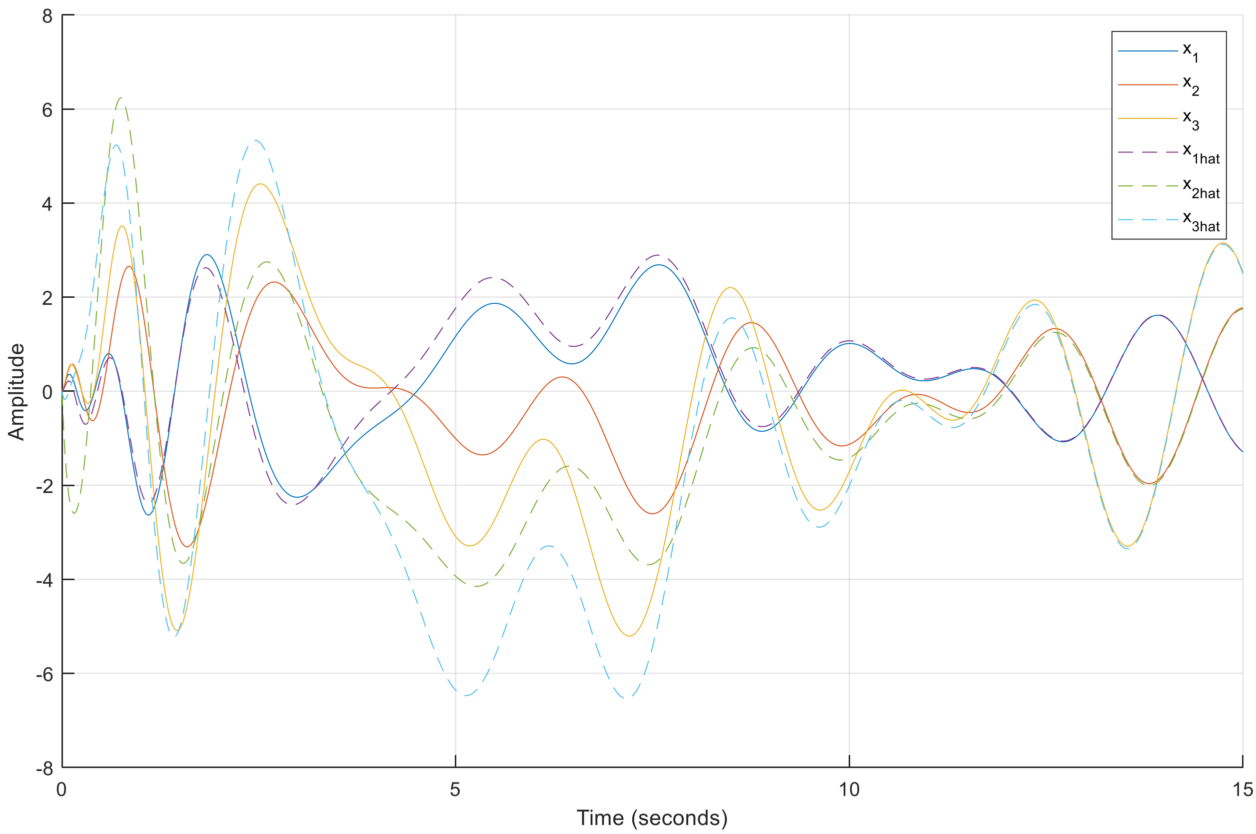

Рисунок 13 – вектор состояния

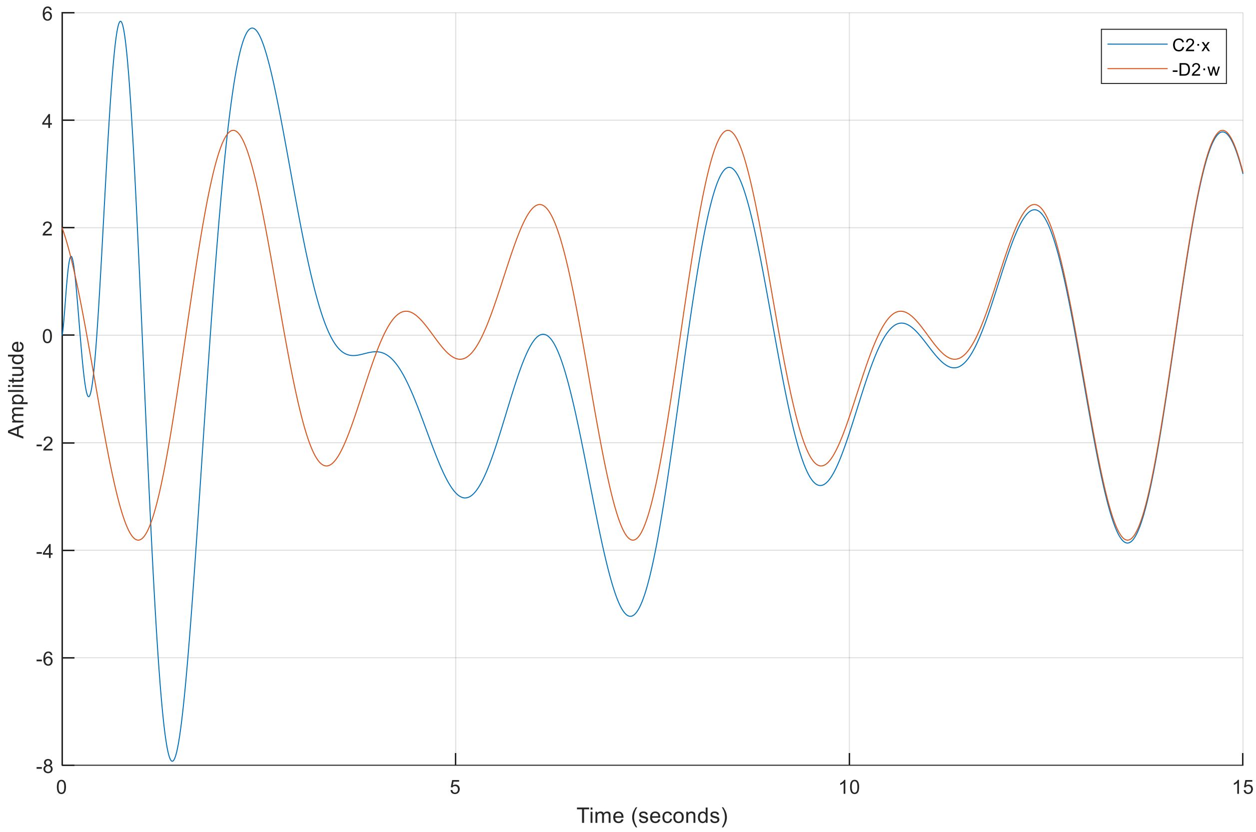

Рисунок 14 – компоненты регулируемого выхода

Задание 4. Регулятор по выходу при одинаковых *y* и *z*

Расширенный объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Выход:

$$y = z = Cx + Dw$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Регулятор:

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{x}$$

Условия:

$$\sigma(A_2) = \{\pm 3i, \pm 2i\} \subset \overline{\mathbb{C}_+}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема

Пара $\left(\begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$ – обнаруживаема

Результаты расчетов:

$$K_1 = [-0.4615 \quad -45.9231 \quad 22.3846]$$

$$K_2 = [17.0425 \quad 5.2077 \quad 0.0462 \quad 8.6308]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0104 \\ 22.77 \\ 5.79 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 0.46 \\ 2.5 \\ -6.2 \\ -0.275 \end{bmatrix}$$

Регулятор в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Собственные числа регулятора:

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}\right) = \{-0.325, -17.837 \pm 33.9964i, \pm 3i, \pm 2i\}$$

Собственные числа регулятора полностью содержат в себе собственные числа матрицы A_2. Это значит, что принцип внутренней модели выполнен.

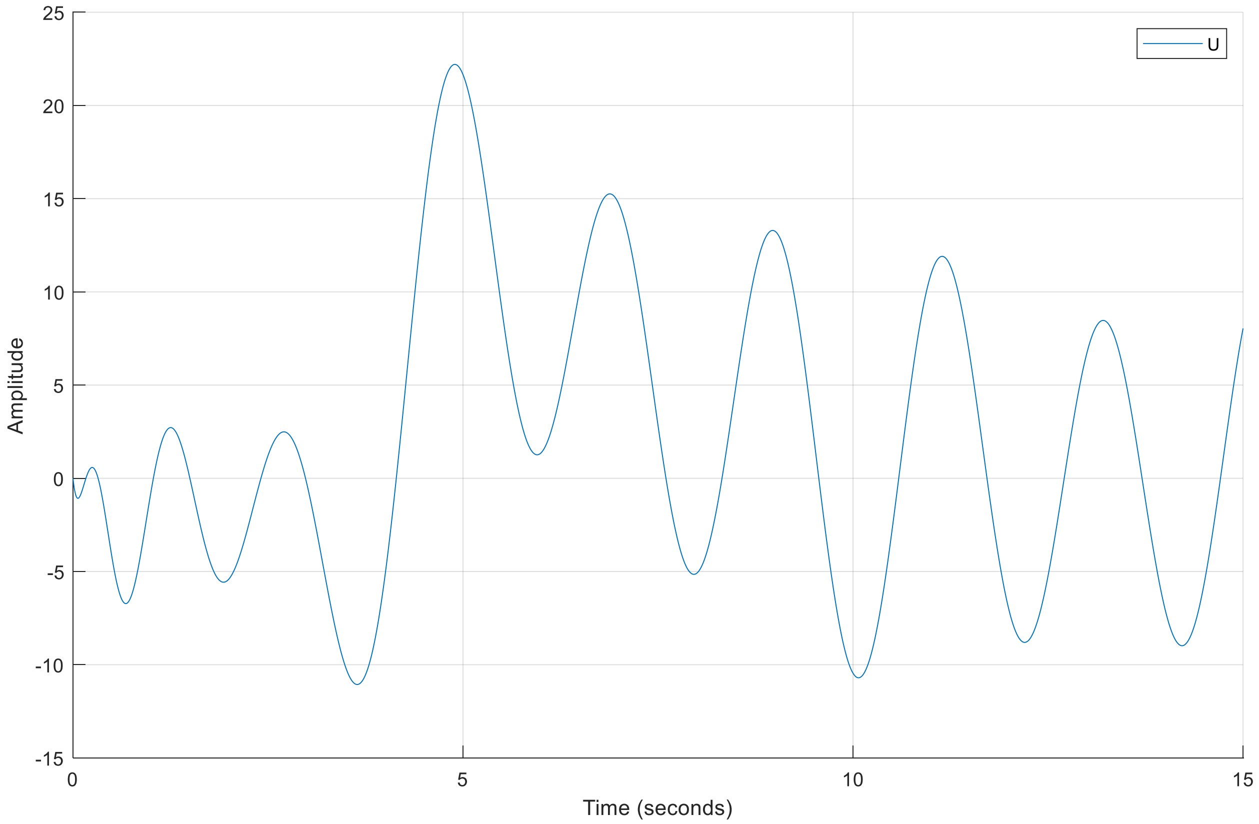

Рисунок 15 – управляющее воздействие

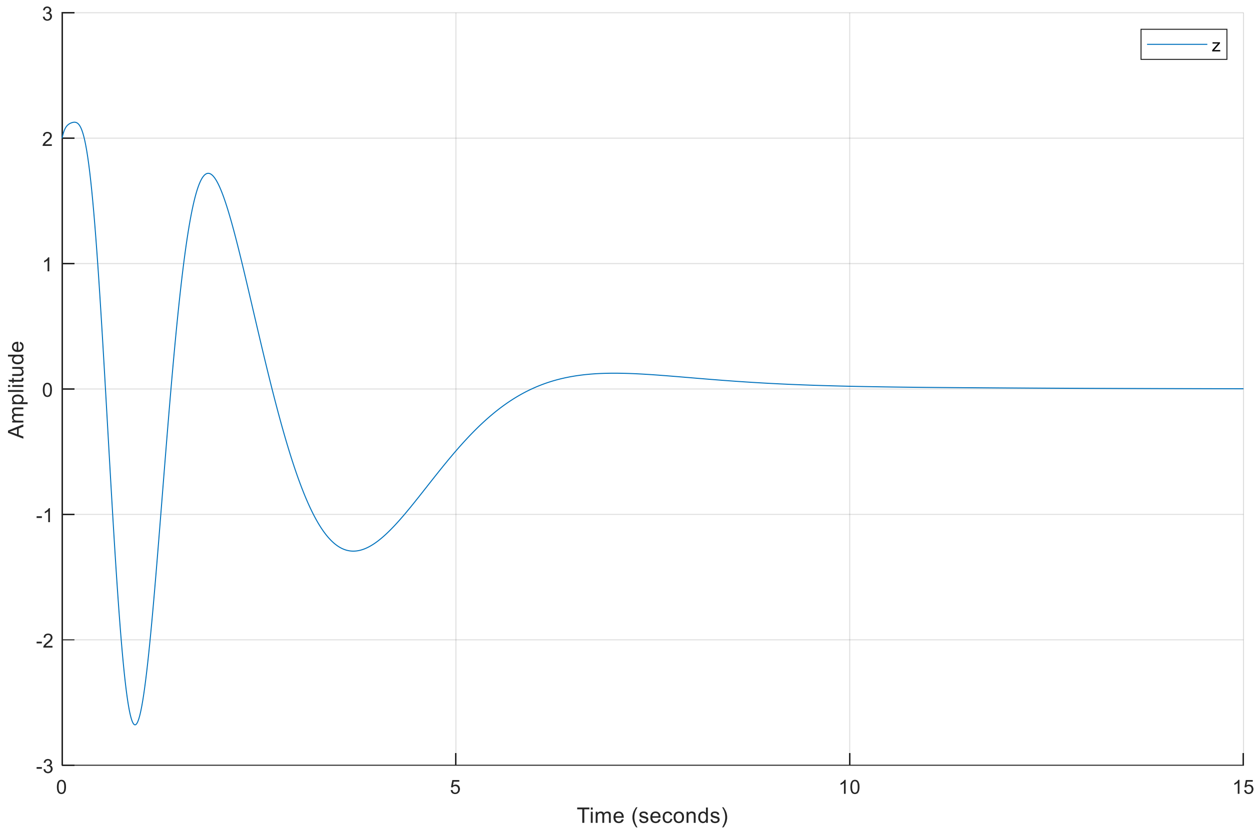

Рисунок 16 – регулируемый выход

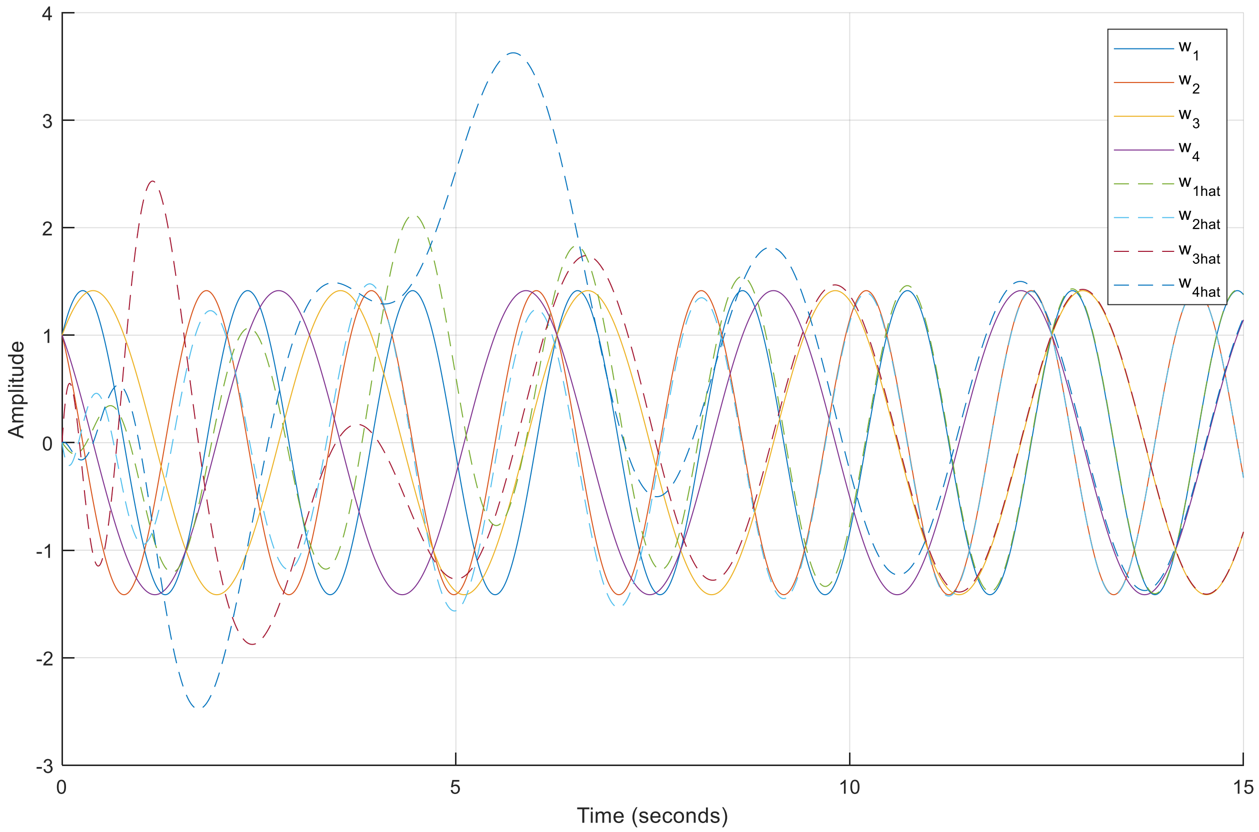

Рисунок 17 – задающее воздействия

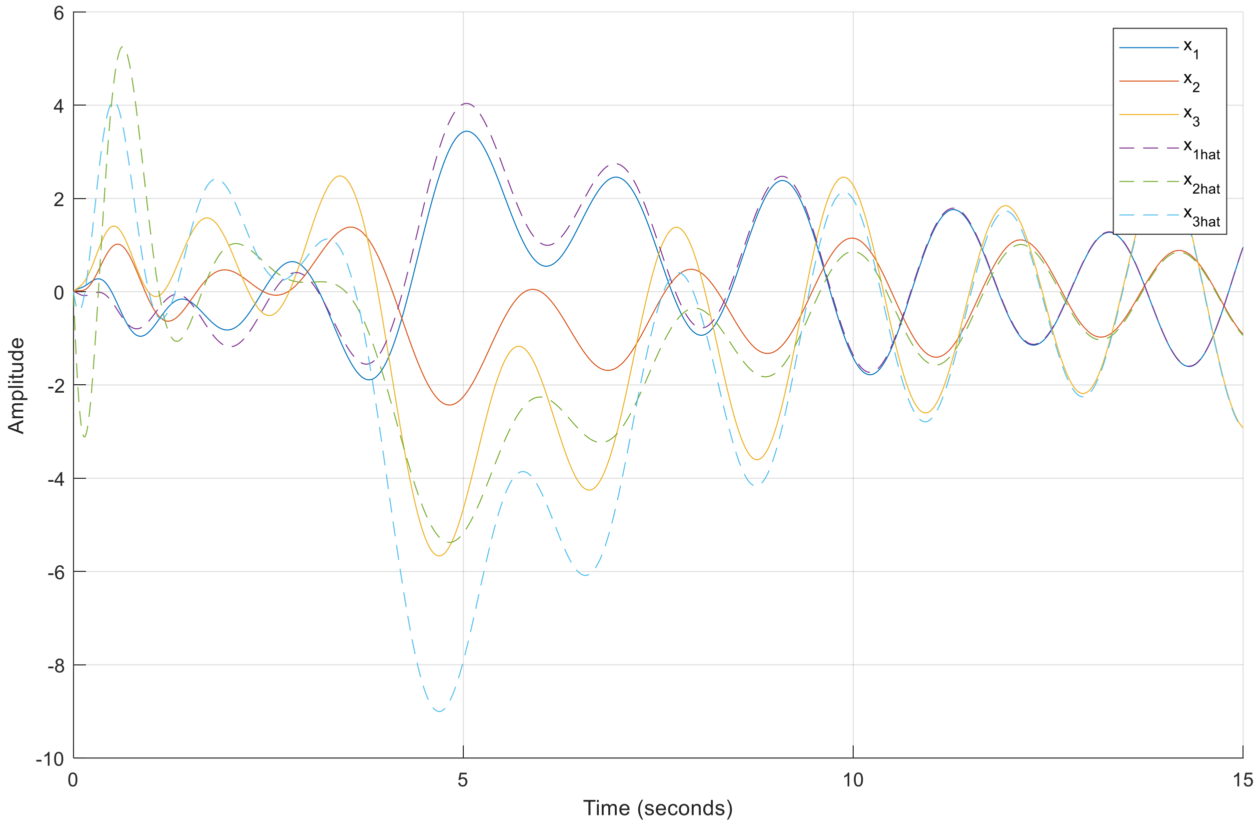

Рисунок 18 – вектор состояния

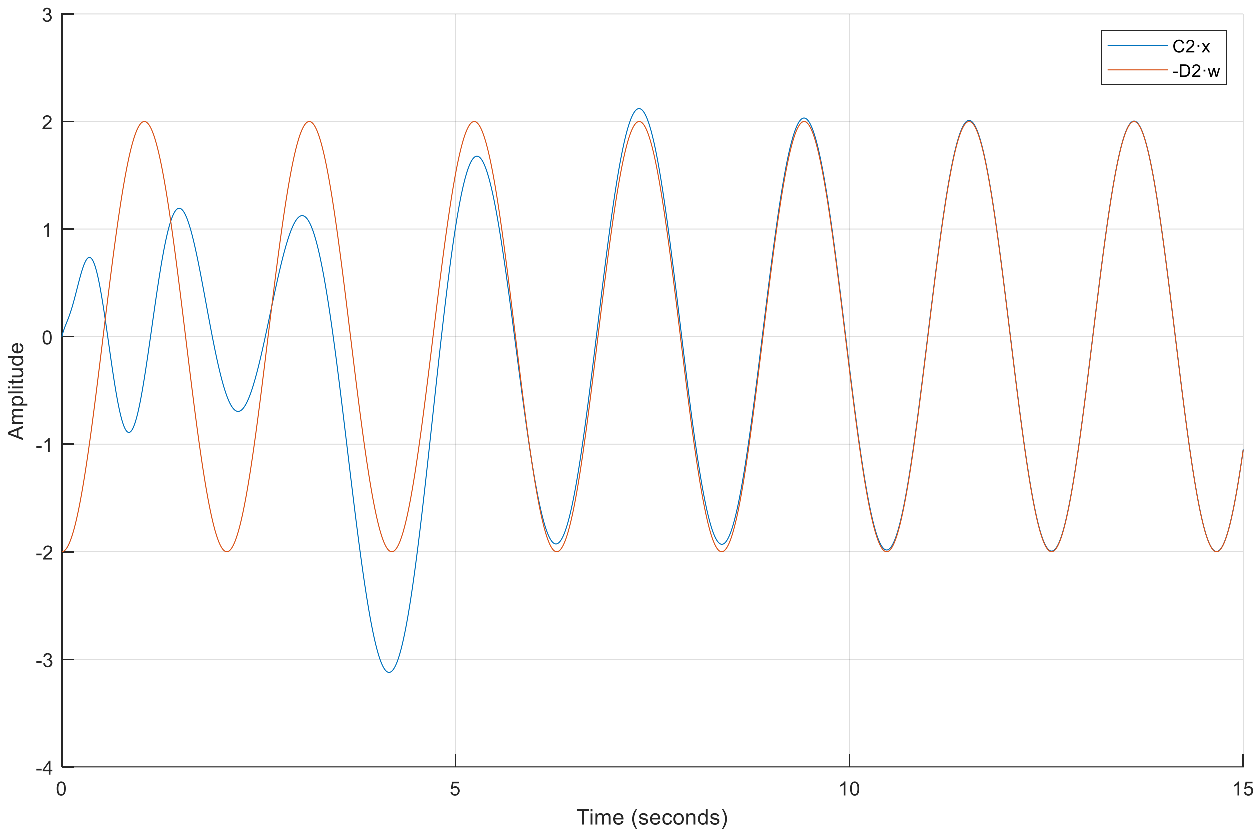

Рисунок 19 – компоненты регулируемого выхода

Задание 5. Тележка и меандр

Объект:

$$\begin{cases}\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w \\ y = C_1x + D_1w \\ z = C_2x + D_2w\end{cases}$$

Регулятор:

$$u = K_1x + K_2w$$

Тележка:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ряд Фурье для меандра:

$$g_{ideal} = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi(2k-1)ft)}{2k-1} = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \cdots\right)$$

где $\omega = 2\pi f$, f – частота, А – амплитуда сигнала

Задаем сигнал $g_{ideal}(t)$:

При $A = \frac{\pi}{2}$, $f = \frac{1}{2\pi}$: $\quad g_{ideal} = 2\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t)\right)$

Формируем конечномерный линейный генератор:

$$\dot{w} = \Gamma w$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0\end{bmatrix} \qquad w(0) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$w(t) = [\sin(t) \quad \cos(t) \quad \sin(3t) \quad \cos(3t) \quad \sin(5t) \quad \cos(5t) \quad \sin(7t) \quad \cos(7t)]^T$$

$$D_2 = \begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{7}{3} & 0\end{bmatrix}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема

Пара $\left(\begin{bmatrix}C_1 & D_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & B_2\\0 & A_2\end{bmatrix}\right)$ – обнаруживаема

$$K_1 = [-8 \quad -4]$$

$$K_2 = \left[7 \quad 4 \quad -\frac{1}{3} \quad 4 \quad -\frac{17}{5} \quad 4 \quad -\frac{41}{7} \quad 4\right]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.58 \\ -0.09 \end{bmatrix} \qquad L_2 = [-0.3 \quad -0.27 \quad -0.48 \quad 4.37 \quad -15.8 \quad 5.8 \quad -1.75 \quad -20.77]$$

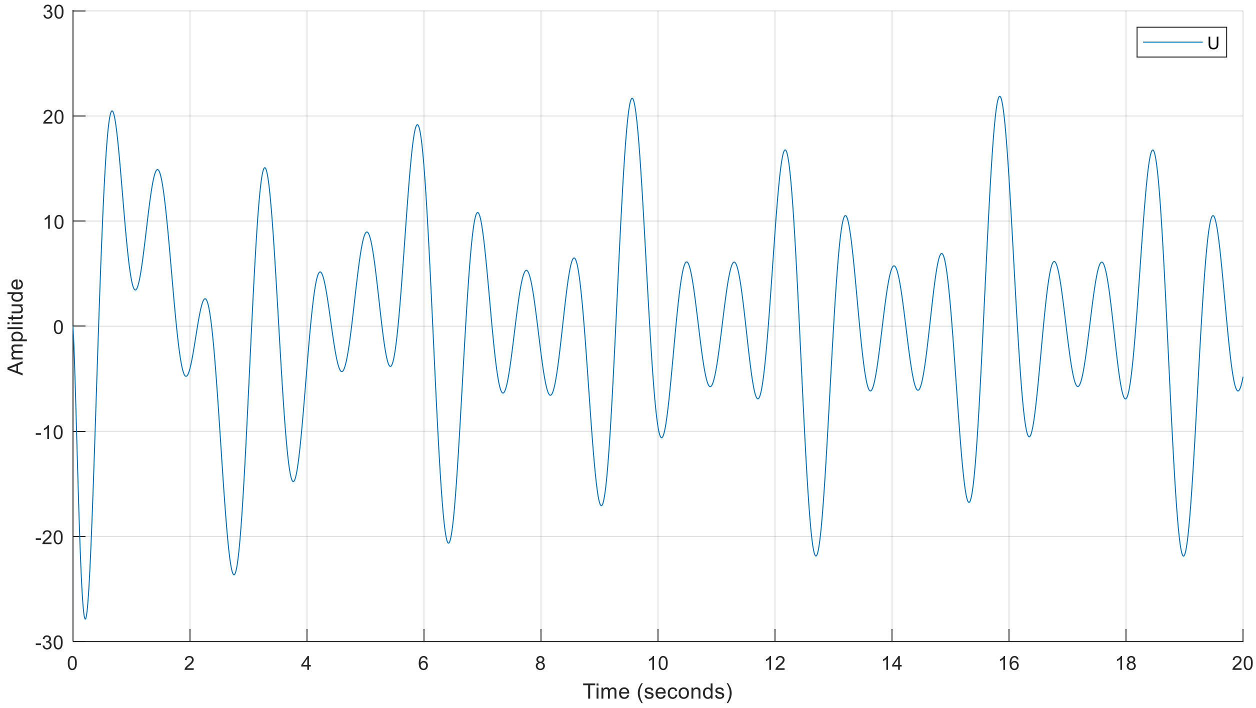

Рисунок 20 – управляющее воздействие

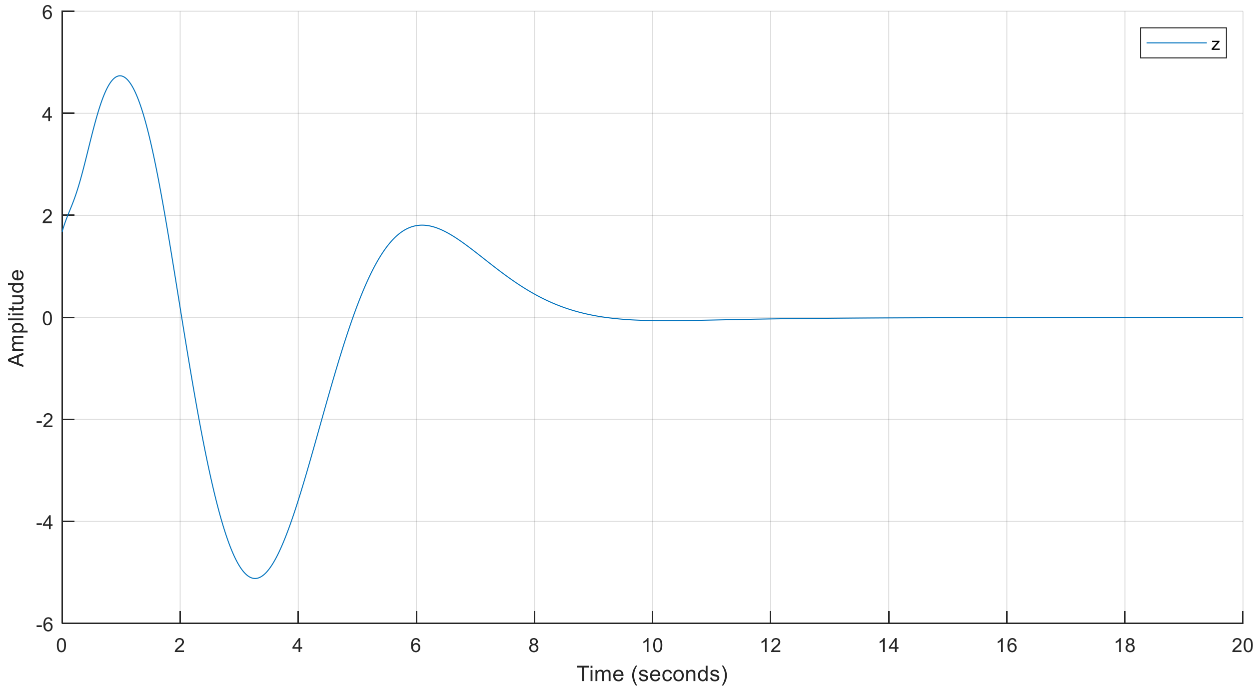

Рисунок 21 – регулируемый выход

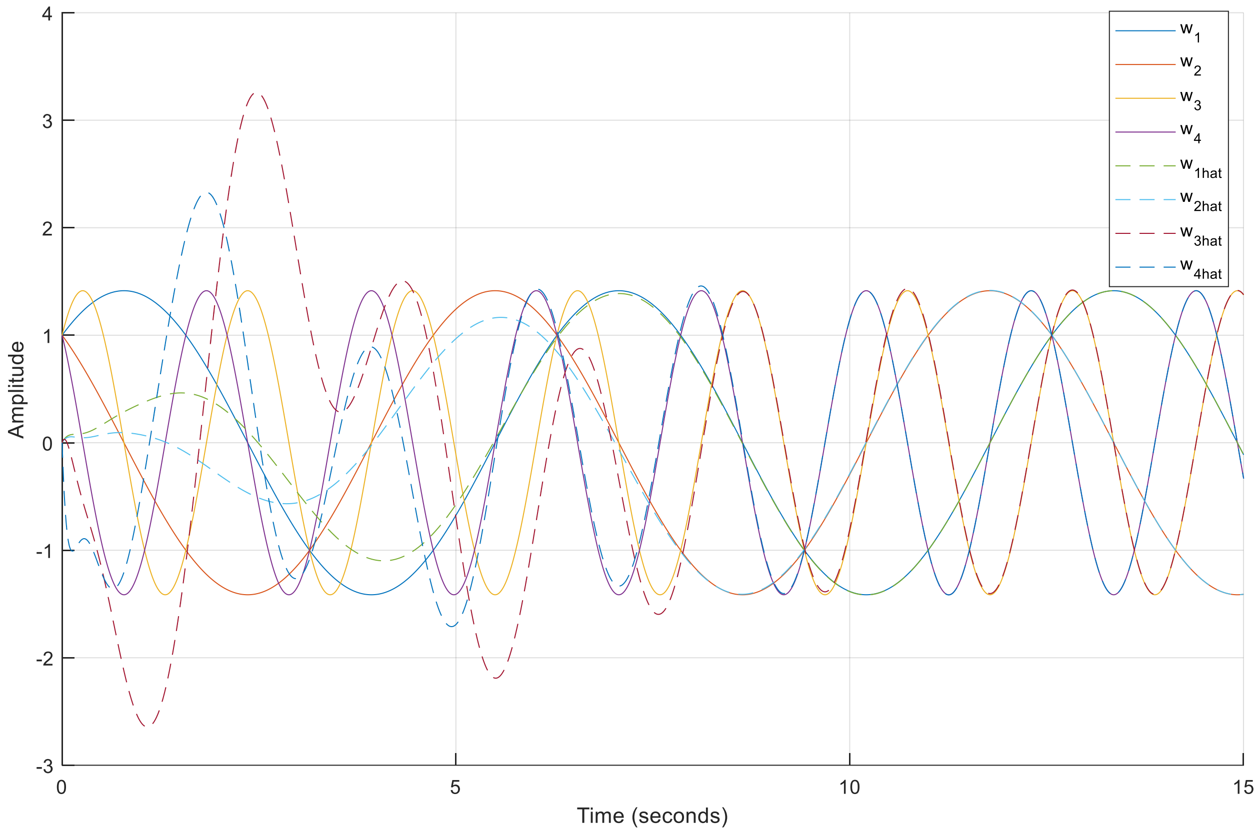

Рисунок 22 – задающее воздействия

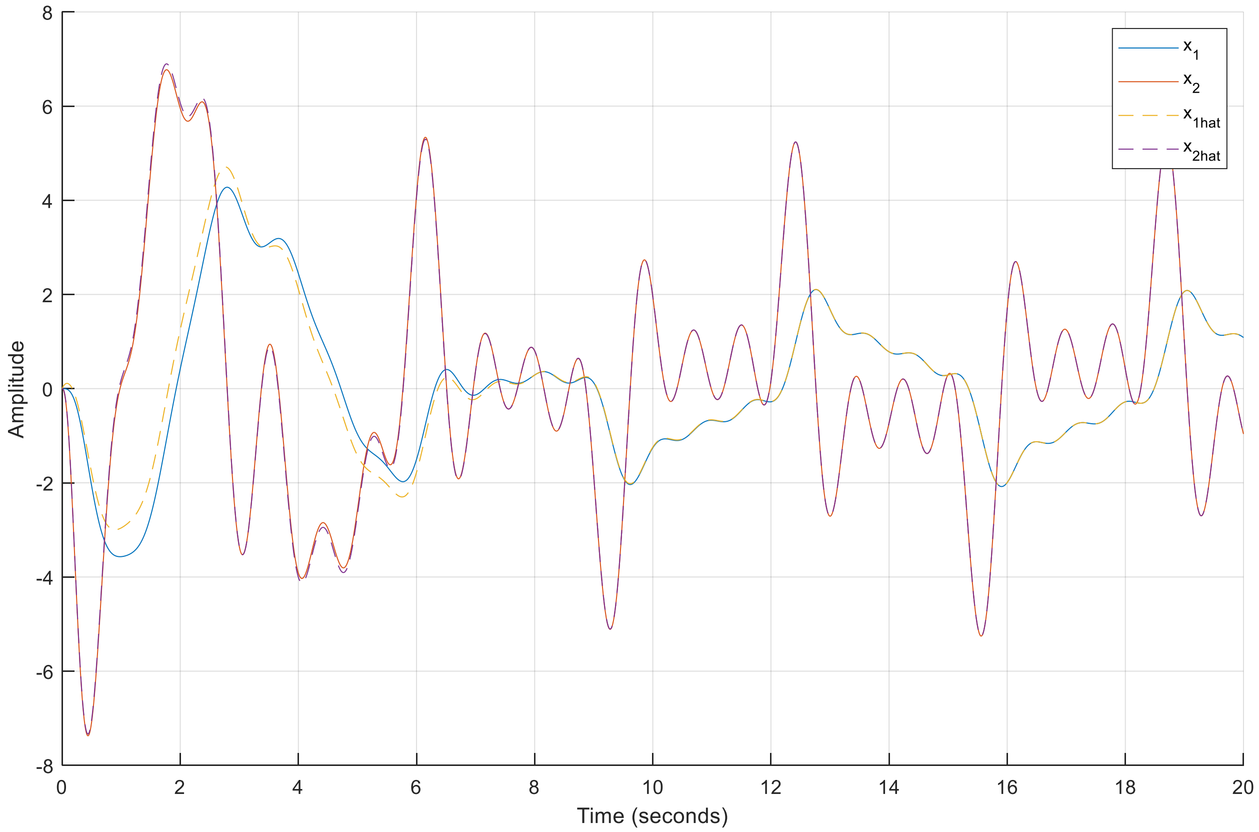

Рисунок 23 – вектор состояния

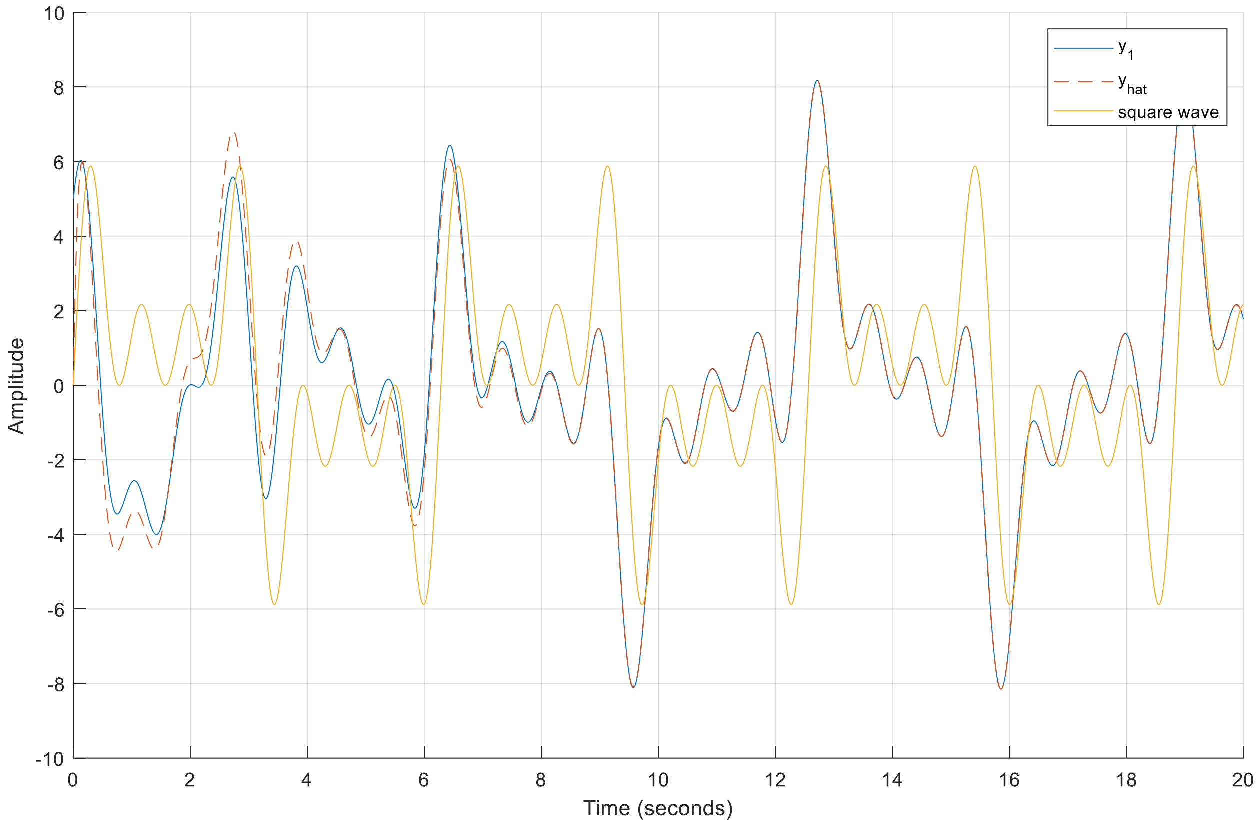

Рисунок 24 – измеряемый выход

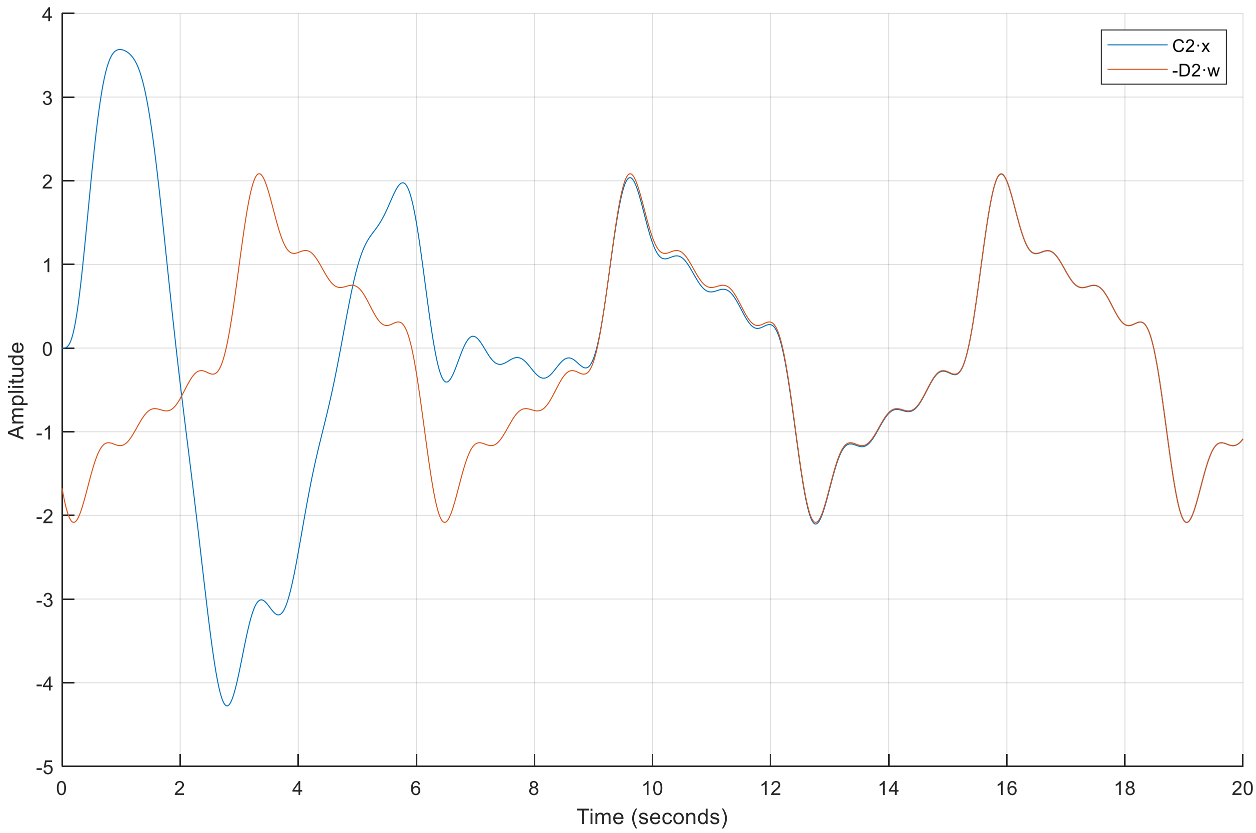

Рисунок 25 – компоненты регулируемого выхода

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были исследованы компенсирующий и следящий регуляторы по состоянию и по выходу. Во втором случае мы синтезировали регулятор при различных и одинаковых y и z. Там выполнялся принцип внутренней модели: при совпадении регулируемого и измеряемого выхода спектр матрицы возмущающего воздействия включается в спектр матрицы регулятора. Также построили математическую модель простого тела(тележки), где был создан следящий регулятор по выходу. Регулируемый выход сходился к нулю, но выходной сигнал все же не стремился идеально к меандру из-за помех.