

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники



Теория автоматического управления

Лабораторная работа №9

«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

Выполнил студент:

Мысов М.С. (В-8)

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1.....	3
Задание 2.....	7
Задание 3.....	13
Задание 4.....	22
Выводы	25

Задание 1

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Схема моделирования системы с регулятором

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ с регулятором } u = Kx$$

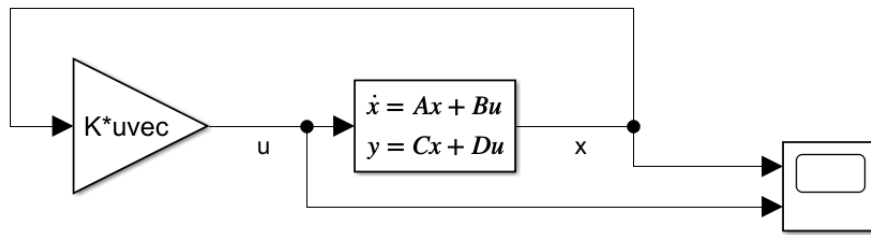


Рисунок 1 – схема моделирования системы с регулятором $u = Kx$

Желаемые степени устойчивости

$$\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad \alpha_3 = 1$$

Ищем регулятор и собственные числа

Регуляторы находим на основе неравенств:

$$P > 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY$$

$$\alpha_1 = 0.1: K = [0 \quad -4.02 \quad -6.2 \quad 0.58], \sigma(A + BK) = \{-3.34 + 7.67i, -3.34 - 7.67i, -1.9, -1\}$$

$$\alpha_2 = 0.5: K = [0 \quad -5.13 \quad -7.53 \quad 1.3], \sigma(A + BK) = \{-3.9 + 8.4i, -3.9 - 8.4i, -2.12, -1\}$$

$$\alpha_3 = 1: K = [0 \quad -5.2 \quad -7.64 \quad 1.52], \sigma(A + BK) = \{-3.5 + 9.1i, -3.5 - 9.1i, -1.9 - 1\}$$

Строим графики

$$x^T(0) = [-7 \quad -5 \quad 2 \quad 10]$$

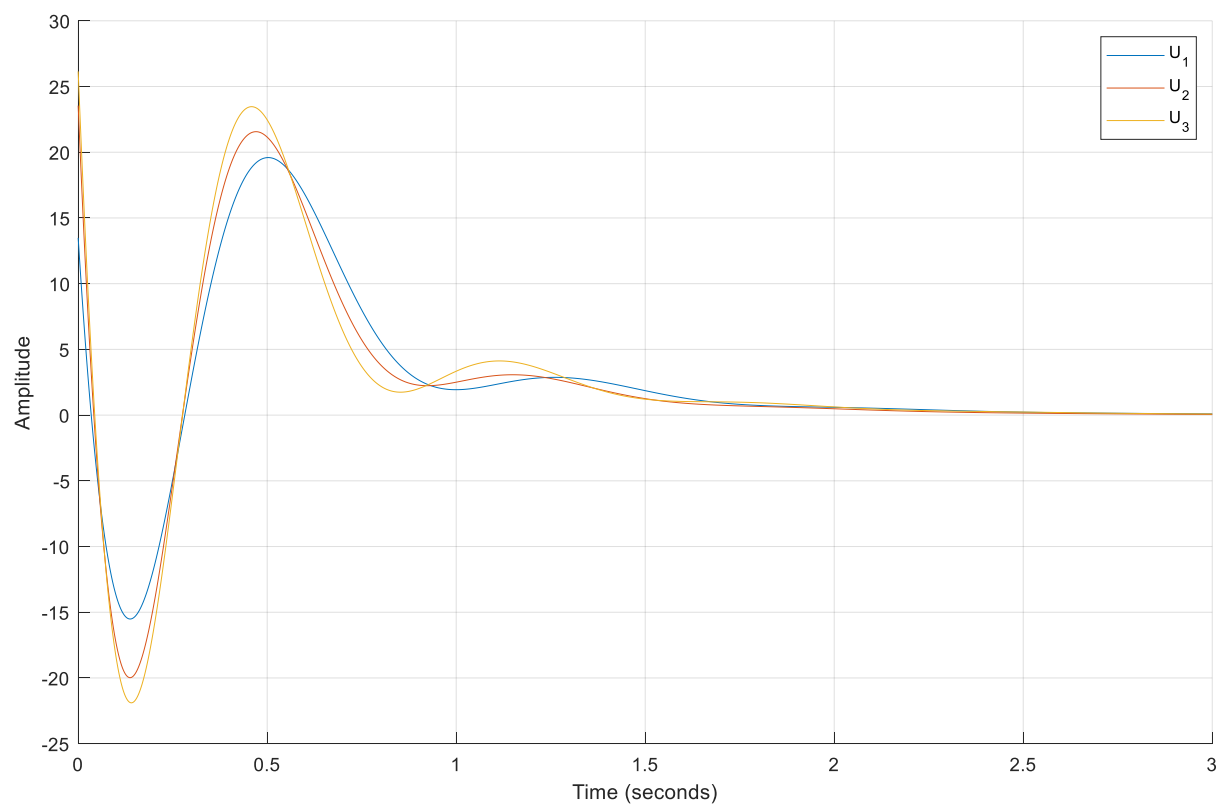


Рисунок 2 – входные воздействия

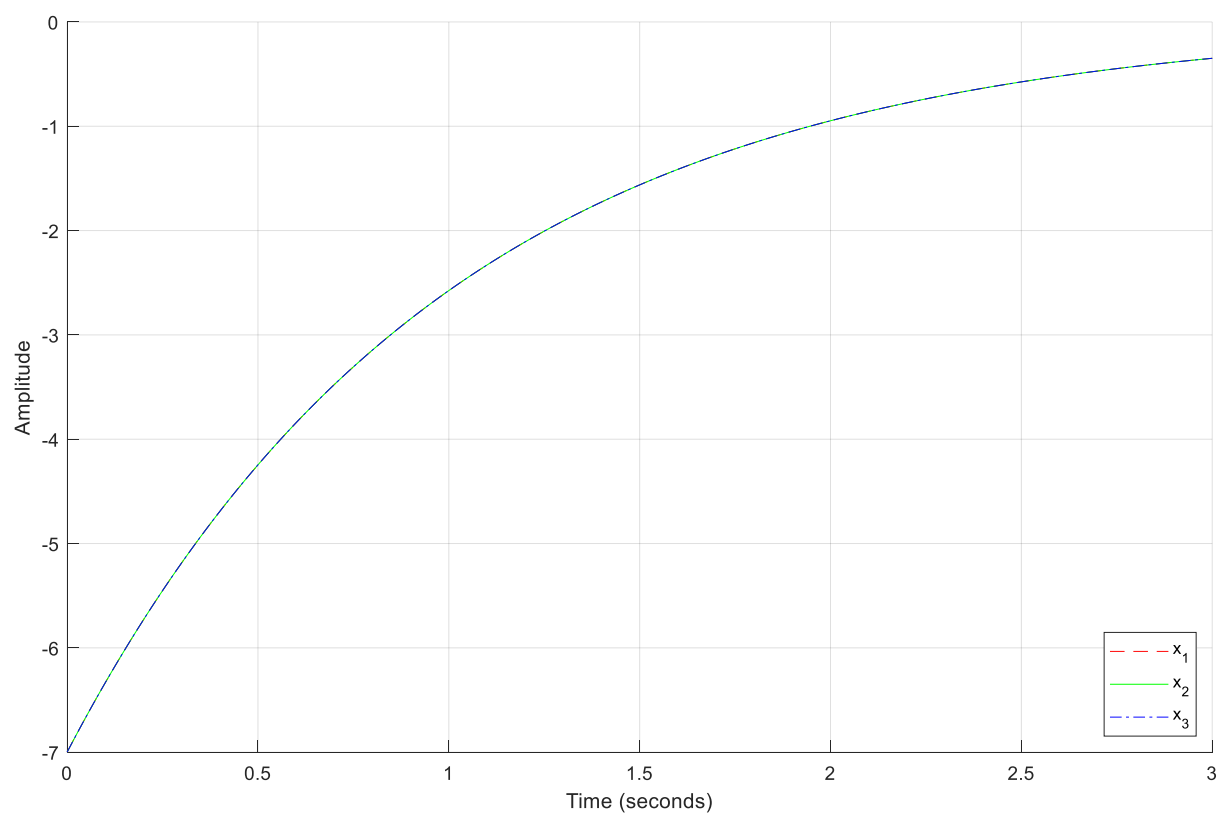


Рисунок 3 – первая компонента вектора состояния

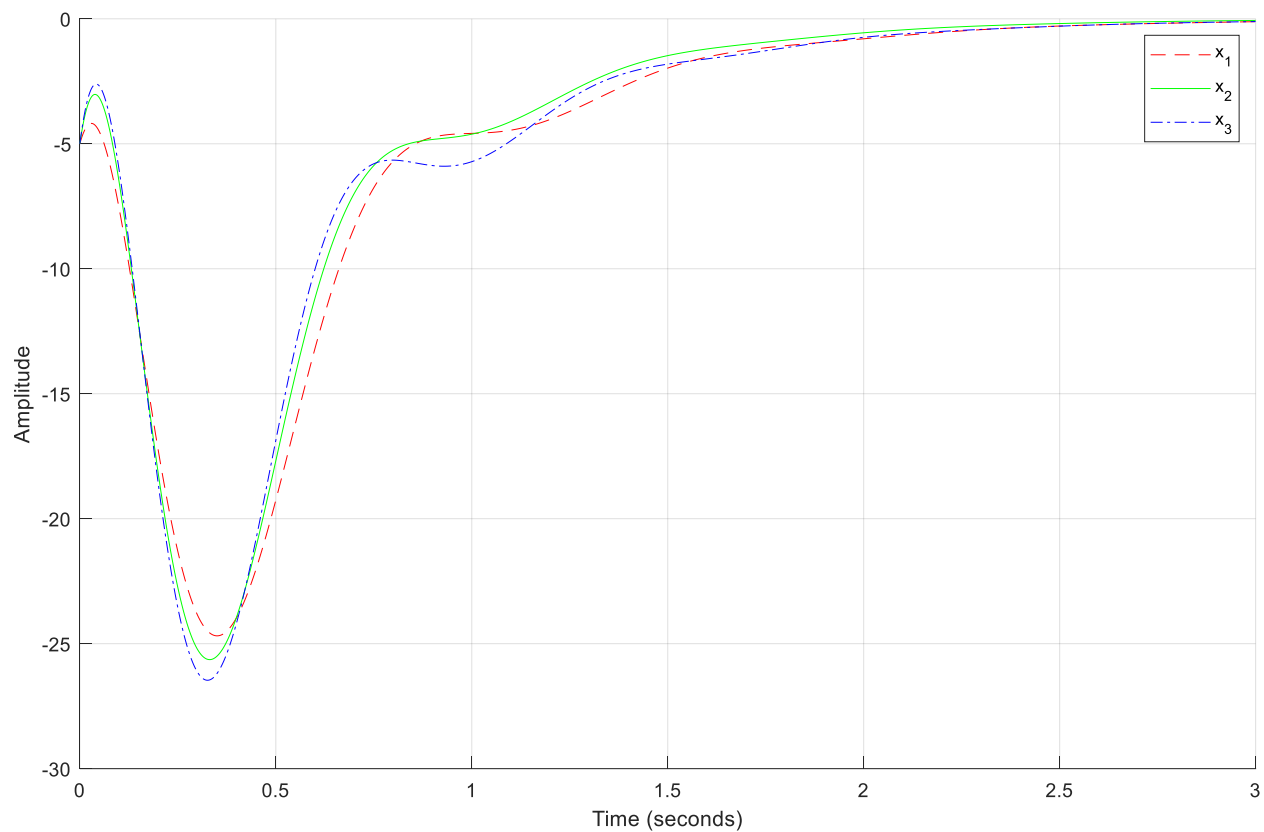


Рисунок 4 – вторая компонента вектора состояния

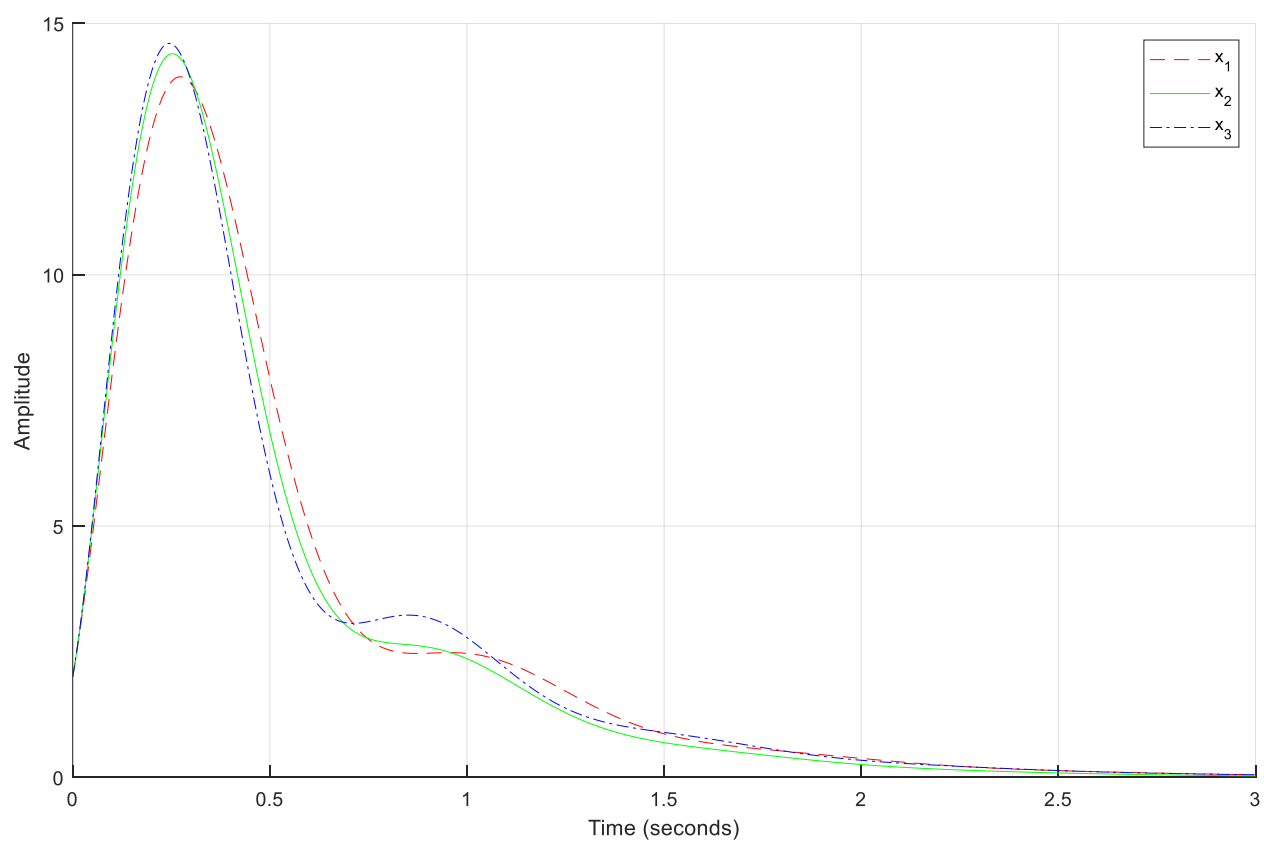


Рисунок 5 – третья компонента вектора состояния

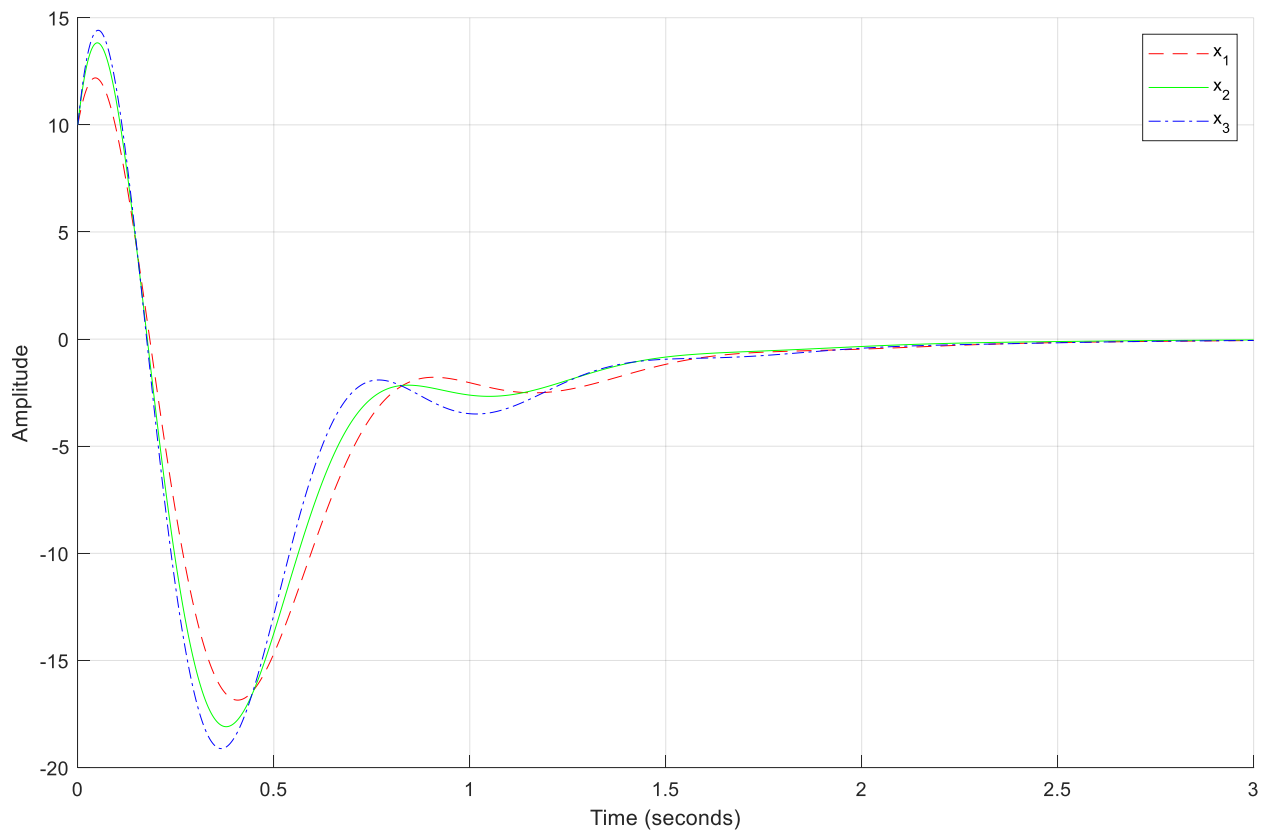


Рисунок 6 – четвертая компонента вектора состояния

Чем больше α желаемая степень устойчивости замкнутой системы, тем быстрее сходятся компоненты вектора и тем большее входное воздействие нужно задействовать. Причем часто минимальное собственное число гораздо меньше желаемого.

Код Matlab

```
A = [-1, 0, 0, 0; 0, 2, 0, 0; 0, 0, 3, 4; 0, 0, -4, 3];
B = [0; 5; 0; 6];
C = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1];
D = zeros(4, 1);
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [-7; -5; 2; 10];

% Desired decay rate
a = [0.1, 0.5, 1];

% Lyapunov inequality
cvx_begin sdp;
variable P(4,4);
variable Y(1,4);
P > 0.0001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*a(1,1)*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
cvx_end
K_1 = Y*inv(P);

cvx_begin sdp;
variable P(4,4);
variable Y(1,4);
P > 0.0001*eye(4);
```

```

P*A' + A*P + 2*a(1,2)*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
cvx_end
K_2 = Y*inv(P);

cvx_begin sdp;
variable P(4,4);
variable Y(1,4);
P > 0.0001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*a(1,3)*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
cvx_end
K_3 = Y*inv(P);

```

Задание 2

$\alpha = 0.5$ желаемая степень устойчивости системы

μ – ограничитель на входное воздействие: $|u(t)| \leq \mu$

μ	$\sigma(A + BK)$
20	$\{-0.5121 \pm 2.8975i, -0.8516, -1\}$
22	$\{-0.5881 \pm 3.3148i, -0.8377, -1\}$
28	$\{-0.6791 \pm 3.9241i, -0.7693, -1\}$

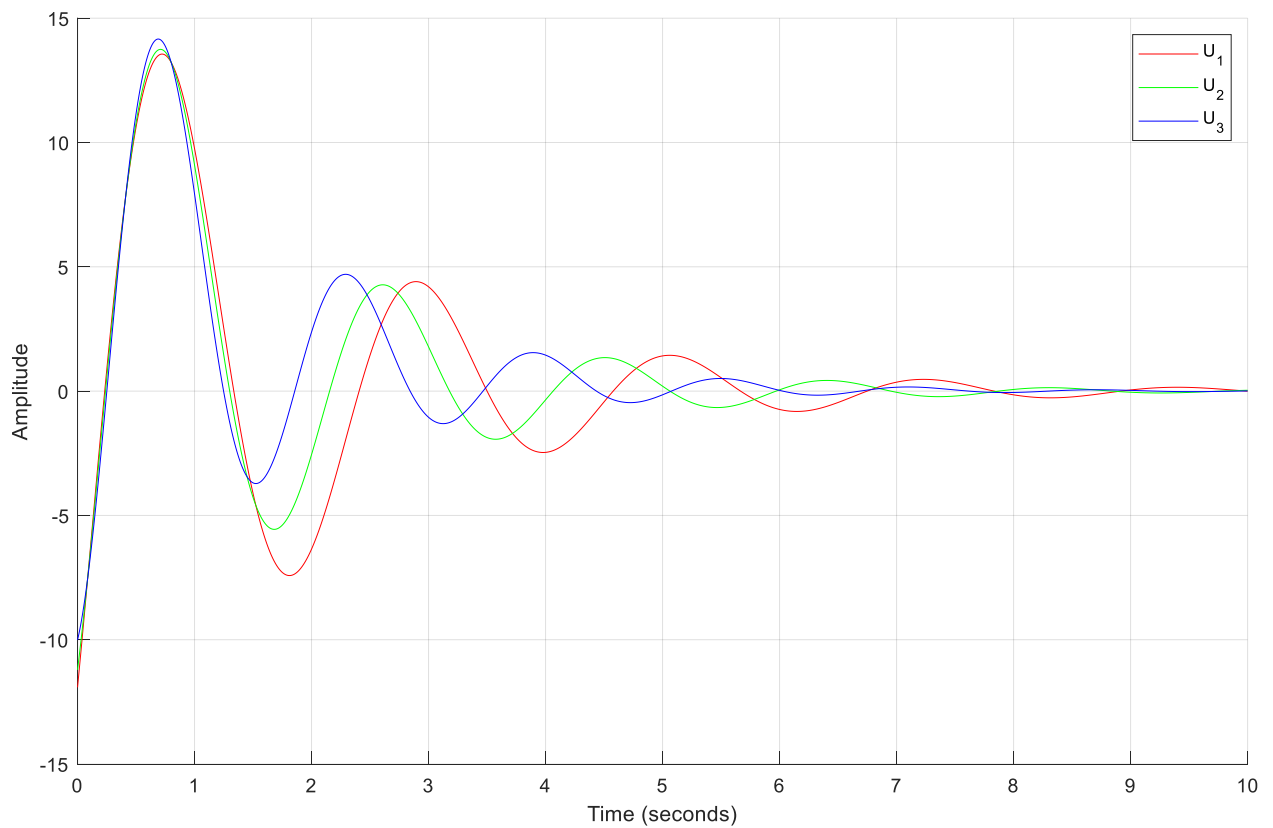


Рисунок 7 – входные воздействия

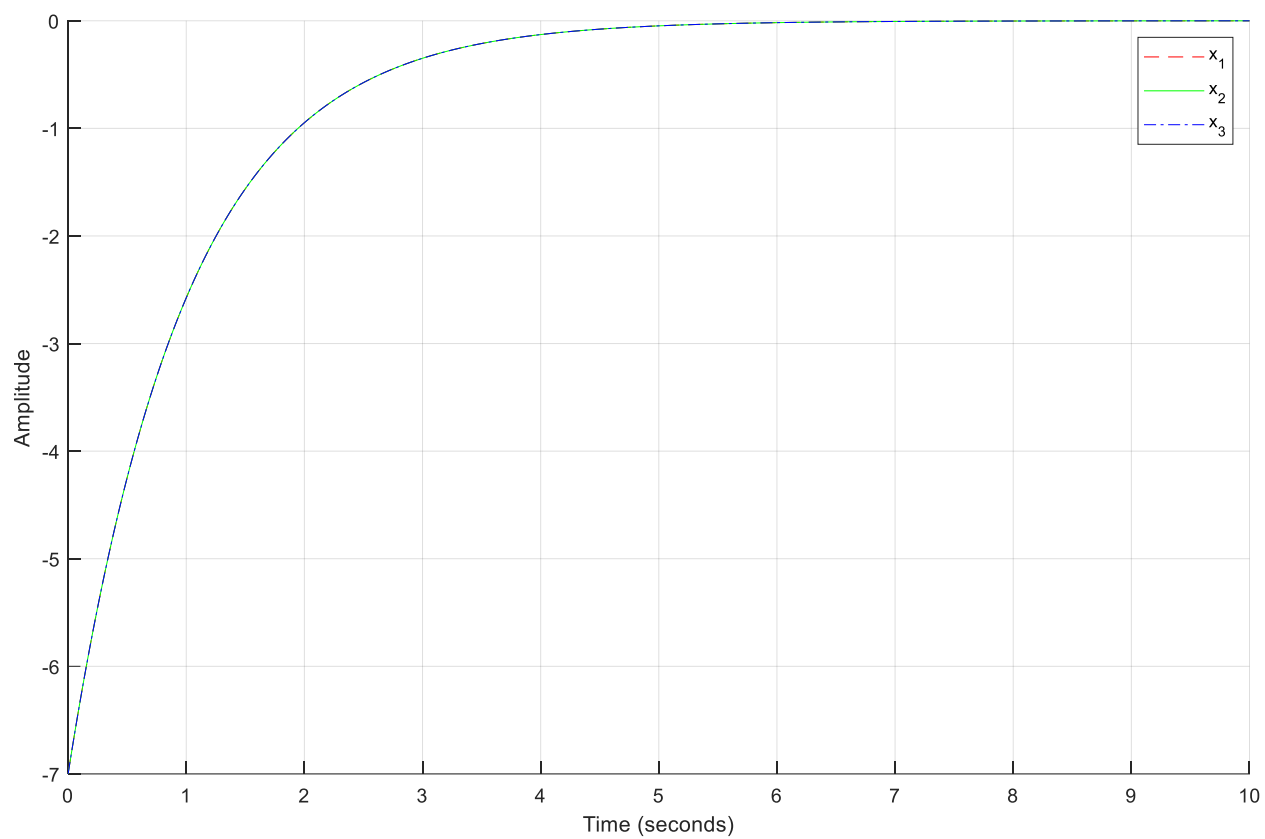


Рисунок 8 – первая компонента вектора состояния

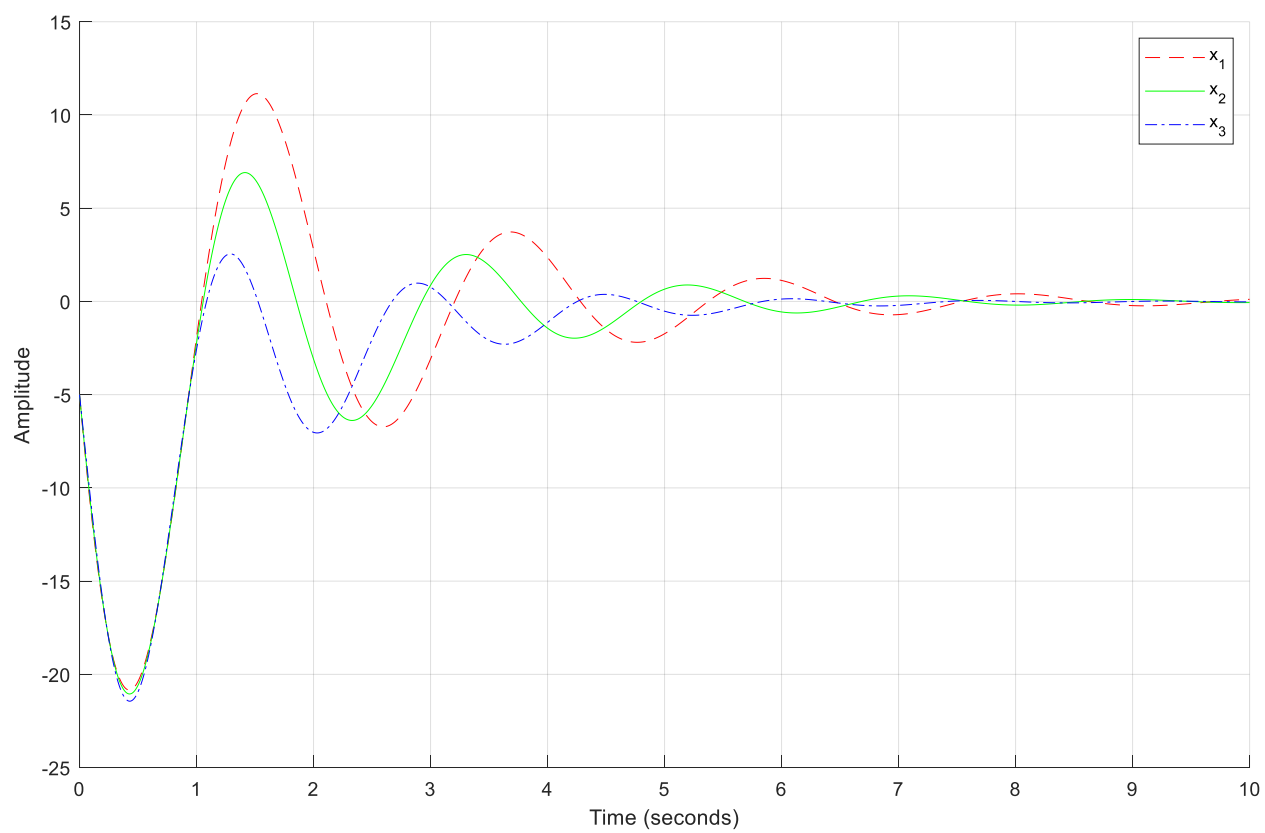


Рисунок 9 – вторая компонента вектора состояния

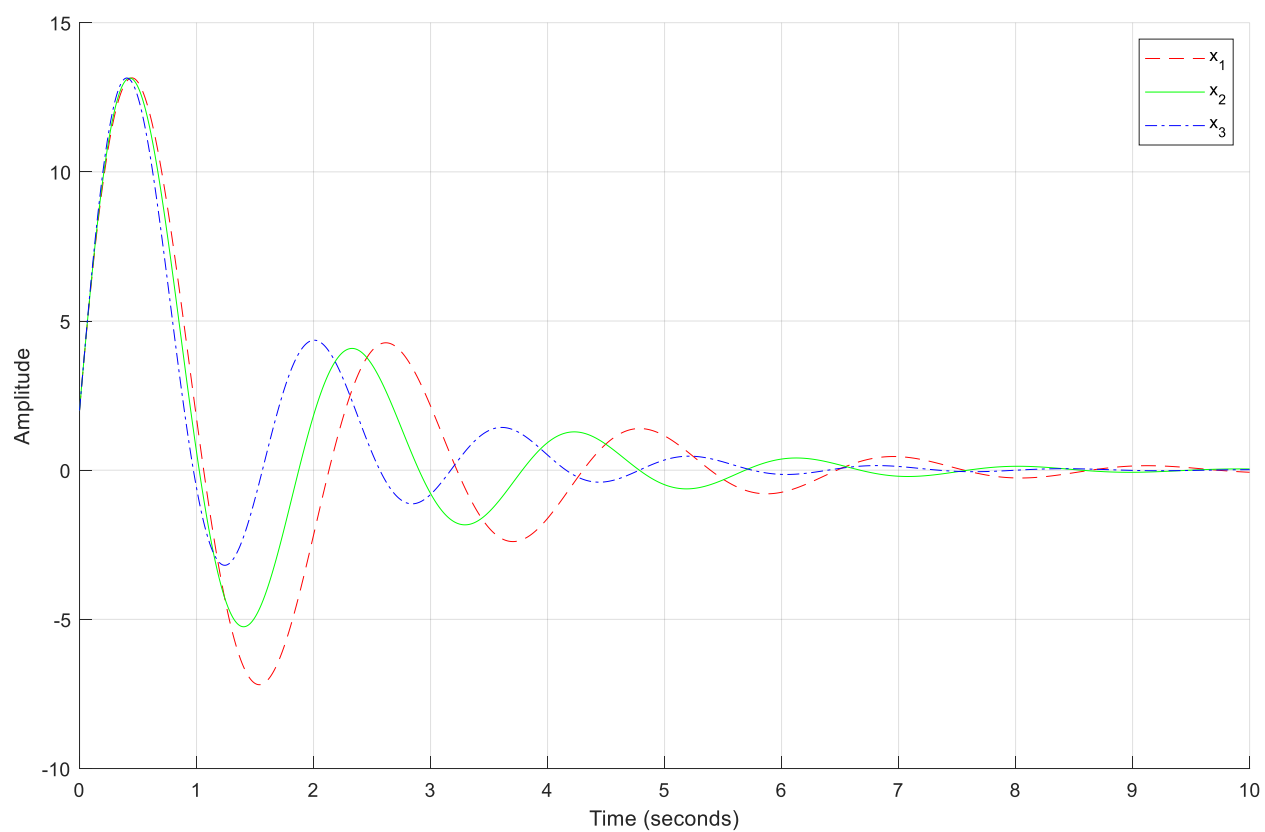


Рисунок 10 – третья компонента вектора состояния

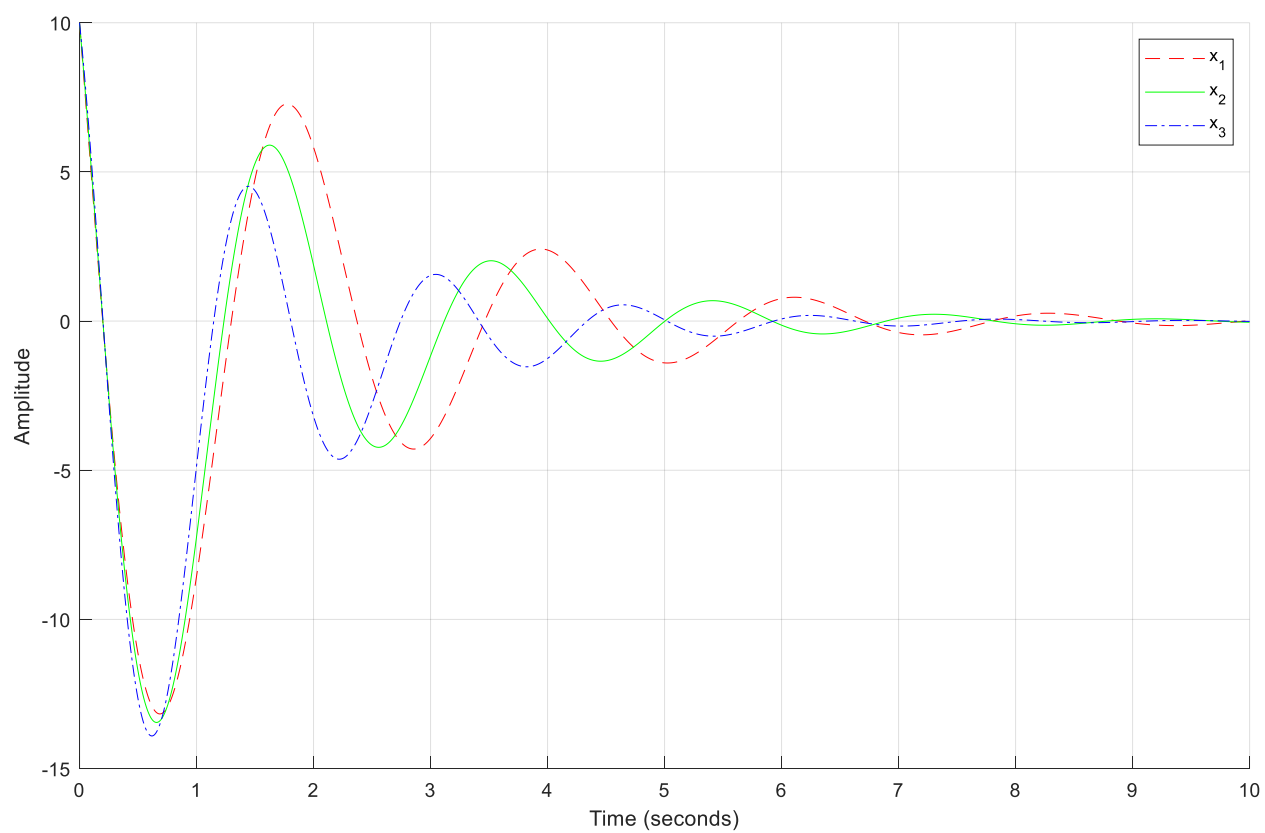


Рисунок 11 – четвертая компонента вектора состояния

Чем больше было ограничение, тем быстрее сходились графики компонент вектора состояния. Входное воздействие во всех случаях всегда было меньше ограничения, но не на порядок.

Для $\mu < \lambda \approx 20$ матричное уравнение относительно P и Y не имело решений.

Задача минимизации для всех α :

α	μ	$\sigma(A+BK)$
0.1	15.82	$\{-0.1 \pm 3.072i, -0.88, -1\}$
0.5	19.74	$\{-0.5 \pm 2.83i, -2.11, -1\}$
1	27.13	$\{-1 \pm 2.41i, -1, -1\}$

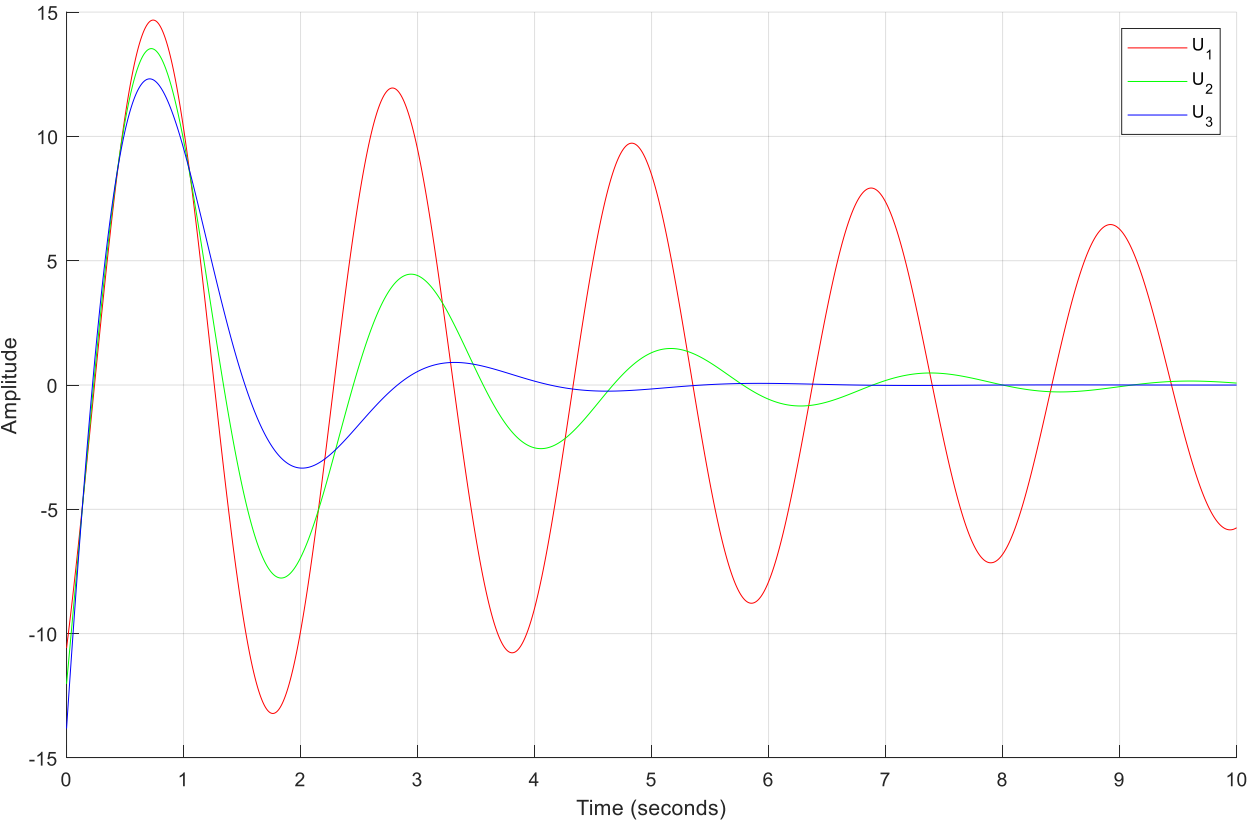


Рисунок 12 – входные воздействия

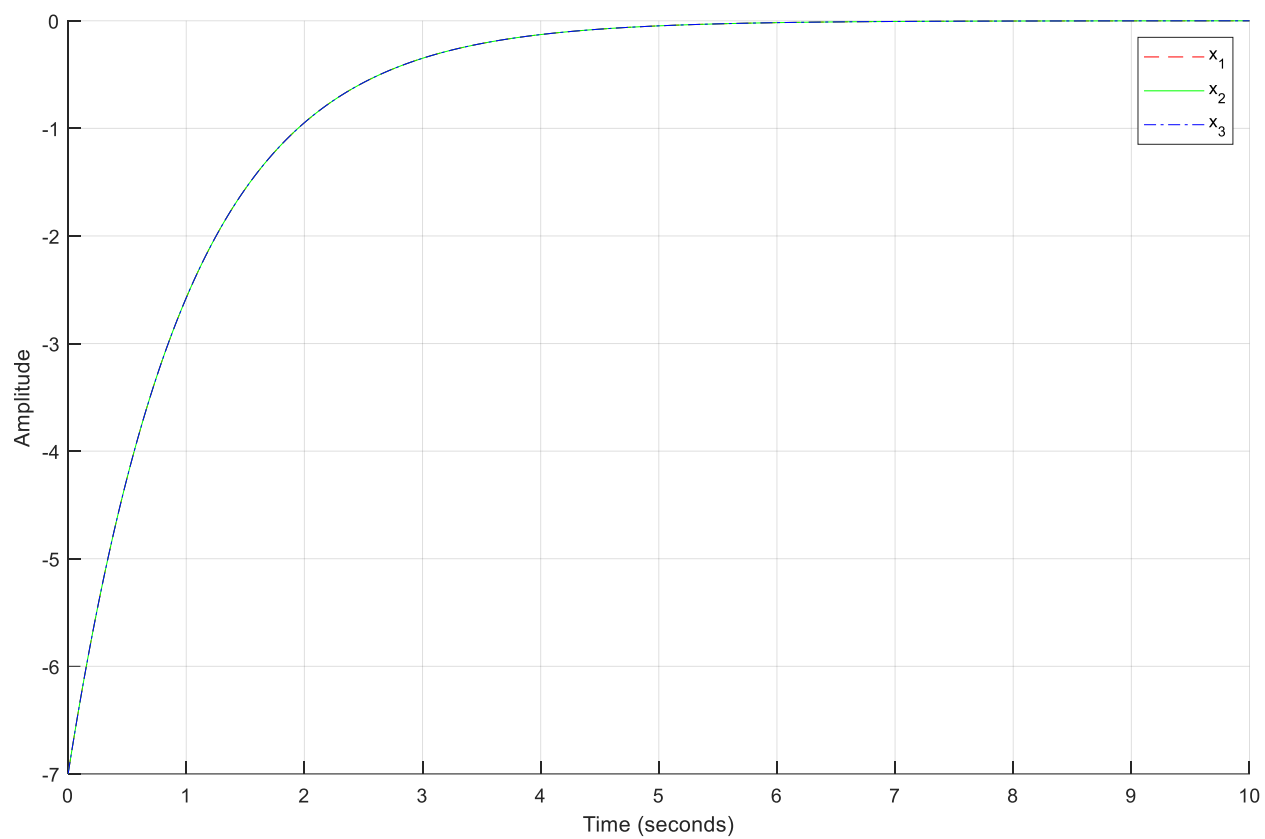


Рисунок 13 – первая компонента вектора состояния

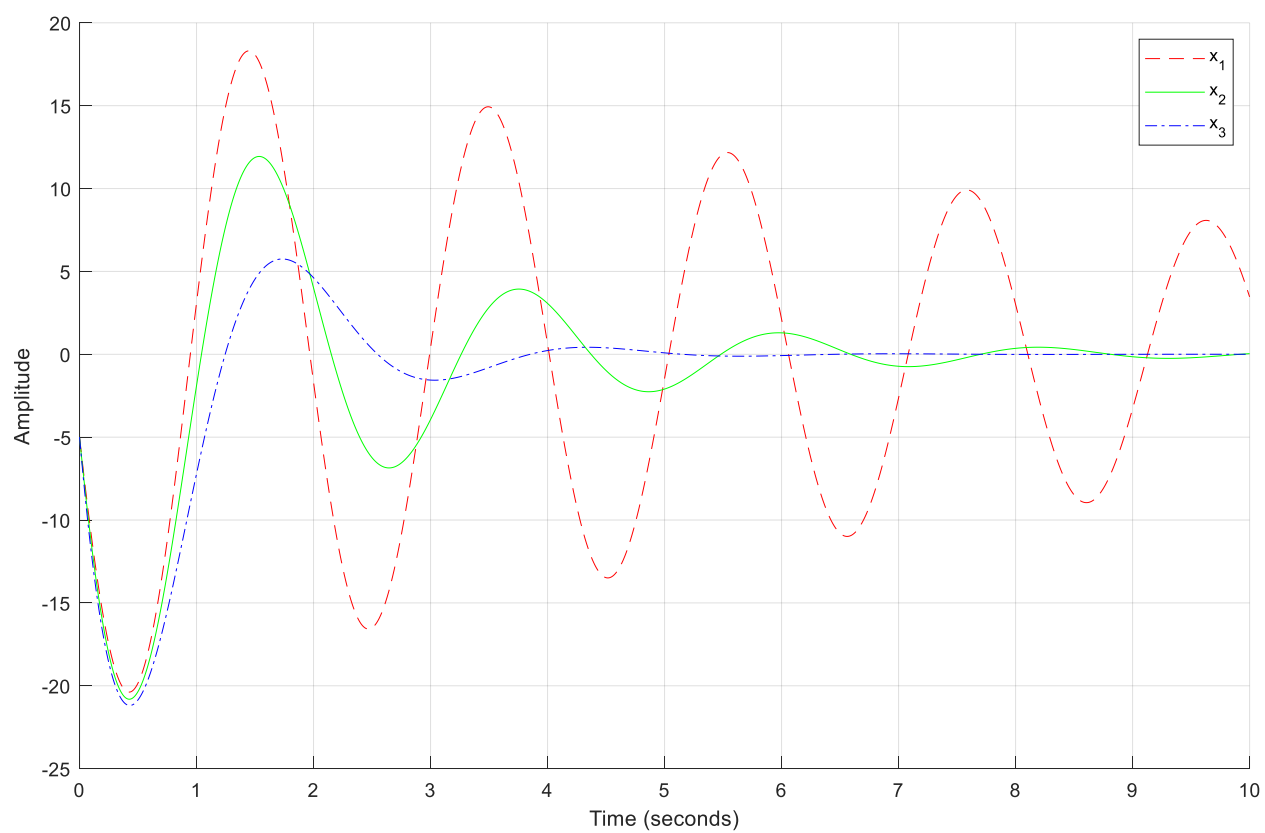


Рисунок 14 – вторая компонента вектора состояния

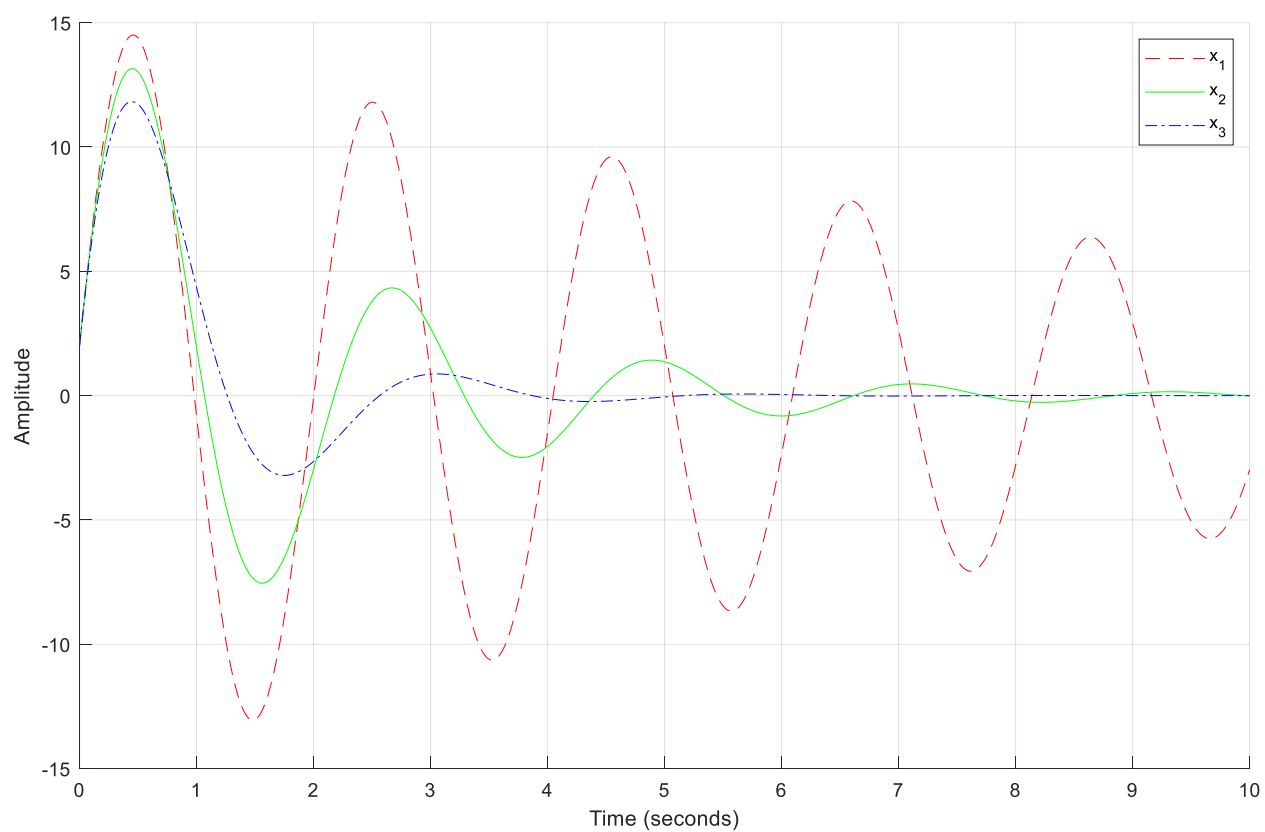


Рисунок 15 – третья компонента вектора состояния

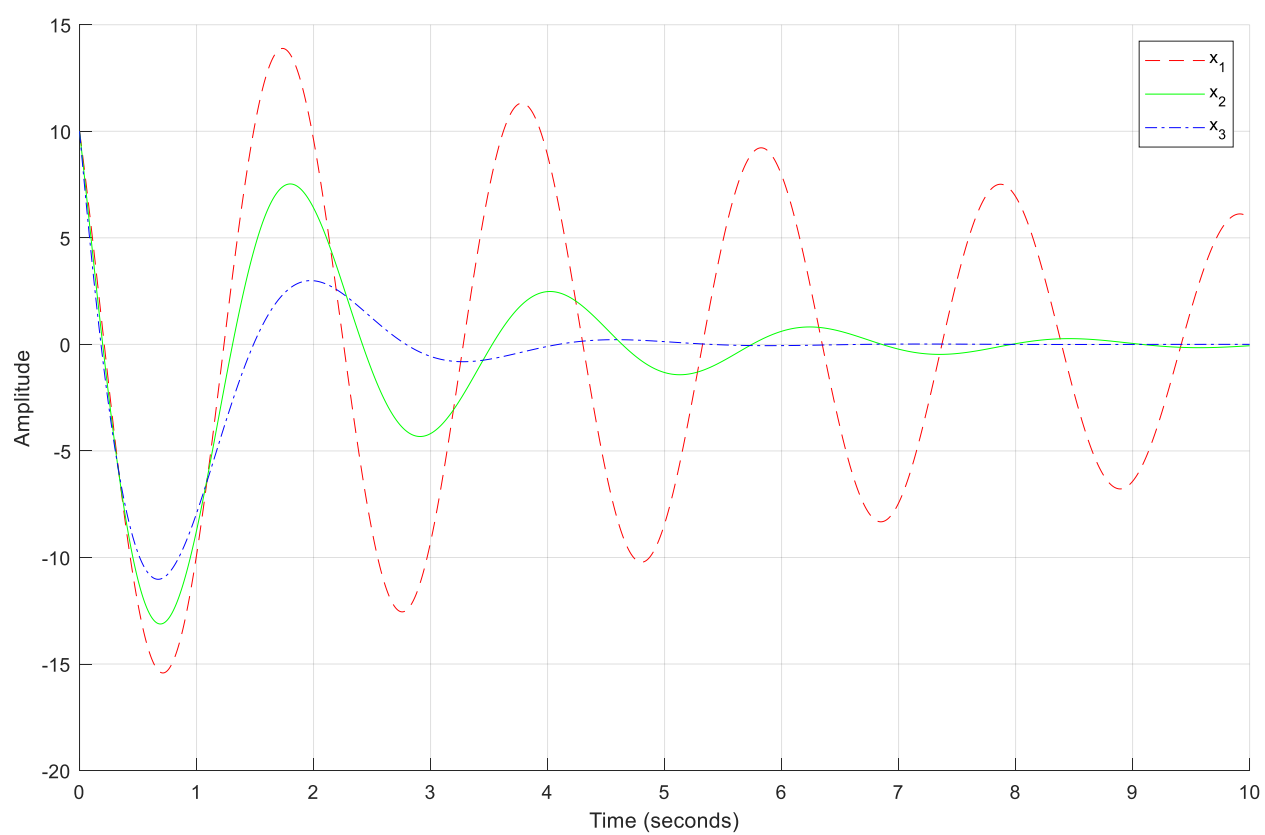


Рисунок 16 – четвертая компонента вектора состояния

Задание 3

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

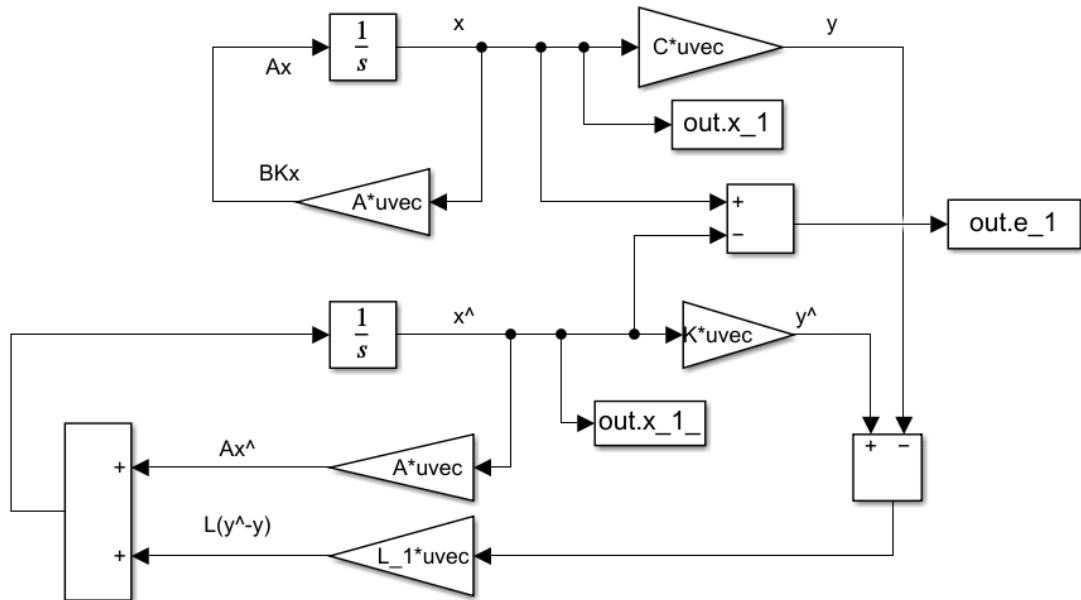


Рисунок 17 – схема моделирования с наблюдателем

α	L^T	$\sigma(A + BK)$
1	[2.8294 -5.3387 -4.2072 -5.3954]	$\{-2.7283 \pm 3.359i, -2.5355 \pm 1.352i\}$
3	[149.6241 22.0946 -209.05 -112.41]	$\{-14.1683 \pm 1.801i, -4.8263 \pm 1.9419i\}$
9	[870.7 1158.4 2699.6 -593.9]	$\{-10.9633 \pm 23.016i, -9.2858 \pm 3.904i\}$

Код Matlab

```
A = [0, 3, 0, 0; -3, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, -1, 0];
B = [0; 0; 0; 0];
C = [2, 0, 0, 3];
D = 0;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [5; -10; 2; -6];
x_0 = [2; 5; -2; 10];

% Desired decay rate
a = [1, 3, 9];

% Lyapunov inequality
cvx_begin sdp;
variable Q(4,4);
variable Y(4,1);
Q > 0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A + 2*a(1,1)*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
cvx_end
```

```

L_1 = inv(Q)*Y;

cvx_begin sdp;
variable Q(4,4);
variable Y(4,1);
Q > 0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A + 2*a(1,2)*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
cvx_end
L_2 = inv(Q)*Y;

cvx_begin sdp;
variable Q(4,4);
variable Y(4,1);
Q > 0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A + 2*a(1,3)*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
cvx_end
L_3 = inv(Q)*Y;

```

Графики

$$x^T(0) = [5 \quad -10 \quad 2 \quad -6] \quad \hat{x}^T(0) = [-2 \quad 5 \quad -2 \quad 10]$$

Для $\alpha = 0.2$:

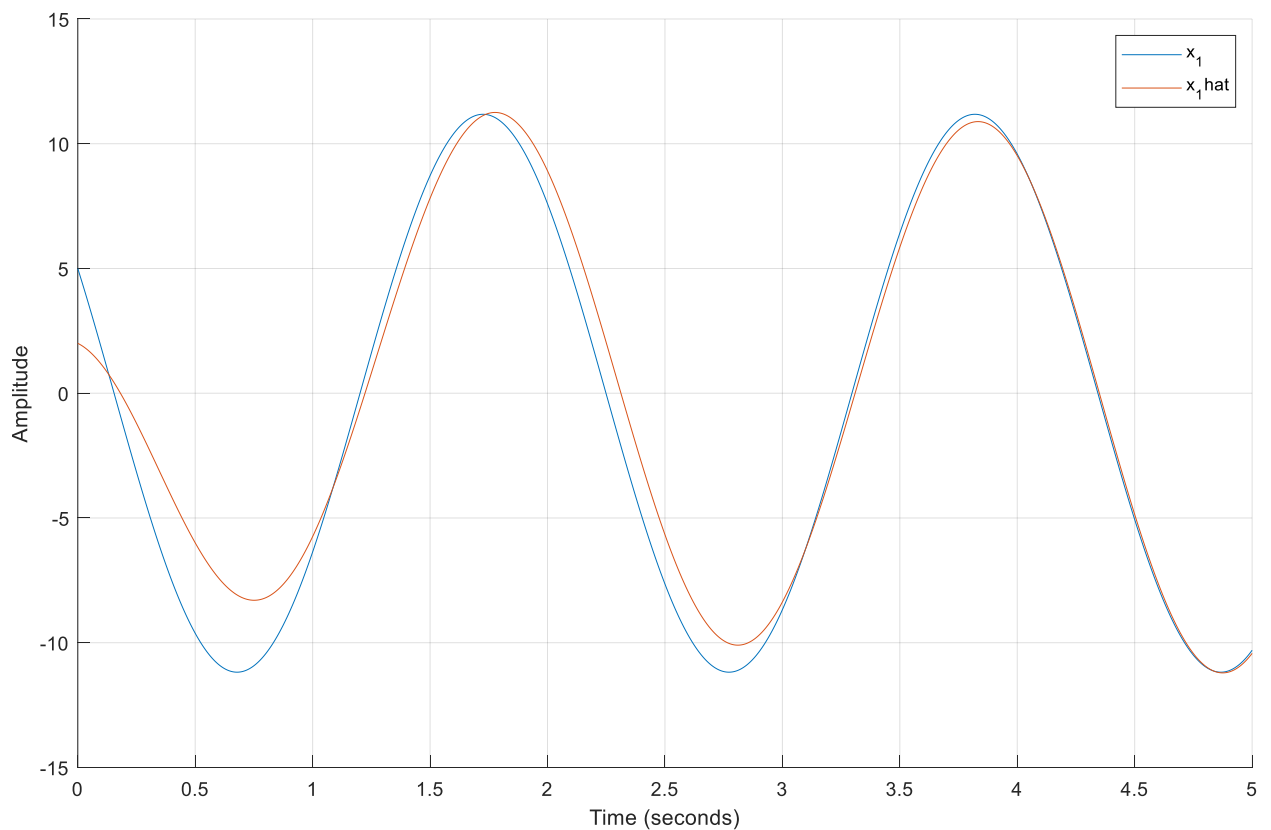


Рисунок 18 – первая компонента вектора состояния

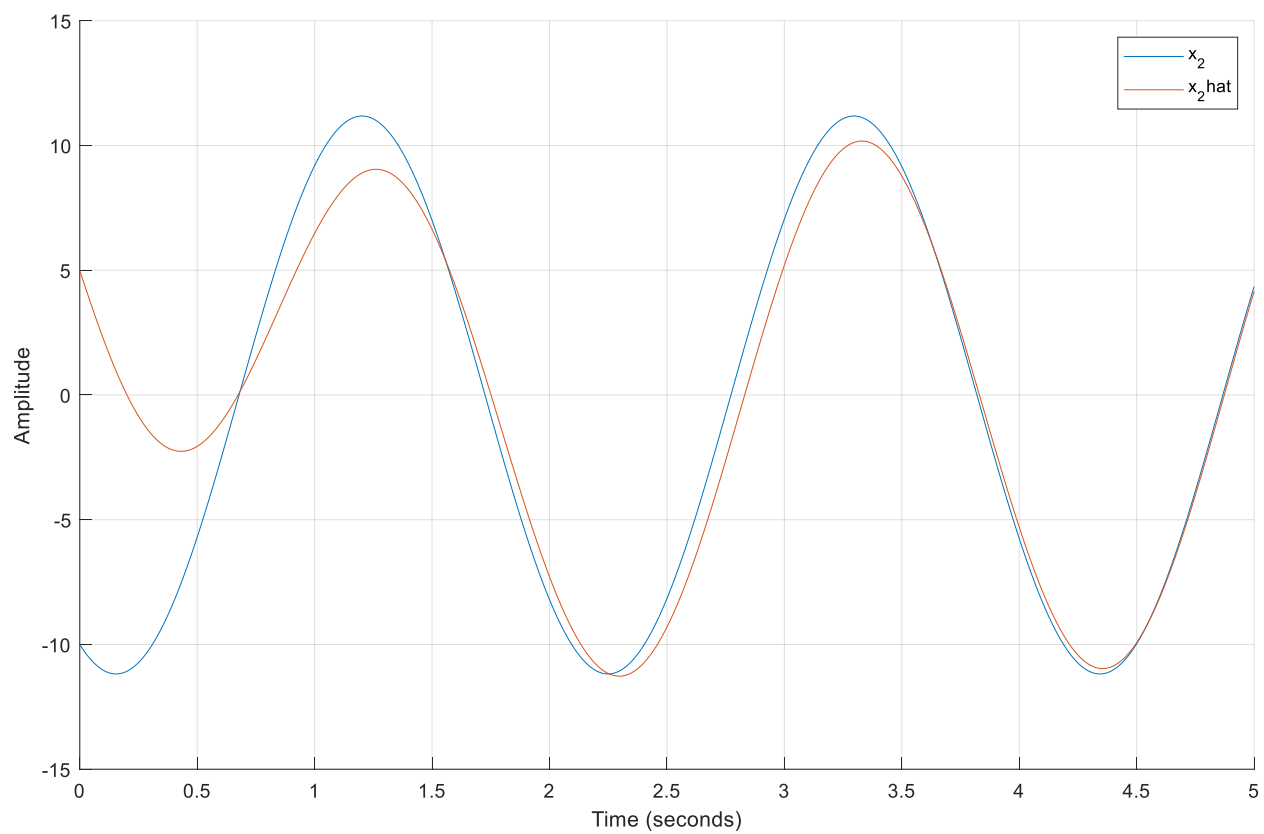


Рисунок 19 – вторая компонента вектора состояния

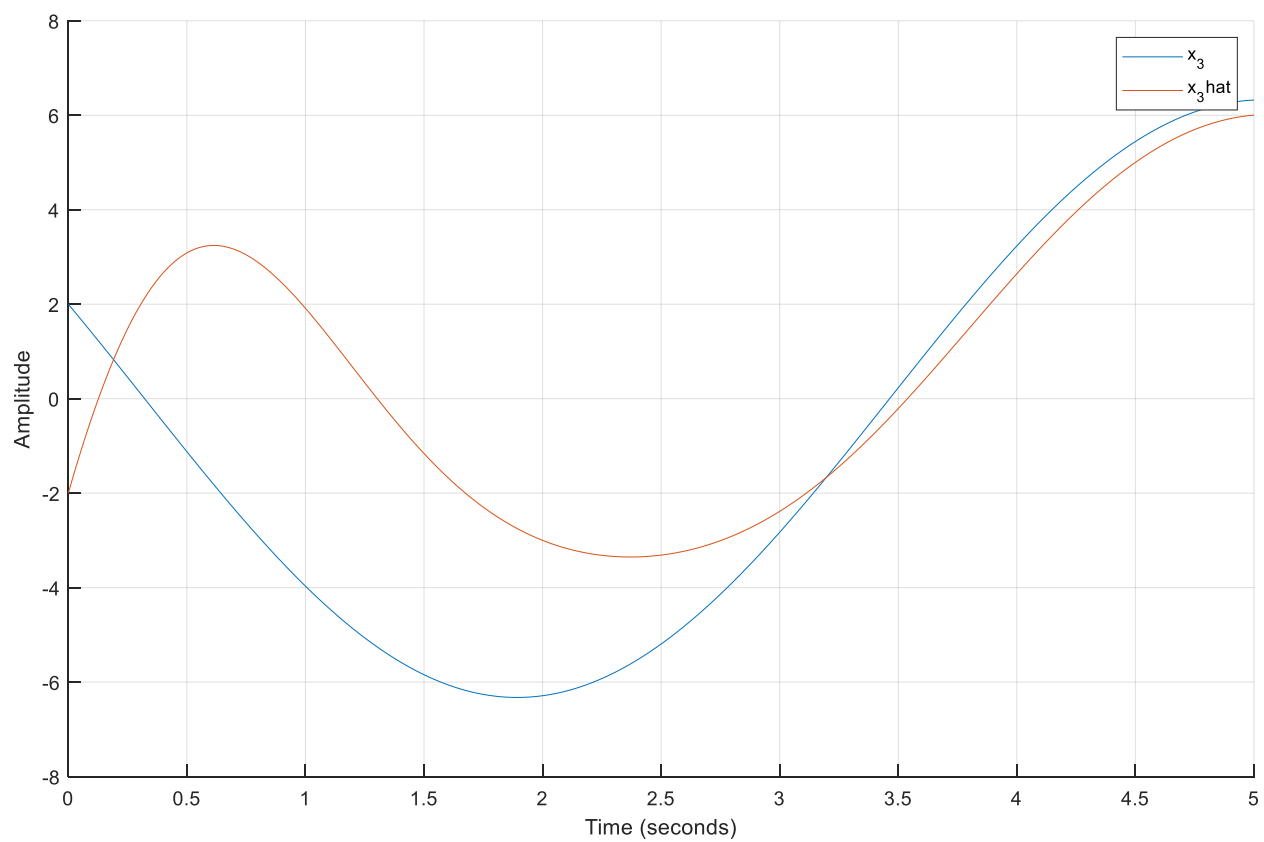


Рисунок 20 – третья компонента вектора состояния

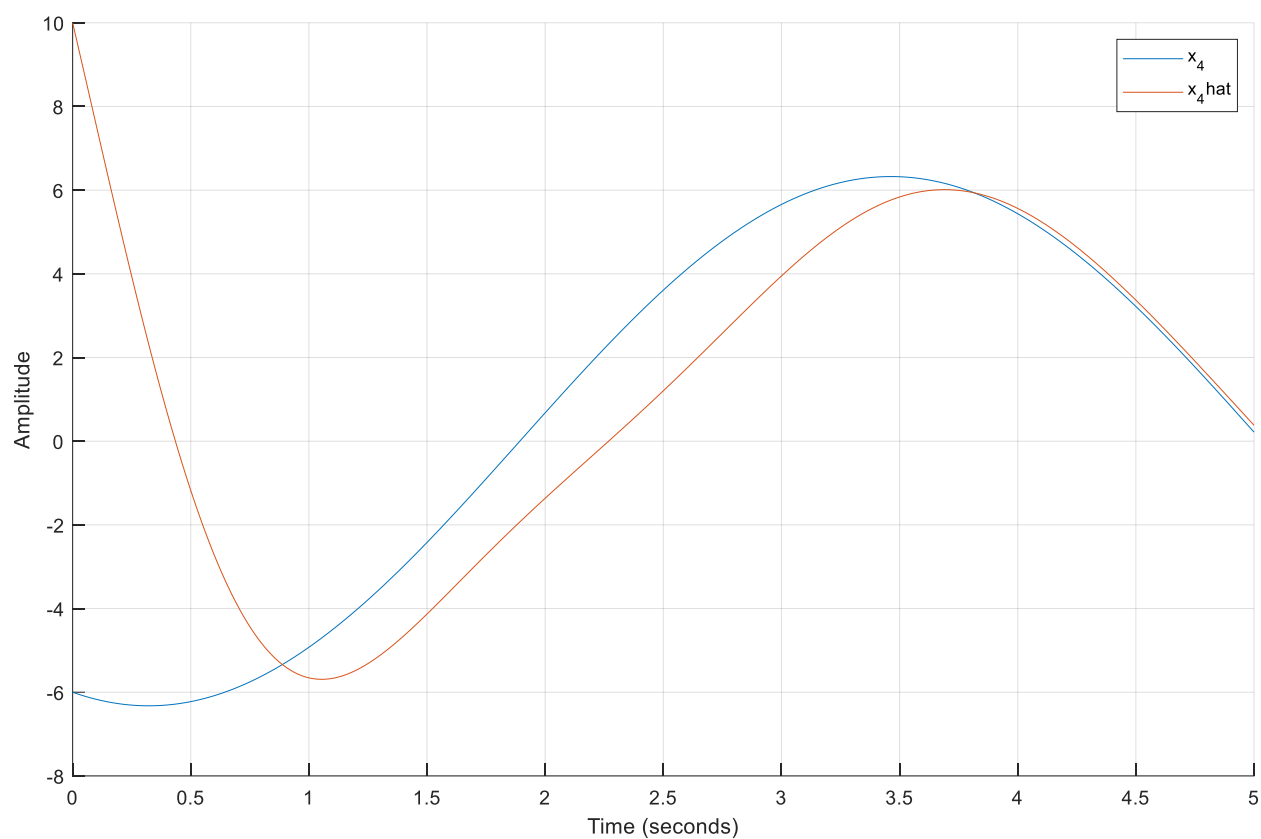


Рисунок 21 – четвертая компонента вектора состояния

Для $\alpha = 1$:

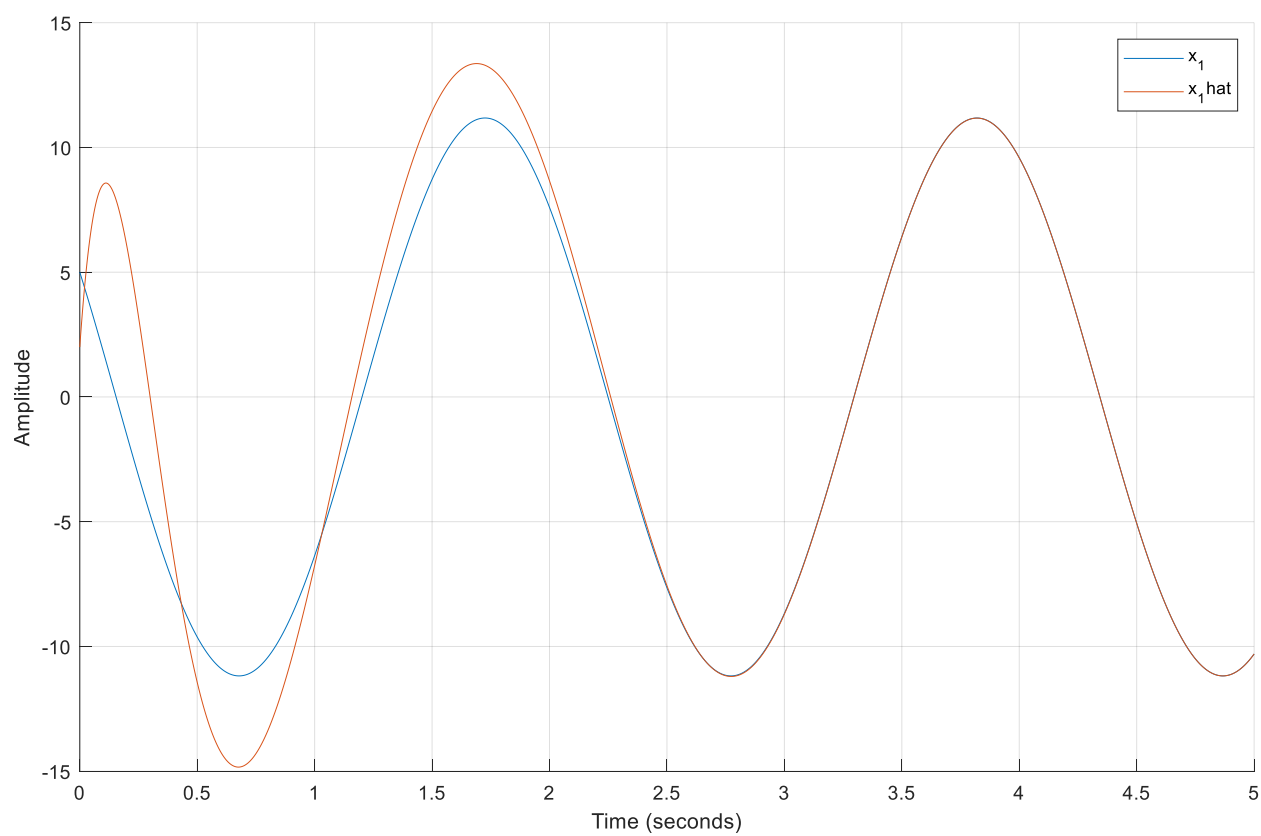


Рисунок 22 – первая компонента вектора состояния

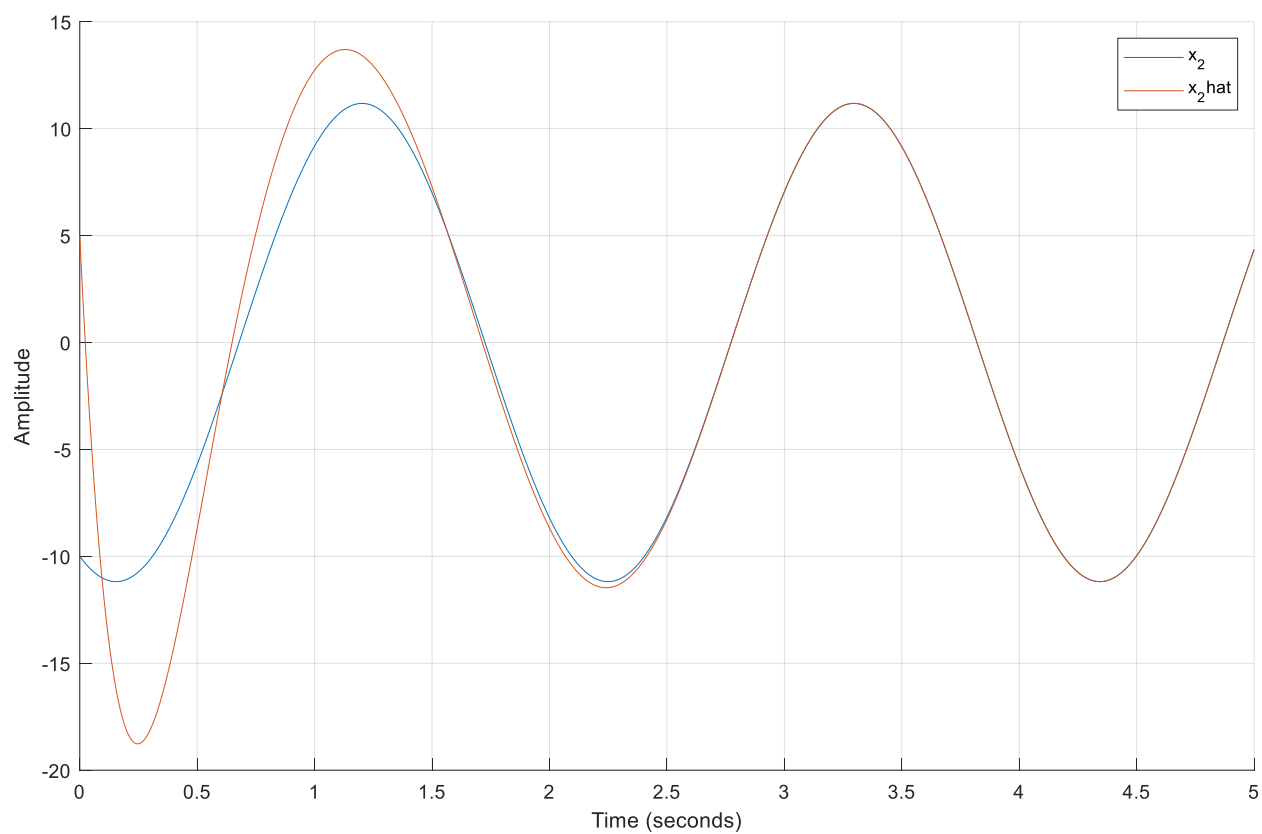


Рисунок 23 – вторая компонента вектора состояния

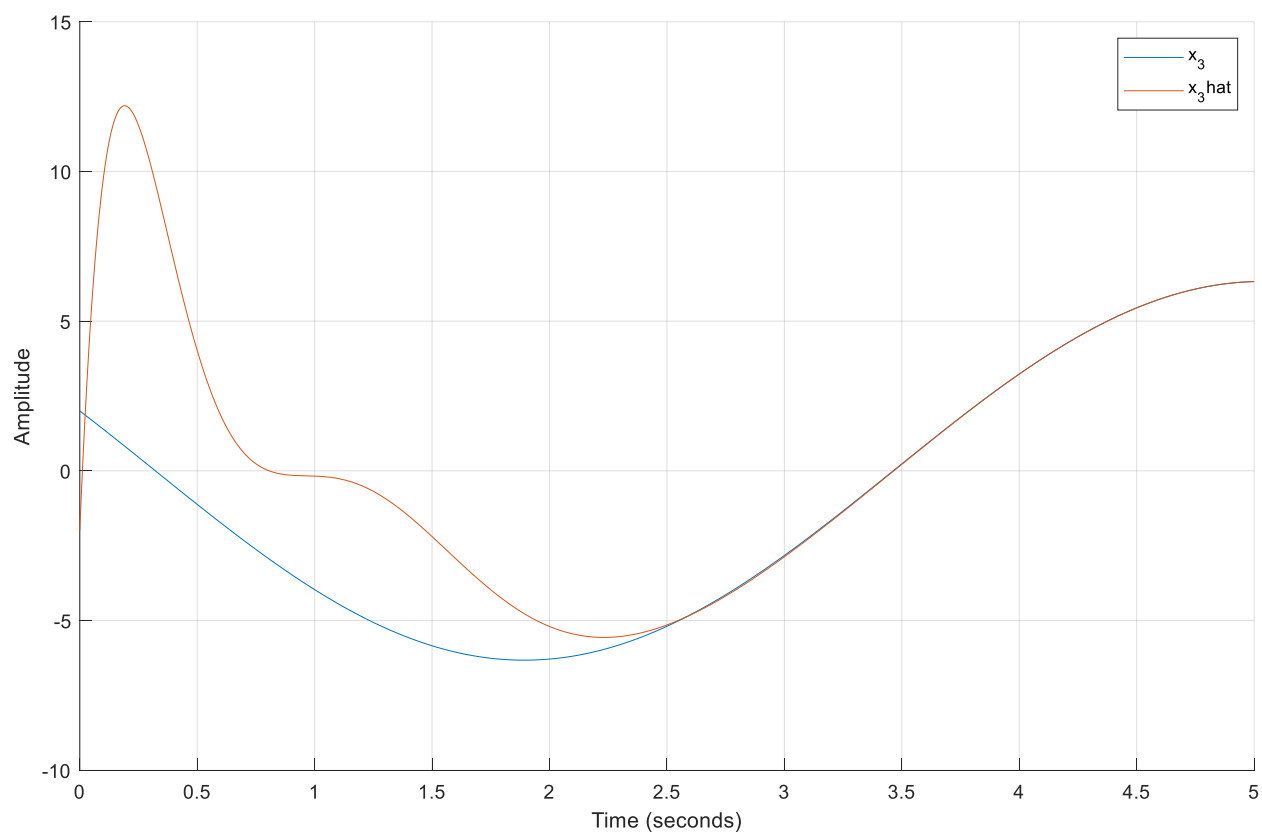


Рисунок 24 – третья компонента вектора состояния

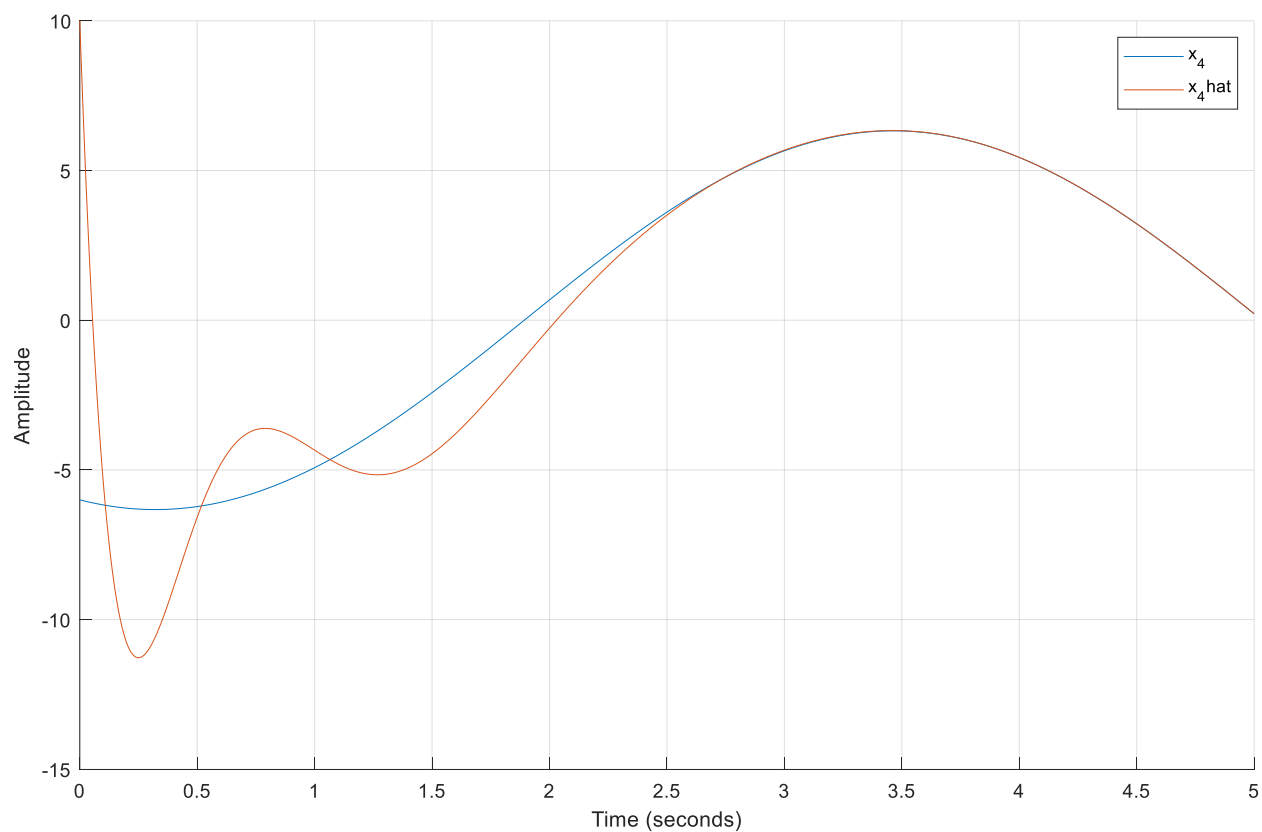


Рисунок 25 – четвертая компонента вектора состояния

Для $\alpha = 3$:

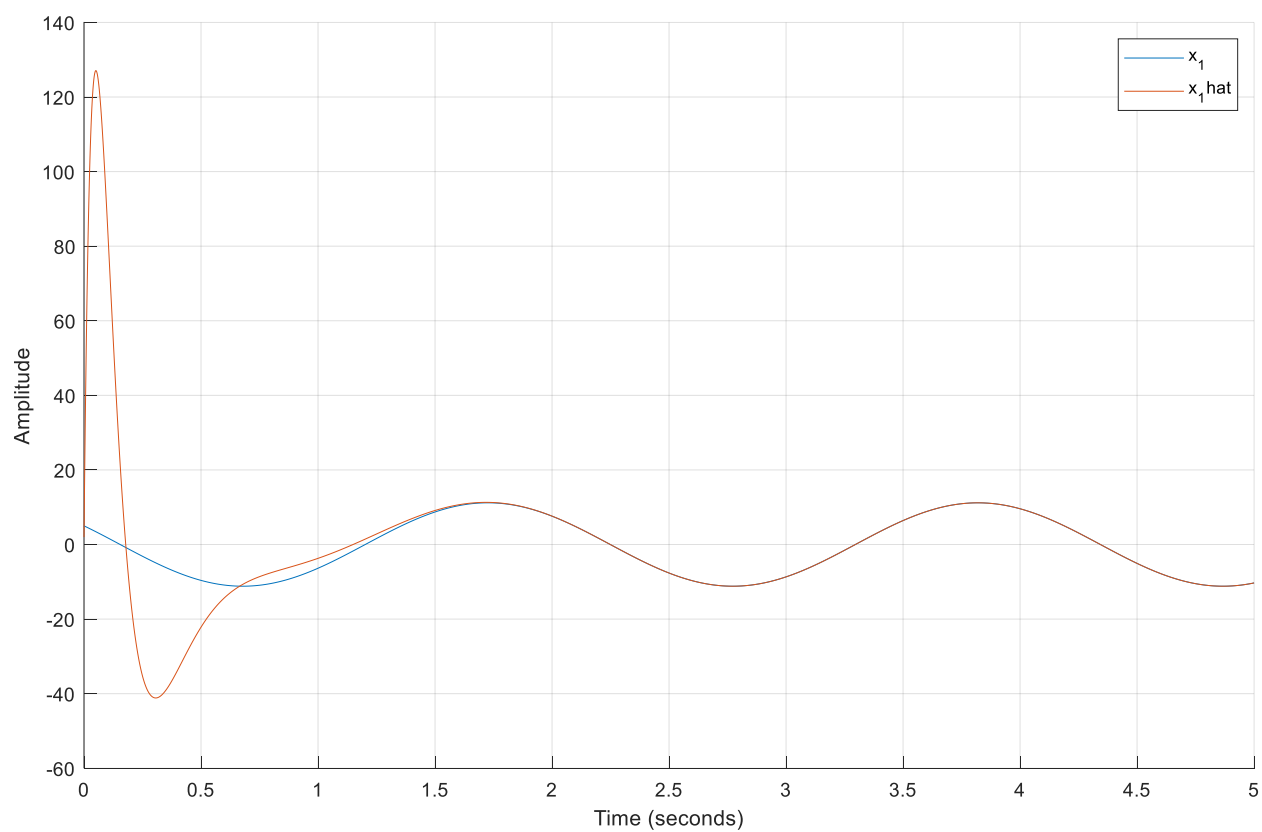


Рисунок 26 – первая компонента вектора состояния

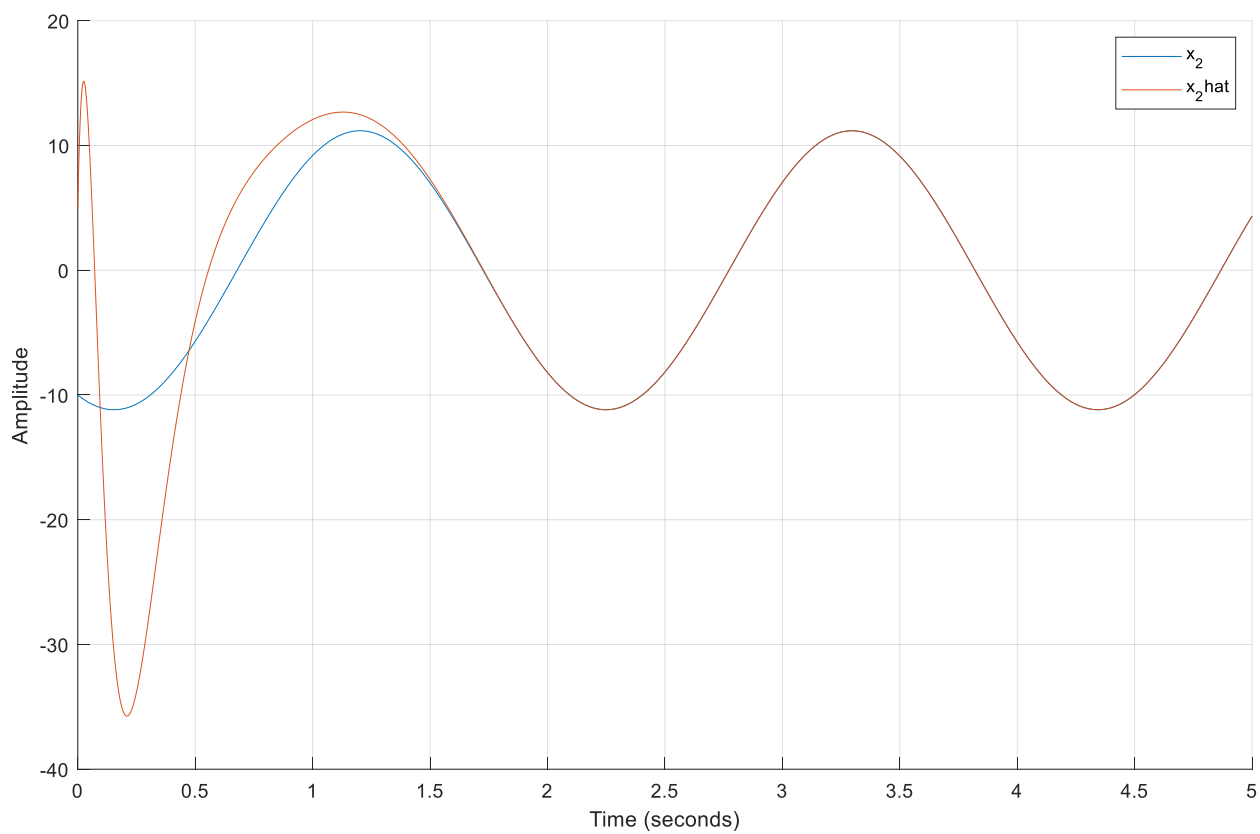


Рисунок 27 – вторая компонента вектора состояния

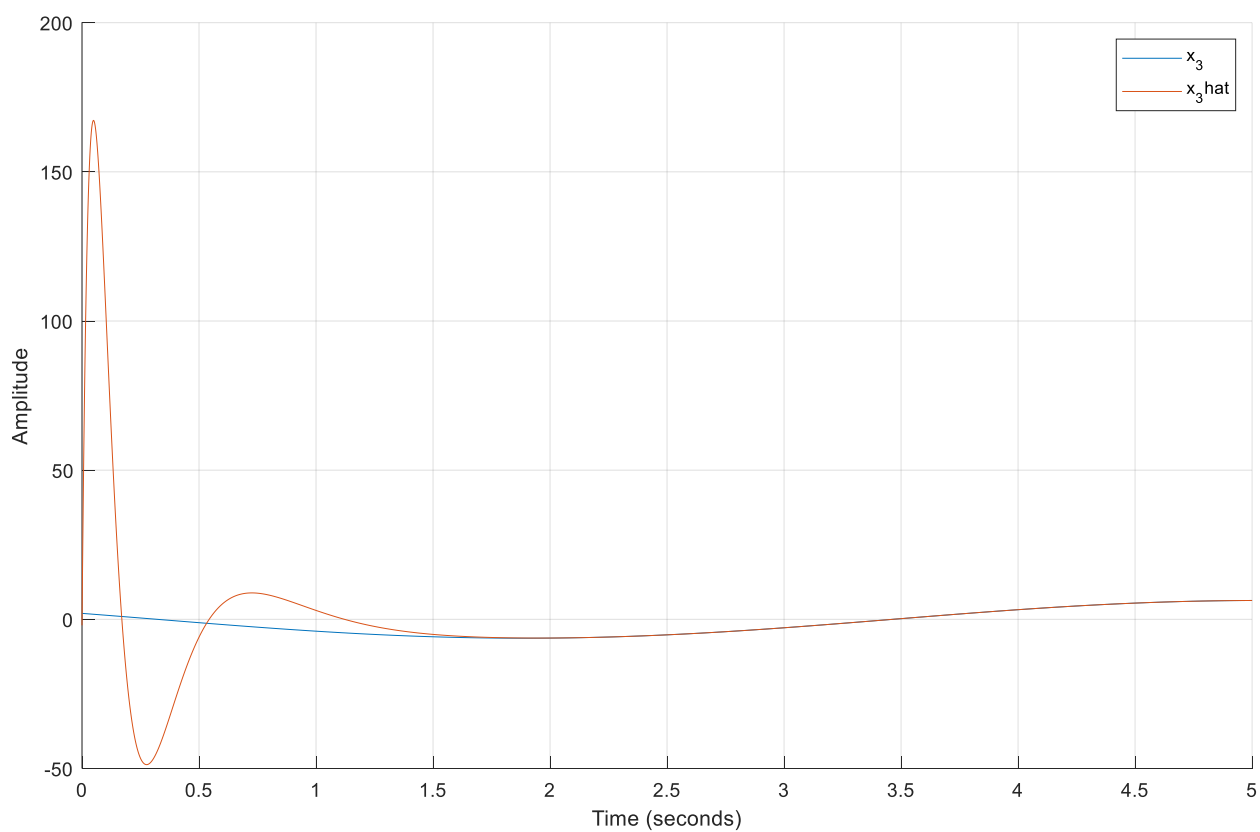


Рисунок 28 – третья компонента вектора состояния

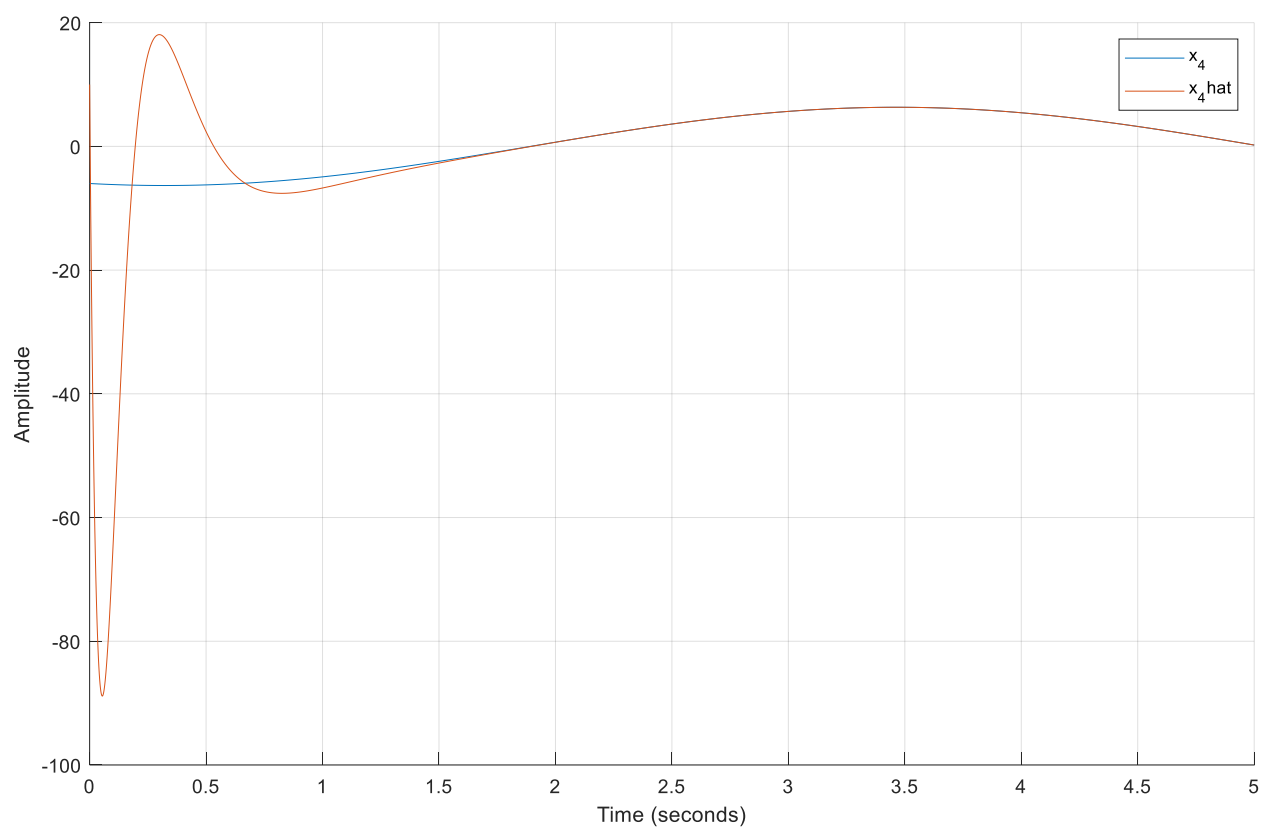


Рисунок 29 – четвертая компонента вектора состояния

Графики ошибки при разных α :

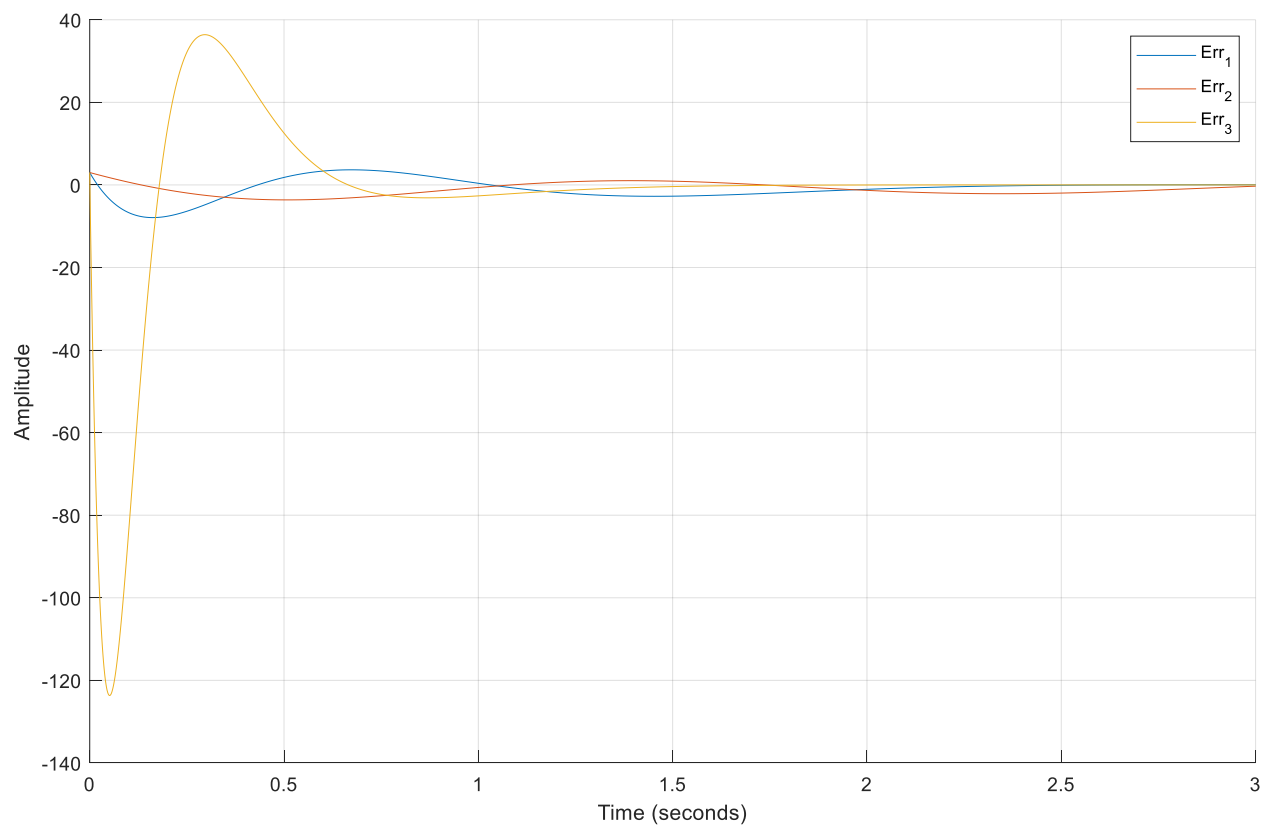


Рисунок 30 – первая компонента вектора ошибки

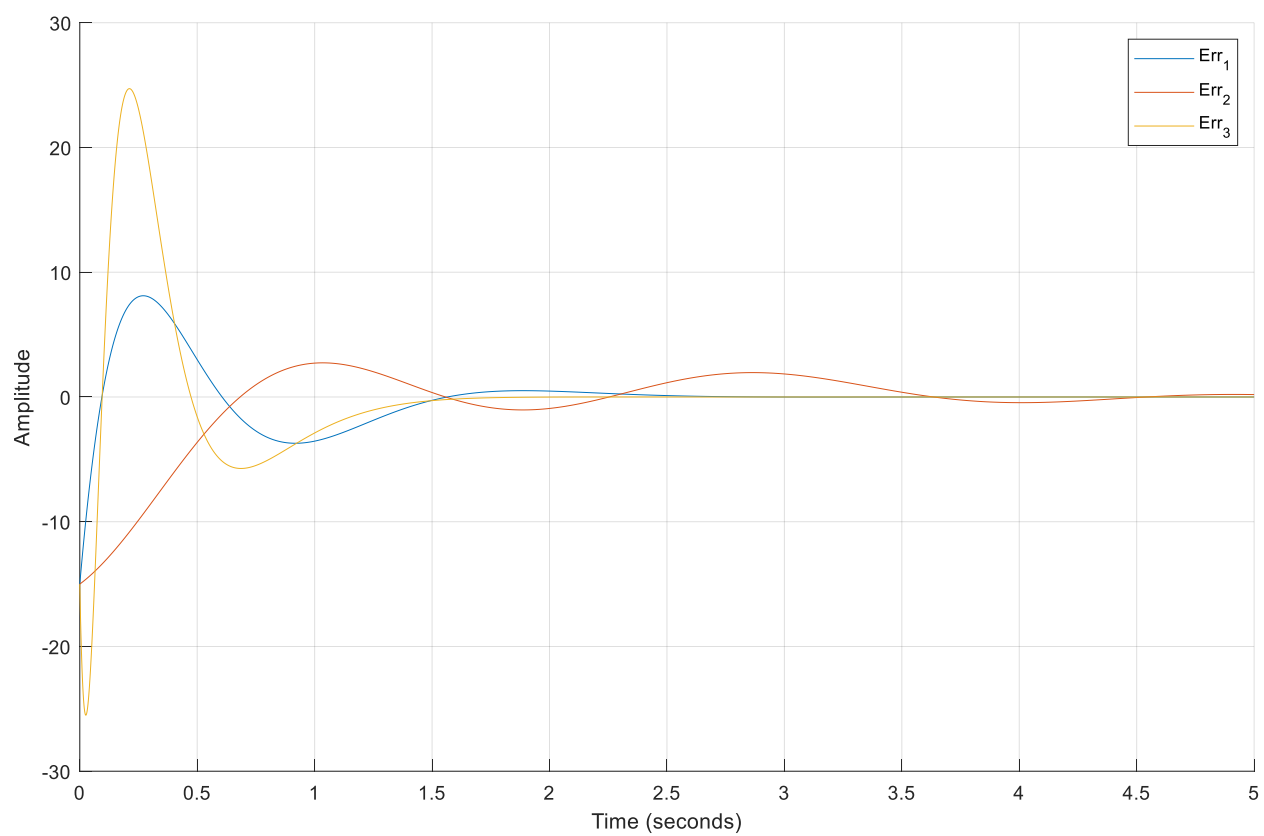


Рисунок 31 – вторая компонента вектора ошибки

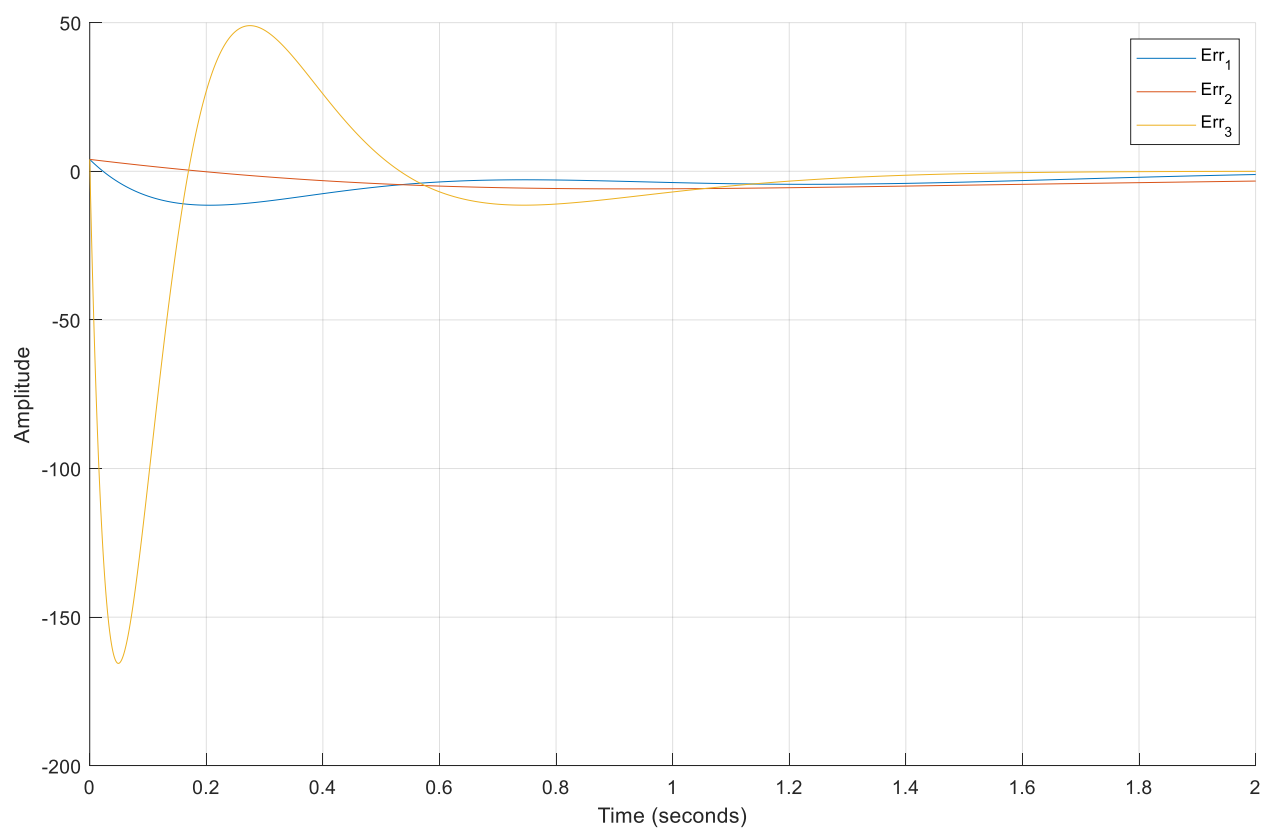


Рисунок 32 – третья компонента вектора ошибки

Задание 4

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\alpha_k = 1.2$ – степень устойчивости для вектора состояния

$\alpha_l = 1.1$ – степень устойчивости системы по ошибке.

$$K = [224.2 \quad -237.59 \quad 85.78 \quad 66.44]$$

$$\sigma(A + BK) = \{-20.12 \pm 29.4i, -6.2 \pm 0.37i\}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -2.02 & 2.02 & -2.02 & -2.02 \\ 29.89 & -20.61 & -29.89 & -20.61 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-12.67 \pm 19.76i, -4.18, -20\}$$

Графики:

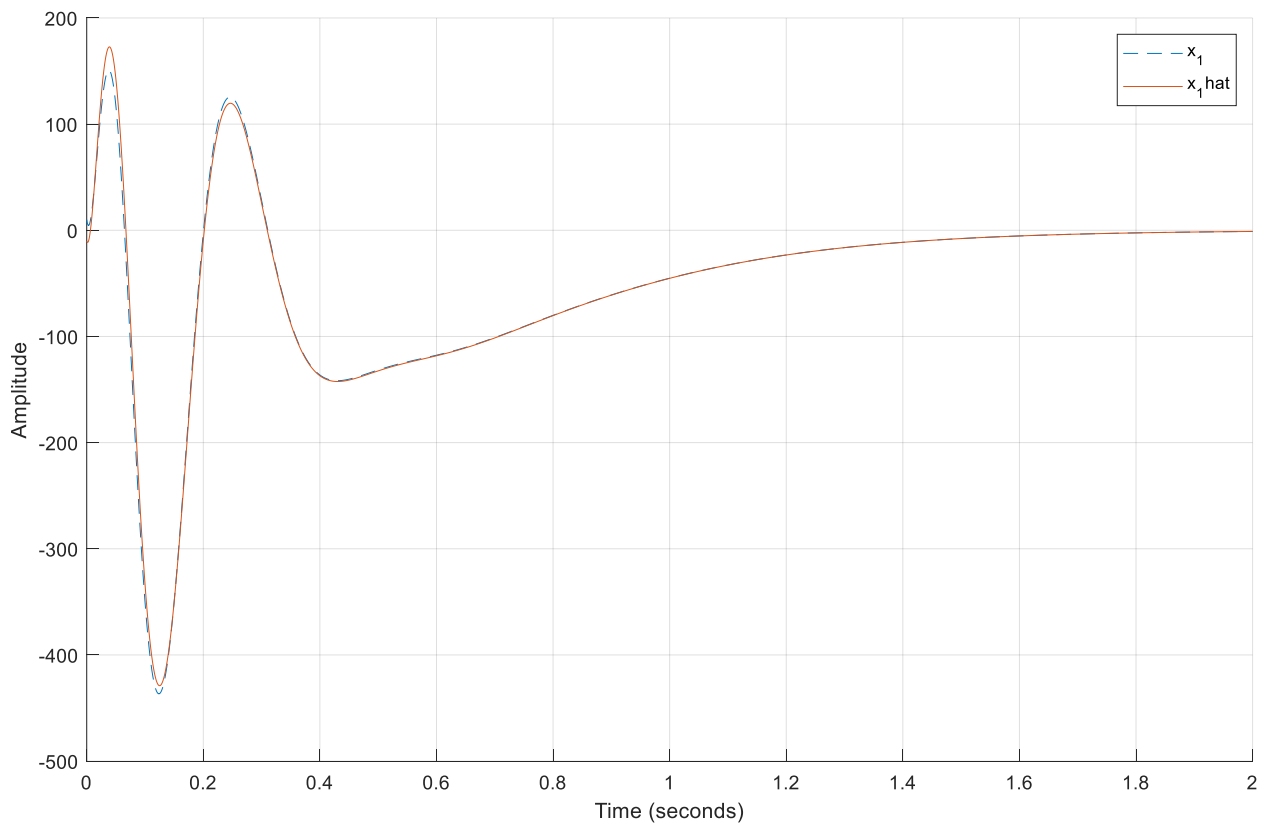


Рисунок 33 – первая компонента вектора состояния

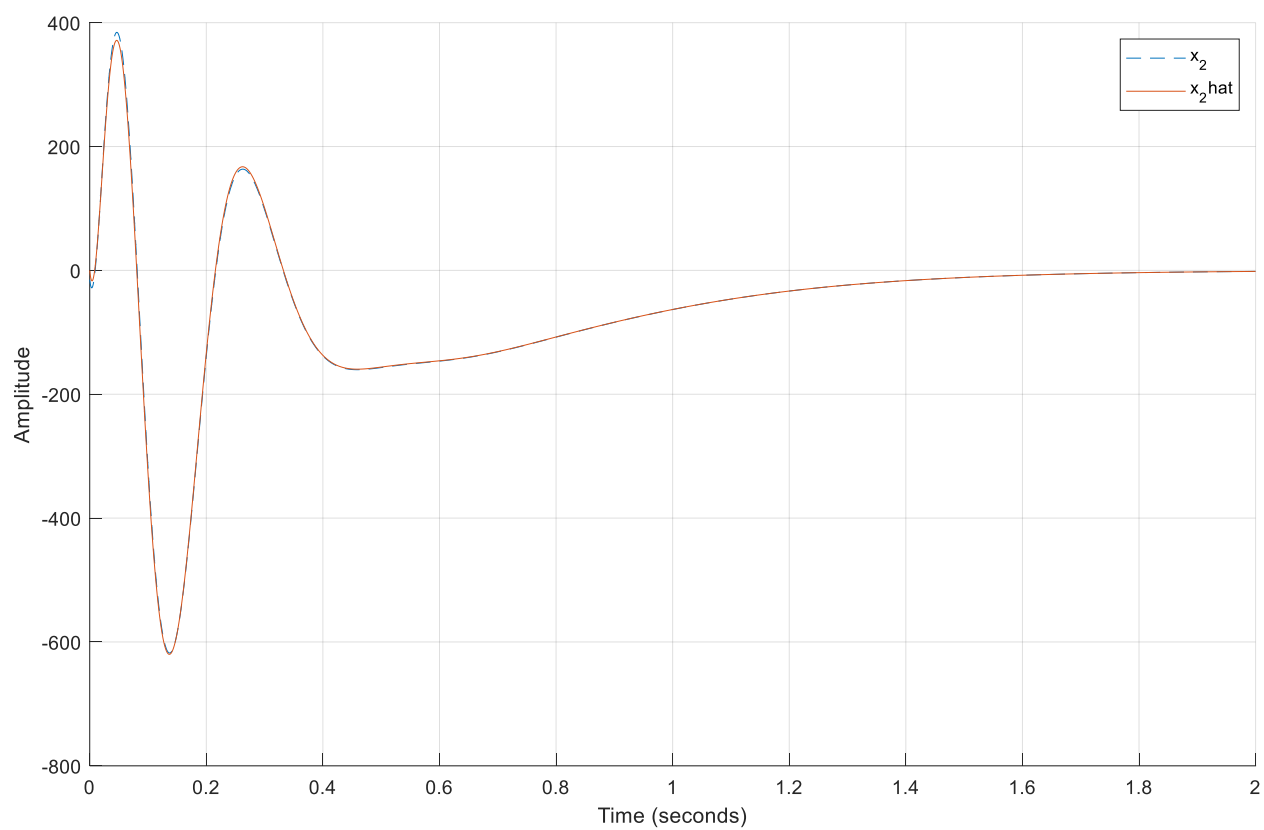


Рисунок 34 – вторая компонента вектора состояния

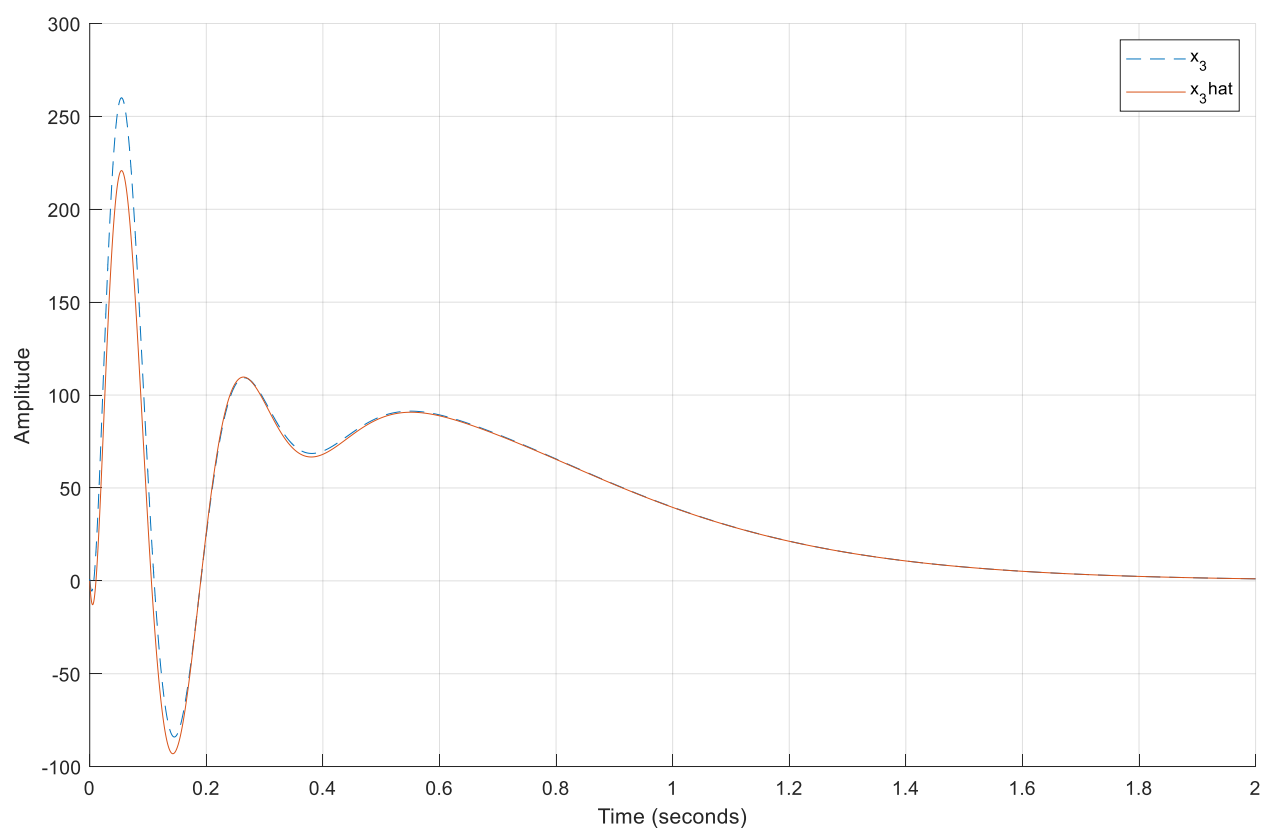


Рисунок 35 – третья компонента вектора состояния

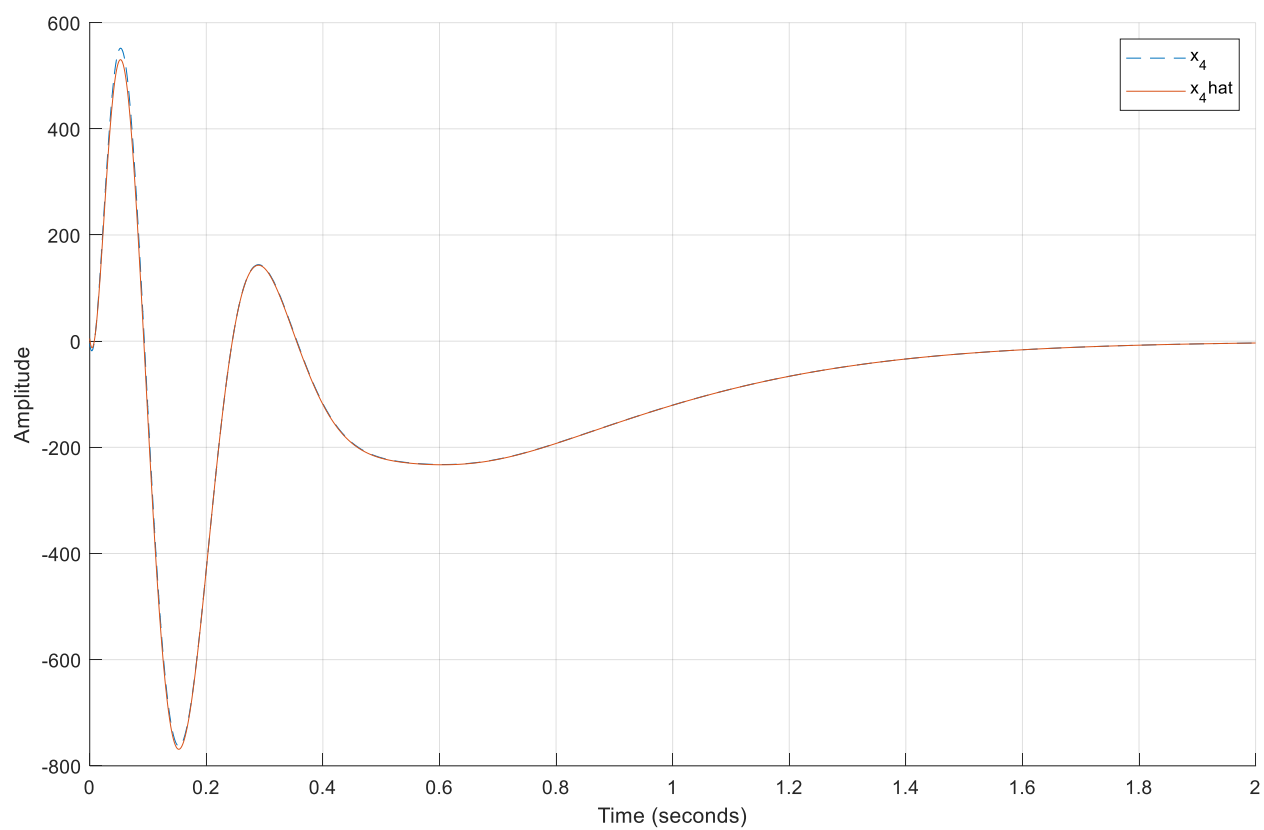


Рисунок 36 – четвертая компонента вектора состояния

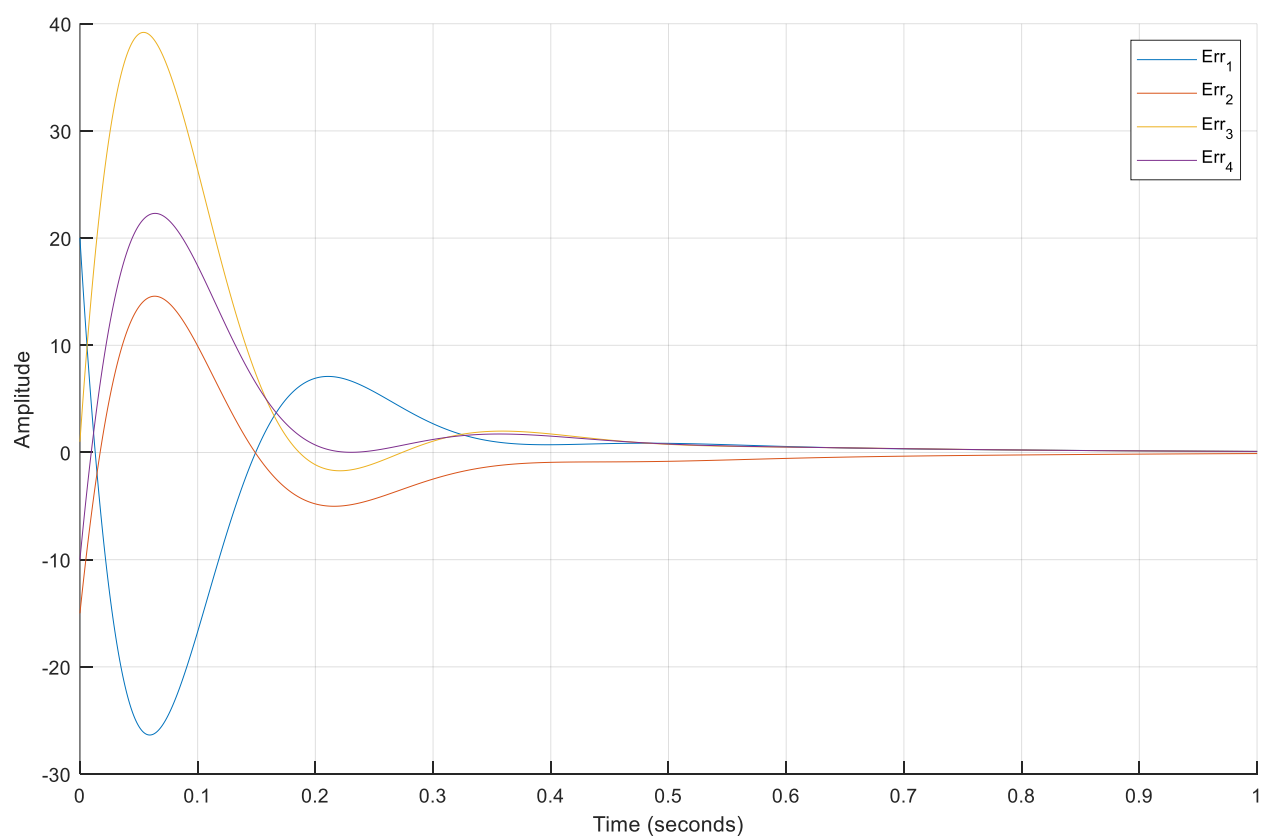


Рисунок 37 – компоненты векторов ошибок

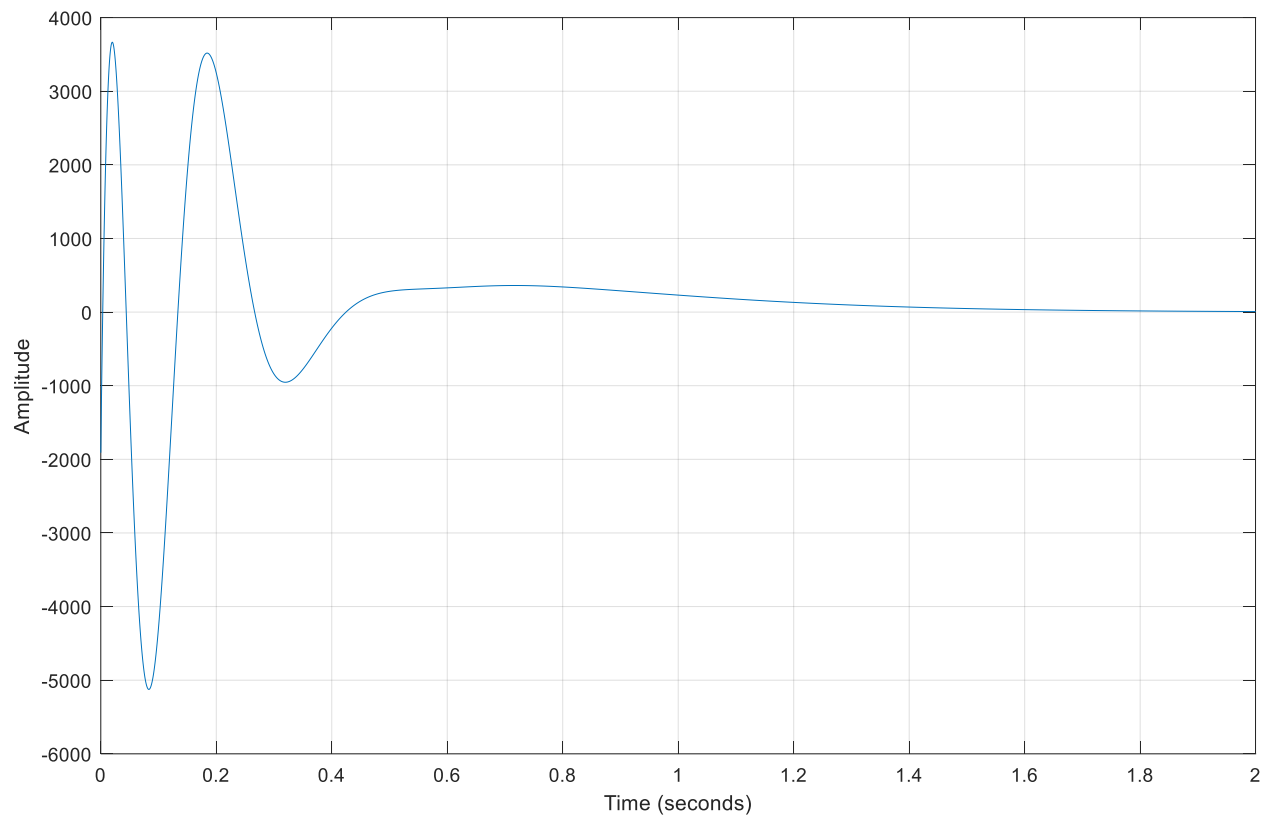


Рисунок 38 – входное воздействие

Выводы

В ходе лабораторной работы были построены системы с наблюдателем и регулятором. На них исследовался метод синтеза регулятора и наблюдателя на основе коэффициента устойчивости системы, а также решалась задача оптимизации входного воздействия. Все это делалось для эффективного использования систем.