

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники



Теория автоматического управления

Отчет по курсовой работе

«Управление парным маятником на тележке»

Выполнил студент:

Мысов М.С.

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА..... | 3 |
| 1.1 Вывод уравнений..... | 3 |
| 1.2 Точка равновесия | 5 |
| 1.3 Линеаризация | 6 |
| ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ | 7 |
| 2.1 Анализ матриц..... | 7 |
| 2.2 Передаточные функции | 8 |
| 2.3 Линейное моделирование | 9 |
| 2.4 Нелинейное моделирование | 12 |
| ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ | 15 |
| 3.1 Синтез регулятора по состоянию | 15 |
| 3.2 Исследование регулятора по состоянию..... | 17 |
| 3.3 Синтез наблюдателя..... | 18 |
| 3.4 Исследование наблюдателя..... | 22 |
| 3.5 Синтез регулятора по выходу | 24 |
| ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА | 27 |
| 4.1 Линейно-квадратичный регулятор | 27 |
| 4.2 Линейно-квадратичный наблюдатель | 29 |
| 4.3 LQG для линейной модели | 33 |
| 4.4 LQG для нелинейной модели | 34 |
| ГЛАВА 5. СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ | 35 |
| 5.1 Компенсация? | 35 |
| 5.2 Слежение? | 37 |
| Вывод..... | 39 |

ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

1.1 Вывод уравнений

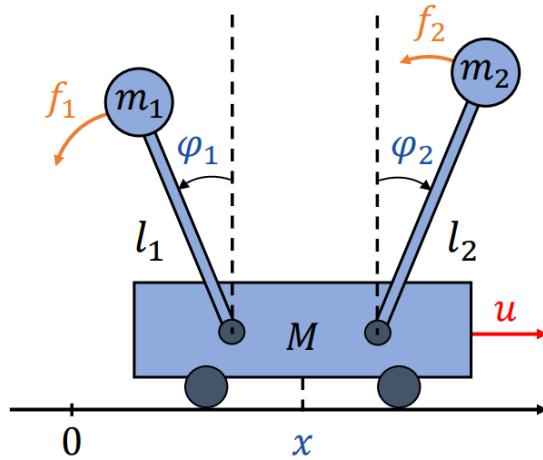


Рисунок 1 – Парный маятник на тележке

Построим математическую модель перевернутого маятника, представленного на рисунке 1. В качестве переменных состояния выберем линейную координату тележки x , скорость тележки $\dot{x} = v$, углы отклонения маятников от вертикали φ_1 и φ_2 , угловые скорости маятников $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ и $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$. В качестве управления u примем горизонтальную силу F , приложенную к тележке. В качестве внешних возмущений f_1 и f_2 примем вращающие моменты, действующие на маятник. Выходные (измеряемые) переменные - величины $y_1 = x, y_2 = \varphi_1, y_3 = \varphi_2$.

При построении модели будем считать, что трение отсутствует, а масса маятников полностью сосредоточена на их свободных концах.

Самостоятельно выберем числовые значения системы:

- Масса тележки $M = 10$ кг
- Масса маятника $m_1 = 1$ кг
- Масса маятника $m_2 = 2$ кг
- Длина маятника $l_1 = 2$ м
- Длина маятника $l_2 = 1$ м
- Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$

В общем виде наша система будет описываться так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Положение тележки} \\ \text{Скорость тележки} \\ \text{Угол отклонения 1} \\ \text{Угол отклонения 2} \\ \text{Угловая скорость маятника 1} \\ \text{Угловая скорость маятника 2} \\ \text{Положение тележки, наблюдение} \\ \text{Угол отклонения 1, наблюдение} \\ \text{Угол отклонения 2, наблюдение} \end{bmatrix}$$

Запишем уравнение Лагранжа-Эйлера для системы. Имеется три возможных перемещения – линейная координата тележки x , угловые координаты маятников φ_1 и φ_2 .
Лагранжиан $L = T - U$, где

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1}{2}(\dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{x} \cos \varphi_1) + \frac{m_2}{2}(\dot{\varphi}_2^2 l_2^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{\varphi}_2 l_2 \dot{x} \cos \varphi_2)$$

$$U = m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2$$

Далее для отклонения маятника от положения равновесия φ_1 запишем уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}\right) = f_1$$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 - m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_1 l_1 \dot{x} \cos \varphi_1 = f_1$$

Для отклонения маятника от положения равновесия φ_2 решим уравнение:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g l_2 \sin \varphi_2 - m_2 l_2 \dot{x} \cos \varphi_2 = f_2$$

И для линейной координаты x :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = u \\ & \frac{d}{dt}(M\dot{x} + m_1 \dot{x} - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + m_2 \dot{x} - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) = \\ & = (M + m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 = u \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений и преобразуем ее:

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \dot{\omega}_1 - m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_1 l_1 \dot{v} \cos \varphi_1 = f_1 \\ m_2 l_2^2 \dot{\omega}_2 + m_2 g l_2 \sin \varphi_2 - m_2 l_2 \dot{v} \cos \varphi_2 = f_2 \\ (M + m_1 + m_2) \dot{v} - m_1 l_1 \dot{\omega}_1 \cos \varphi_1 + m_1 l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 - m_2 l_2 \dot{\omega}_2 \cos \varphi_2 + m_2 l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 = u \end{cases}$$

где вектор состояния $[x \ v \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \omega_1 \ \omega_2]^T$

Выразим систему:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{g \sin \varphi_1}{l_1} - \frac{m_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{M + m_1 + m_2} + \frac{u}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2} \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{g \sin \varphi_2}{l_2} - \frac{m_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{M + m_1 + m_2} + \frac{u}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2} \\ \dot{v} = \sigma \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{m_1 g \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{M + m_1 + m_2} + \frac{\cos \varphi_1}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{f_1}{l_1} - \frac{m_1 l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1}{M + m_1 + m_2} + \frac{m_2 g \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{M + m_1 + m_2}$$

$$+ \frac{\cos \varphi_2}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{f_2}{l_2} - \frac{m_2 l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2}{M + m_1 + m_2} + \frac{u}{M + m_1 + m_2}$$

$$\dot{x} = v$$

$$\begin{aligned}\dot{v} = & -\frac{m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2}{M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2} + \frac{m_1 g \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2} + \frac{\cos \varphi_1}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_1 \\ & + \frac{l_2 m_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2}{M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2} - \frac{m_2 \cos \varphi_2 g \sin \varphi_2}{M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2} - \\ & - \frac{\cos \varphi_2}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_2 + \frac{u}{M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2} - \\ \dot{\varphi}_1 = & \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = & \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = & -\frac{m_1 l_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} + \frac{g \sin \varphi_1 (M + m_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} + \\ & + \frac{M + m_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2}{m_1 l_1^2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_1 + \frac{m_2 l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} - \frac{m_2 g \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} \\ & - \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{l_1 l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_2 + \frac{\cos \varphi_1 \cdot u}{l_1(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} \\ \dot{\omega}_2 = & -\frac{m_1 l_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} + \frac{g \sin \varphi_2 (M + m_2 + m_1 \sin^2 \varphi_2)}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} + \\ & - \frac{M + m_2 + m_1 \sin^2 \varphi_1}{m_2 l_2^2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_2 - \frac{m_2 l_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} - \frac{m_1 g \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} \\ & - \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{l_1 l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)} f_1 - \frac{\cos \varphi_1 \cdot u}{l_2(M + m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2)}\end{aligned}$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \varphi_1$$

$$y_3 = \varphi_2$$

1.2 Точка равновесия

Найдем все точки равновесия объекта при $u, f_1, f_2 \equiv 0$.

Значит, приравняем к нулю систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ \dot{v} = 0 \\ \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \\ \frac{g \sin \varphi_1}{l_1} - \frac{m_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{M + m_1 + m_2} + \frac{u}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2} = 0 \\ -\frac{g \sin \varphi_2}{l_2} - \frac{m_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{M + m_1 + m_2} + \frac{u}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2} = 0 \end{array} \right.$$

Решая систему уравнений, приходим к выводу, что тележка с парным перевернутым маятником находится в равновесии при $[x \ v \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \omega_1 \ \omega_2]^T = [a \ 0 \ \pi k \ \pi k \ 0 \ 0]^T$, где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. То есть, когда она не движется и угол отклонения каждого маятника от оси нулевой.

1.3 Линеаризация

Линеаризуем уравнения объекта около точки равновесия и запишем обновленную математическую модель.

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \dot{\omega}_1 - m_1 g l_1 \varphi_1 - m_1 l_1 \dot{v} = f_1 \\ m_2 l_2^2 \dot{\omega}_2 + m_2 g l_2 \varphi_2 - m_2 l_2 \dot{v} = f_2 \\ (M + m_1 + m_2) \dot{v} - m_1 l_1 \dot{\omega}_1 - m_2 l_2 \dot{\omega}_2 = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{m_1 l_1}{M + m_1 + m_2} \left(\frac{m_1 g l_1 \varphi_1}{m_1 l_1^2} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2} \right) + \frac{m_2 l_2}{M + m_1 + m_2} \left(\frac{m_2 g l_2 \varphi_2}{m_2 l_2^2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2} \right) + \frac{u}{M + m_1 + m_2} \\ \dot{\omega}_1 = \frac{m_1 g l_1 \varphi_1}{m_1 l_1^2} + \frac{m_1 l_1}{m_1 l_1^2} \left(-\frac{m_1 g l_1 \varphi_1}{m_1 l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1} \right) + \frac{f_1}{m_1 l_1^2} \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{m_2 g l_2 \varphi_2}{m_2 l_2^2} + \frac{m_2 l_2}{m_2 l_2^2} \left(-\frac{m_2 g l_2 \varphi_2}{m_2 l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2} \right) + \frac{f_2}{m_2 l_2^2} \end{cases}$$

Далее получаем упрощенный набор уравнений, который можно подставить в систему.

И представляем это все в матричном виде:

New

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 g}{M} & -\frac{m_2 g}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m_1)g}{Ml_1} & -\frac{m_2 g}{Ml_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_1 g}{Ml_2} & \frac{(M+m_2)g}{Ml_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Ml_1} \\ -\frac{1}{Ml_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{0}{M+m_1} \\ -\frac{1}{Ml_1 l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2.1 Анализ матриц

Подставим числа в полученную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.05 \\ -0.1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.05 & -0.1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.275 & -0.05 \\ -0.05 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A : $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 3.49, \lambda_{5,6} = \pm 2.31$

Собственные векторы матрицы A :

$$V_{vec} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.0015 & 0.0046 & 0.0015 & -0.0046 \\ 0 & 0 & -0.0109 & -0.0355 & 0.0109 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0.1314 & 0.1314 & 0.1314 & -0.0242 \\ 0 & 0 & 0.0253 & -0.1254 & 0.0253 & 0.1254 \\ 0 & 0 & -0.9731 & -0.1874 & 0.9731 & -0.1874 \\ 0 & 0 & -0.1874 & 0.9733 & 0.1874 & 0.9733 \end{bmatrix}$$

Так как матрица A имеет положительные собственные числа, кратный нуль, то про систему можно сказать, что она неустойчивая. Физический смысл такой, что из-за кратного нуля наша тележка движется с постоянной скоростью. Система не является устойчивой.

Проверим систему на наблюдаемость и управляемость:

$$rank(B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B) = 6$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью управляема.

$$rank(C \ CA \ CA^2 \ CA^3 \ CA^4 \ CA^5)^T = 6$$

Матрица наблюдаемости имеет полный столбцовий ранг, значит система наблюдаема по критерию Калмана.

Так как система полностью наблюдаема и управляема, то она полностью обнаруживаема и стабилизируема. Значит, возможно сделать такой регулятор, чтобы она стала устойчивой.

2.2 Передаточные функции

Найдем передаточные матрицы $W_{u \rightarrow y}(s)$, $W_{f \rightarrow y}(s)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases}$$

Передаточные функции можно найти по формуле $W = C(sI - A)^{-1}[B \quad D]$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W_{u \rightarrow y_1}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_1}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_1}(s) \\ W_{u \rightarrow y_2}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_2}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_2}(s) \\ W_{u \rightarrow y_3}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_3}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_3}(s) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{s^4 - 15s^2 + 50}{5s^2(2s^4 - 35s^2 + 130)} & \frac{s^2 - 10}{10(2s^4 - 35s^2 + 130)} & -\frac{s^2 - 5}{5(2s^4 - 35s^2 + 130)} \\ \frac{s^2 - 10}{10(2s^4 - 35s^2 + 130)} & \frac{11s^2 - 130}{20(2s^4 - 35s^2 + 130)} & -\frac{s^2}{10(2s^4 - 35s^2 + 130)} \\ -\frac{s^2 - 5}{5(2s^4 - 35s^2 + 130)} & -\frac{s^2}{10(2s^4 - 35s^2 + 130)} & \frac{12s^2 - 65}{10(2s^4 - 35s^2 + 130)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Динамический порядок:

$$\begin{bmatrix} W_{u \rightarrow y_1}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_1}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_1}(s) \\ W_{u \rightarrow y_2}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_2}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_2}(s) \\ W_{u \rightarrow y_3}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_3}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Относительный динамический порядок:

$$\begin{bmatrix} W_{u \rightarrow y_1}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_1}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_1}(s) \\ W_{u \rightarrow y_2}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_2}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_2}(s) \\ W_{u \rightarrow y_3}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_3}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Значения нулей:

$$\begin{bmatrix} W_{u \rightarrow y_1}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_1}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_1}(s) \\ W_{u \rightarrow y_2}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_2}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_2}(s) \\ W_{u \rightarrow y_3}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_3}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 3.16, \pm 2.23 & \pm 7.62, \pm 7.04 & \pm 2.23 \\ \pm 3.16 & \pm 3.44 & 0 \\ \pm 2.23 & 0 & \pm 2.33 \end{bmatrix}$$

Значения полюсов:

$$\begin{bmatrix} W_{u \rightarrow y_1}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_1}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_1}(s) \\ W_{u \rightarrow y_2}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_2}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_2}(s) \\ W_{u \rightarrow y_3}(s) & W_{f_1 \rightarrow y_3}(s) & W_{f_2 \rightarrow y_3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0, \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 \\ \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 \\ \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 & \pm 3.49, \pm 2.3 \end{bmatrix}$$

Все полюса входят в спектр матрица A . Мнимые корни отсутствуют, но присутствуют как положительные корни, так и нули. Система все еще является неустойчивой.

2.3 Линейное моделирование

Выполним компьютерное моделирование свободного движения линеаризованного объекта при различных начальных условиях, не сильно отличающихся от нуля.

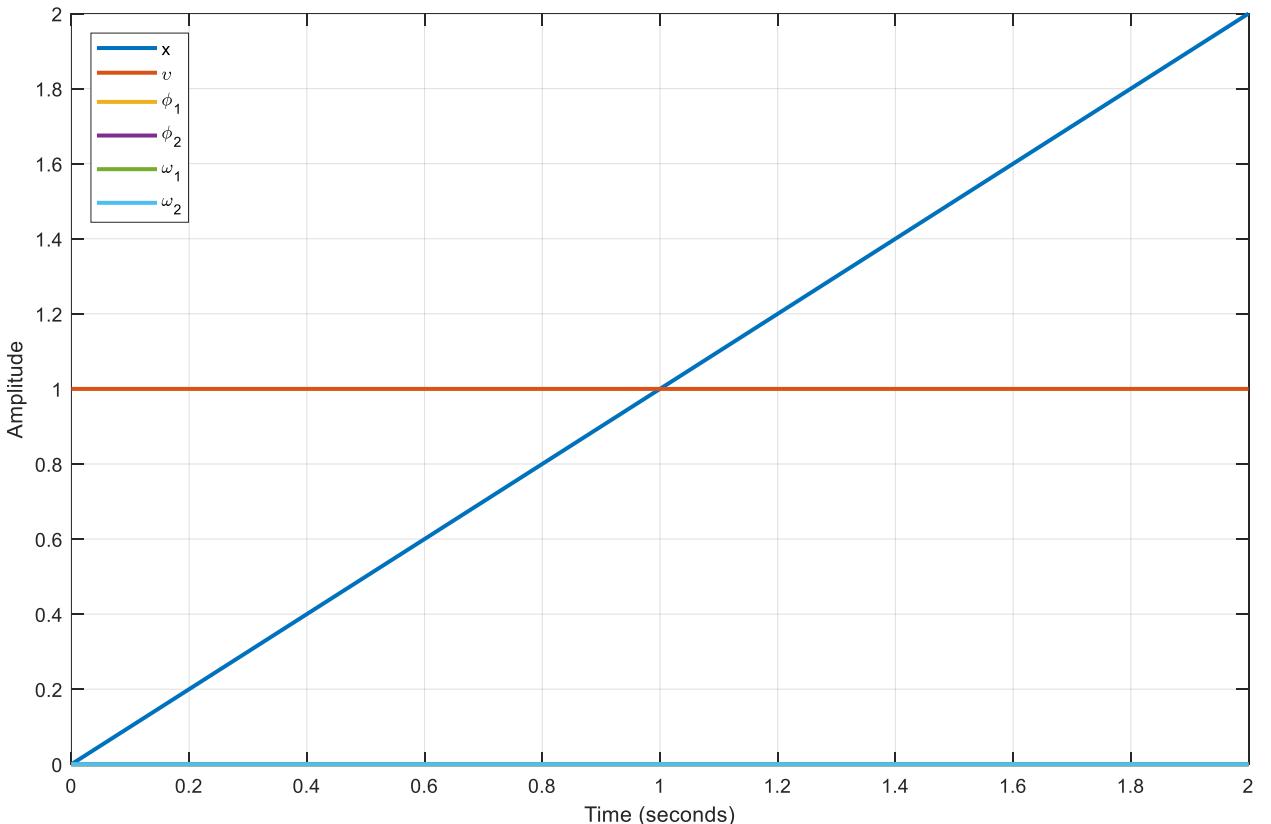


Рисунок 2 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[0, 1, 0, 0, 0, 0]^T$

Тележка движется равномерно со скоростью $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ (ускорение отсутствует), координата линейно увеличивается, углы отклонения маятников неизменны.

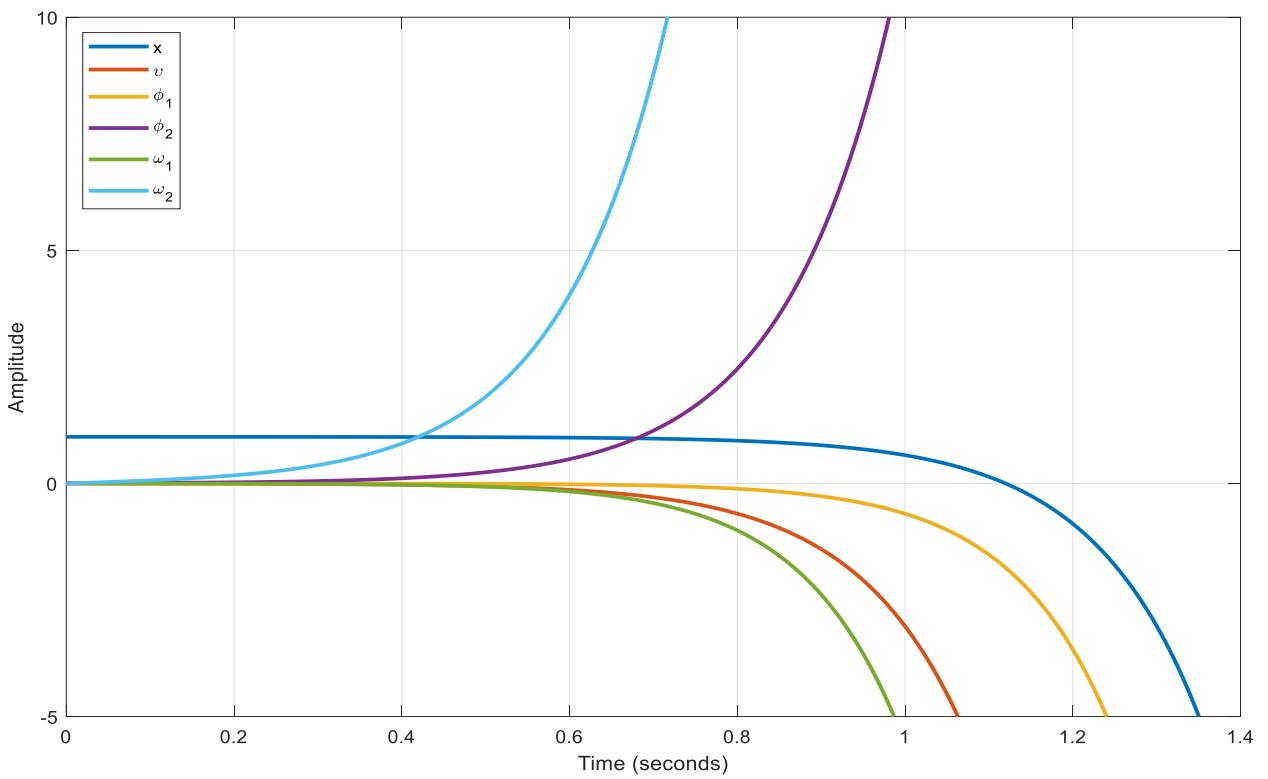


Рисунок 3 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0, 0.01, 0, 0]^T$

Второй маятник имеет небольшое отклонение от положения равновесия, его скорость со временем увеличивается из-за падения. Скорость тележки тоже возрастает, но в противоположную сторону.

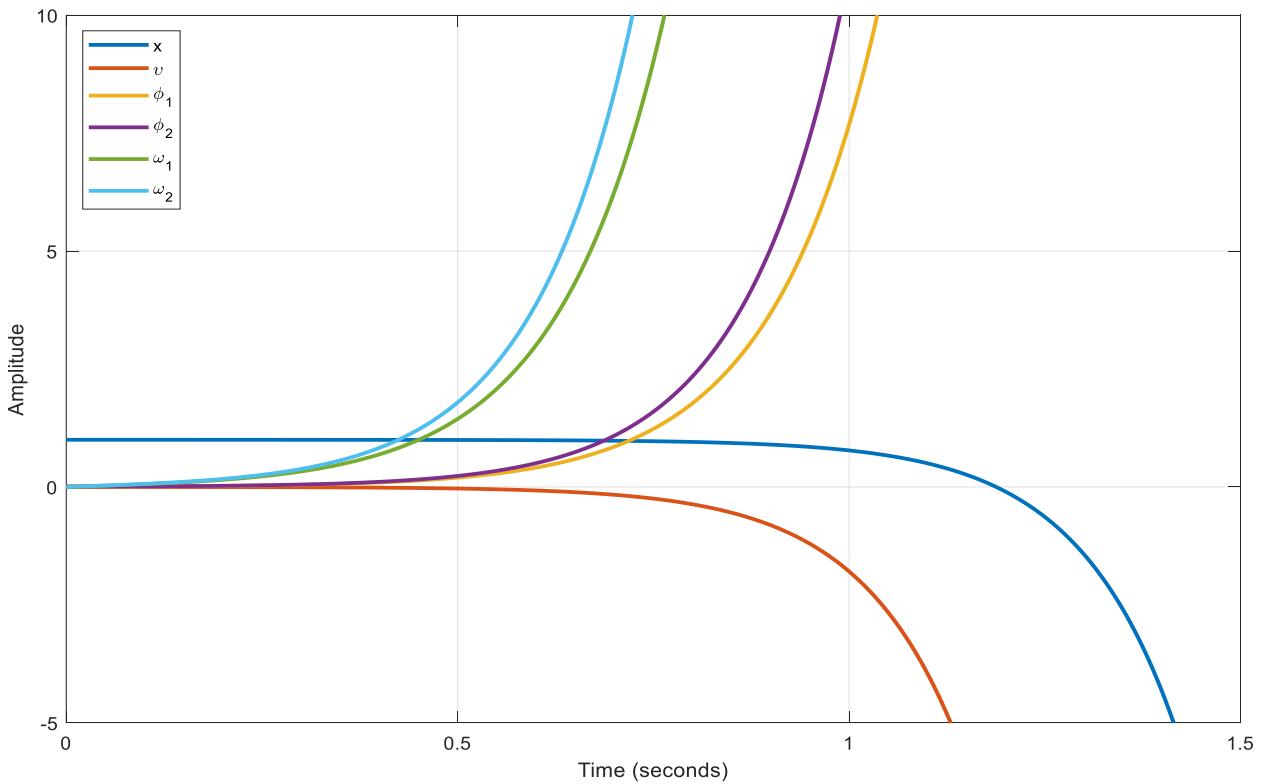


Рисунок 4 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0.01, 0, 0]^T$

В данном эксперименте мы отклонили оба маятника на чуть-чуть от вертикали, из-за соотношений в массе и их длин, они начинают падать в одну сторону с разной задержкой, тележка улетает в другую.

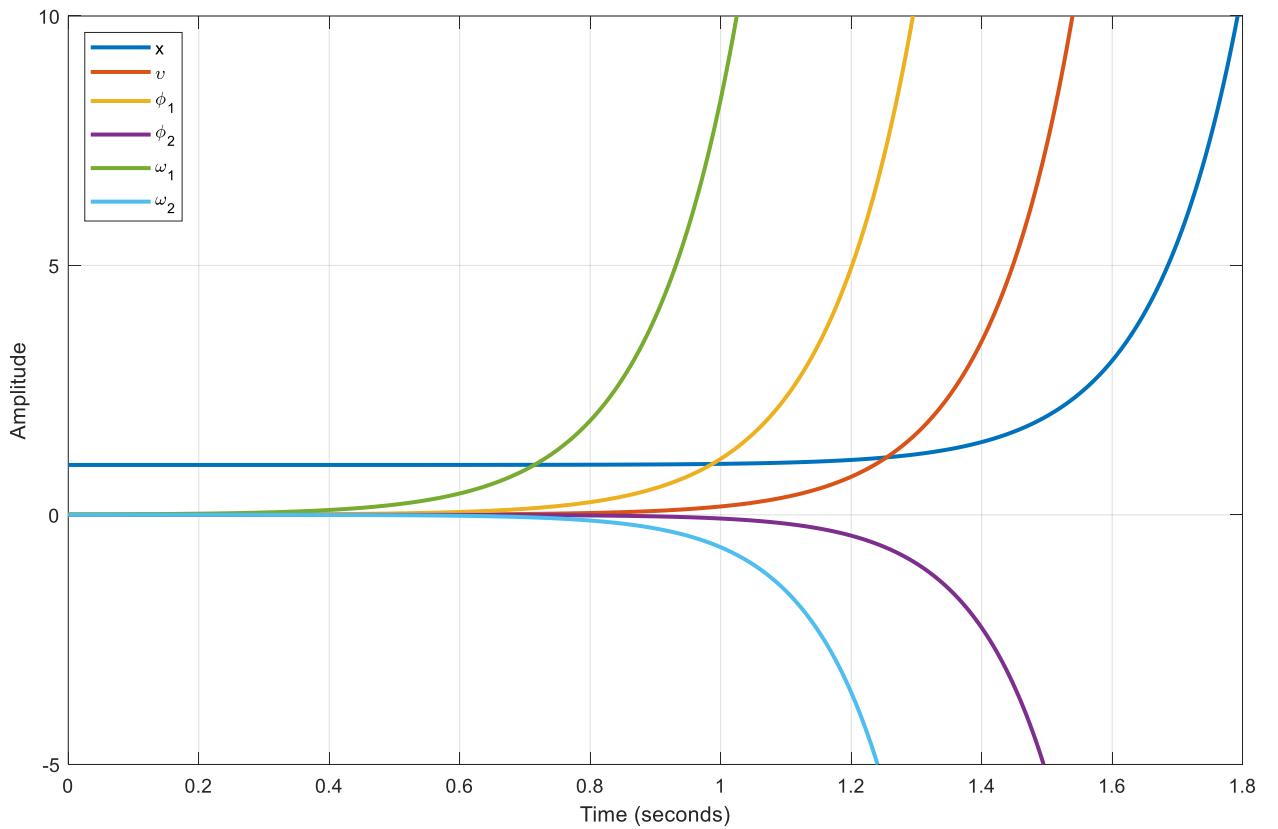


Рисунок 5 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$

Здесь мы слабо толкнули первый маятник. Результат вышел как во втором опыте: первый маятник падает в одну сторону, а второй в другую вместе с уезжающей тележкой.

2.4 Нелинейное моделирование

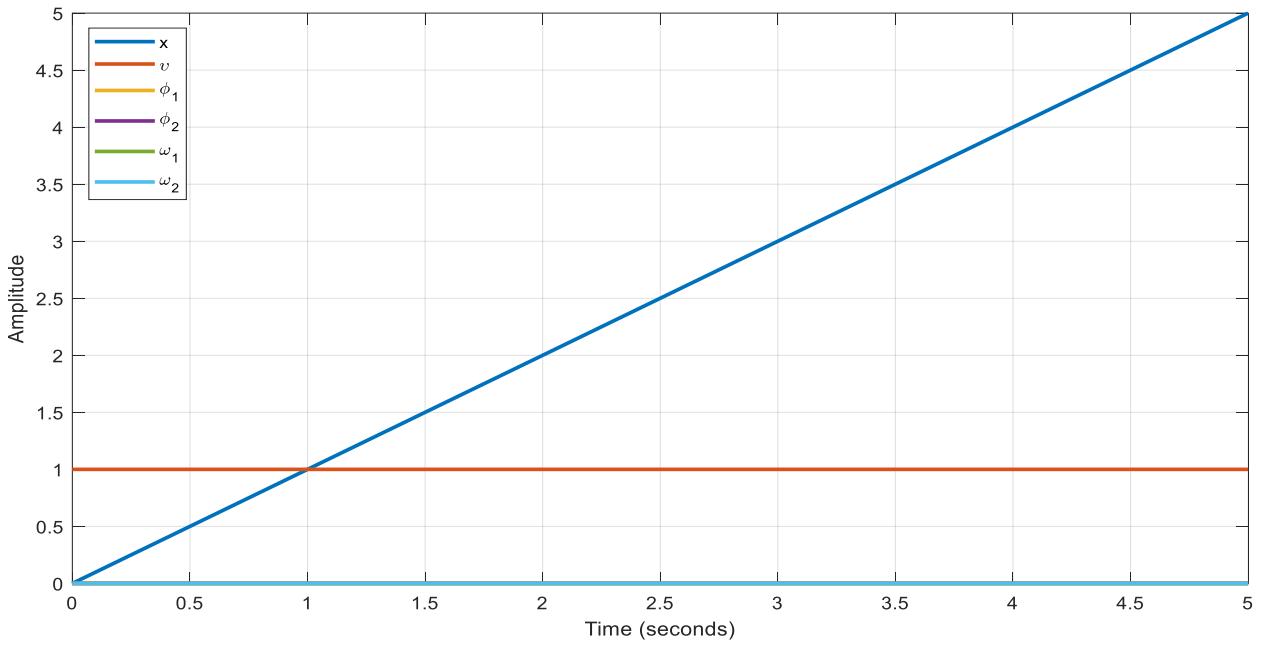


Рисунок 6 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[0, 1, 0, 0, 0, 0]^T$

Когда тележка просто катится, различия между линейной и нелинейной системами не видны.

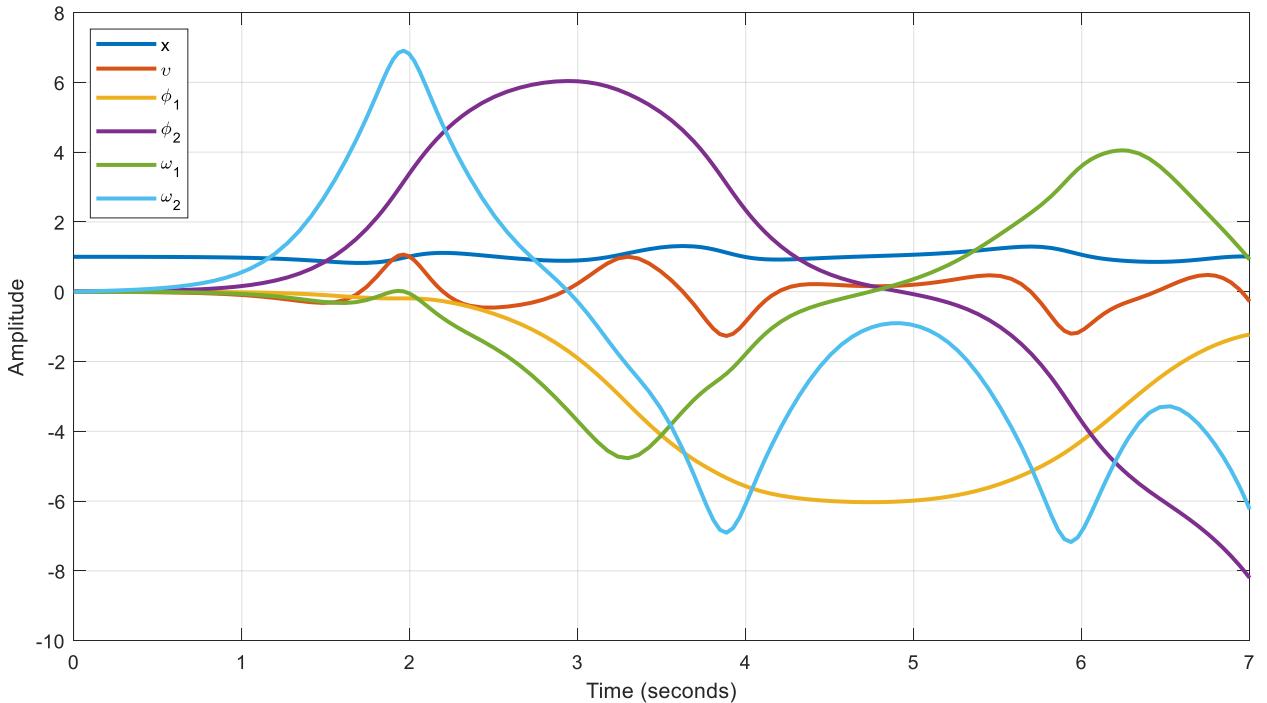


Рисунок 7 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0, 0.01, 0, 0]^T$

В этом эксперименте наш второй маятник имеет небольшое отклонение от положения равновесия, точно такое же, как и в эксперименте с линейной системой. Сравнивая тот график с данным, можно сделать вывод, что они совпадают только в начальный промежуток времени. Здесь же описывается более полное движение системы, где скорость маятника меняется даже по знаку.

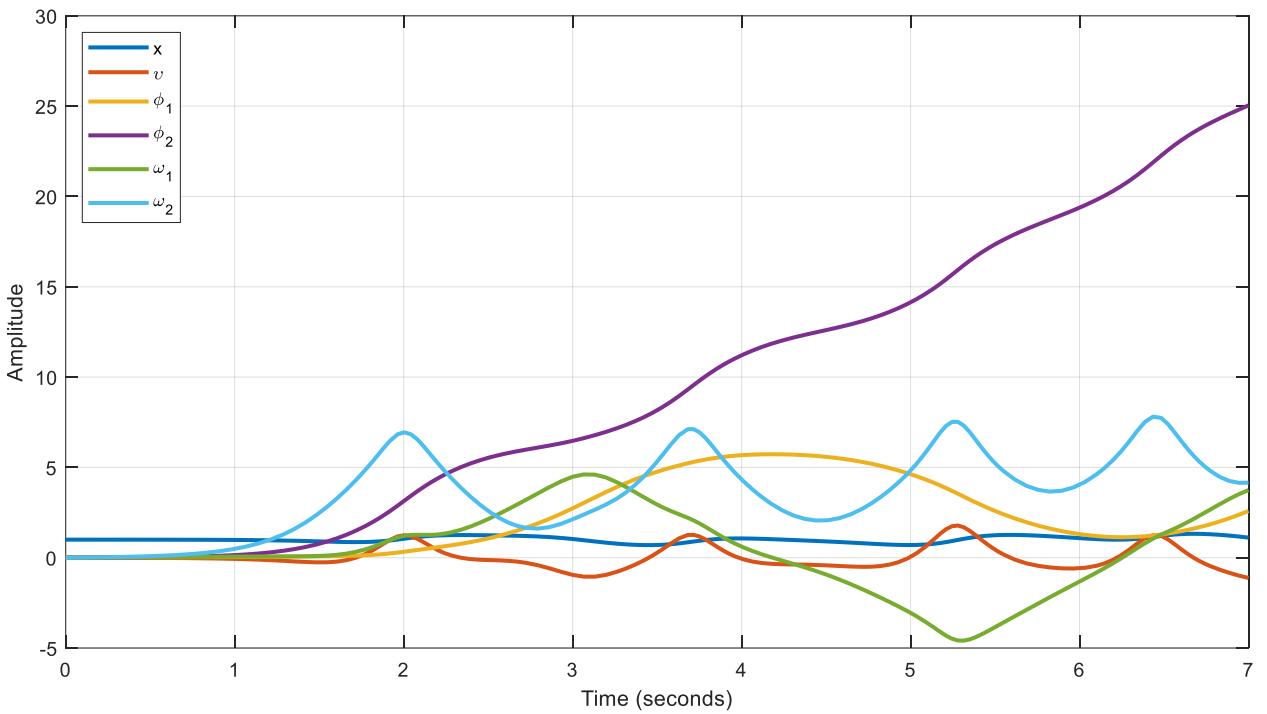


Рисунок 8 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0.01, 0, 0]^T$

Сравнивая данный график с графиком линейного моделирования, можно сделать похожий вывод, что некоторые упрощения линейной системы дают совпадение только в начальный период времени. Мы сообщили двум маятникам небольшое отклонение в начальный момент, и они начали свое вращение с увеличением и уменьшением скорости, будто делают оборот вокруг своей оси.

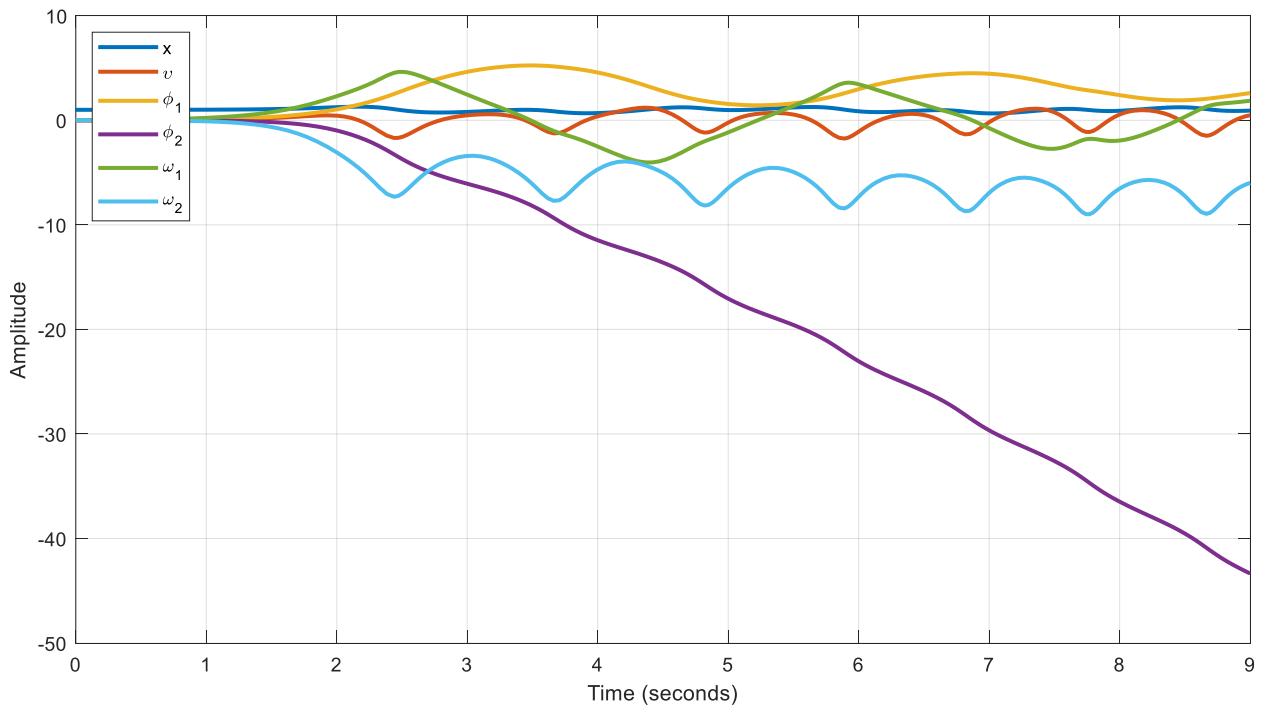


Рисунок 9 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$

Сообщая маятнику начальную скорость, можно увидеть похожую картину, что маятники начинают вращаться, то есть увеличивать и уменьшать свою скорость, в отличие от линеаризованной модели. Совпадение, опять же, если оно и есть, то только в начальный период времени.

ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.1 Синтез регулятора по состоянию

Рассчитаем регулятор вида $u = Kx$ модальным способом. Выберем желаемый спектр замкнутой системы $\sigma(A + BK) = \{-0.5, -1, -1.5, -2, -2.5, -3\}$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Условие управляемости (Y, Γ) выполнено.

Из уравнения Сильвестра: $AP - P\Gamma = BY$

$$P = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.03 & -0.024 & -0.02 & 0.04 & -0.016 \\ 0.03 & 0.056 & 0.05 & 0.05 & -0.015 & 0.07 \\ 0.001 & 0.0009 & 0.0009 & 0.001 & -0.002 & 0.0008 \\ -0.002 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & -0.002 \\ -0.003 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & 0.0005 \\ 0.006 & 0.003 & 0.004 & 0.004 & 0.004 & -0.001 \end{bmatrix}$$

$$K = -YP^{-1} = [-2.25 \ -11.025 \ 1380 \ 1300 \ 621.6 \ 404.78]$$

Промоделируем нелинейную систему.

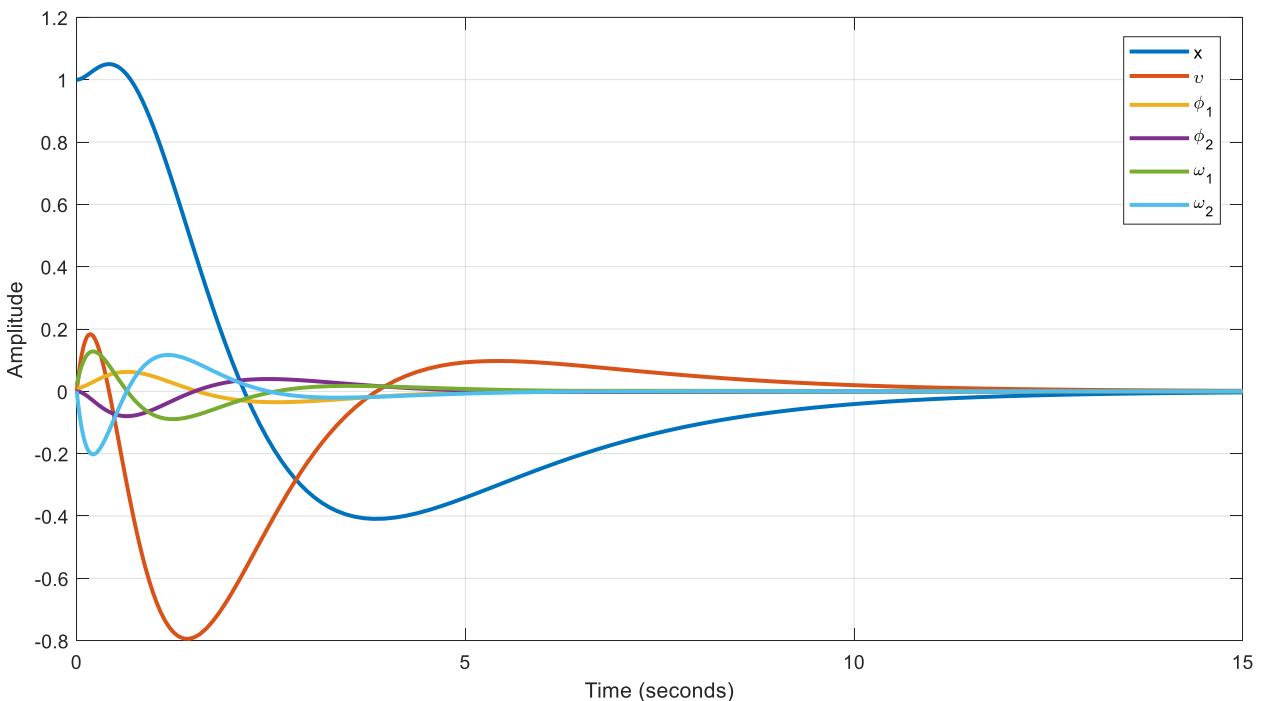


Рисунок 10 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$

Но стоит нам толкнуть маятник посильнее в 18 раз, то система уже становится неустойчивой:

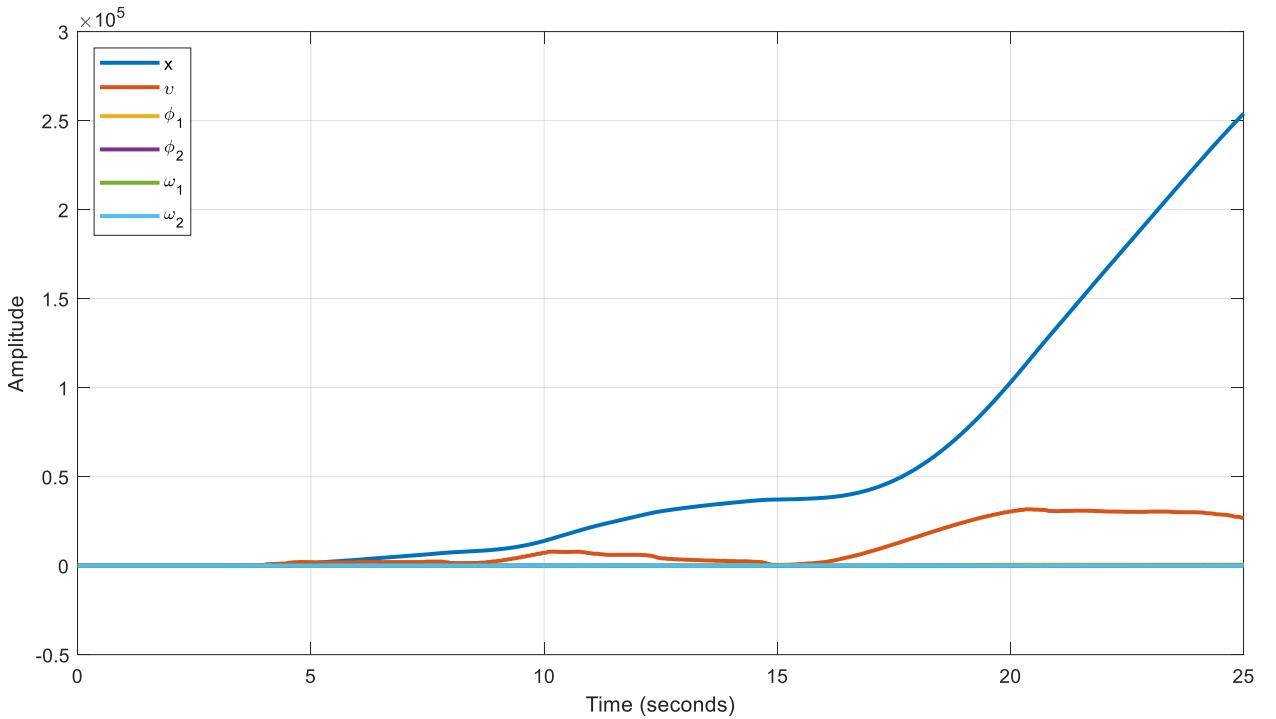


Рисунок 11 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.01, 0, 0.36, 0]^T$

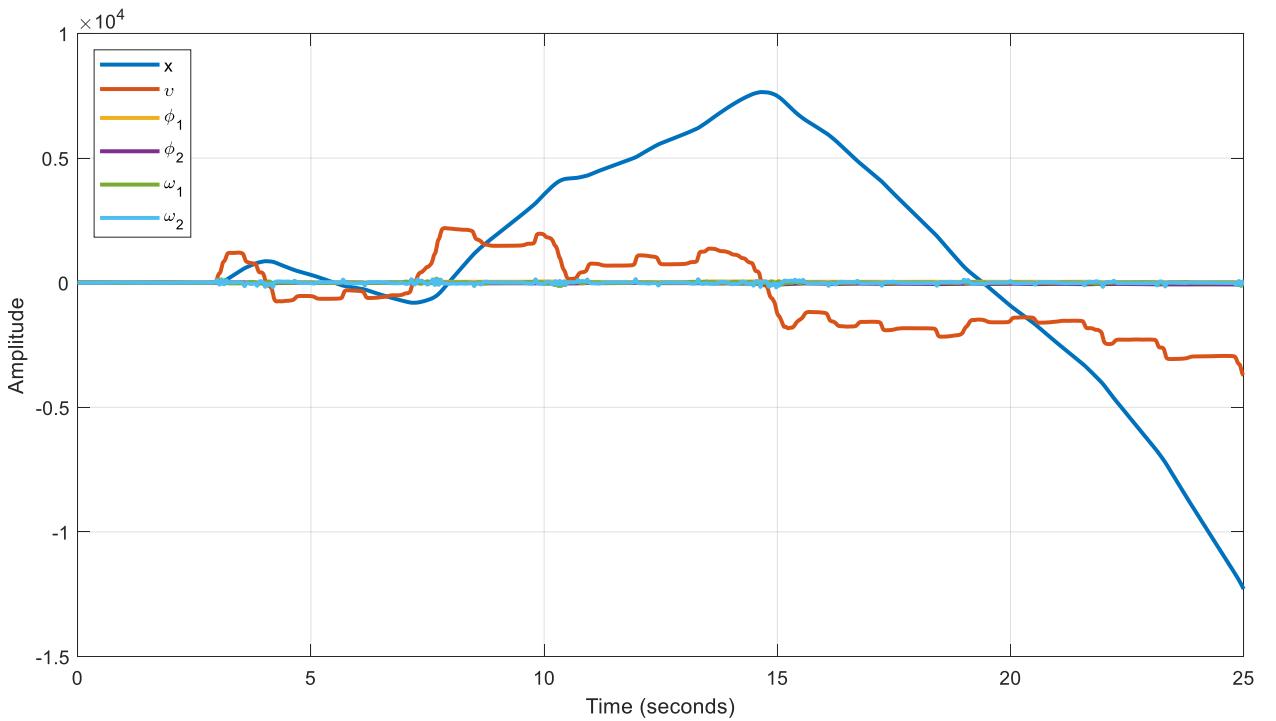


Рисунок 12 – Вектор состояния системы при начальных условиях $[1, 0, 0.17, 0, 0.02, 0]^T$

Здесь мы решили протестировать угол отклонения от вертикали: при начальном значении 0.17 система становится неустойчивой при этом спектре замкнутой системы.

3.2 Исследование регулятора по состоянию

Исследуем влияние разных выбранных собственных чисел на нашу систему с одинаковыми начальными условиями.

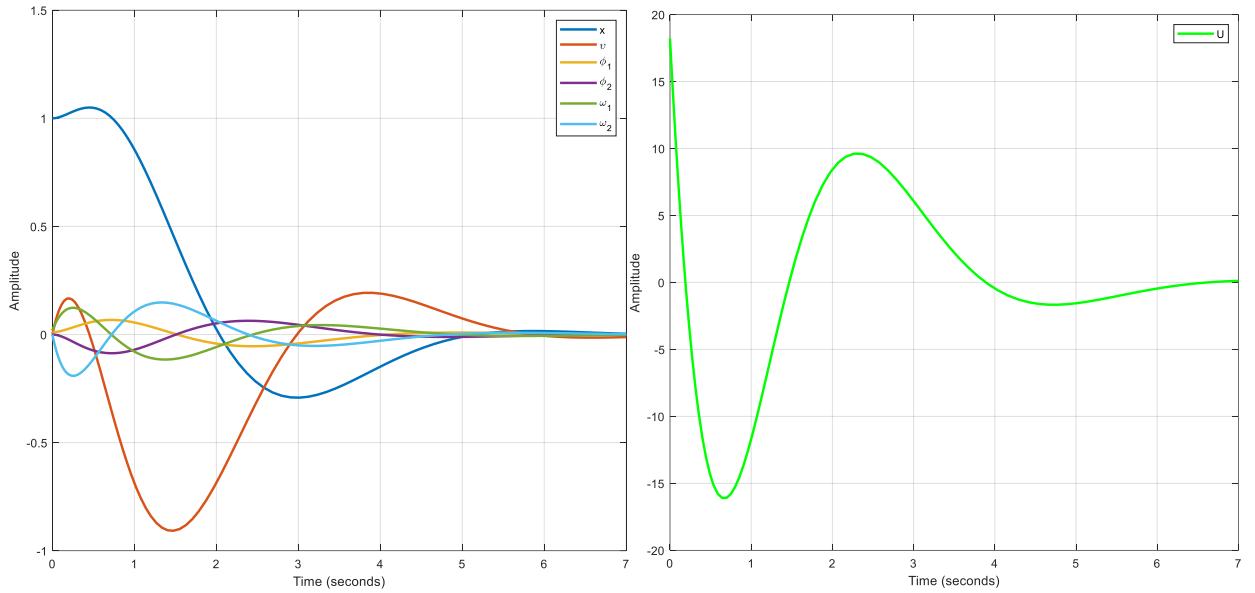


Рисунок 13 – Система $\sigma(A + BK) = 0.85 \cdot \{-3, -1.7, -2, -2.1, -1 \pm 1.5\}$

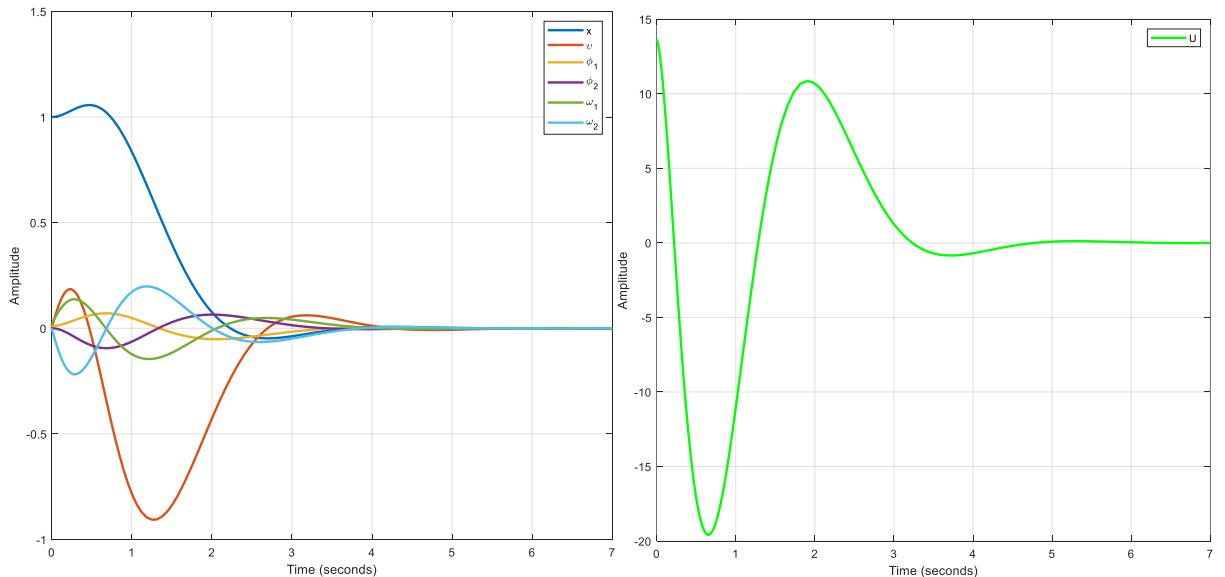


Рисунок 14 – Система $\sigma(A + BK) = 1.3 \cdot \{-3, -1.7, -2, -2.1, -1 \pm 1.5\}$

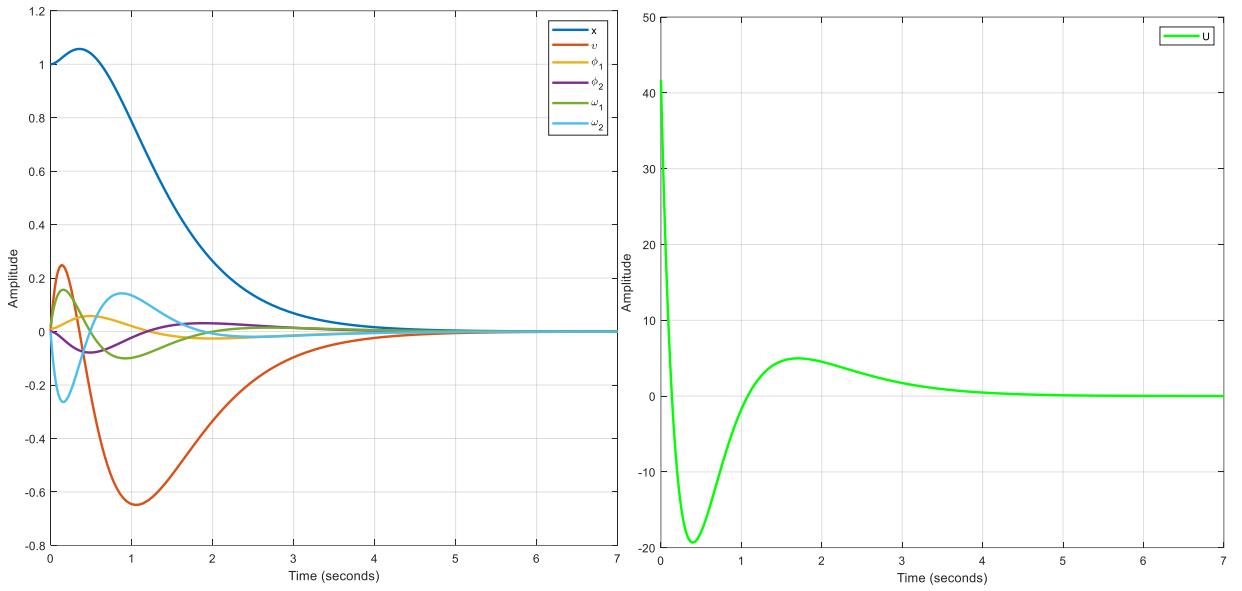


Рисунок 15 – Система $\sigma(A + BK) = 1.3 \cdot \{-3, -1.7, -2, -2.1, -1, -1.2\}$

Анализируя данные три пары графиков с комплексными собственными числами в спектре, а потом без них, можно сделать вывод:

- увеличении всех собственных чисел во сколько-то раз, увеличивает и коэффициенты матрицы K, что прямо влияет на время переходного процесса, а также величину управления
- при введении комплексных чисел уменьшился модуль управления, время переходного процесса в обоих случаях почти одинаковое, а скорость смещения тележки в этом случае имеет большее перерегулирование

3.3 Синтез наблюдателя

С помощью решения уравнения Сильвестра произведем расчет наблюдателя.

Выберем желаемый спектр матрицы Γ . $\sigma(A + LC) = \{-2, -2, -2, -2, -2, -2\}$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Из уравнения Сильвестра: $\Gamma Q - QA = YC$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.016 & 0.047 & -667 & -100.34 & 288.4 & 43.38 \\ -0.03 & 0.078 & 208.74 & 31.43 & -90.26 & -13.57 \\ -0.06 & 0.12 & -65.3 & -9.9 & 28.21 & 4.285 \\ -0.125 & 0.187 & 20.44 & 3.15 & -8.87 & -1.33 \\ -0.25 & 0.25 & -6.37 & -1.16 & -2.7 & 0.49 \\ -0.5 & 0.25 & 1.9 & 0.36 & -0.95 & -0.18 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Y, Γ) – управляема

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 13.39 & 13.39 & 13.39 \\ 51.45 & 51.45 & 51.45 \\ 40.42 & 40.42 & 40.42 \\ -65.81 & -65.81 & -65.81 \\ 105.93 & 105.93 & 105.93 \\ -234.87 & -234.87 & -234.87 \end{bmatrix}$$

Исследуем работоспособность синтезированного наблюдателя при получении выходных значений $y = (y_1, y_2, y_3)$ от нелинейной системы, замкнутой регулятором с прошлого пункта собственными числами замкнутой системы $\sigma(A + BK) = \{-3, -1.7, -2, -2.1, -1, -1.2\}$

Начальные условия моделирования $x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$ и $\hat{x}(0) = [0, 0.01, 0.01, 0, 0, 0]^T$.

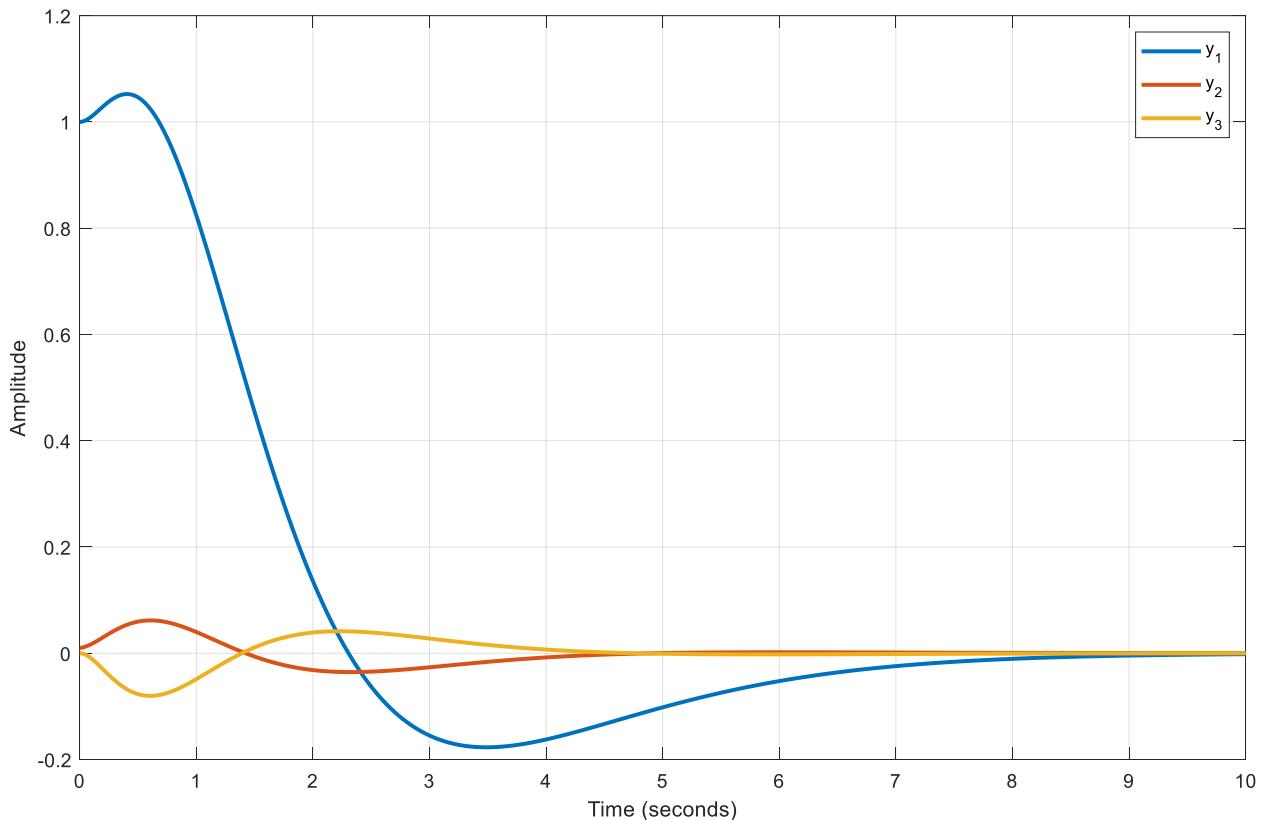


Рисунок 16 – График выхода

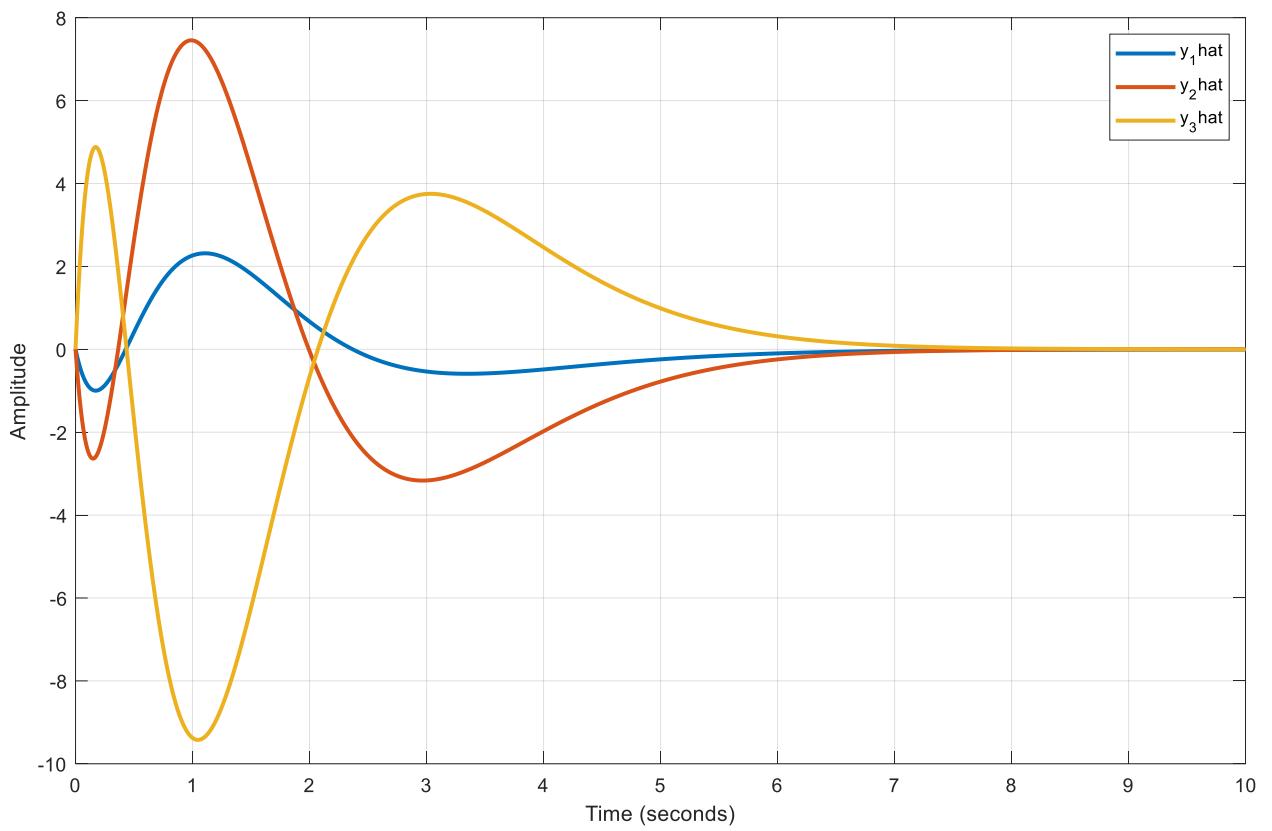


Рисунок 17 – График оценки выхода

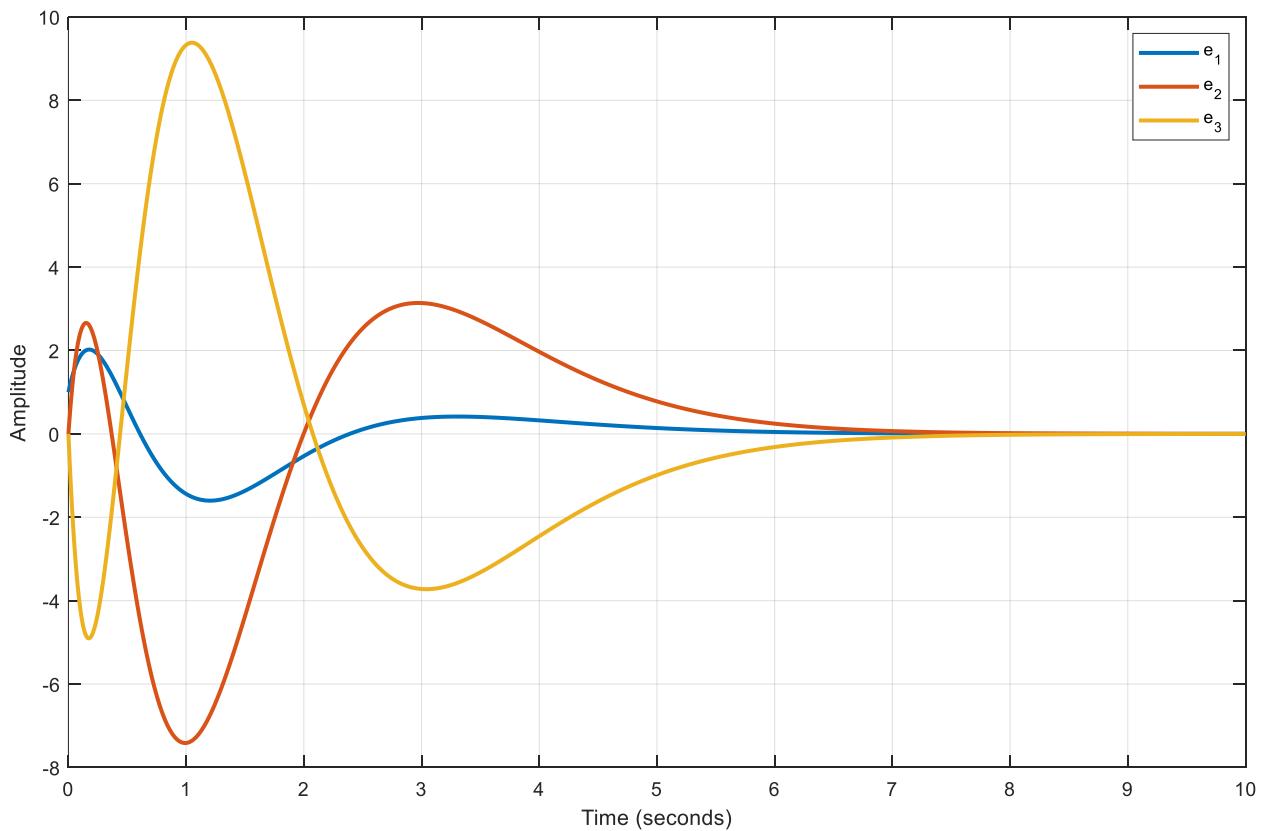


Рисунок 18 – График ошибки выхода

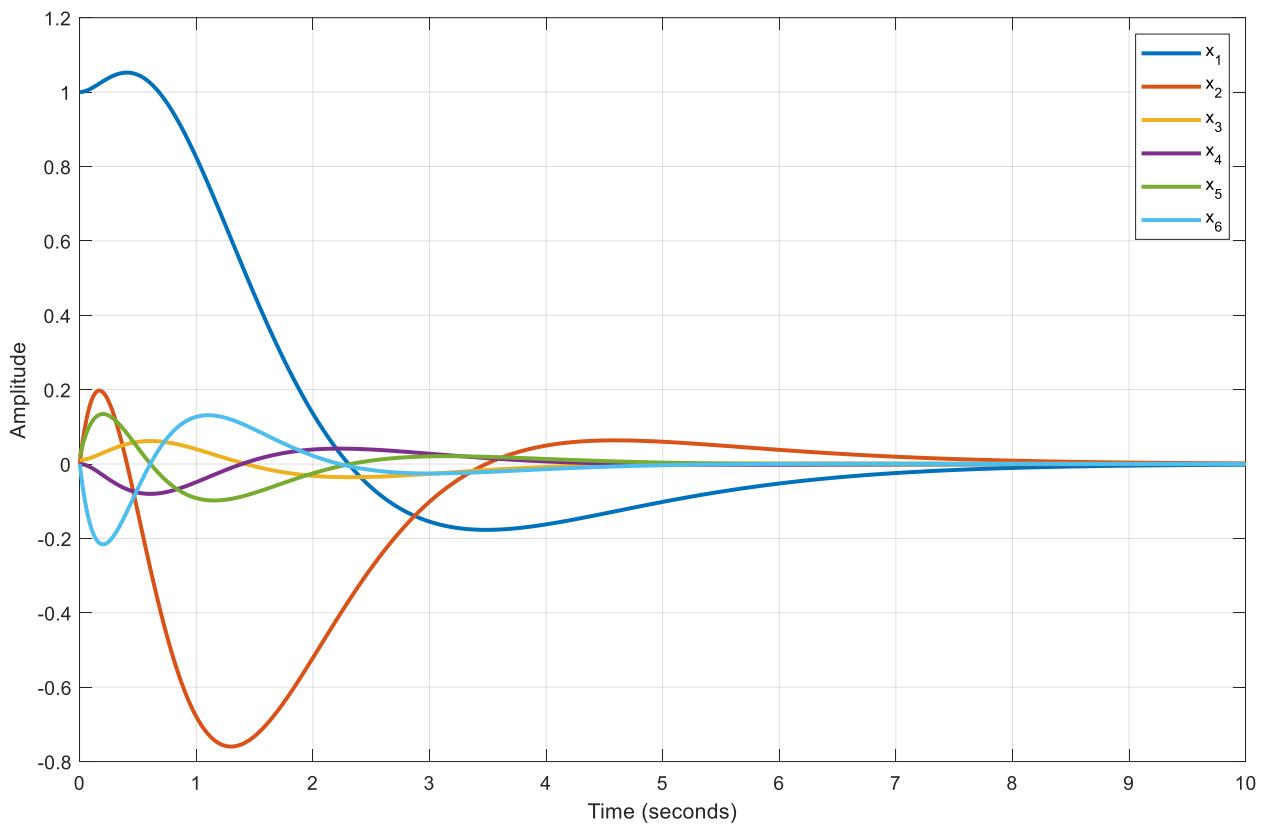


Рисунок 19 – График вектора состояния

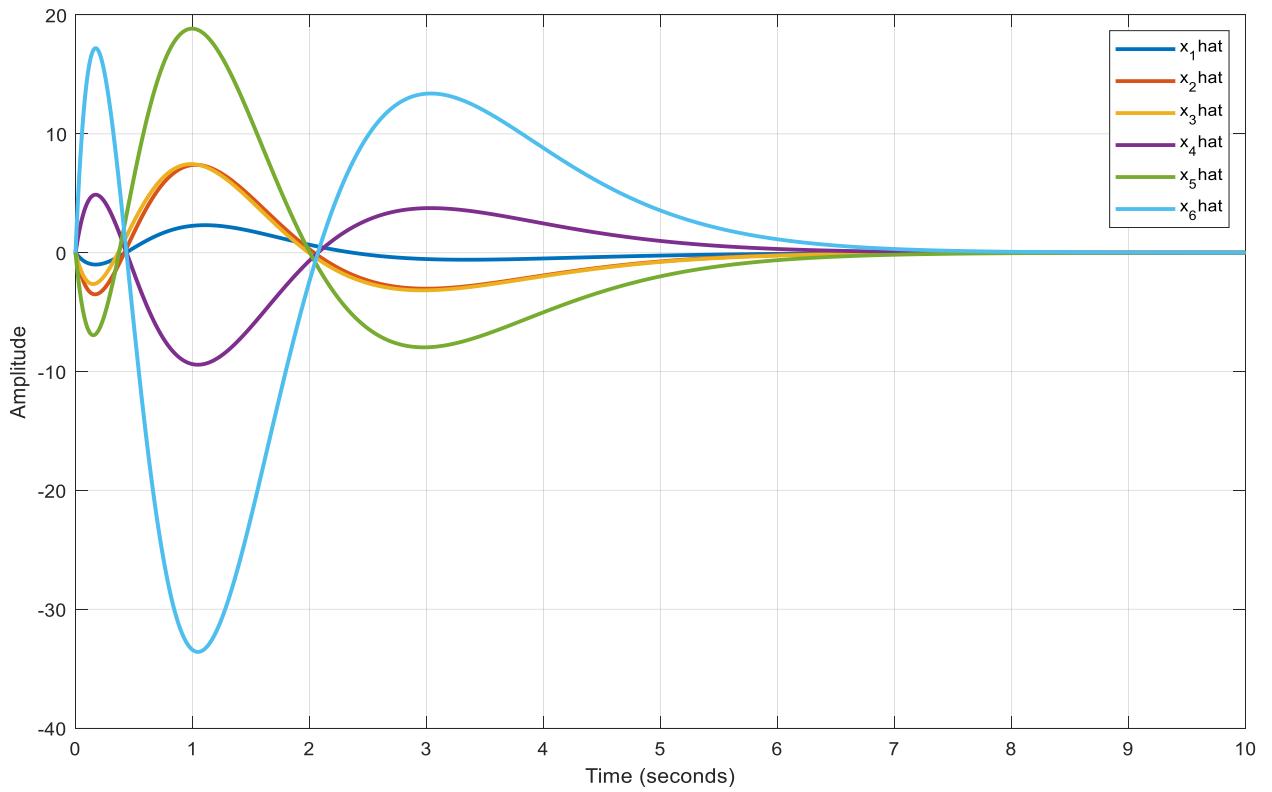


Рисунок 20 – График вектора состояния оценки

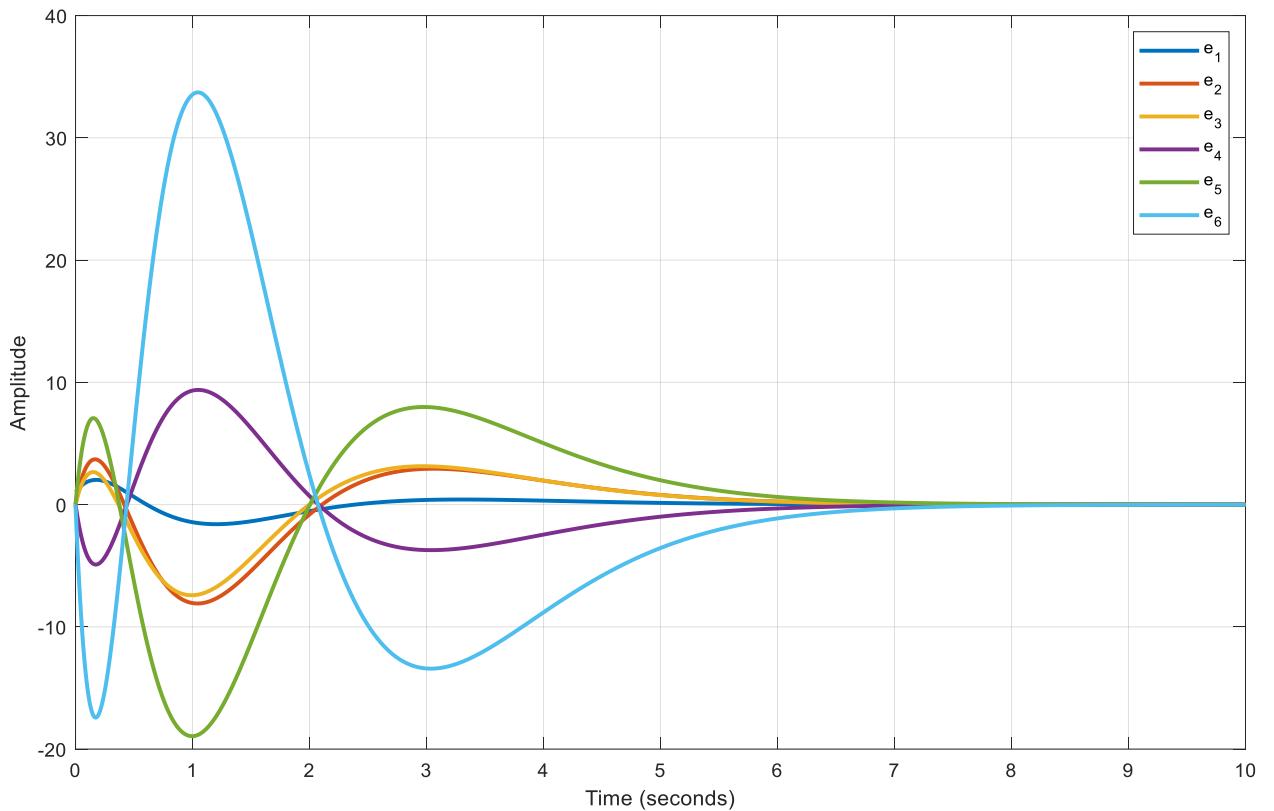


Рисунок 21 – График ошибки по состоянию

Анализируя построенные графики, можно сказать, что наблюдатель выполняет свою работу. Ошибка имеет асимптотический характер, а вектора компоненты стремятся к нулю.

3.4 Исследование наблюдателя

Исследуем влияние выбранных собственных чисел на работу наблюдателя. Способы моделирования те же.

Матрица коэффициентов наблюдателя

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 24.2 & 24.2 & 24.2 \\ 305.9 & 305.9 & 305.9 \\ 361.8 & 361.8 & 361.8 \\ -410 & -410 & -410 \\ 917 & 917 & 917 \\ -1480 & -1480 & -1480 \end{bmatrix}$$

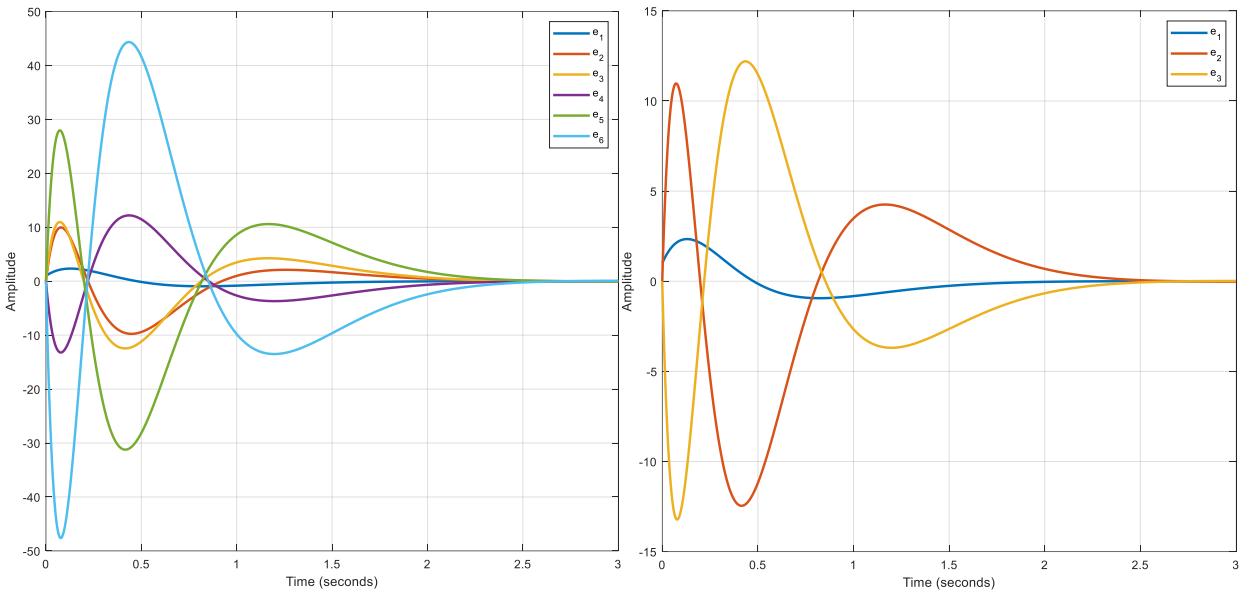


Рисунок 22 – Графики ошибок по состоянию и по выходу при спектре $\{-4, -4, -4, -4, -4, -4\}$

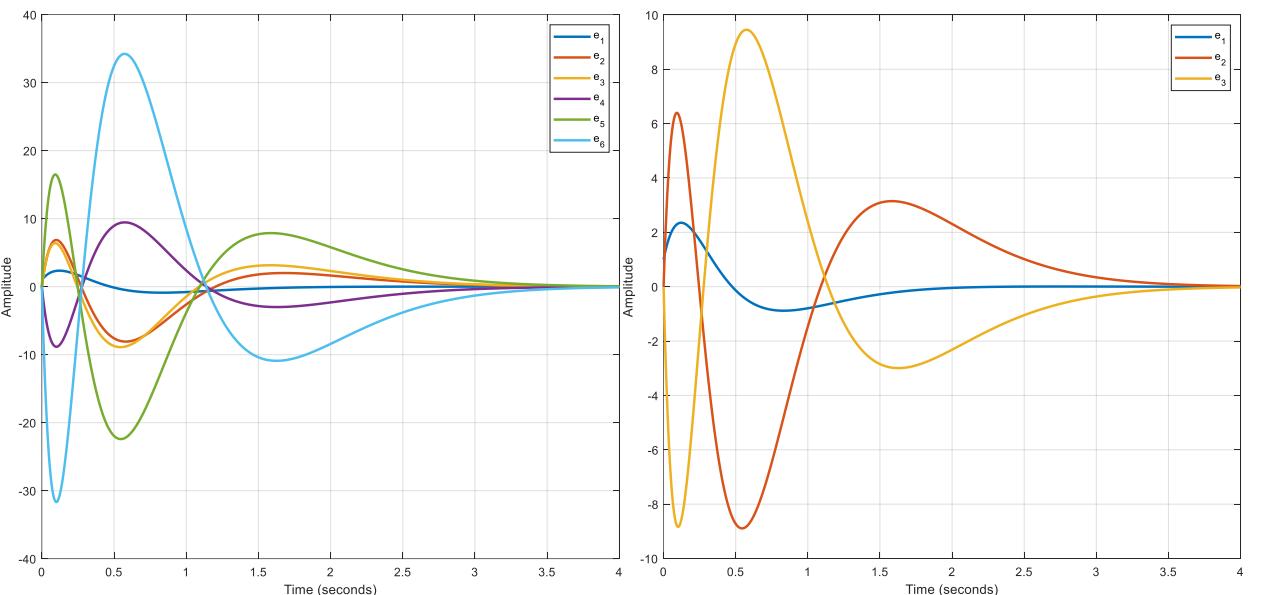


Рисунок 23 – Графики ошибок по состоянию и по выходу при спектре $\{-1.2, -1.2, -1.2, -1.2, -1.2, -1.2\}$

Матрица коэффициентов наблюдателя

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 26.84 & 26.84 & 26.84 \\ 165 & 165 & 305.9 \\ 164.87 & 164.87 & 361.8 \\ -210 & -210 & -210 \\ 421.98 & 421.98 & 421.98 \\ -758 & -758 & -758 \end{bmatrix}$$

Мы сначала увеличили, а затем уменьшили спектр желаемых собственных чисел наблюдателя почти в два раза. Как и предполагалось, (правда, пропорция немного отличается), при уменьшении спектра желаемых собственных чисел увеличивается время стабилизации, но уменьшается перерегулирование, а в обратном случае все наоборот.

3.5 Синтез регулятора по выходу

Построим регулятор, стабилизирующий маятник и тележку в условиях, когда измерению доступны только сигналы y_1 , y_2 и y_3 .

Подберем такие наборы желаемых матриц K и L , чтобы переходные процессы в замкнутой нелинейной системе были наилучшими на наш субъективный взгляд.

В ходе исследования были выбраны следующие спектры замкнутых систем:

$$\sigma(A + BK) = \{-3.9, -2.73, -2.6, -2.21, -1.56, -1.3\}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-3.03, -2.97, -3.01 \pm 0.024i, -2.99 \pm 0.024i\}$$

Находим матрицы K и L :

$$K = [-5 \quad -19.2 \quad 1673.7 \quad 1498 \quad 753 \quad 467.3]$$

$$L = \begin{bmatrix} 25.2 & 25.2 & 25.2 \\ 138.82 & 138.82 & 305.9 \\ 133.2 & 133.2 & 361.8 \\ -176.4 & -176.4 & -176.4 \\ 341.96 & 341.96 & 341.96 \\ -633.28 & -633.28 & -633.28 \end{bmatrix}$$

А далее проведем моделирование систем и оценим получившийся результат.

Начальные условия моделирования $x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$ и $\hat{x}(0) = [0, 0.01, 0.01, 0, 0, 0]^T$.

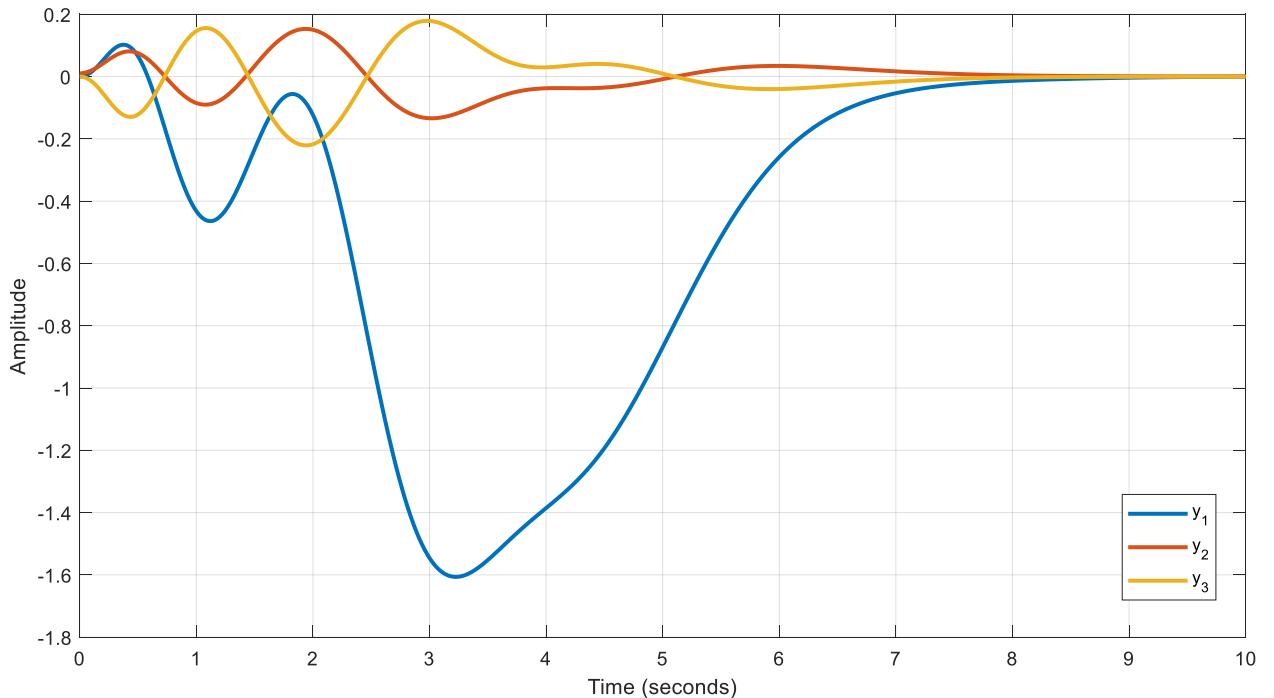


Рисунок 24 – График выхода

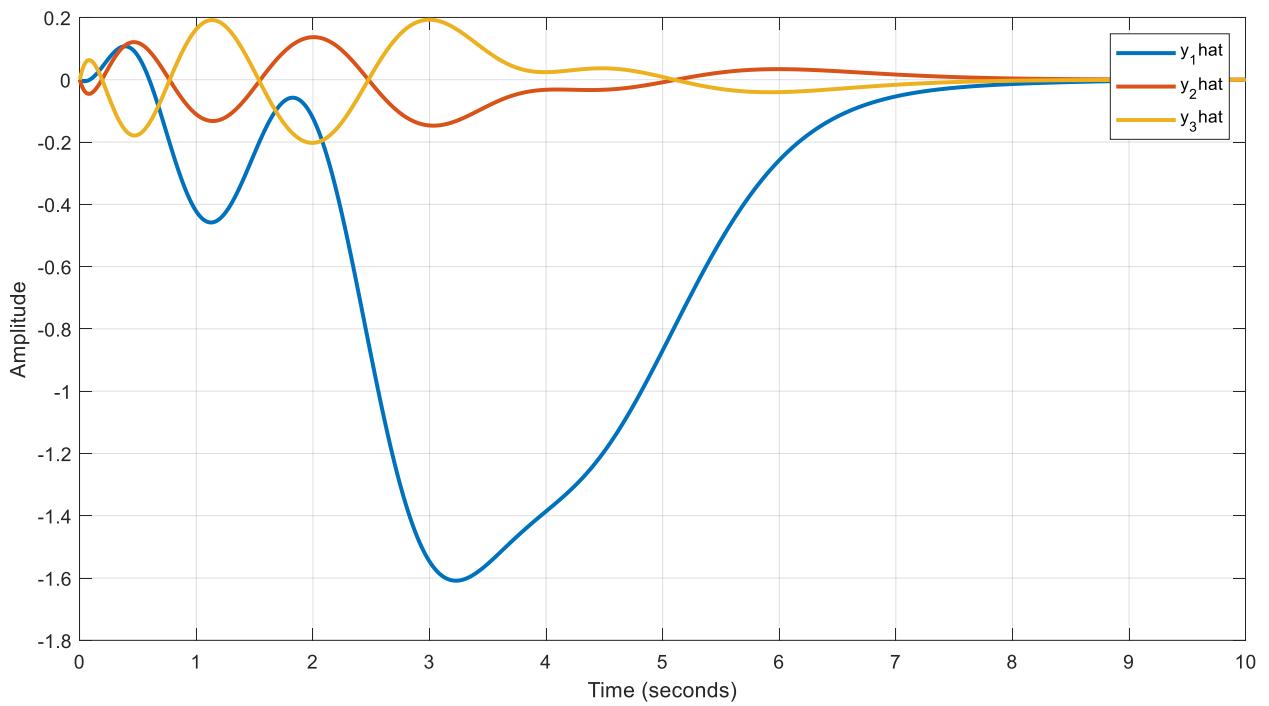


Рисунок 25 – График оценки выхода

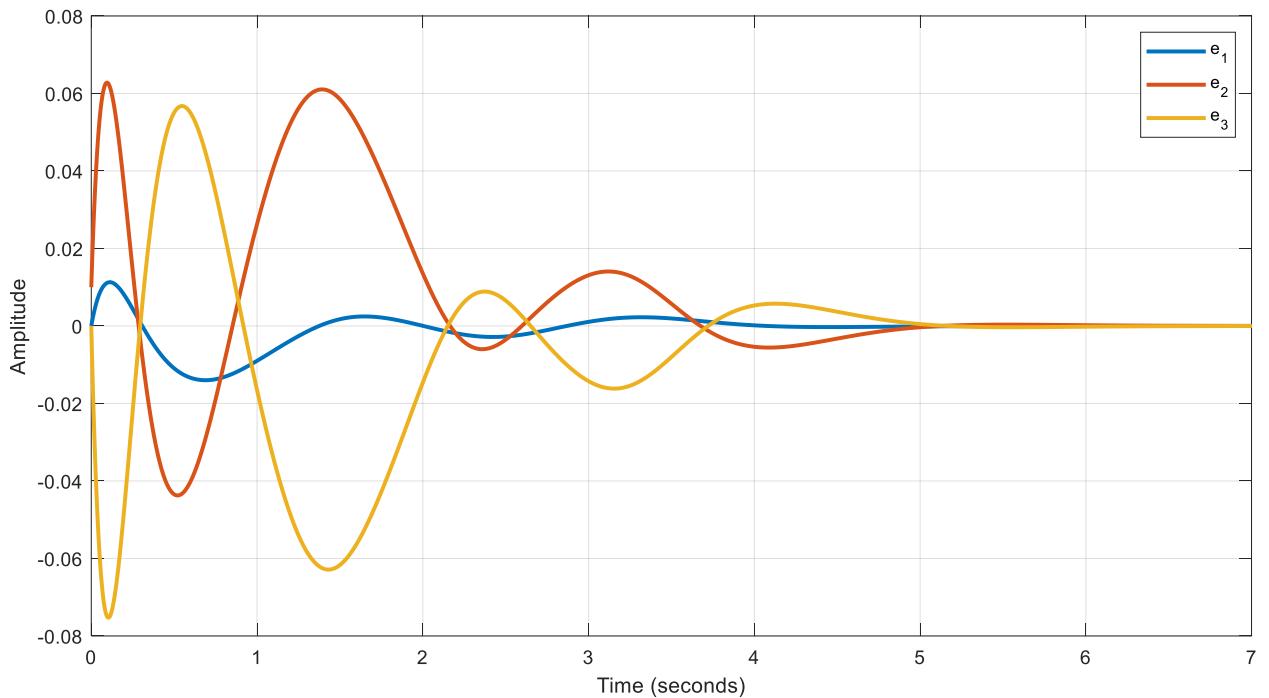


Рисунок 26 – График ошибки по выходу

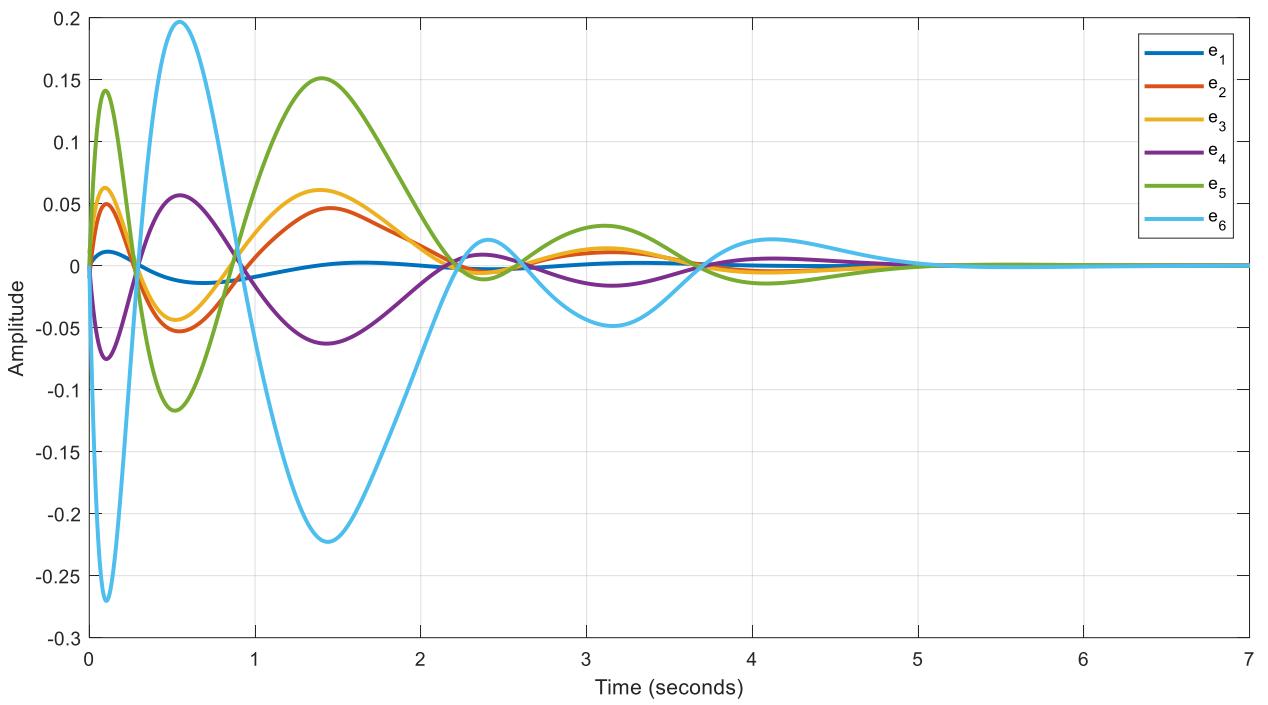


Рисунок 27 – График ошибки по состоянию

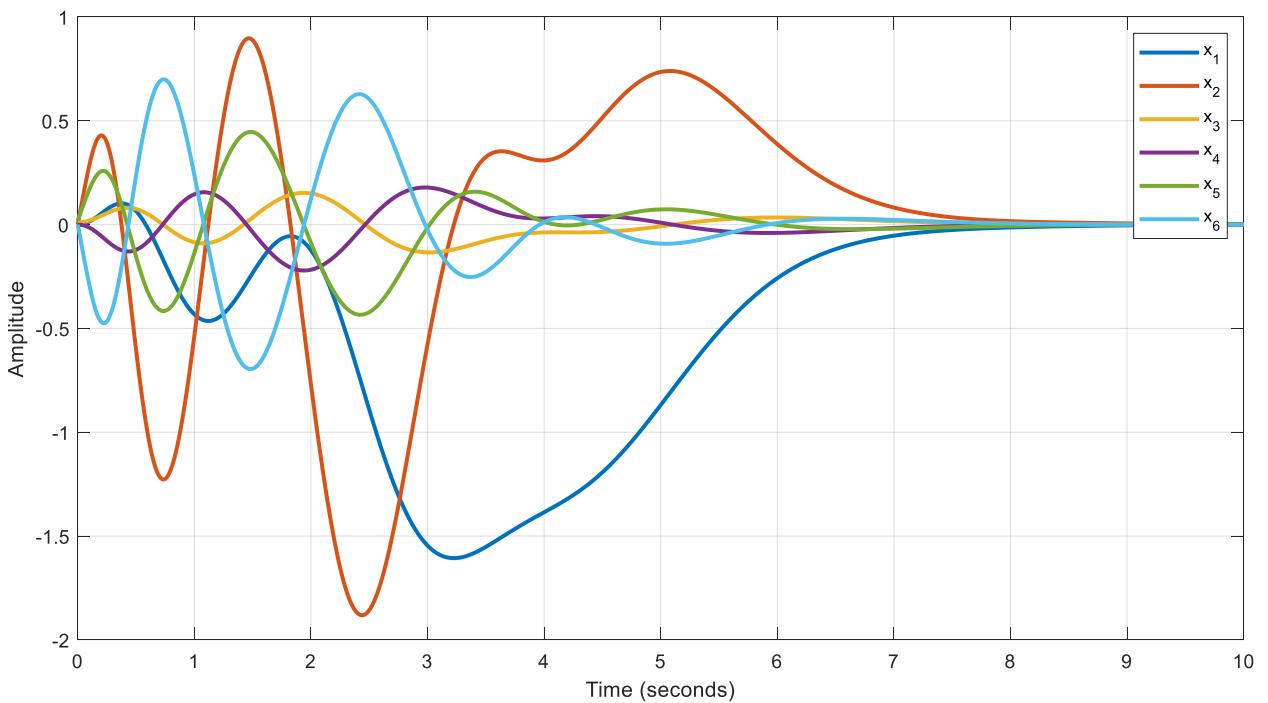


Рисунок 28 – График состояния

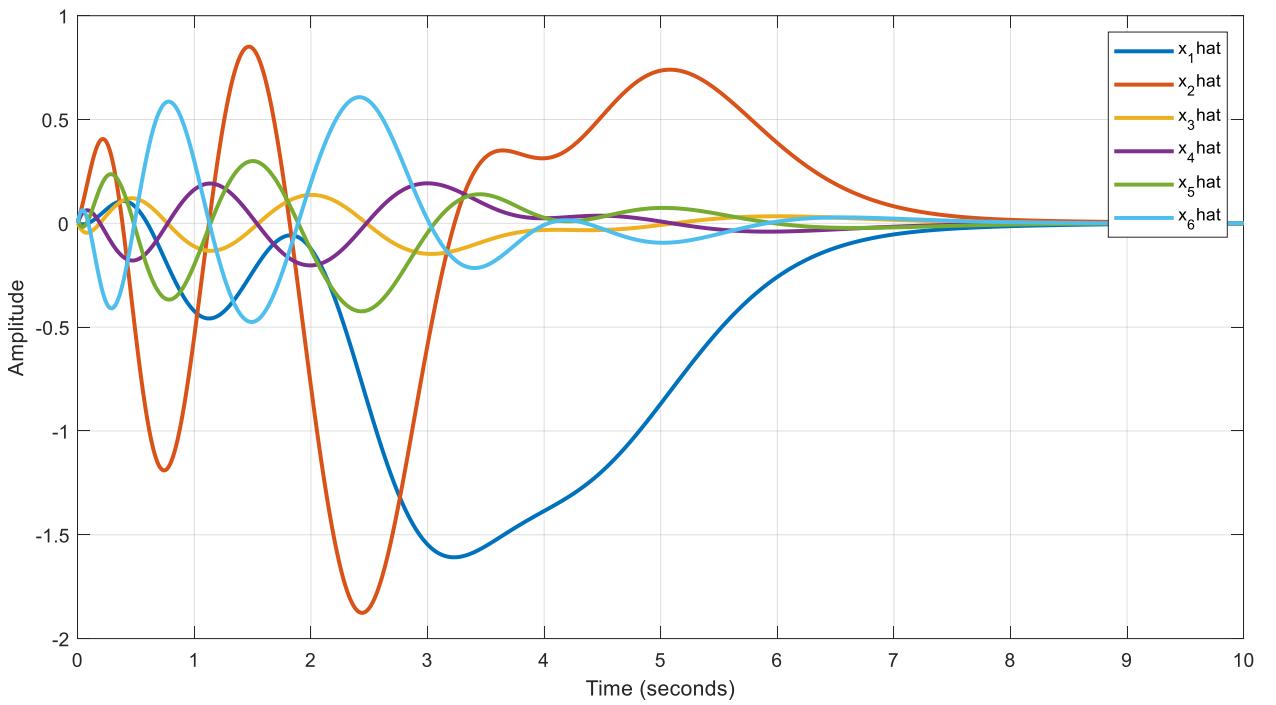


Рисунок 29 – График оценки состояния

Можно сказать, что нам удалось подобрать набор желаемых собственных чисел на наш субъективный взгляд, при котором переходные процессы в замкнутой нелинейной системе проходят наилучшим образом. Перерегулирование адекватное, ну как и время.

ГЛАВА 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА

4.1 Линейно-квадратичный регулятор

Синтезируем LQR-регулятор на основе линейной модели и применим его для управления системой.

Уравнение Риккати:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$$

Матрица K:

$$K = -R^{-1}B^TP$$

Функционал качества:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(\mathbf{0})Qx(t) + u^T(\mathbf{0})Ru(t))dt$$

Минимальный функционал качества:

$$J = x_0^T P x_0$$

Зададим

$$Q = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \text{ и } R = [1]$$

Решим уравнение Риккати и получим матрицу коэффициентов регулятора K:

$$K = [-12 \quad -39.7 \quad 2661 \quad 2209 \quad 1947 \quad 692]$$

Применим полученный LQR для управления нелинейной системой с начальными условиями $x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0, 0.02]^T$.

Минимальный функционал качества $J = 413.16$.

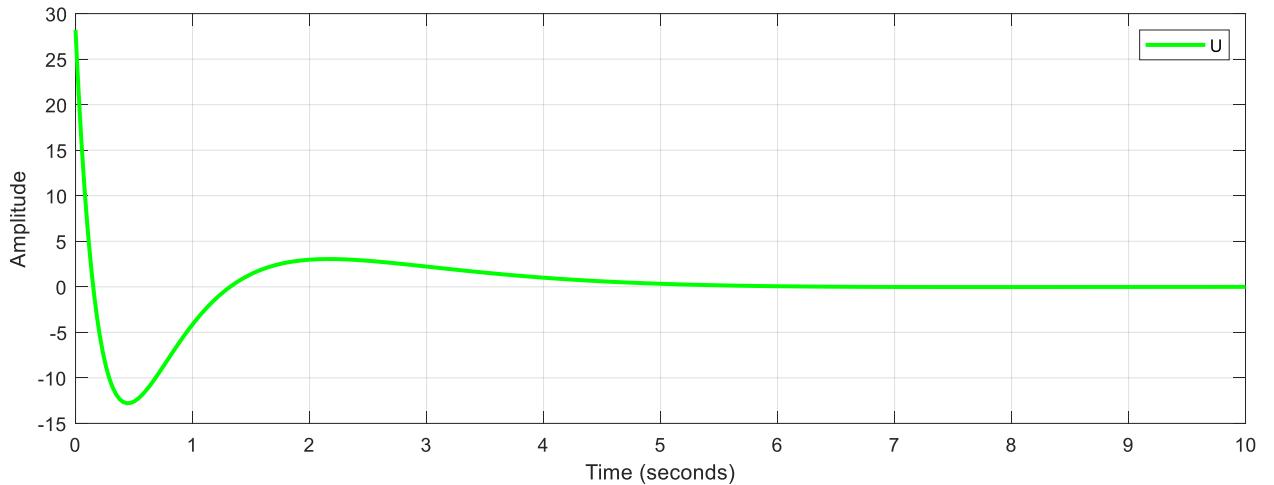


Рисунок 30 – График затраченного управления

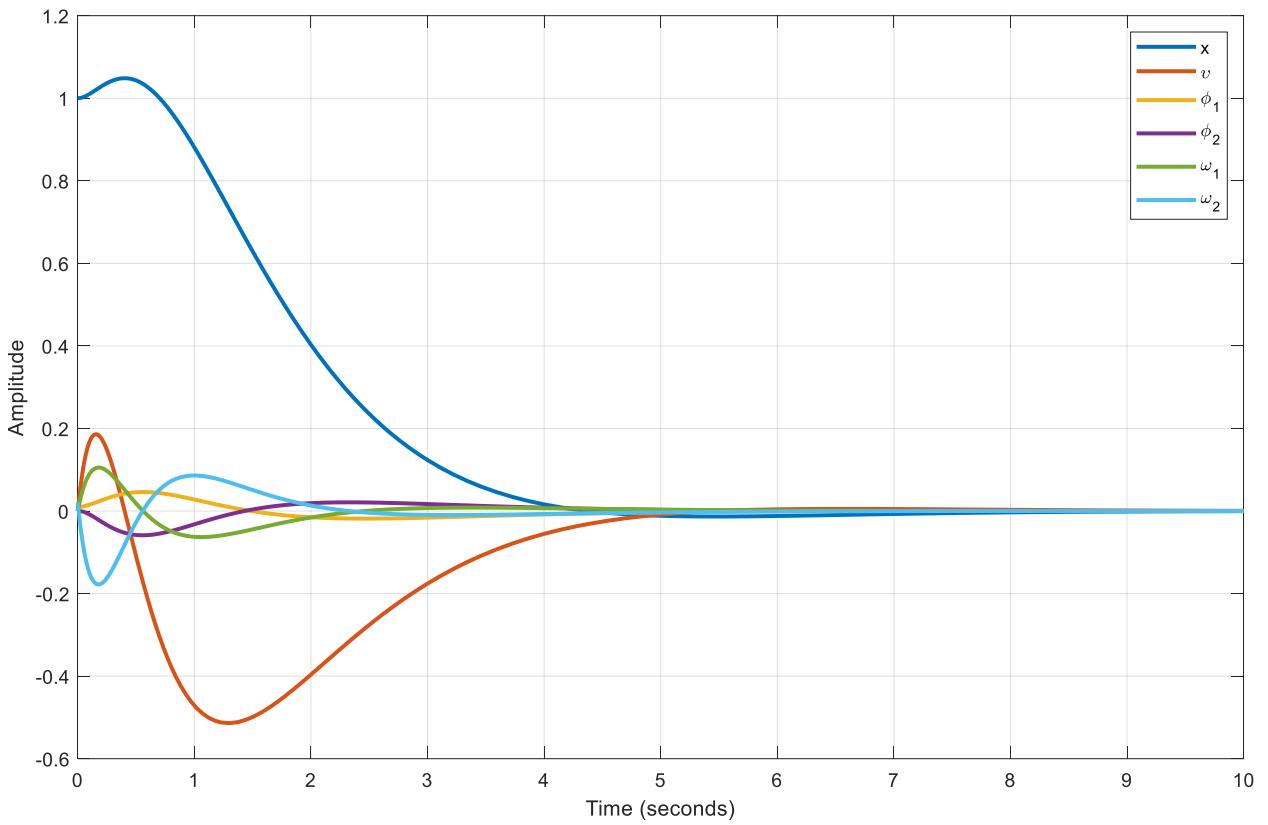


Рисунок 31 – График управления с LQR регулятором

Данный синтез LQR предлагает выбрать оптимальный регулятор, который будет давать лучшие значения на выбранном критерии качества.

4.2 Линейно-квадратичный наблюдатель

Аналогично синтезируем LQE.

Из уравнения будем находить P :

$$AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$$

Чтобы найти L :

$$L = -PC^T R^{-1}$$

Зададим

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } R = [1]$$

Начальные условия

$$x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0, 0.02]^T$$

Решим уравнение Риккати и получим матрицу коэффициентов L:

$$L = \begin{bmatrix} -1.85 & -0.4 & 0.7 \\ -1.54 & -1.78 & 3.73 \\ -0.4 & -4.77 & 0.29 \\ 0.7 & 0.29 & -6.93 \\ -1.09 & -11 & 1.87 \\ 2.55 & 1.82 & 23.78 \end{bmatrix}$$

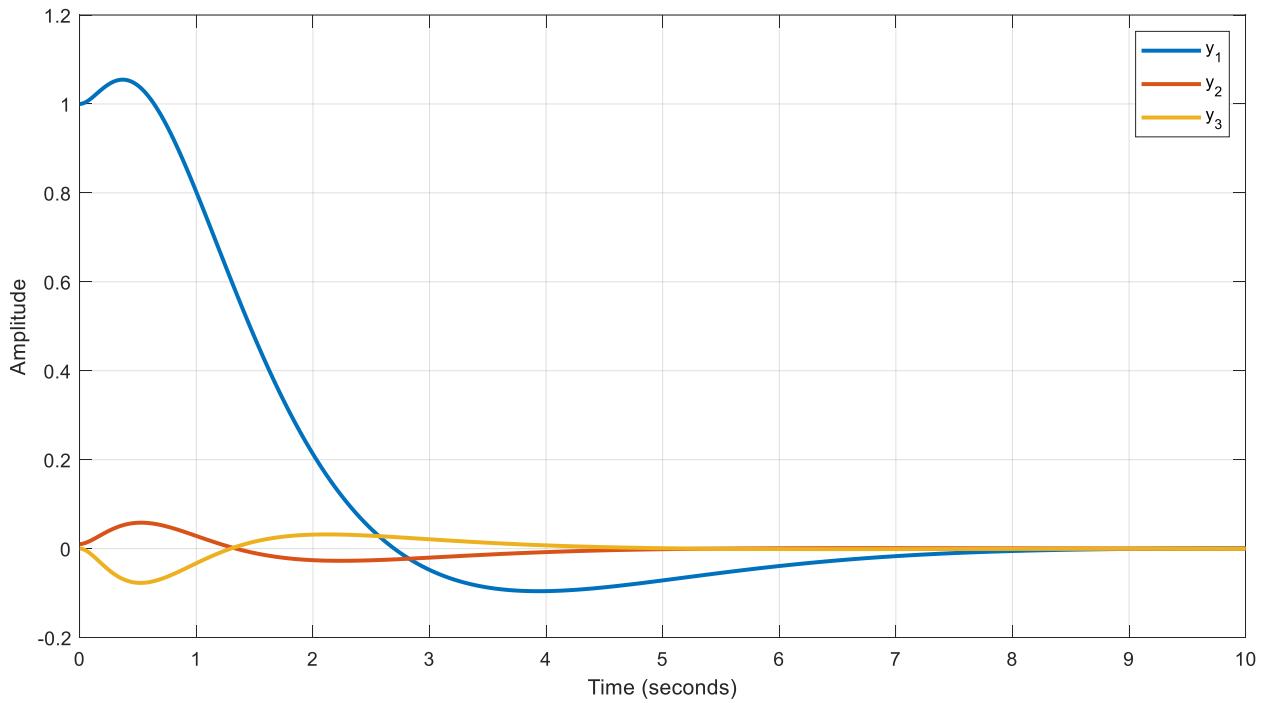


Рисунок 32 – График выхода

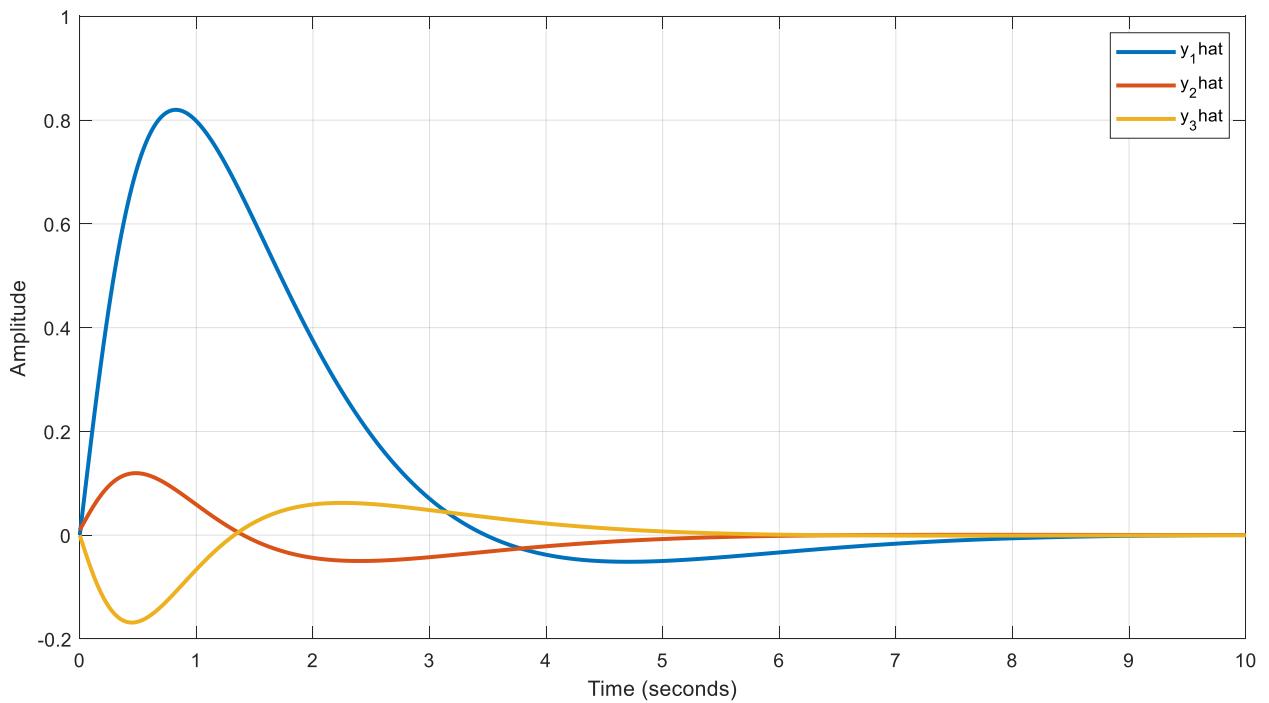


Рисунок 33 – График оценки выхода

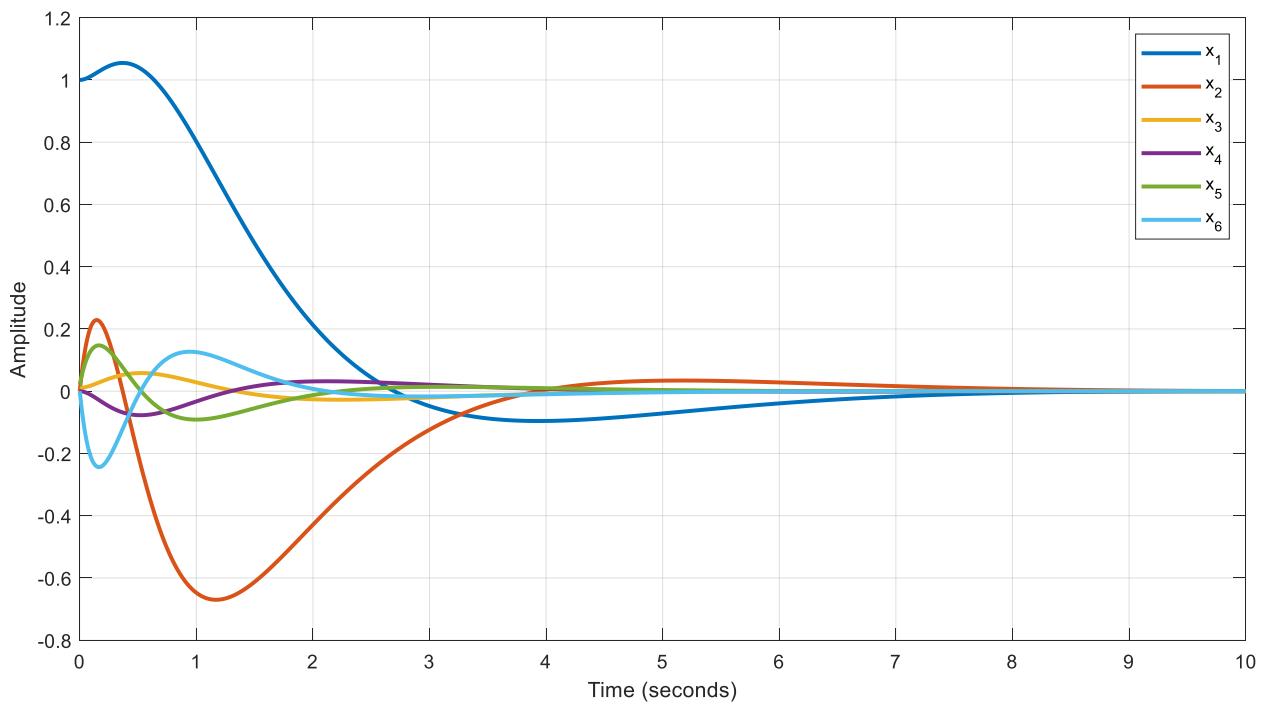


Рисунок 34 – График состояния

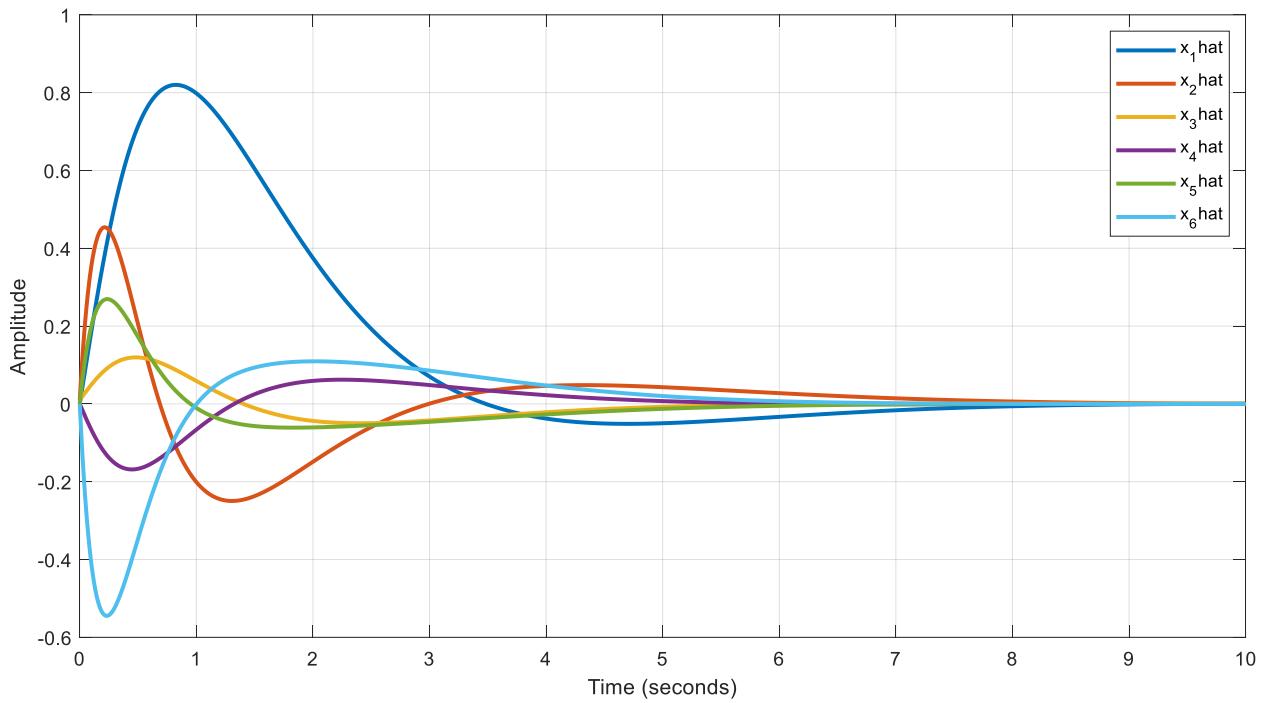


Рисунок 35 – График оценки состояния

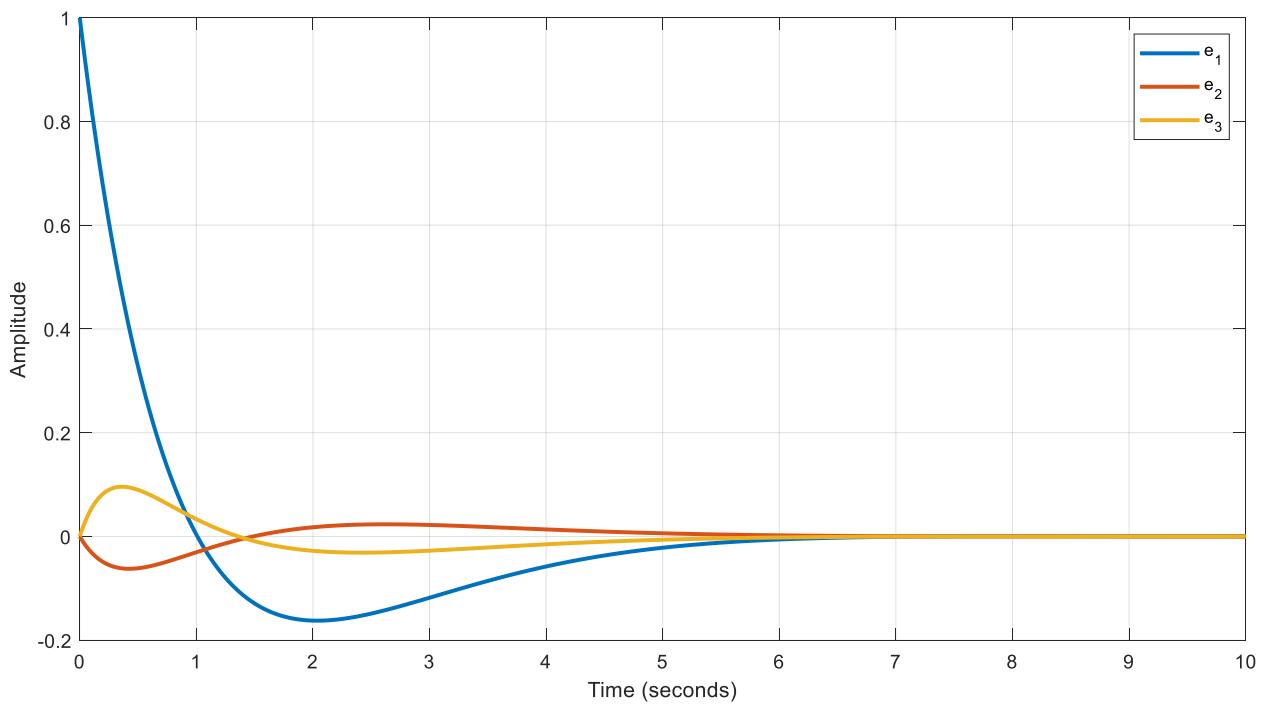


Рисунок 36 – График ошибки по выходу

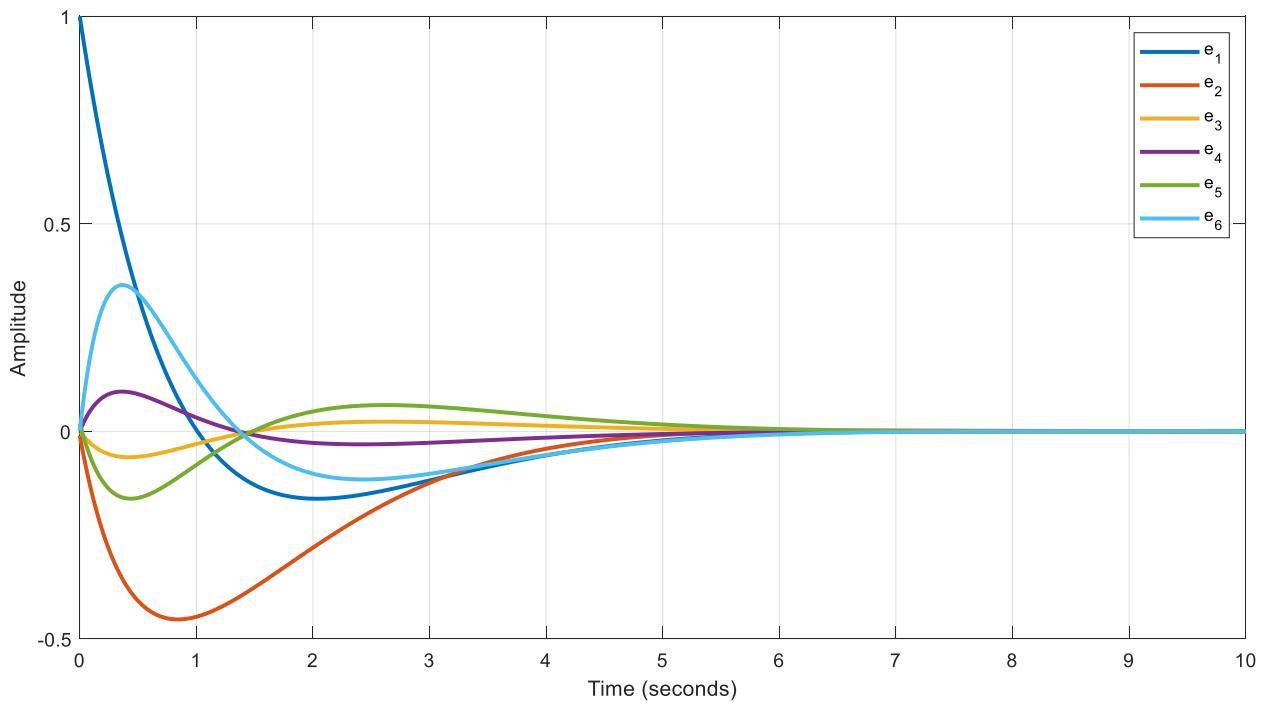


Рисунок 37 – График ошибки по состоянию

При ненулевой начальной ошибке график самой ошибки стремится к нулю. Wolf

4.3 LQG для линейной модели

Применим LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления линейной моделью, в которой зададим сигналы f и ξ как белый шум с известными параметрами.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Начальные условия моделирования $x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$ и $\hat{x}(0) = [0, 0.01, 0.01, 0, 0, 0]^T$.

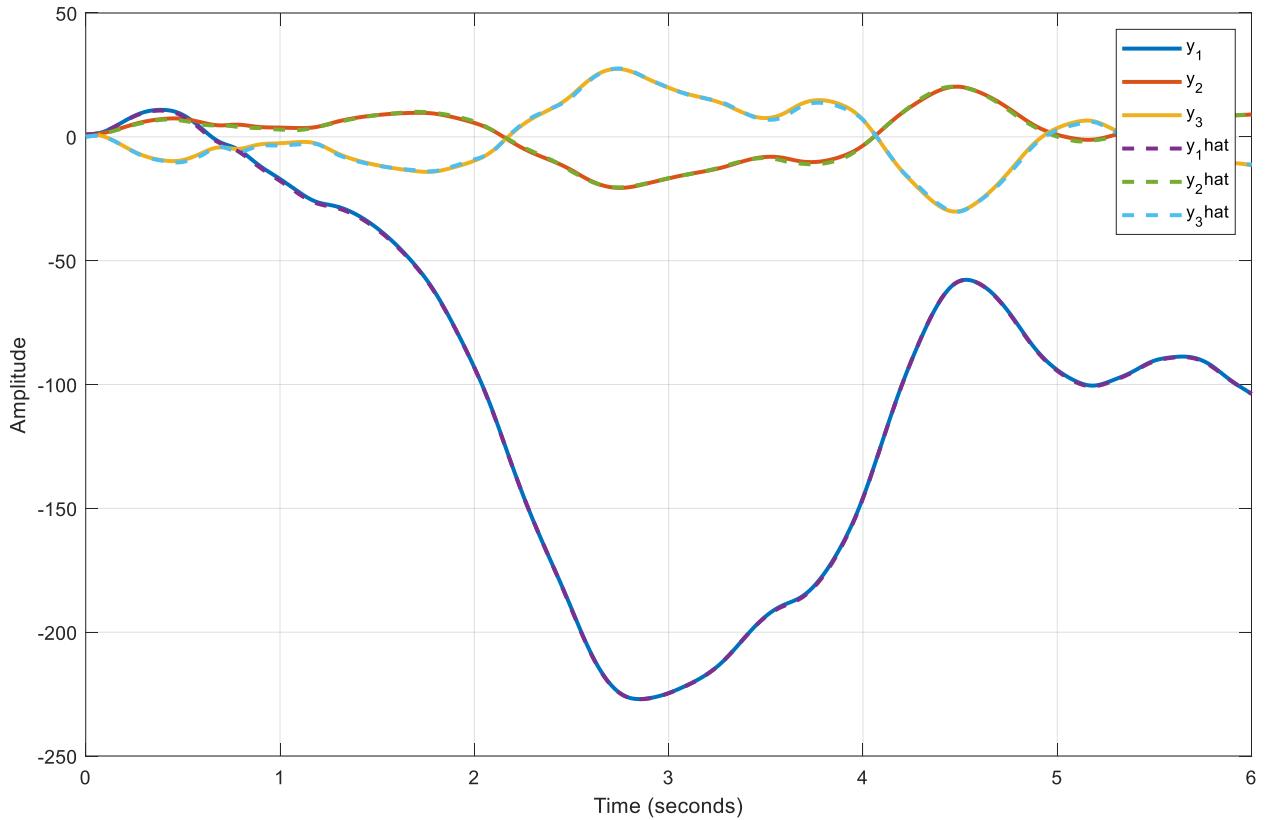


Рисунок 38 – График наблюдателя и линейной системы

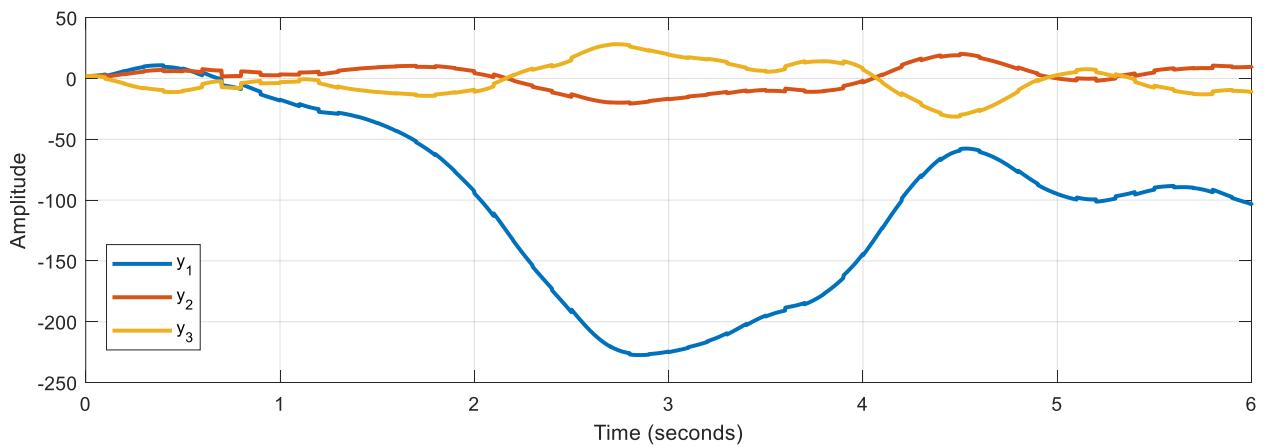


Рисунок 39 – График компонент выхода с шумом

График хороший, добротный, наблюдатель обладает высокой точностью слежения, несмотря на помехи.

4.4 LQG для нелинейной модели

Применим LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления нелинейной моделью, в которую также добавим сигнал помехи ξ . Зададим сигналы f и ξ как белый шум с известными параметрами.

Начальные условия моделирования $x(0) = [1, 0, 0.01, 0, 0.02, 0]^T$ и $\hat{x}(0) = [0, 0.01, 0.01, 0, 0, 0]^T$.

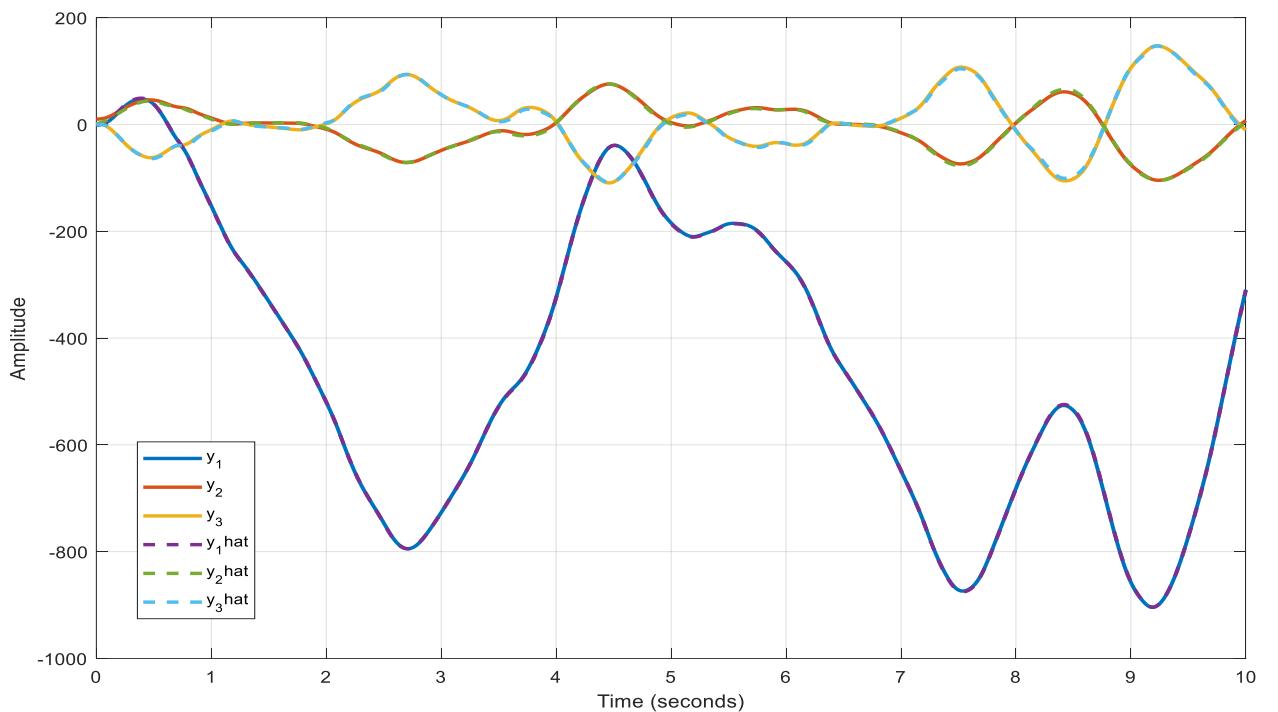


Рисунок 40 – График наблюдателя и линейной системы

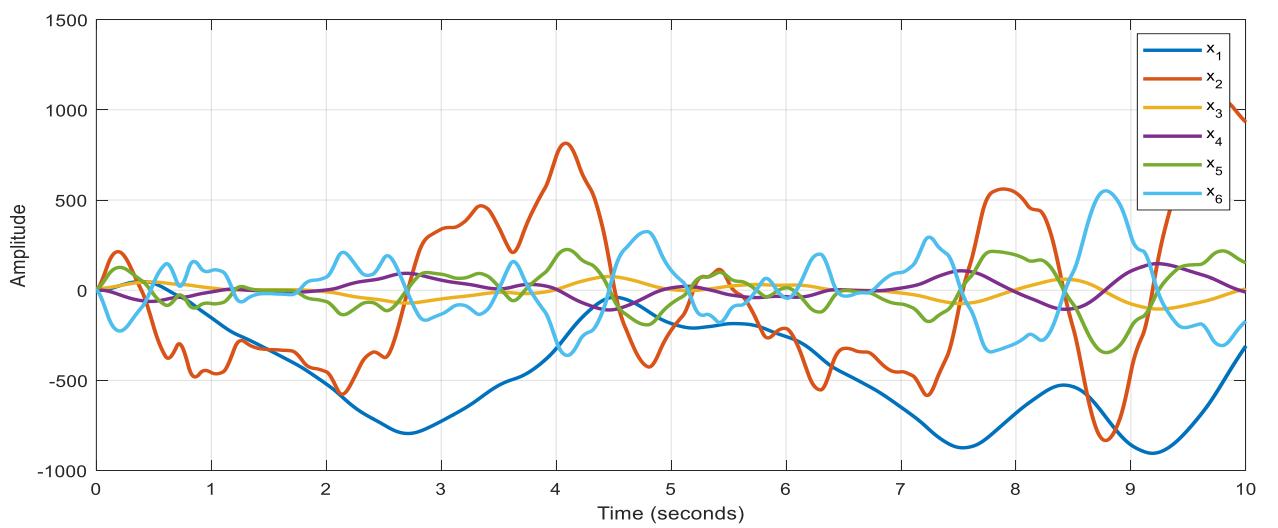


Рисунок 41 – График компонент вектора состояния

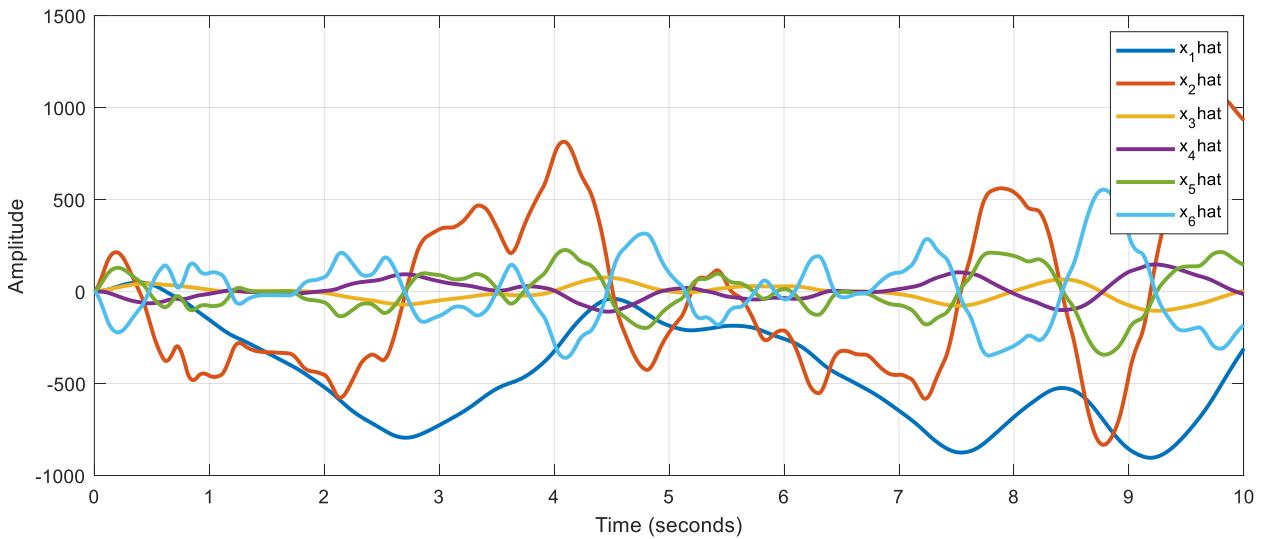


Рисунок 42 – График оценки компонент вектора состояния

Получается, LQG справляется и с нашей нелинейной системой. На самом деле погрешность слежение присутствует, но из-за масштаба это не особо и заметно.

ГЛАВА 5. СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ

5.1 Компенсация?

Объект:

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega$$

$$\dot{w} = A_2 w$$

$$z = C_2 x$$

$$u = K_1 x + K_2 w$$

Зададим

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема.

Синтезируем регулятор

$$K = [-12 \quad -39.7 \quad 2661 \quad 2209 \quad 1194 \quad 692.4]$$

Проведем моделирование системы с найденным регулятором:

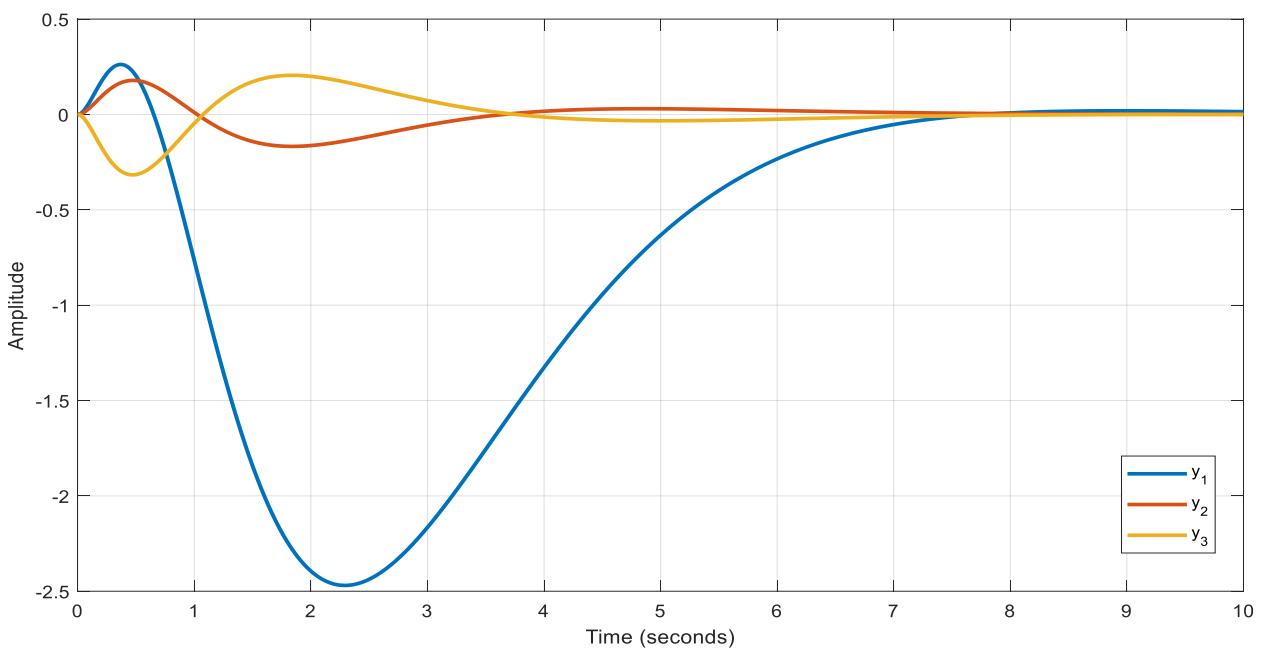


Рисунок 43 – График компонент выхода

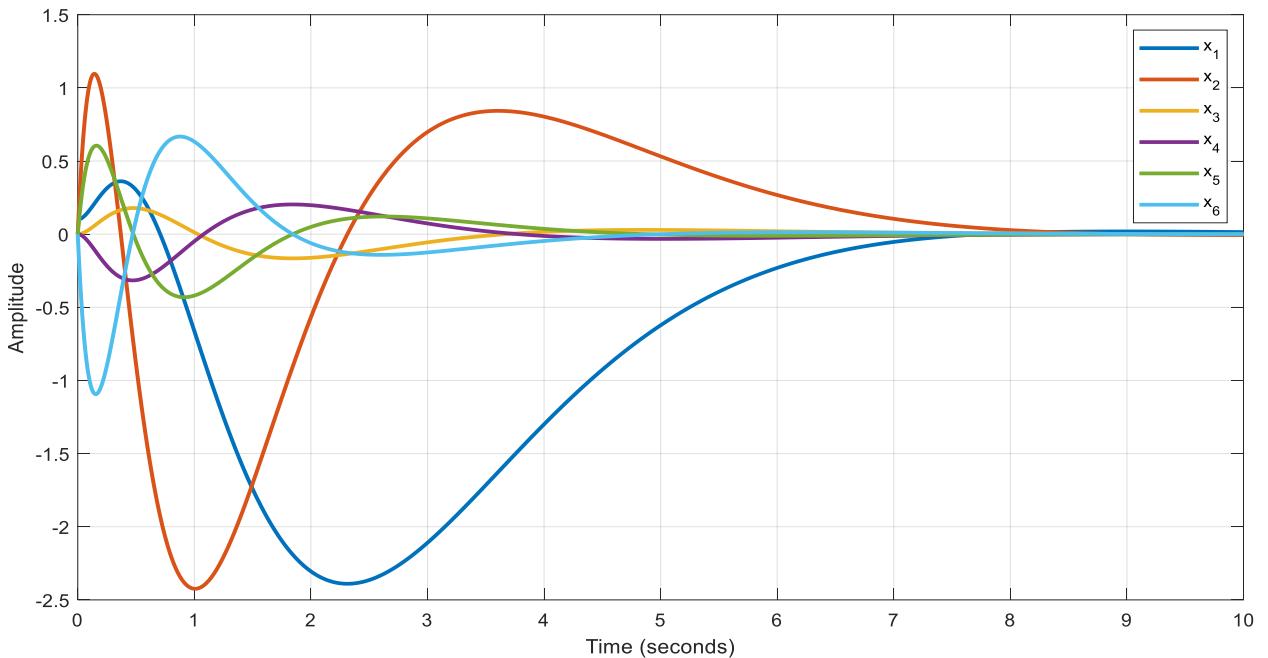


Рисунок 44 – График вектора состояния

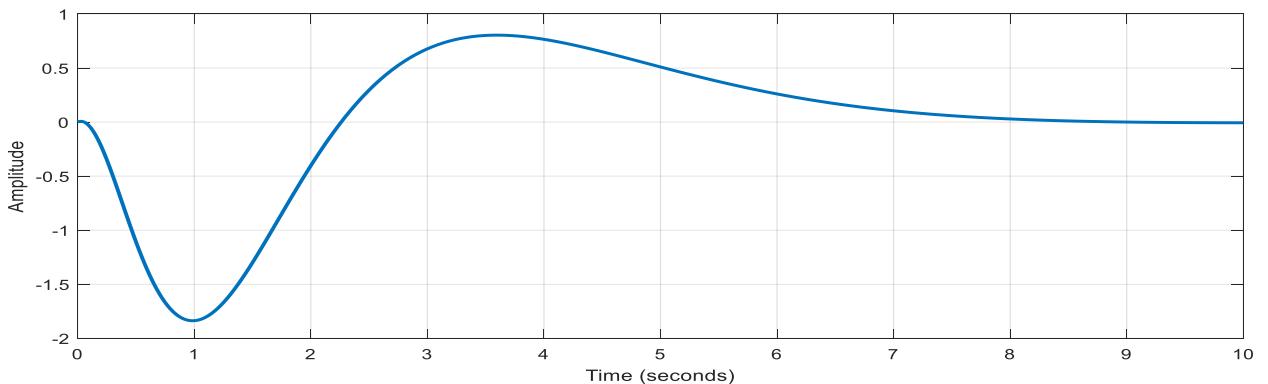


Рисунок 45 – График регулируемого выхода z

По графикам можно сделать вывод, что, получается, регулятор смог свести к нулю регулируемый выход z , а также компоненты вектора состояния. Значит, им можно пользоваться для задач компенсации.

5.2 Сложение?

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{w} = A_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

Регулятор:

$$u = K_1 x + K_2 w$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$D_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$K = [-5 \ -19.2 \ 1673.7 \ 1498 \ 753 \ 467.3]$$

Проведем моделирование системы с найденным регулятором:

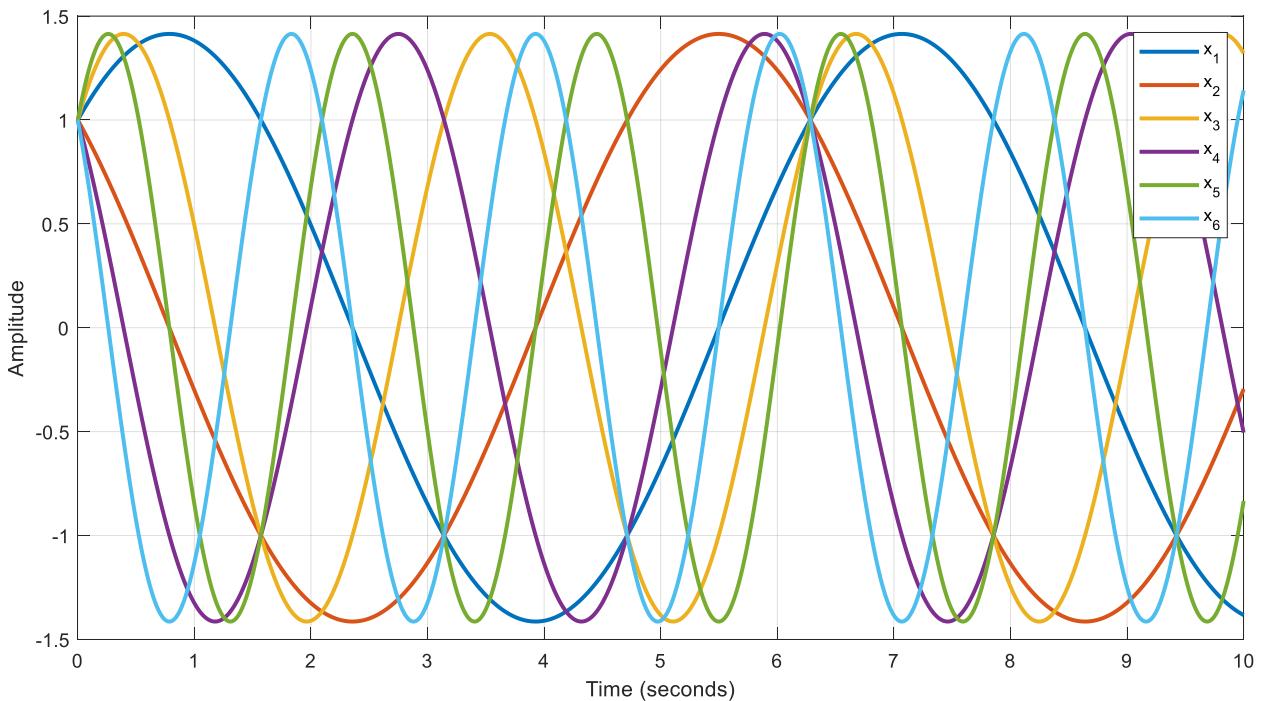


Рисунок 46 – График эталонного сигнала g

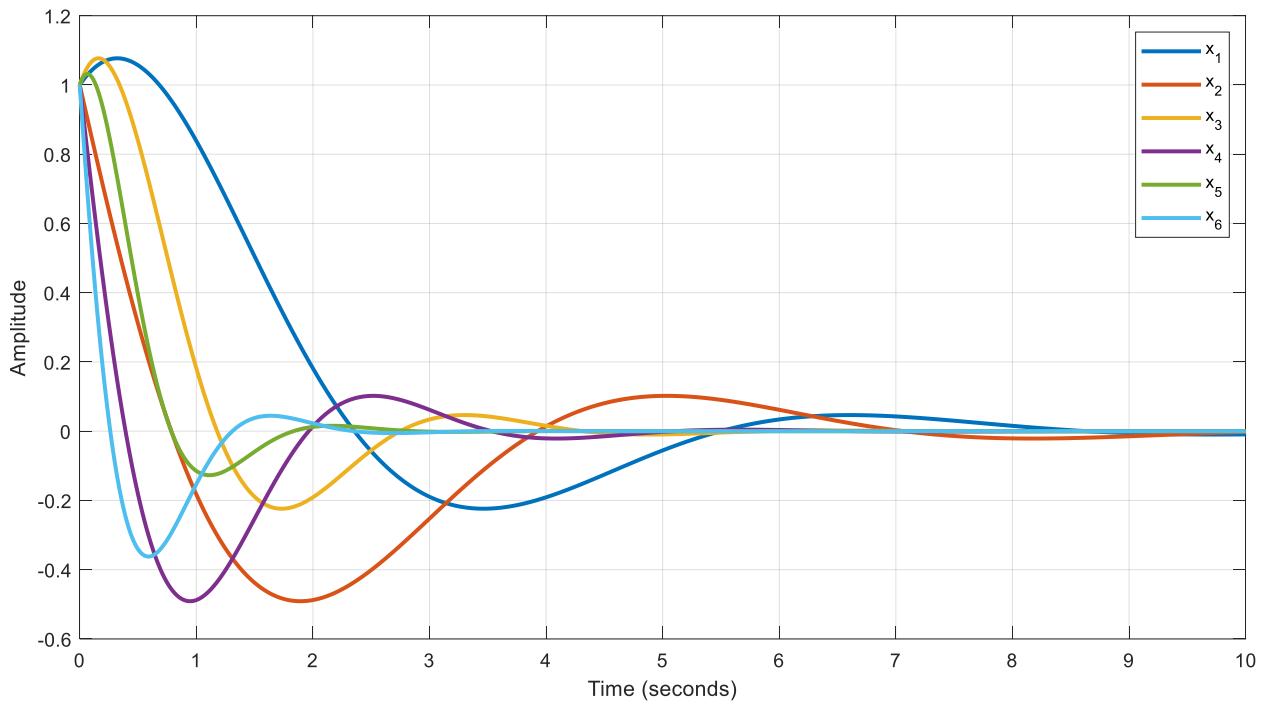


Рисунок 47 – График вектор ошибки $y-g$

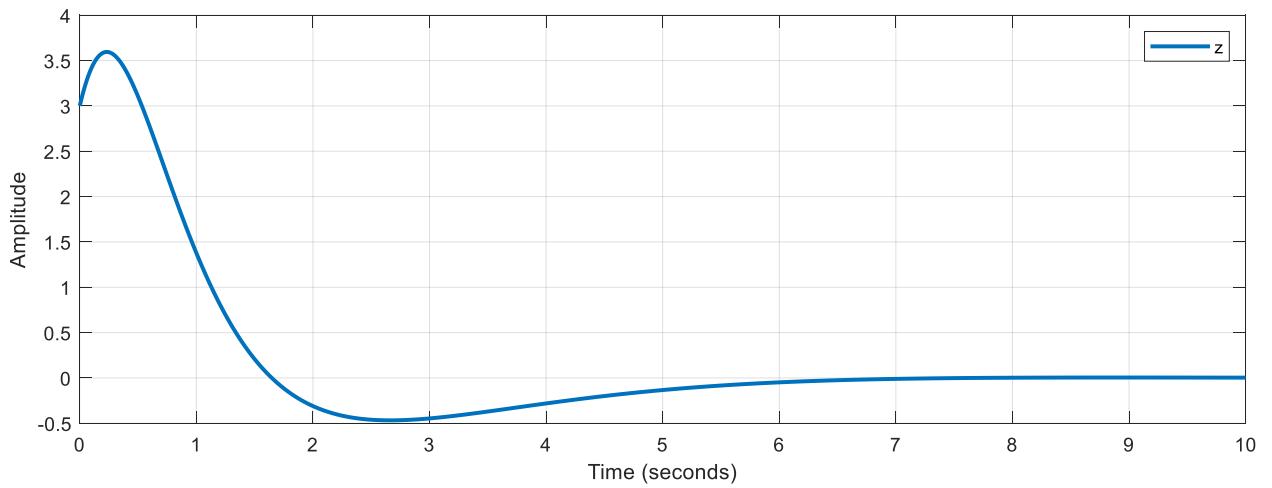


Рисунок 48 – График регулируемого выхода z

А в этом случае можно сказать, что получилось выполнить задачу слежения. Регулятор позволяет системе повторять поведение входного сигнала. Регулируемый выход с перерегулированием сходится в нуль, как и вектор ошибки.

Вывод

В ходе выполнения курсовой работы мы рассмотрели систему, состоящую из парных обратных маятников на тележке. Сначала мы занимались построением математической модели объекта, а далее исследованием и стабилизацией его. Изначально были допущены ошибки в выводе модели, что, конечно, не было включено в отчет, которые делали систему неуправляемой... А задача управления – суть многих заданий! Но все обошлось.

Было использовано модальное управление, LQG – регулирование и на последних шагах компенсация и слежение. Все, что изучалось по ходу двух семестров ТАУ, применялось на реальном физическом объекте, что давало и свои сложности, и некий интерес. Это хороший опыт в закреплении пройденного материала.