НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Теория автоматического управления

Лабораторная работа №7

«Управляемость и наблюдаемость»

Выполнил студент:

Мысов М.С. (В-1)

Группа № R33372

Руководитель:

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2022

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1

1.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

Матрица управляемости системы:

$$U = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix}, \quad rank(U) = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью управляема.

1.2. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_1 = -2 - \mathrm{i}, \qquad \lambda_1 = -2 + \mathrm{i}$$

Собственные вектора матрицы A:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 - \mathrm{i} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 + \mathrm{i} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Система в жордановом базисе:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 + \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -0.6708 - 1.3416\mathrm{i} \\ -0.6708 + 1.3416\mathrm{i} \\ 2.8284 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0.7454 & 0.7454 & -0.7071 \\ 0.4472 - 0.1491\mathrm{i} & 0.4472 + 0.1491\mathrm{i} & 0 \\ -0.4472 + 0.1491\mathrm{i} & -0.4472 - 0.1491\mathrm{i} & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Система в жордановом базисе и «вещественной форме»:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1.3416 \\ 2.6833 \\ 2.8284 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0.7454 & 0 & -0.7071 \\ 0.4472 & -0.1491 & 0 \\ -0.4472 & 0.1491 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Управляемость собственных чисел:

$\boldsymbol{\lambda_1 = -2}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_1 E \quad B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_1 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -2 - 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_2 E \quad B] = \begin{bmatrix} 3+2i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1+2i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2+2i & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_2 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = -2 \ + 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_3 E \quad B] = \begin{bmatrix} 3-2i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1-2i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2-2i & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_3 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

1.3. Управляемое подпространство

$$Range\ U = Range \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix} = Span\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -19 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Точка x_1 принадлежит $Range\ U$, если $rank\ U = rank[U \quad x_1]$.

$$rank \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 & 4 \\ -1 & 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 15 & -3 \end{bmatrix} = 3$$

Значит точка x_1 принадлежит управляемому подпространству системы.

1.4. Грамиан управляемости системы

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$\mathbf{e^{At}} = $$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{e^{-2t}Cos[t] + 3e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t} + e^{-2t}Cos[t] - 2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{-e^{-2t} + e^{-2t}Cos[t] + 3e^{-2t}Sin[t]} \\ \mathrm{2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t}Cos[t] - e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{2e^{-2t}Sin[t]} \\ \mathrm{-2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t} - e^{-2t}Cos[t] + e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t} - 2e^{-2t}Sin[t]} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e^{A^T t}} = $$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{e^{-2t}Cos[t] + 3e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{-2e^{-2t}Sin[t]} \\ \mathrm{-e^{-2t} + e^{-2t}Cos[t] - 2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t}Cos[t] - e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t} - e^{-2t}Cos[t] + e^{-2t}Sin[t]} \\ \mathrm{-e^{-2t} + e^{-2t}Cos[t] + 3e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{2e^{-2t}Sin[t]} & \mathrm{e^{-2t} - 2e^{-2t}Sin[t]} \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T} dt = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 3.58, \qquad \lambda_2 = 0.0172, \qquad \lambda_3 = 1.74 \cdot 10^4$$

1.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^{T(t_1 - t)}} \left(P(t_1)\right)^{-1} x(t_1), \qquad t_1 = 3$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^{T(t_1-t)}} =$$

$$= \begin{bmatrix} exp(2*t - 6)*(cos(t - 3) - 3*sin(t - 3)) & -2*sin(t - 3)*exp(2*t - 6) & 2*sin(t - 3)*exp(2*t - 6) \\ exp(2*t - 6)*(cos(t - 3) + 2*sin(t - 3) - 1) & exp(2*t - 6)*(cos(t - 3) + sin(t - 3)) & -exp(2*t - 6)*(cos(t - 3) + sin(t - 3) - 1) \\ -exp(2*t - 6)*(3*sin(t - 3) - cos(t - 3) + 1) & -2*sin(t - 3)*exp(2*t - 6) & exp(2*t - 6)*(2*sin(t - 3) + 1) \end{bmatrix}$$

$$\left(P(3)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2367 & -2360 & 1546 \\ -2360 & 2425 & -1521 \\ 1546 & -1521 & 1015 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = e^{2t - 6}(669 sin(t - 3) - 1579 cos(t - 3) + 1643)$$

1.6. Моделирование системы

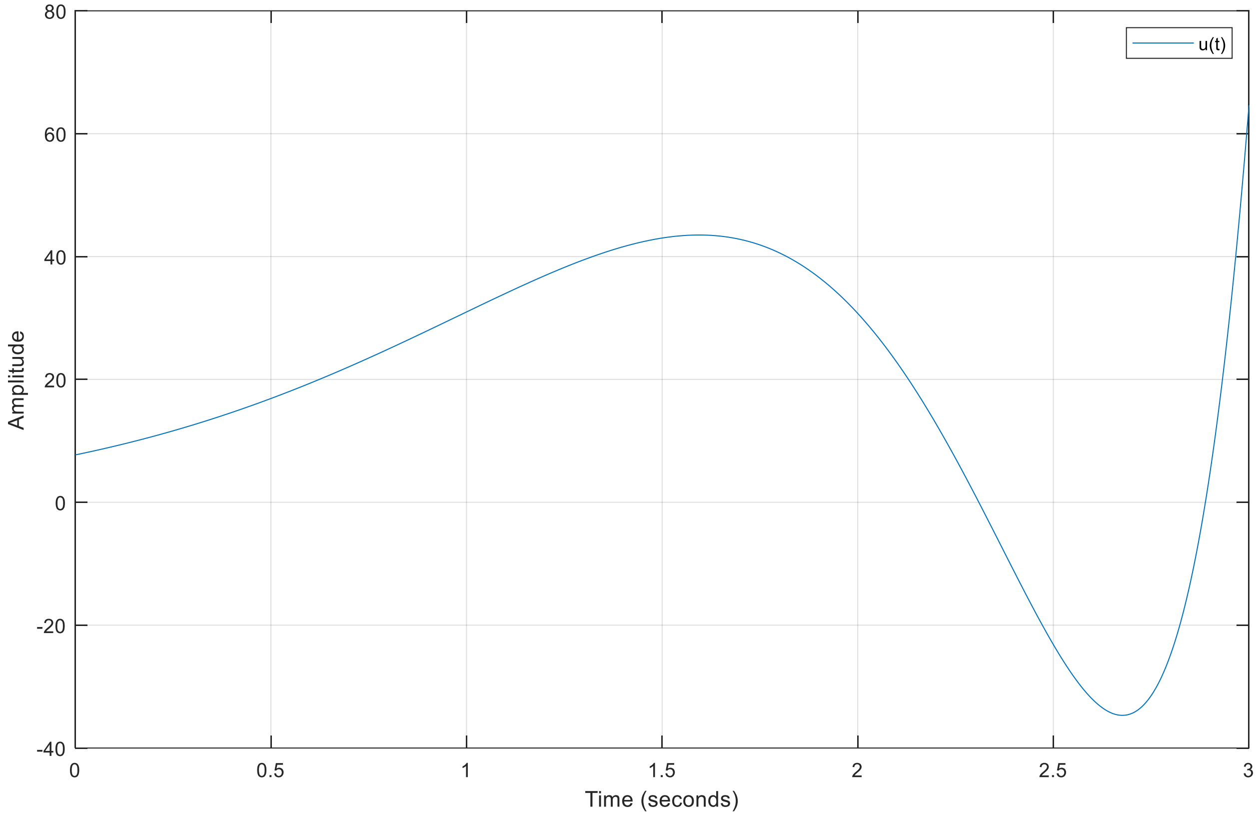

Рисунок 1 – график сигнала управления u(t)

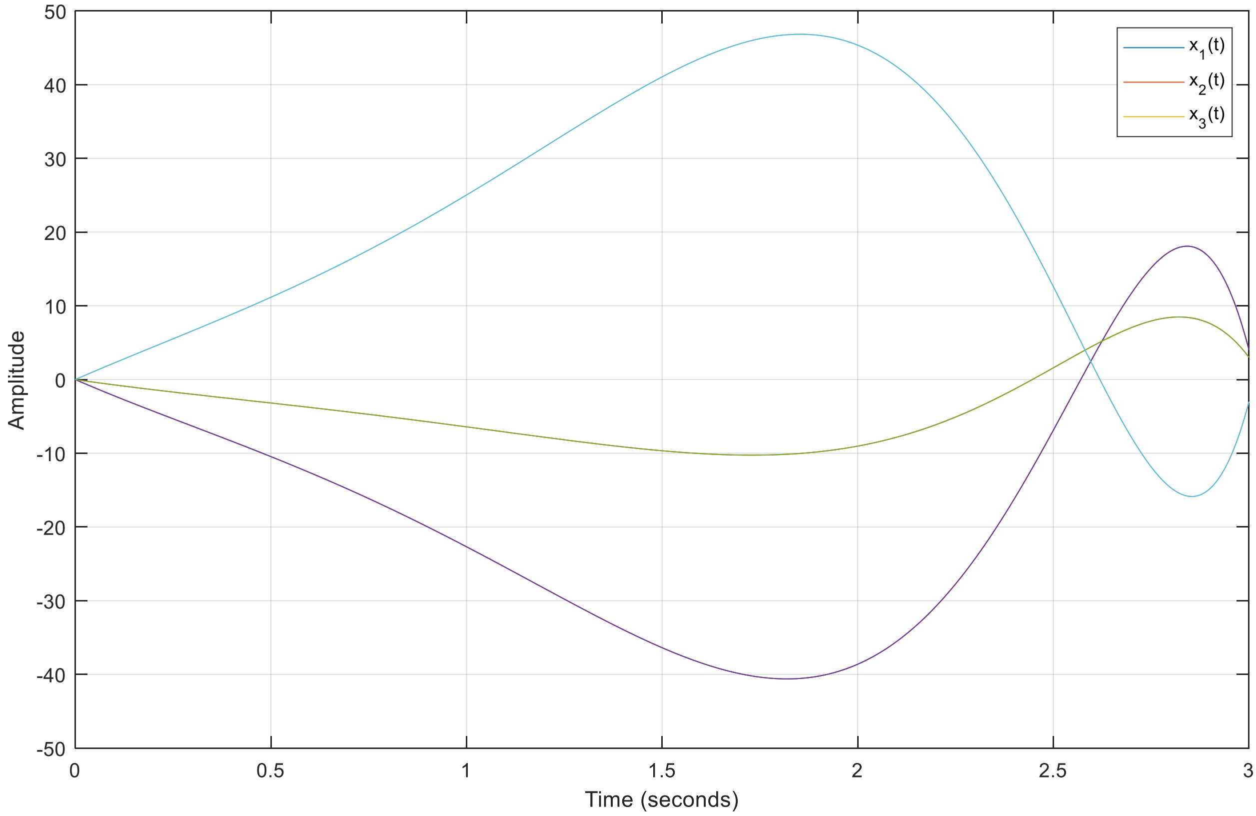

Рисунок 2 – график компонент вектора x(t)

Задание 2

2.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \qquad x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad x_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Матрица управляемости системы:

$$U = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \ rank(U) \ = \ 2$$

Так как ранг матрицы управляемости не равен порядку системы, то по критерию Калмана система не полностью управляема.

2.2. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_1 = -2 - \mathrm{i}\,, \qquad \lambda_1 = -2 \ + \mathrm{i}$$

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} -2+i & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2.0125 \ - \ 2.6833i \\ 2.0125 \ + \ 2.6833i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.7454 & 0.7454 & -0.7071 \\ 0.4472 \ - \ 0.1491i & 0.4472 \ + \ 0.1491i & 0 \\ -0.4472 \ + \ 0.1491i & -0.4472 \ - \ 0.1491i & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Система в жордановом базисе и «вещественной форме»:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2.8460 \\ 3.7947 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1.0541 & 0 & -0.7071 \\ 0.6325 & -0.2108 & 0 \\ -0.6325 & 0.2108 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

На основе Жордановой формы:

Собственные числа $\lambda_1 = -2 + i$ и $\lambda_2 = -2 - i$ управляемы, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующий последней строке жордановой клетки элемент матрицы B не равен нулю.

Собственное число $\lambda_3 = -2$ неуправляемо, так как соответствующий последней строке жордановой клетки элемент матрицы B равен нулю.

На основе рангового критерия:

Для $\lambda_1 = -2 + i$:

$$[A - \lambda_1 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3-i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1-i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2-i & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_1 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_1 = -2 + i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2 = -2 - i$:

$$[A - \lambda_2 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3+i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1+i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2+i & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_2 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -2 - i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = -2$:

$$[A - \lambda_3 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_3 I \quad B]) = 2.$$

Собственное число $\lambda_3 = -2$ неуправляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 2.

2.3. Управляемое подпространство

Проверка принадлежности вектора x_1' и x_1'' к подпространству управляемости:

$$rank(|U \quad x_1'|) = rank\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix}\right) = 2 = rank(U),$$

Значит x_1' принадлежит подпространству управляемости системы.

$$rank(|U \quad x_1'|) = rank\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3 \neq rank(U) = 2\,,$$

Значит x_1'' не принадлежит подпространству управляемости системы.

2.4. Грамиан управляемости системы

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$\mathbf{e^{At}} = \begin{bmatrix} -0.001 & -0.0056 & -0.0039 \\ 0.0007 & -0.0028 & 0.0007 \\ -0.0007 & 0.005 & 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e^{A^T t}} = \begin{bmatrix} -0.001 & 0.0007 & -0.0007 \\ -0.0056 & -0.0028 & 0.005 \\ -0.0039 & 0.0007 & 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T} dt = \begin{bmatrix} 3.6250 & 1.6250 & -1.6250 \\ 1.6250 & 0.7500 & -0.7500 \\ -1.6250 & -0.7500 & 0.7500 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0.03, \qquad \lambda_3 = 5.09$$

2.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}\left(P(t_1)\right)^{-1} x(t_1), \qquad t_1 = 3$$

$$B^T = [3 \quad 1 \quad -1]$$

$$e^{A^T(t_1-t)} =$$
$$= \begin{bmatrix} exp(2*t-6)*(cos(t-3)-3*sin(t-3)) & -2*sin(t-3)*exp(2*t-6) & 2*sin(t-3)*exp(2*t-6) \\ exp(2*t-6)*(cos(t-3)+2*sin(t-3)-1) & exp(2*t-6)*(cos(t-3)+sin(t-3)) & -exp(2*t-6)*(cos(t-3)+sin(t-3)-1) \\ -exp(2*t-6)*(3*sin(t-3)-cos(t-3)+1) & -2*sin(t-3)*exp(2*t-6) & exp(2*t-6)*(2*sin(t-3)+1) \end{bmatrix}$$

$$\left(P(3)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 9.6 & -10.4 & 10.4 \\ -10.4 & 11.6 & -11.6 \\ 10.4 & -11.6 & 11.6 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -e^{2t-6}\left(16cos(t-3) + 72sin(t-3)\right)$$

2.6. Моделирование системы

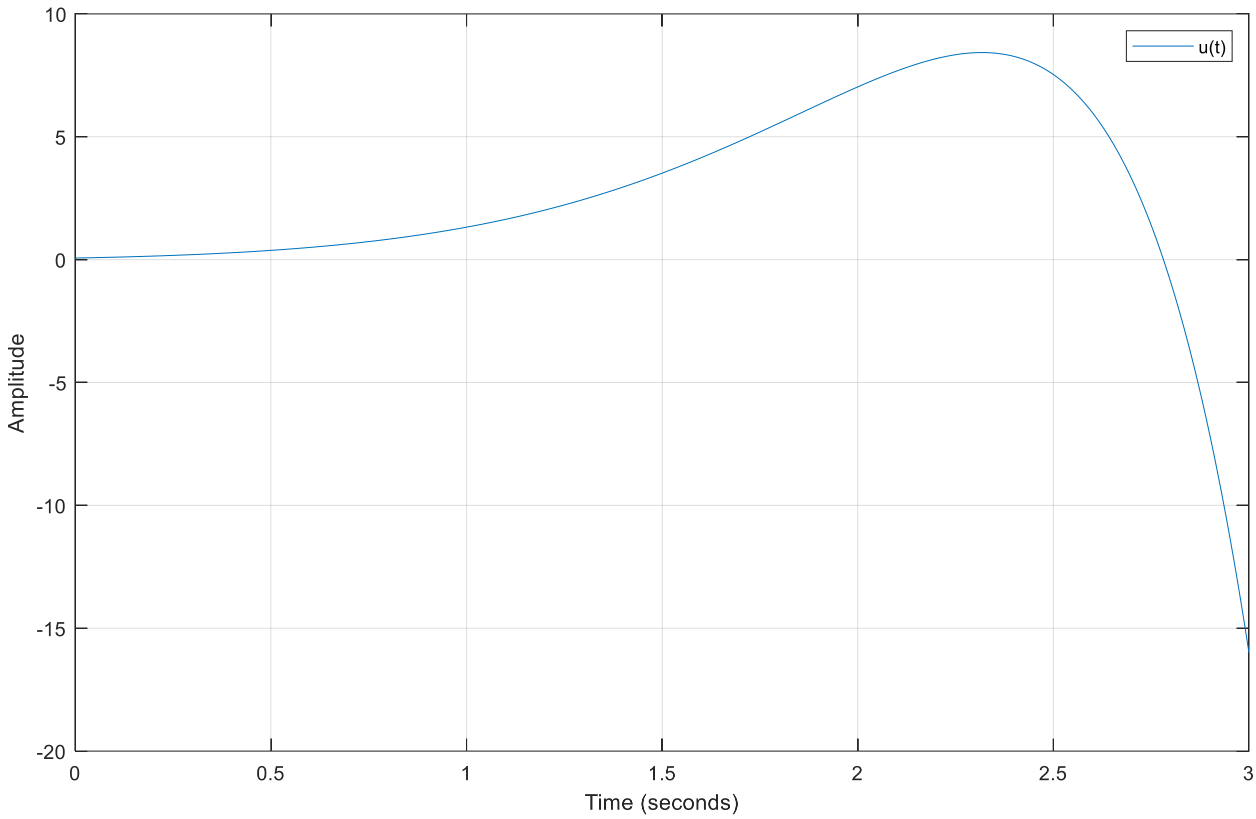

Рисунок 3 – график сигнала управления u(t)

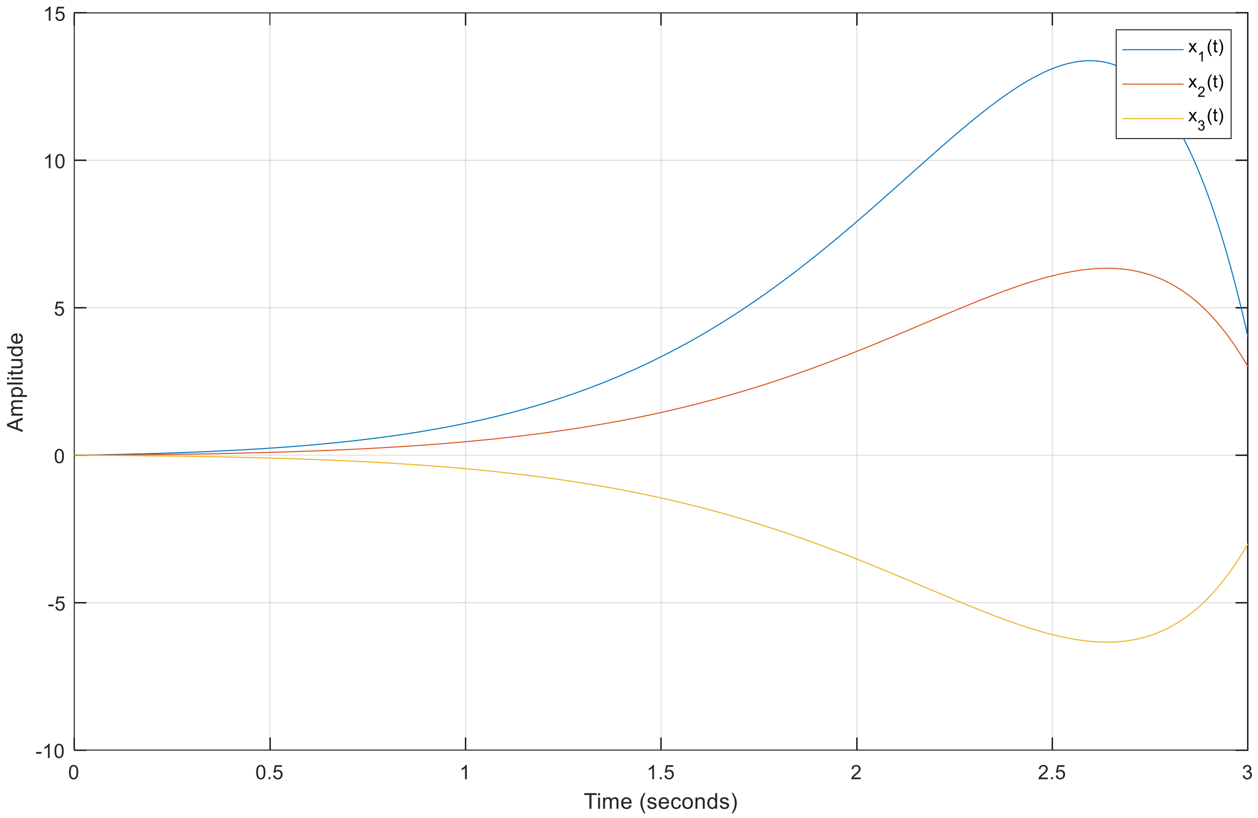

Рисунок 4 – график компонент вектора x(t)

Задание 3

3.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 6 & 11 & 18 \end{bmatrix}, \quad rank(U) = 3$$

Матрица наблюдаемости имеет полный столбцовый ранг, значит система наблюдаема управляема по критерию Калмана.

3.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = -3 + 2i,\quad \lambda_2 = -3 - 2i,\quad \lambda_3 = 1.$

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3+2i & 0 \\ 0 & 0 & -3-2i \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ 0.3162 - 0.1581i \\ 0.3162 + 0.1581i \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7906 & 0.7906 \\ 0.5774 & 0.3162 - 0.158i & 0.3162 + 0.158i \\ -0.5774 & -0.474 - 0.158i & -0.47 + 0.158i \end{bmatrix}$$

Система в жордановом базисе и «вещественной форме»:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \; C^T = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ 0.4472 \\ -0.2236 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.5774 & 1.118 & 0 \\ 0.5774 & 0.447 & -0.2236 \\ -0.5774 & -0.6708 & -0.2236 \end{bmatrix}$$

На основе жордановой формы:

Каждое собственное число наблюдаемо, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующие первым столбцам жордановых клеток элементы матрицы C не равны нулю.

На основе рангового критерия:

Для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3$$

Собственное число $\lambda_1 = 1$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2 = -3 + 2i$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 - 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 - 2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -3 + 2i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = -3 - 2i$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 2i & 0 & -10 \\ -4 & 2 + 2i & -6 \\ 6 & -2 & 8 + 2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_3 = -3 - 2i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

3.3. Грамиан наблюдаемости системы

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt \qquad t_1 = 3$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A^T t}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -exp(-3*t)*(exp(4*t) - 2*cos(2*t) + sin(2*t)) & cos(2*t)*exp(-3*t) - exp(t) & exp(t) - 2\text{^}(1/2)*cos(2*t + pi/4)*exp(-3*t) \\ -exp(-3*t)*(cos(2*t) - exp(4*t) + 2*sin(2*t)) & exp(t) - sin(2*t)*exp(-3*t) & 2\text{^}(1/2)*sin(2*t + pi/4)*exp(-3*t) - exp(t) \\ -exp(-3*t)*(exp(4*t) - cos(2*t) + 3*sin(2*t)) & 2\text{^}(1/2)*cos(2*t + pi/4)*exp(-3*t) - exp(t) & exp(t) + 2*sin(2*t)*exp(-3*t) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} =$$

$$= \begin{bmatrix} -exp(-3*t)*(exp(4*t) - 2*cos(2*t) + sin(2*t)) & -exp(-3*t)*(cos(2*t) - exp(4*t) + 2*sin(2*t)) & -exp(-3*t)*(exp(4*t) - cos(2*t) + 3*sin(2*t)) \\ cos(2*t)*exp(-3*t) - exp(t) & exp(t) - sin(2*t)*exp(-3*t) & 2\text{^}(1/2)*cos(2*t + pi/4)*exp(-3*t) - exp(t) \\ exp(t) - 2\text{^}(1/2)*cos(2*t + pi/4)*exp(-3*t) & 2\text{^}(1/2)*sin(2*t + pi/4)*exp(-3*t) - exp(t) & exp(t) + 2*sin(2*t)*exp(-3*t) \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt = \begin{bmatrix} 201.85 & -201.75 & 201.57 \\ -201.75 & 201.74 & -201.48 \\ 201.57 & -201.48 & 201.3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 0.0126$, $\lambda_2 = 0.055$, $\lambda_3 = 604.828$

3.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-3t} cos(2t) - 2e^{-3t} sin(2t), \qquad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$\int_0^3 e^{A^T} C^T y(t) dt \begin{bmatrix} -1.0565 \\ 0.719 \\ -1.1066 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = Gr_3^{-1} \int_0^3 e^{A^T} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Система не могла иметь других начальных состояний, так как она является полностью наблюдаемой, а по определению наблюдаемости, если время и траектория совпадают, то и совпадают начальные состояния системы.

3.5. Моделирование системы

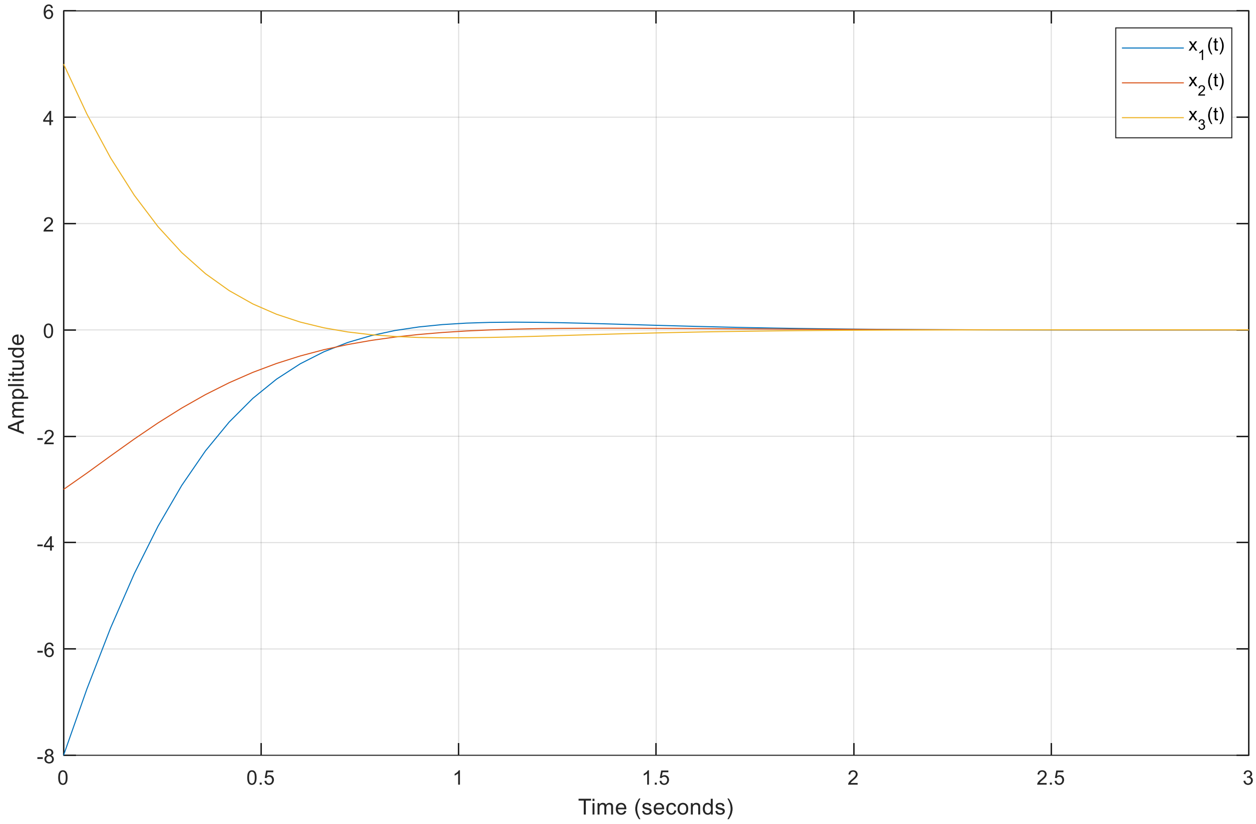

Рисунок 5 – график компонент вектора $x(t)$

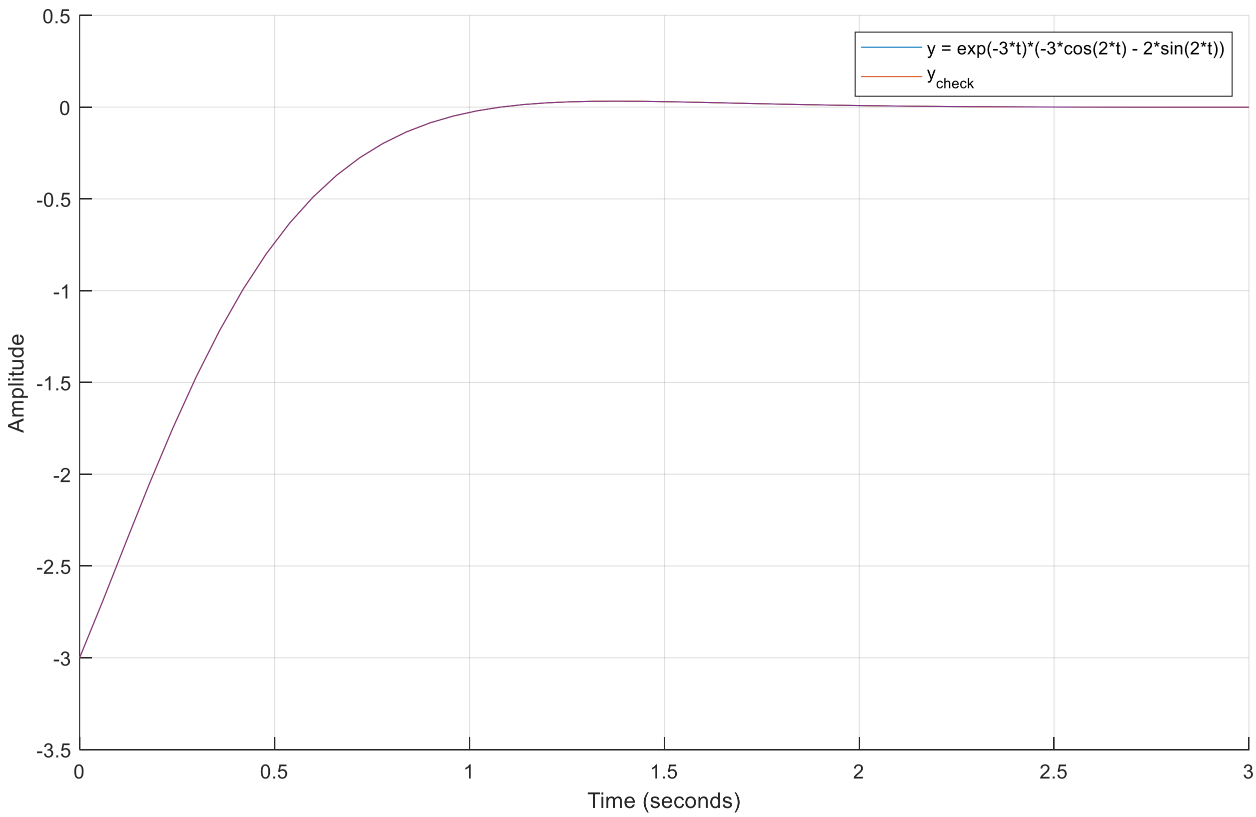

Рисунок 6 – график выхода и предполагаемой траектории

Выход и предполагаемая траектория совпадают, значит все рассчитано верно.

Задание 4

4.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 12 & 17 \end{bmatrix}, \quad rank(U) = 2$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен двум, значит система не полностью наблюдаема по критерию Калмана.

4.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = -3 + 2i, \qquad \lambda_2 = -3 - 2i, \qquad \lambda_3 = 1.$

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3+2i & 0 \\ 0 & 0 & -3-2i \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3162 - 0.1581i \\ 0.3162 + 0.1581i \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7906 & 0.7906 \\ 0.5774 & 0.3162 - 0.158i & 0.3162 + 0.158i \\ -0.5774 & -0.474 - 0.158i & -0.47 + 0.158i \end{bmatrix}$$

Система в жордановом базисе и «вещественной форме»:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4472 \\ -0.2236 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0.5774 & 1.118 & 0 \\ 0.5774 & 0.447 & -0.2236 \\ -0.5774 & -0.6708 & -0.2236 \end{bmatrix}$$

На основе жордановой формы:

Собственное число λ_1 ненаблюдаемо, так как соответствующий первому столбцу жордановой клетки элемент матрицы С равен нулю.

Собственные числа λ_2 и λ_3 наблюдаемы, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующий первому столбцу жордановой клетки элемент матрицы С не равен нулю.

На основе рангового критерия:

Для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 2$$

Собственное число $\lambda_1 = 1$ не наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 2.

Для $\lambda_2 = -3 + 2i$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-2i & 0 & -10 \\ -4 & 2-2i & -6 \\ 6 & -2 & 8-2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -3 + 2i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = -3 - 2i$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+2i & 0 & -10 \\ -4 & 2+2i & -6 \\ 6 & -2 & 8+2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_3 = -3 - 2i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

4.3. Грамиан наблюдаемости системы

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt \qquad t_1 = 3$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.039 & 0.1 \\ -0.039 & 0.026 & -0.013 \\ 0.1 & -0.013 & 0.09 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 = 0.0281,$ $\lambda_3 = 0.228$

4.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-3t} cos(2t) - 2e^{-3t} sin(2t), \qquad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$x(0) = Gr_3^{-1} \int_0^3 e^{A^T} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -2.67 \\ 2.33 \\ -0.33 \end{bmatrix}$$

Найдем вектор x_0 из уравнения $Oo = 0, o \neq 0$, такой вектор существует, потому что система не полностью наблюдаема:

$$o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Тогда другие начальные векторы можно будет найти исходя из $Ox(0) = \ Ox_k(0)$:

k – параметр.

$$Ox(0) = Ox(0) + k0 = \ Ox(0) + kOo = O(x(0) + ko)$$

$$x_1(0) = x(0) + o = \begin{bmatrix} -1.67 \\ 3.33 \\ -1.33 \end{bmatrix}$$

$$x_2(0) = x(0) + 2o = \begin{bmatrix} -0.67 \\ 4.33 \\ -2.33 \end{bmatrix}$$

$$x_3(0) = x(0) + 3o = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 5.33 \\ -3.33 \end{bmatrix}$$

4.5. Моделирование системы

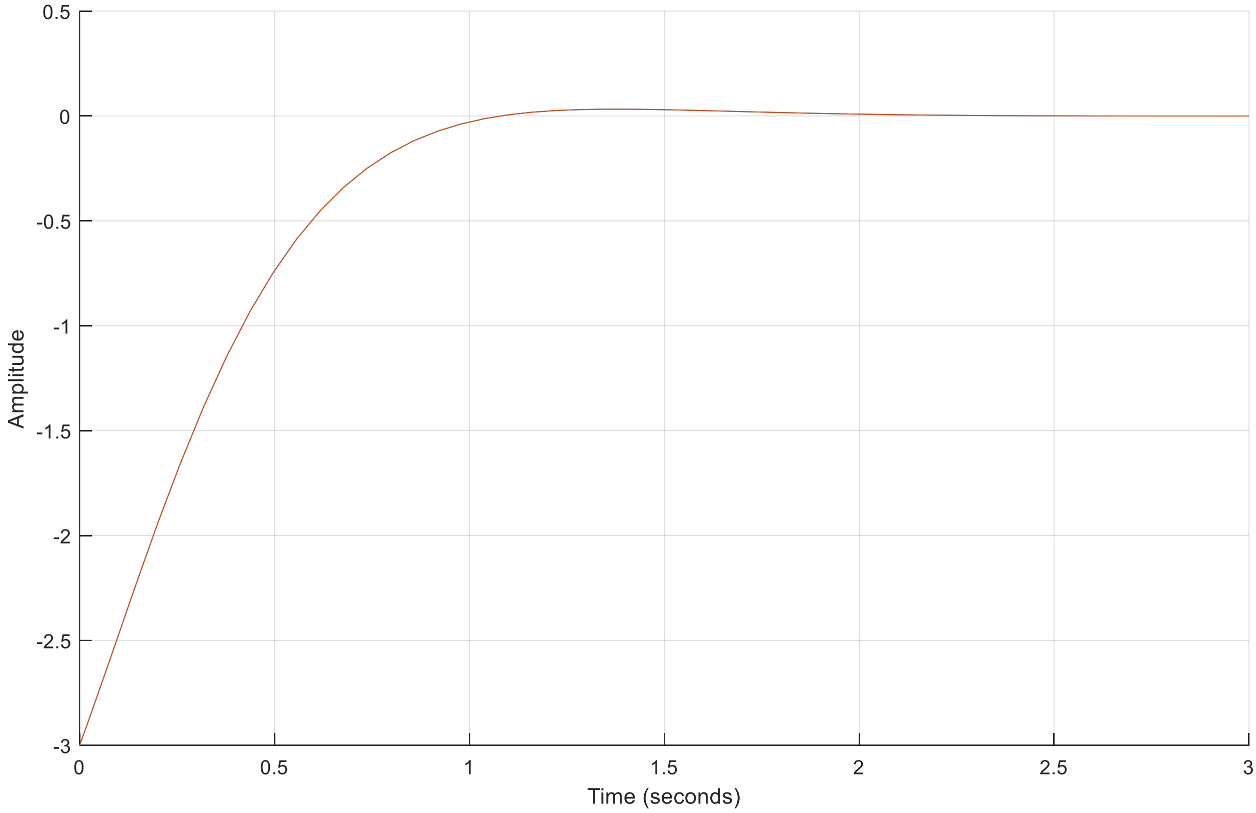

Рисунок 7 – выход для различных начальных условий

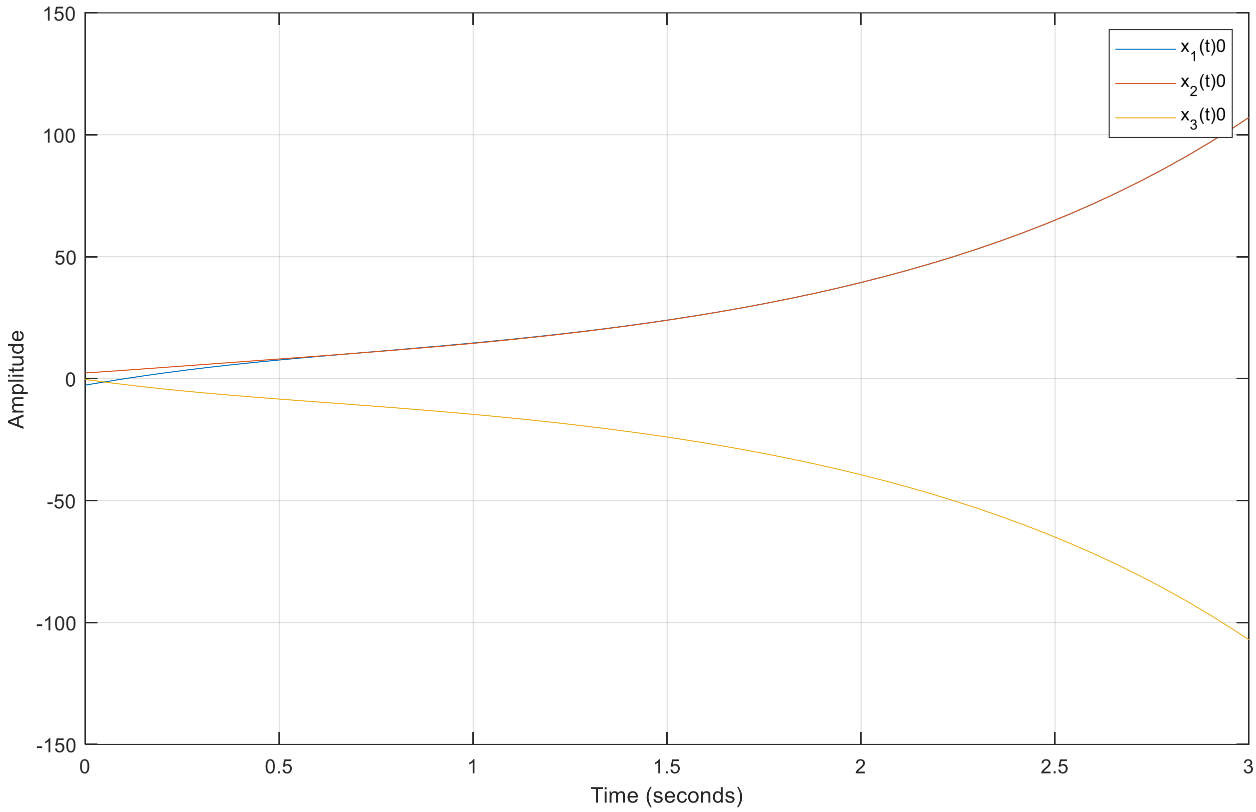

Рисунок 8 – график компонент вектора x00

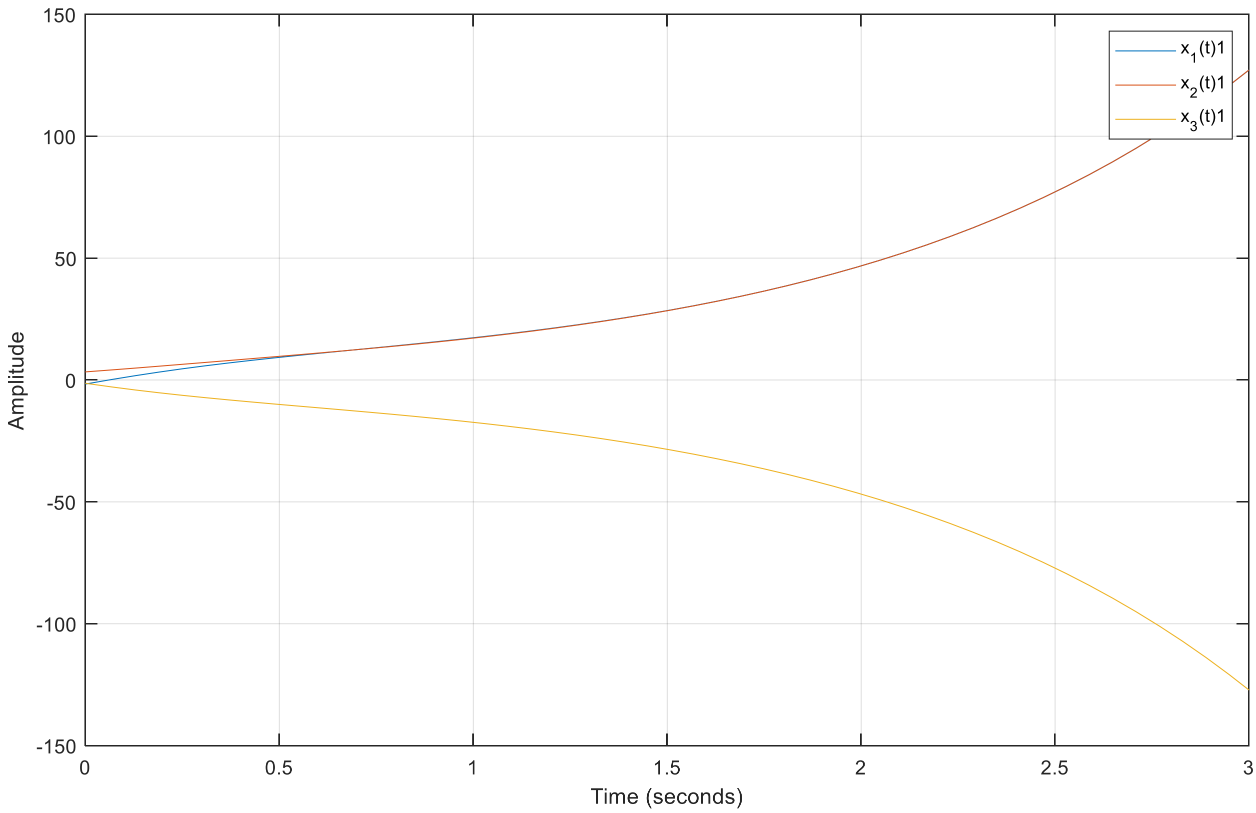

Рисунок 9 – график компонент вектора x01

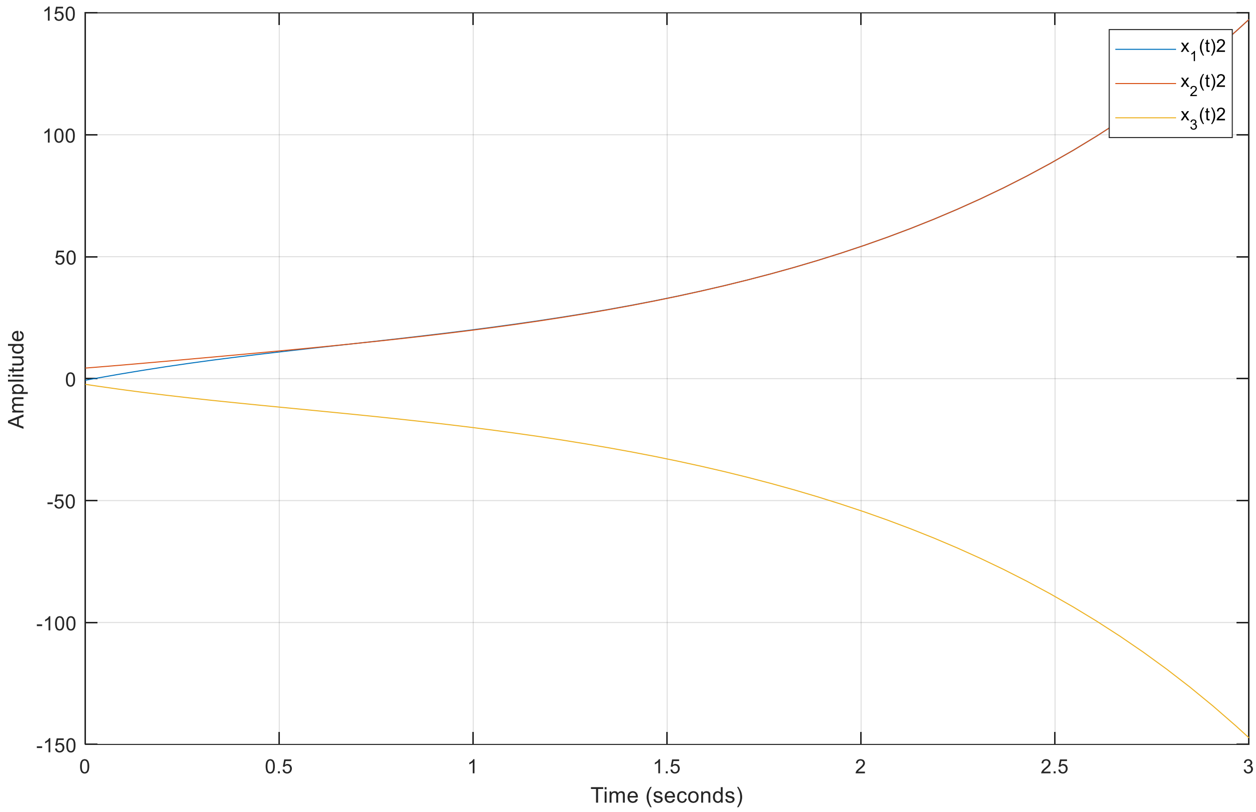

Рисунок 10 – график компонент вектора x02

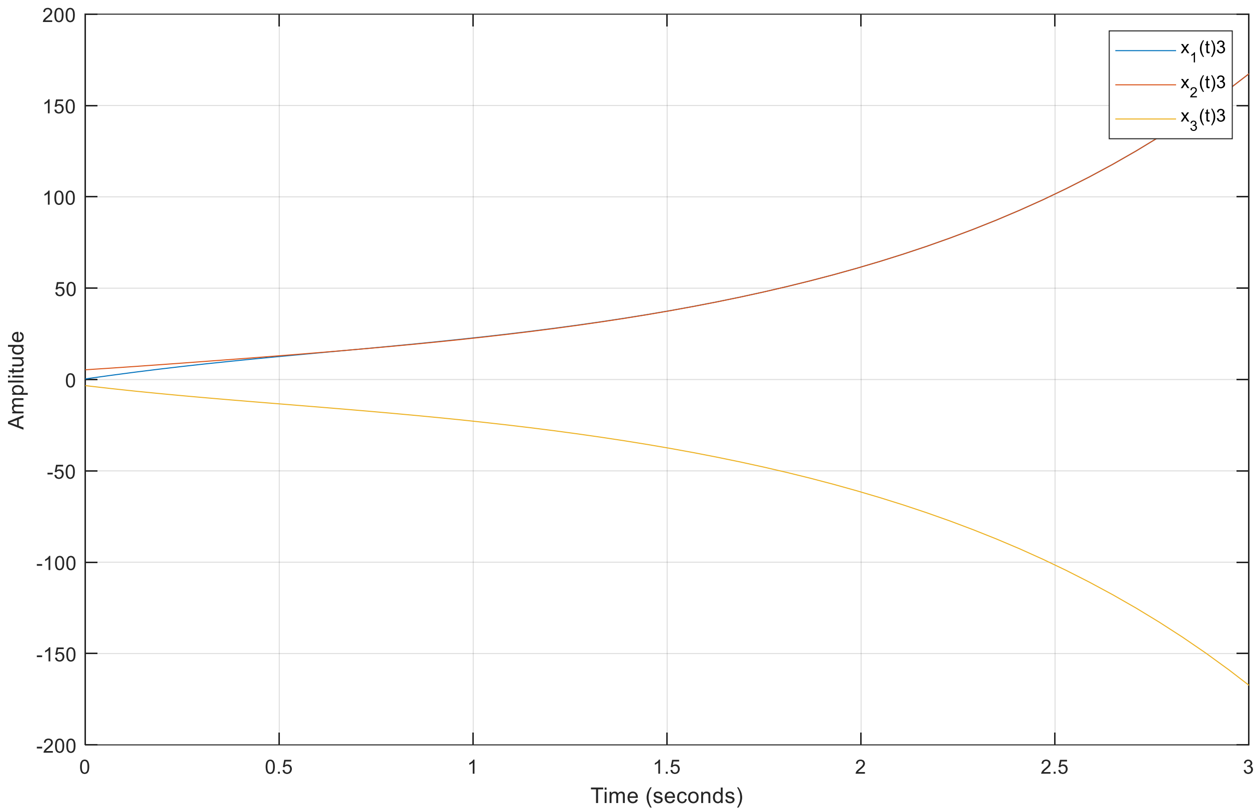

Рисунок 11 – график компонент вектора x03

Вывод

В данной лабораторной работе были исследованы системы на наблюдаемость и управляемость. Определили управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью матрицы Хаутуса. Были построены подпространства управляемости и подпространство ненаблюдаемости. Вычислены Грамианы систем, с помощью них были найдены функции управления и начальные условия системы. В конце каждого задания проведено моделирование исследуемой системы.