

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

## **Теория автономного управления**

### **Лабораторная работа №4**

#### **«Типовые динамические звенья»**

Вариант 10

**Выполнил студент:**

Мысов М.С.

Группа № R33372

**Руководитель:**

Перегудин А.А.

г. Санкт-Петербург

2022

## Оглавление

Задание 1.....	3
Задание 2.....	6
Задание 3.....	9
Задание 4.....	12
Задание 5.....	15
Задание 6.....	18
Задание 7.....	21
Выводы .....	24

## Задание 1

Запишем дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока независимого возбуждения

$$\dot{\omega} + \frac{K_m K_e}{JR} \omega = \frac{K_m}{JR} u$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **апериодическое звено первого порядка**

$$W(p) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{p + \frac{K_m K_e}{JR}}$$

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$\dot{\omega} + \frac{K_m K_e}{JR} \omega = \frac{K_m}{JR} \cdot \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s\Omega(s) + \frac{K_m K_e}{JR} \Omega(s) = \frac{K_m}{JR}$$

$$\Omega(s) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{s + \frac{K_m K_e}{JR}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$w(t) = \frac{K_m}{JR} e^{-\frac{K_m K_e}{JR} \cdot t}$$

**Step response** (переходная функция)

$$\dot{\omega} + \frac{K_m K_e}{JR} \omega = \frac{K_m}{JR} \cdot 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s\Omega(s) + \frac{K_m K_e}{JR} \Omega(s) = \frac{K_m}{JR} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Omega(s) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{s \cdot (s + \frac{K_m K_e}{JR})} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$h(t) = \frac{1}{K_e} - \frac{1}{K_e} e^{-\frac{K_m K_e}{JR} \cdot t}$$

Найдем вещественную и мнимую часть передаточной функции от  $j\omega$

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{\frac{K_m K_e}{JR} + j \cdot \omega} = \frac{\frac{K_m K_e}{JR} \cdot \frac{K_m}{JR}}{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2} + j \frac{-\frac{K_m}{JR} \cdot \omega}{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}$$

**Амплитудно-частотная характеристика**

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\frac{K_m K_e}{JR} \cdot \frac{K_m}{JR}}{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{K_m}{JR} \cdot \omega}{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}\right)^2} = \frac{\frac{K_m}{JR}}{\sqrt{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}}$$

**Фазо-частотная характеристика**

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{\frac{K_m K_e}{JR}}\right)$$

Частотная передаточная функция в показательной форме

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{\sqrt{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}} \cdot e^{j \cdot \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{\frac{K_m K_e}{JR}}\right)}$$

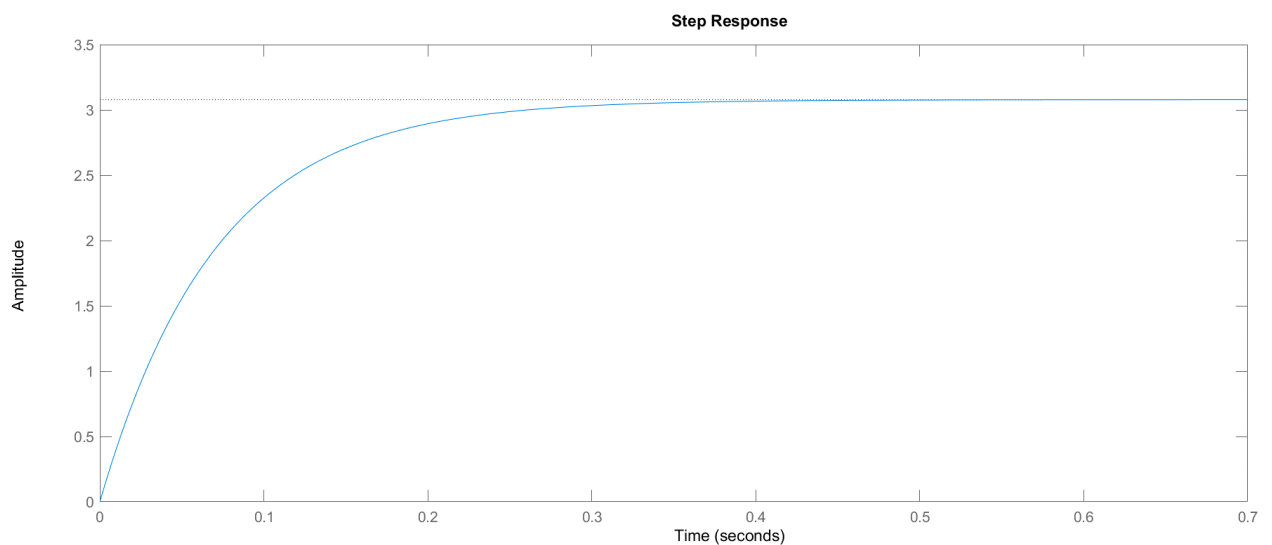


График 1. Переходная функция

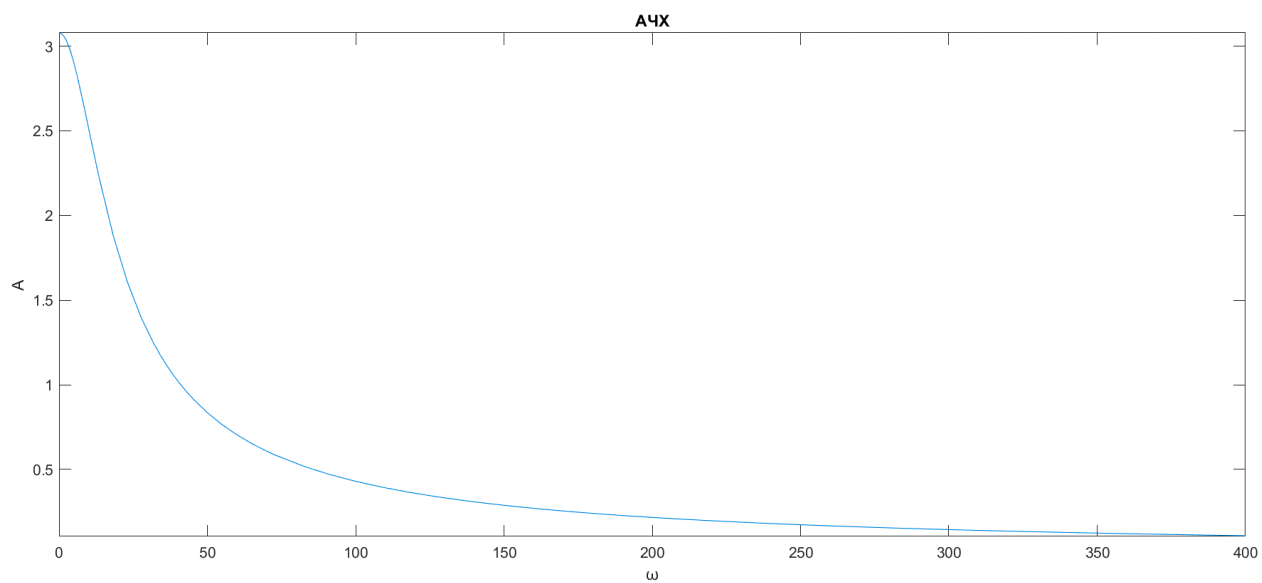


График 2. АЧХ

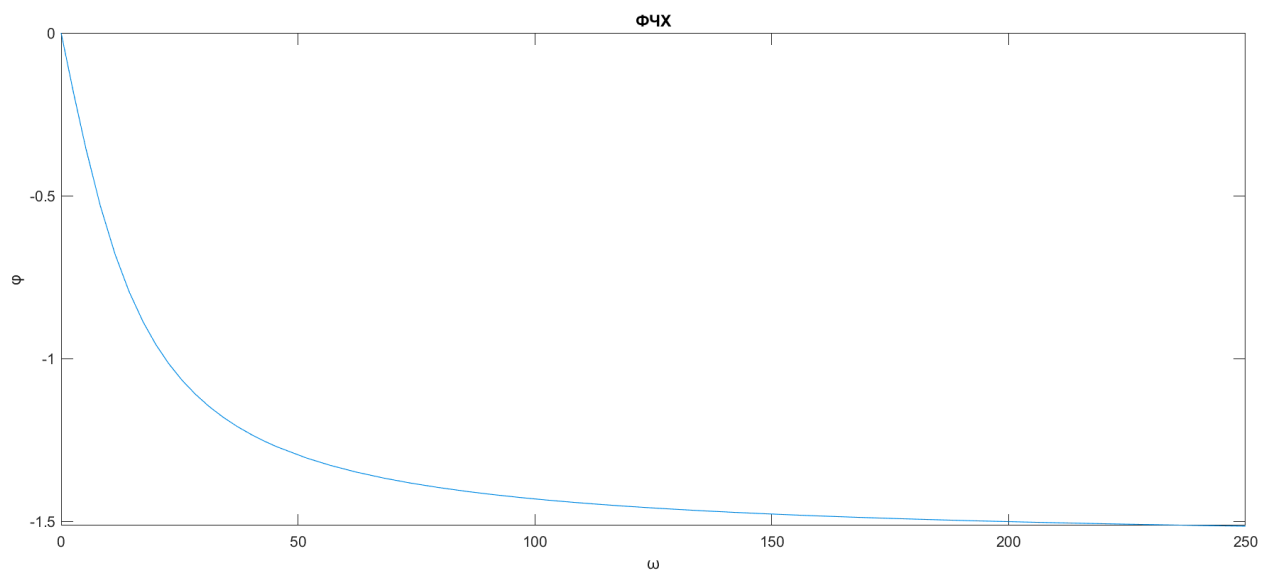


График 3. ФЧХ

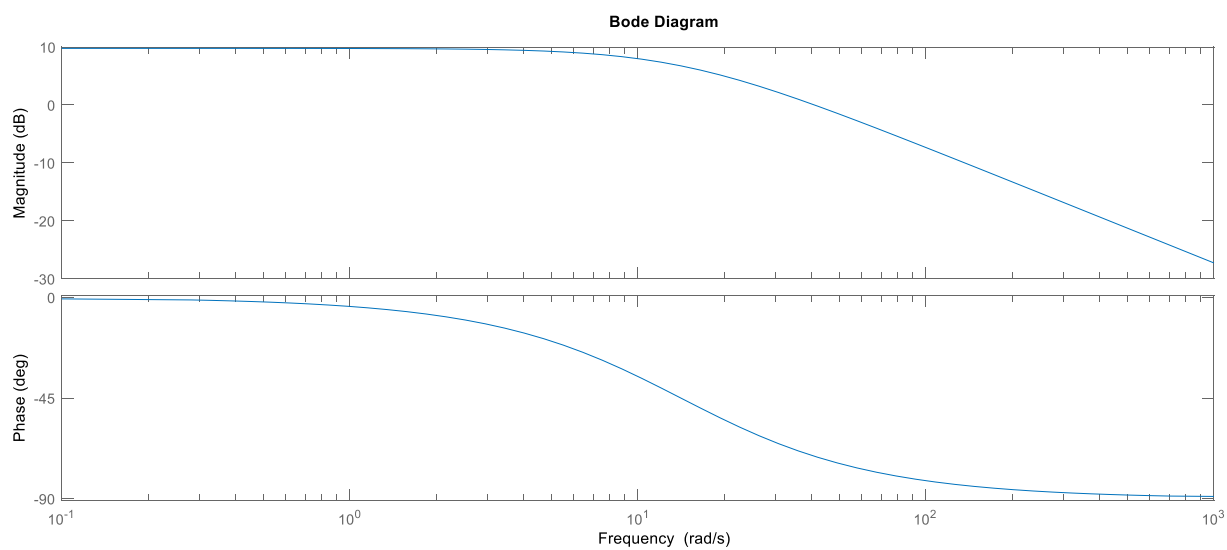


График 4. ЛАФЧХ

## Задание 2

Запишем дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока независимого возбуждения

$$\ddot{\omega} + \frac{R}{L} \dot{\omega} + \frac{K_m K_e}{JL} \omega = \frac{K_m}{JL} u$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта

$$W(p) = \frac{\frac{K_m}{JL}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{K_m K_e}{JL}} = \frac{\frac{1}{K_e}}{\frac{JL}{K_m K_e}p^2 + \frac{JR}{K_m K_e}p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

где  $k = \frac{1}{K_e}$  – коэффициент усиления,

$T = \sqrt{\frac{JL}{K_m K_e}}$  – постоянная времени,

$\xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{J}{LK_m K_e}} = 0.2881$  – коэффициент затухания

Так как коэффициент затухания  $0 < \xi < 1$ , это **колебательное звено второго порядка**.

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена.

Корни характеристического уравнения принимают данные значения:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$$

$\lambda = \frac{\xi}{T}$  – показатель затухания

$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$  – угловая частота колебания

**Impulse response** (весовая функция)

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} = \frac{k}{(T^2 p^2 + 2T\xi p + \xi^2) + (1 - \xi^2)} \\ &= \frac{k}{T^2} \frac{1}{\left(p + \frac{\xi}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)^2} = \frac{k}{\omega T^2} \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(p)\} = \frac{k}{\omega T^2} e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sin \omega t$$

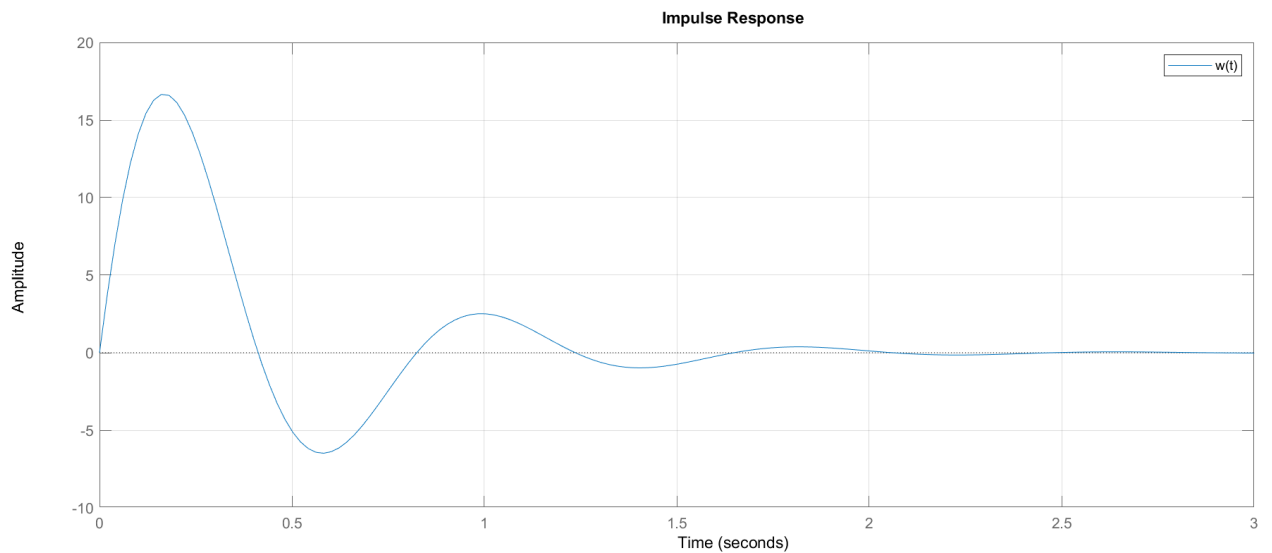


График 5. Весовая функция

**Step response** (переходная функция)

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}W(p)\right\} = k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(T^2p^2 + 2T\xi p + 1)}\right\} = \\
 &= k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} - \frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}\right\} = \\
 &= k\left(1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \cos\omega t - \frac{\lambda}{\omega} e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sin\omega t\right) = \\
 &= k\left(1 - e^{-\lambda \cdot t}(\cos\omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin\omega t)\right)
 \end{aligned}$$

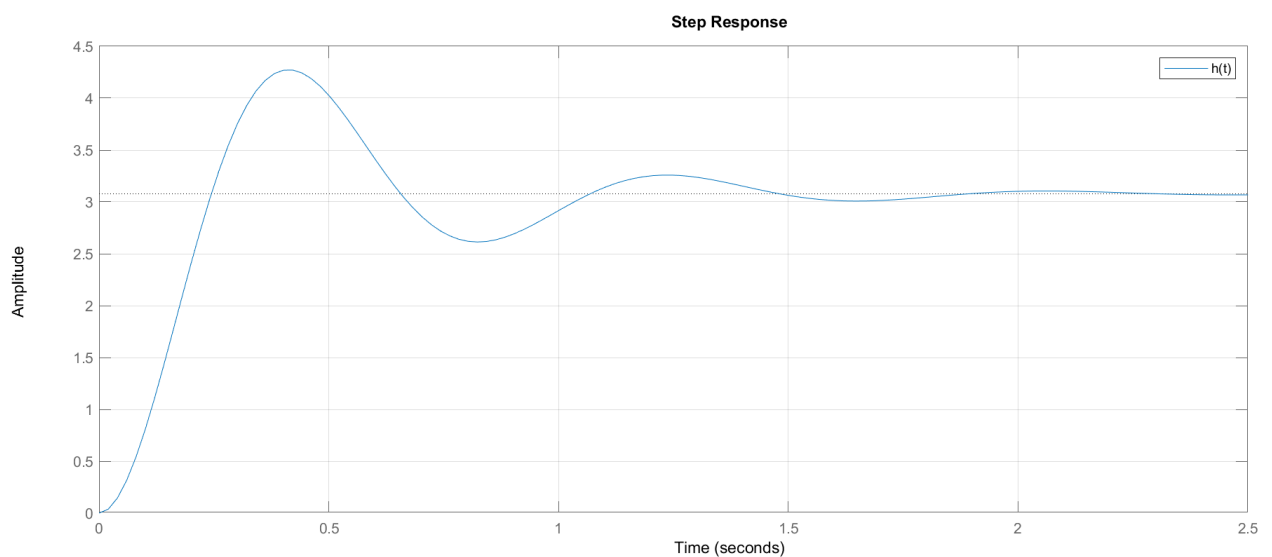


График 6. Передаточная функция

Найдем вещественную и мнимую часть передаточной функции от  $j\omega$  с помощью matlab..

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{K_m}{JL}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{K_m K_e}{JL}}$$

$$P(\omega) = \text{real}(W(j \cdot \omega)) \quad Q(\omega) = \text{imag}(W(j \cdot \omega))$$

### Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{(P(\omega))^2 + (Q(\omega))^2}$$

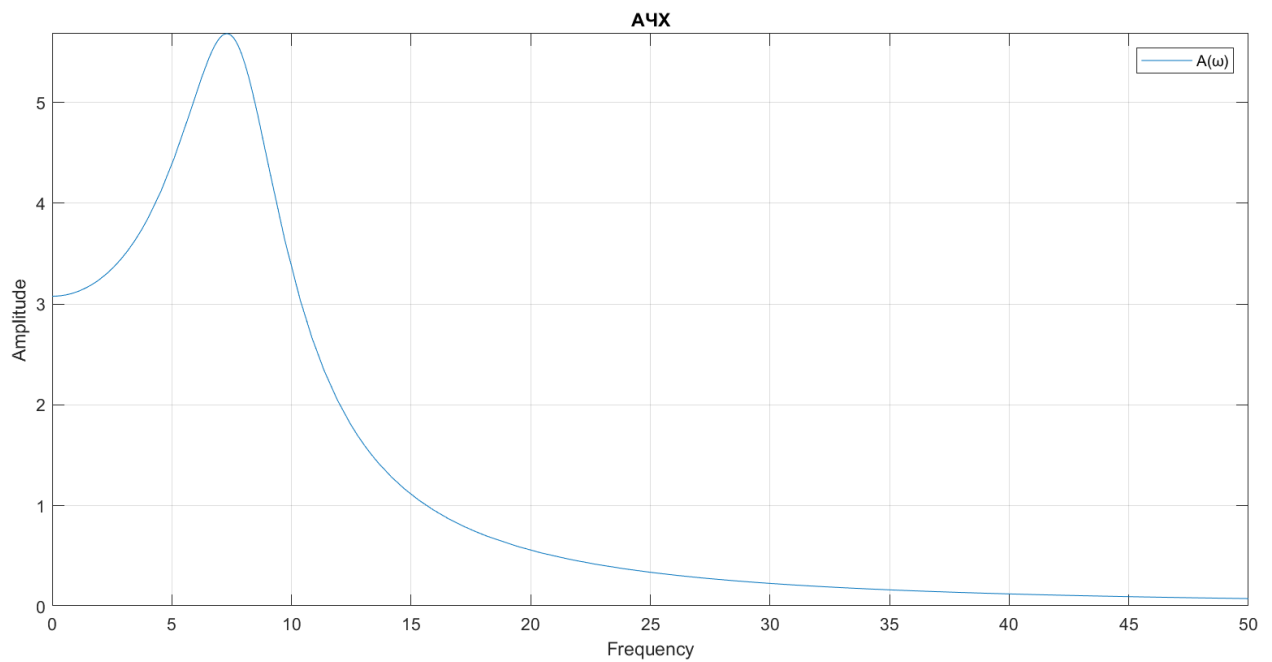


График 7. АЧХ

### Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), (P(\omega)))$$

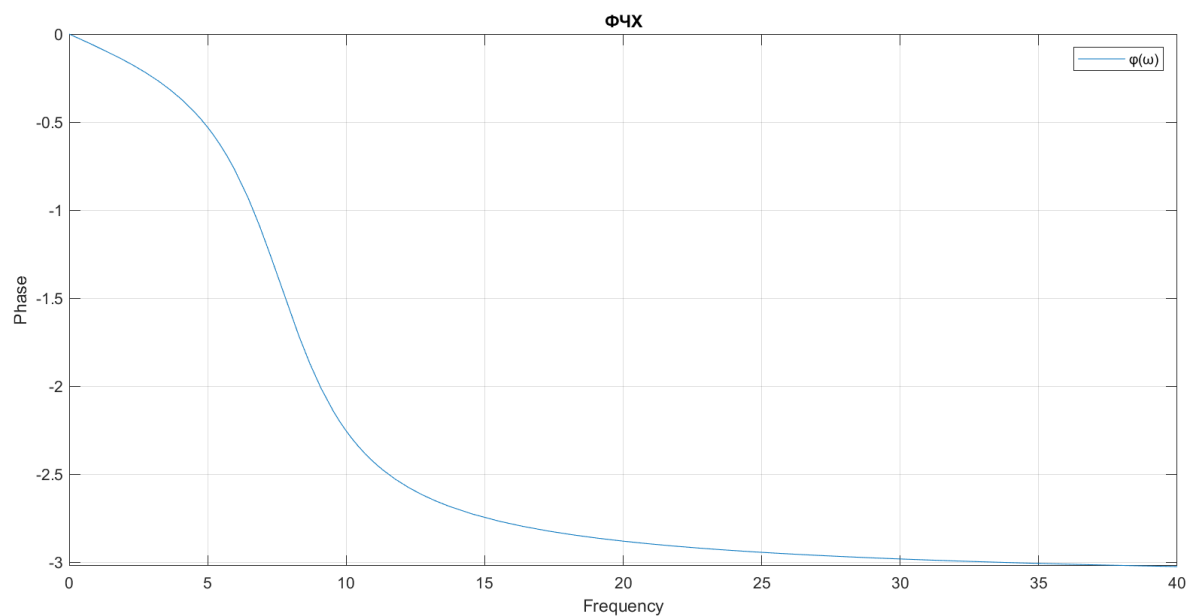
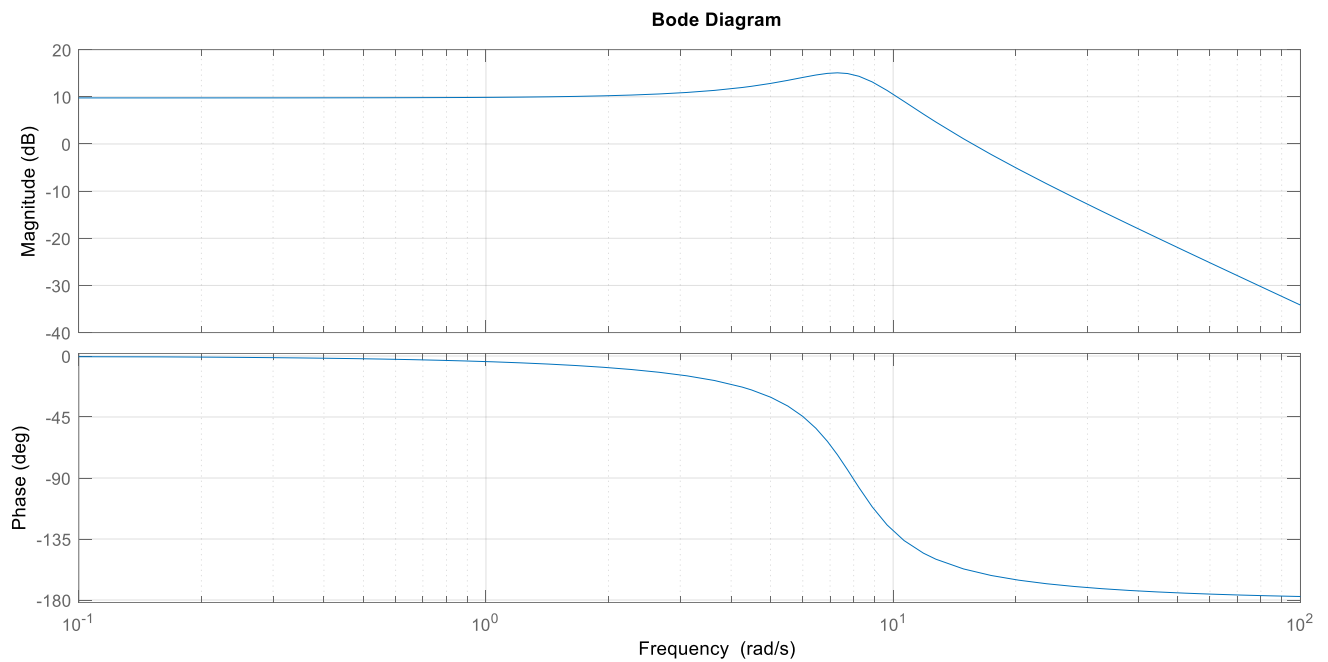


График 8. ФЧХ





*График 9. ЛАФЧХ*

### Задание 3

Запишем уравнение зависимости напряжения конденсатора

$$C \dot{u} = I$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **идеальное интегрирующее звено**

$$W(p) = \frac{1}{C \cdot p}$$

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$C \cdot \dot{u} = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s \cdot C \cdot U(s) = 1$$

$$U(s) = \frac{1}{Cs} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\mathbf{w}(t) = \frac{1}{C}$$

### Step response (переходная функция)

$$C \cdot \dot{u} = 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s \cdot C \cdot U(s) = \frac{1}{s}$$

$$U(s) = \frac{1}{C \cdot s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$h(t) = \frac{1}{C} \cdot t$$

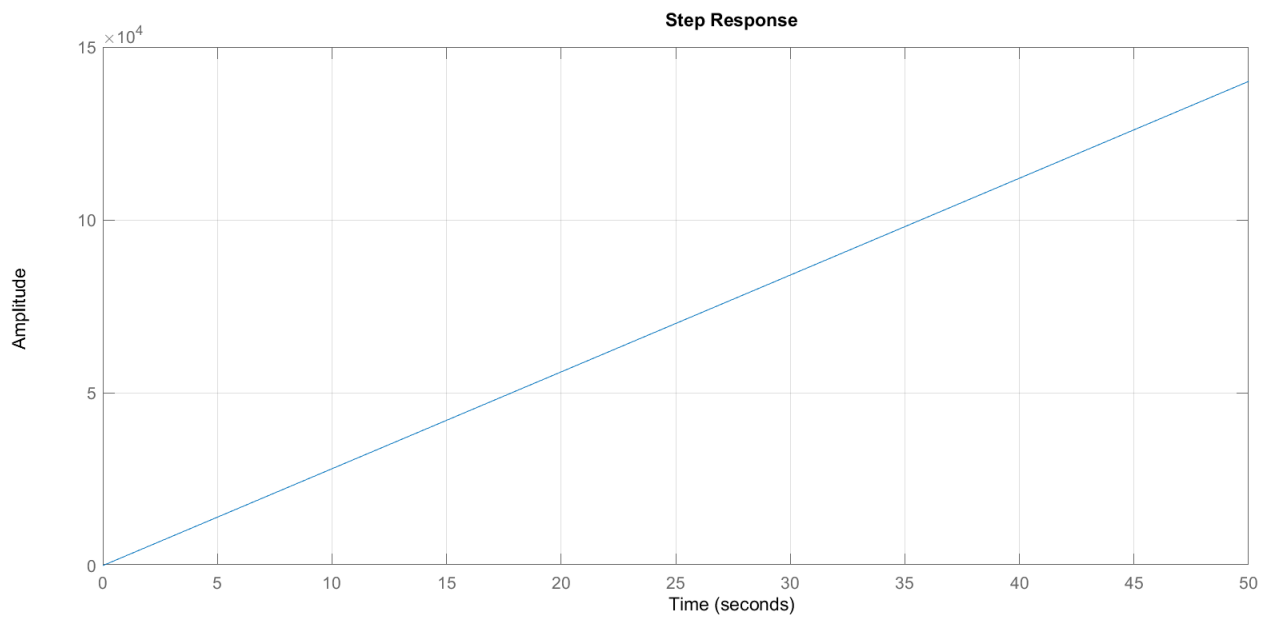


График 10. Переходная функция

Найдем передаточную функцию от  $j\omega$

$$W(j \cdot \omega) = \frac{1}{C \cdot j \cdot \omega}$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \left| \frac{1}{C \cdot j \cdot \omega} \right| = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

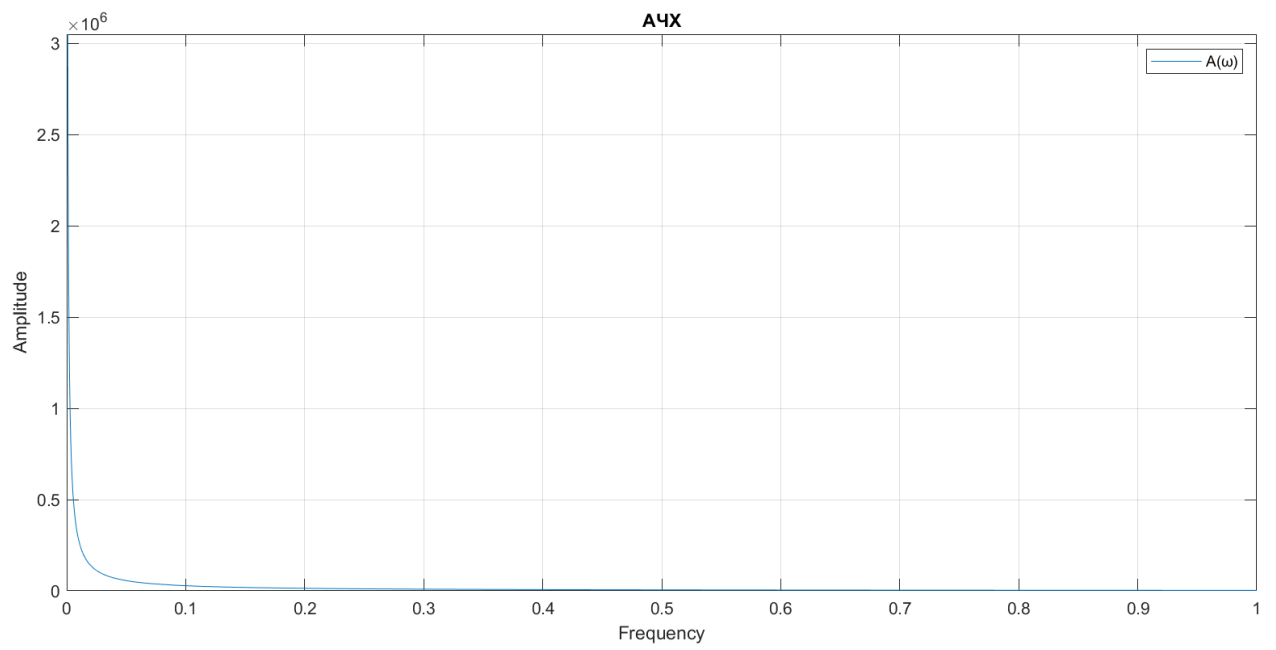


График 11. АЧХ

### Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{1}{C \cdot j \cdot \omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}$$

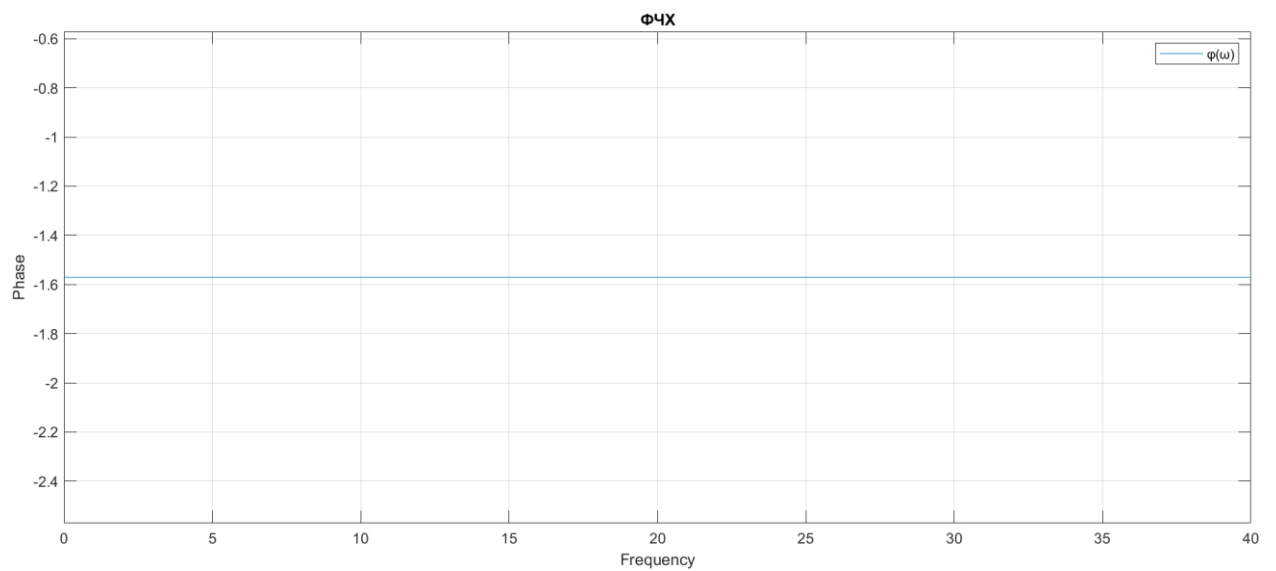


График 12. ФЧХ

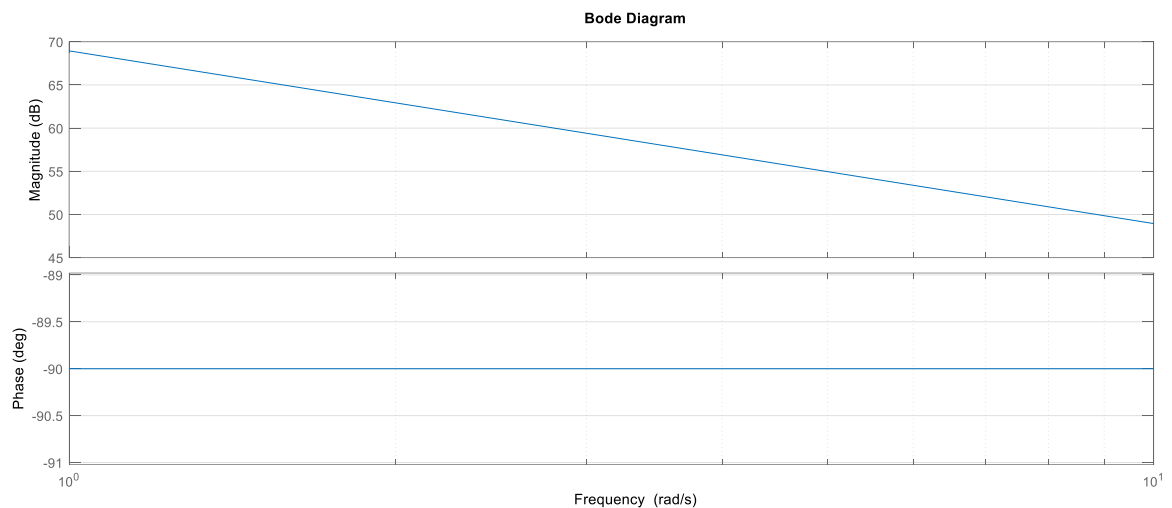


График 13. ЛАФЧХ

## Задание 4

Запишем дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока независимого возбуждения

$$\ddot{\theta} + \frac{K_m K_e}{JR} \dot{\theta} = \frac{K_m}{JR} u$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **апериодическое звено второго порядка**

$$W(p) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{p^2 + \frac{K_m K_e}{JR} p}$$

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$\ddot{\theta} + \frac{K_m K_e}{JR} \dot{\theta} = \frac{K_m}{JR} \cdot \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s^2 \Theta(s) + \frac{K_m K_e}{JR} s \Theta(s) = \frac{K_m}{JR}$$

$$\Theta(s) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{s^2 + \frac{K_m K_e}{JR} s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$w(t) = \frac{1}{Km} - \frac{1}{Km} e^{-\frac{K_m K_e}{JR} \cdot t}$$

### Step response (переходная функция)

$$\ddot{\theta} + \frac{K_m K_e}{JR} \dot{\theta} = \frac{K_m}{JR} \cdot 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s^2 \Theta(s) + \frac{K_m K_e}{JR} s \Theta(s) = \frac{K_m}{JR} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Theta(s) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{s \cdot (s^2 + \frac{K_m K_e}{JR} s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$h(t) = \frac{t}{K_m} + \frac{JR}{K_m^2 K_e} e^{-\frac{K_m K_e}{JR} \cdot t}$$

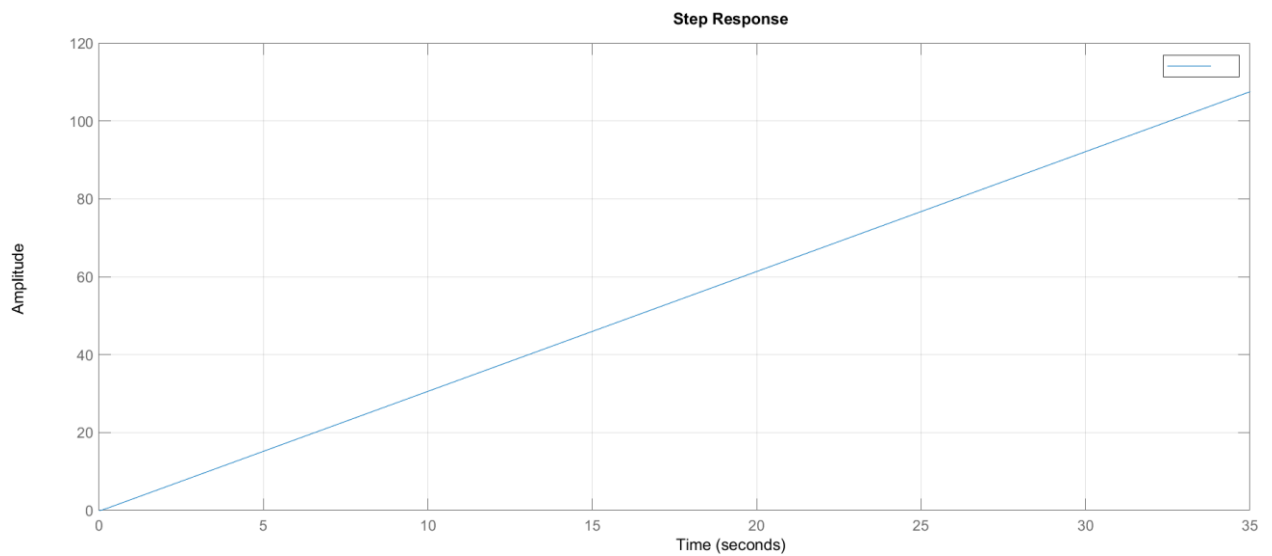


График 14. Переходная функция

Найдем вещественную и мнимую часть передаточной функции от  $j\omega$

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{K_m}{JR}}{(j \cdot \omega)^2 + \frac{K_m K_e}{JR} (j \cdot \omega)} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{\frac{K_m}{JR}}{j\omega + \frac{K_m K_e}{JR}} =$$

$$= \sqrt{\omega^2} e^{j \cdot \text{atan2}\left(-\frac{\omega}{0}\right)} \cdot \frac{\frac{K_m}{JR}}{\sqrt{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}} e^{j \cdot \text{atan}\left(-\frac{\omega}{\frac{K_m K_e}{JR}}\right)}$$

## Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \omega \cdot \frac{\frac{K_m}{JR}}{\sqrt{\frac{K_m K_e^2}{JR} + \omega^2}}$$

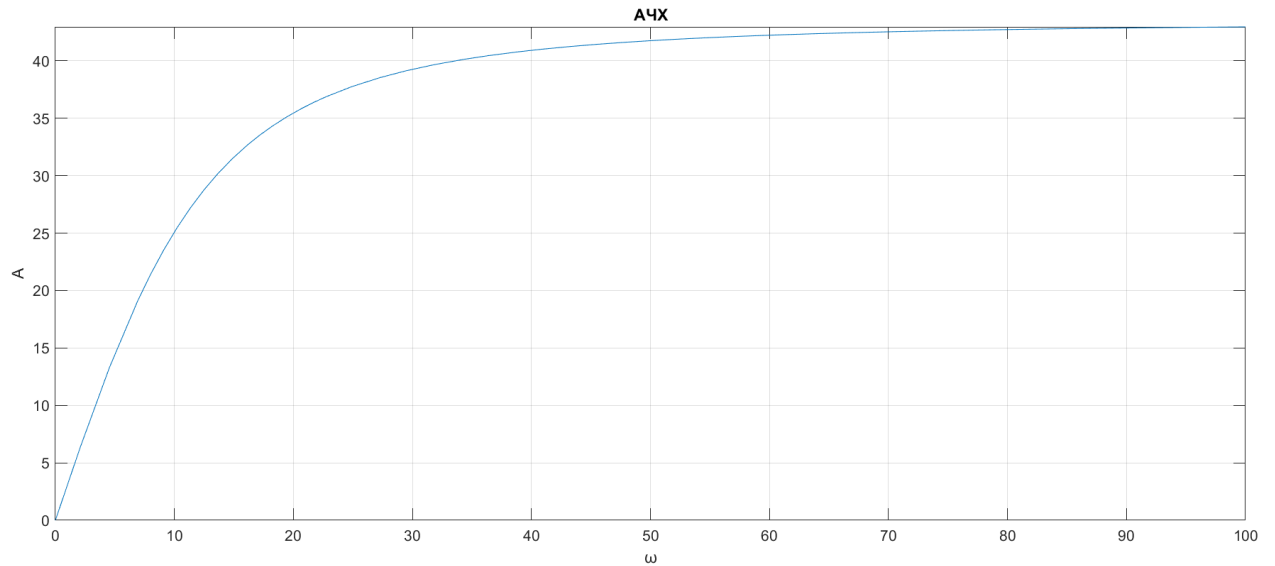


График 15. АЧХ

## Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(-\frac{\omega}{0}\right) + \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{\frac{K_m K_e}{JR}}\right)$$

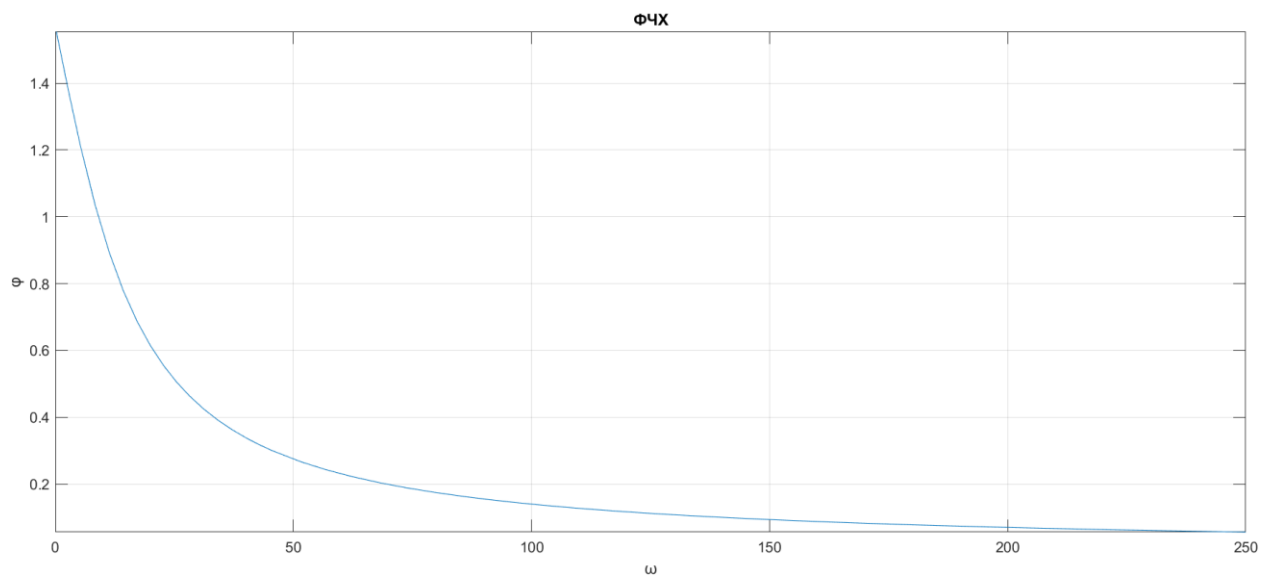


График 16. ФЧХ

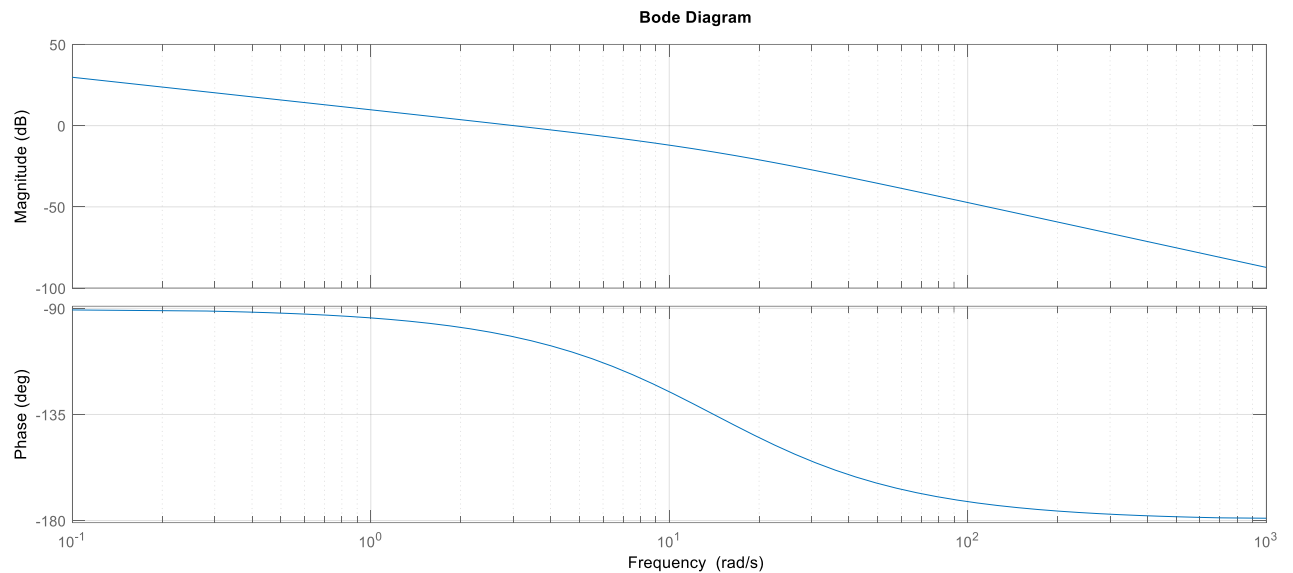


График 17. ЛАФЧХ

## Задание 5

Запишем уравнение тахогенератора постоянного тока

$$\dot{u} + \frac{R + R_l}{L} u = \frac{R_l K_e}{L} \dot{\theta}$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **реальное дифференцирующее звено**

$$W(p) = \frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot p}{p + \frac{R + R_l}{L}}$$

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$\dot{u} + \frac{R + R_l}{L} u = \frac{R_l K_e}{L} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$sU(s) + \frac{R + R_l}{L} U(s) = \frac{R_l K_e}{L} \frac{1}{s} \Delta(s)$$

$$U(s) = \frac{\frac{R_l K_e}{L} \Delta(s)}{s(s + \frac{R + R_l}{L})} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$w(t) = \frac{52839}{200} \delta(t) - \frac{319834436746482451053}{1759218604441600} e^{-\frac{6052999427439627}{8796093022208} \cdot t}$$

### Step response (переходная функция)

$$\dot{u} + \frac{R + R_l}{L} u = \frac{R_l K_e}{L} 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$sU(s) + \frac{R + R_l}{L} U(s) = \frac{R_l K_e}{L} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$U(s) = \frac{\frac{R_l K_e}{L}}{s^2 \cdot (s + \frac{R + R_l}{L})} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$h(t) = \frac{52839}{200} e^{-\frac{6052999427439627}{8796093022208} \cdot t}$$

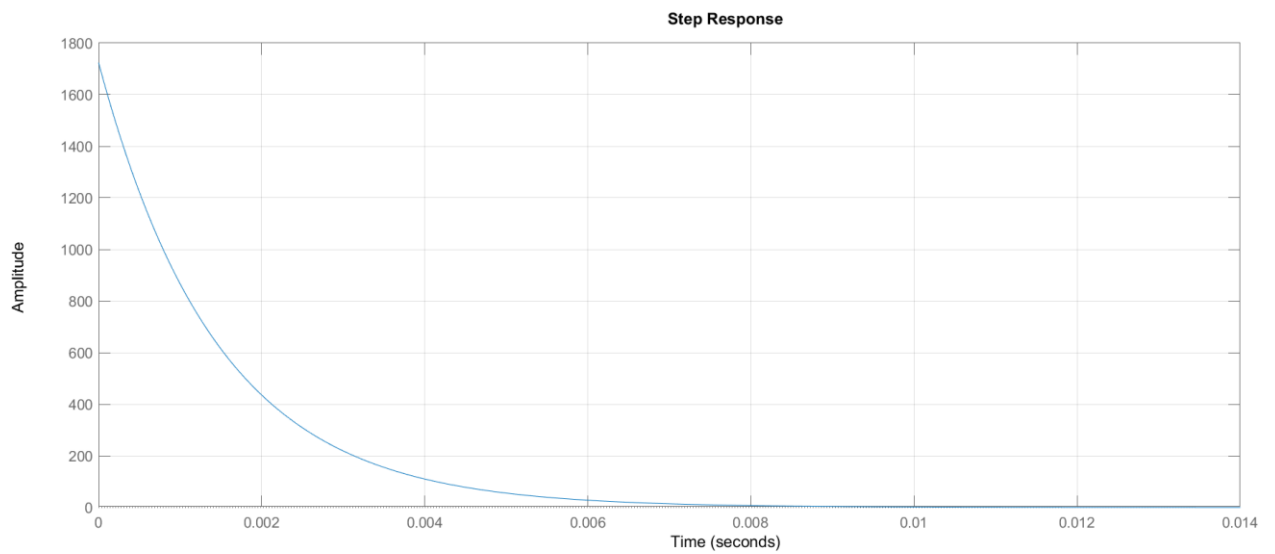


График 18. Переходная функция

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot j \cdot \omega}{j \cdot \omega + \frac{R + R_l}{L}}$$

### Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{real}\left(\frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot j \cdot \omega}{j \cdot \omega + \frac{R + R_l}{L}}\right)^2 + \operatorname{imag}\left(\frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot j \cdot \omega}{j \cdot \omega + \frac{R + R_l}{L}}\right)^2}$$



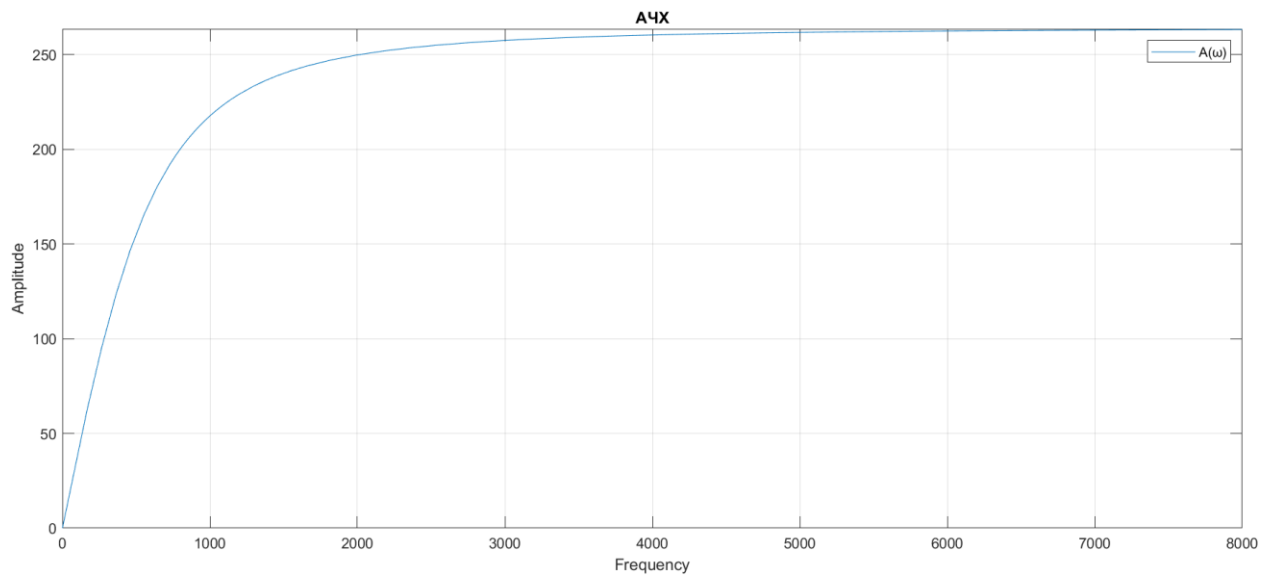


График 19. АЧХ

### Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{atan2} \left( \text{real} \left( \frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot j \cdot \omega}{j \cdot \omega + \frac{R + R_l}{L}} \right) + \text{imag} \left( \frac{\frac{R_l K_e}{L} \cdot j \cdot \omega}{j \cdot \omega + \frac{R + R_l}{L}} \right) \right)$$

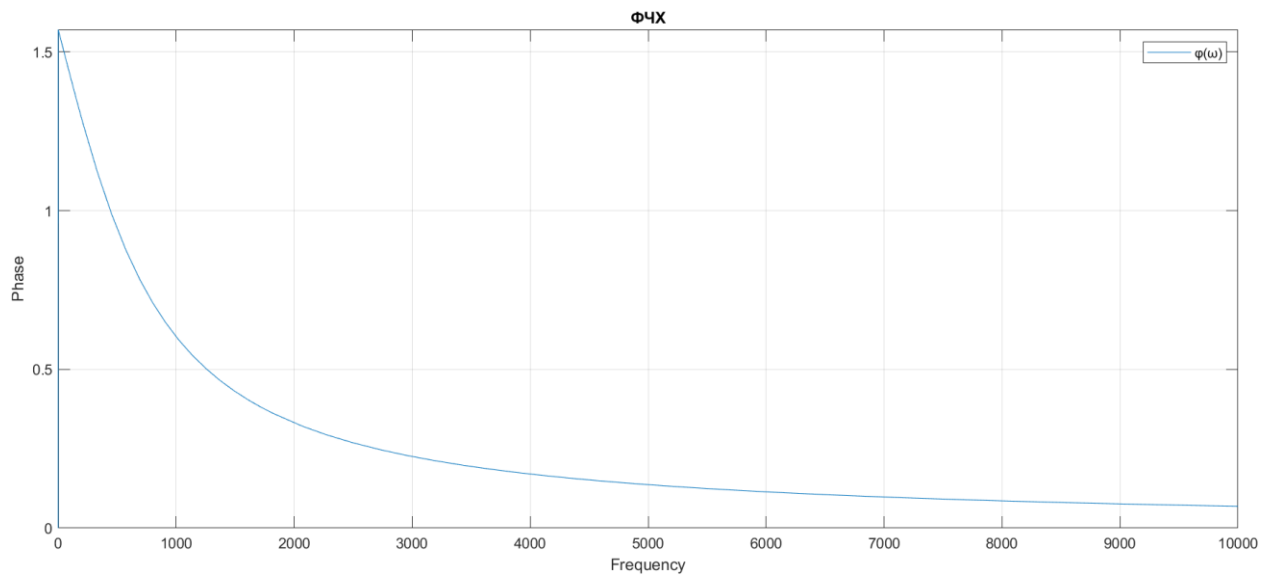


График 20. ФЧХ

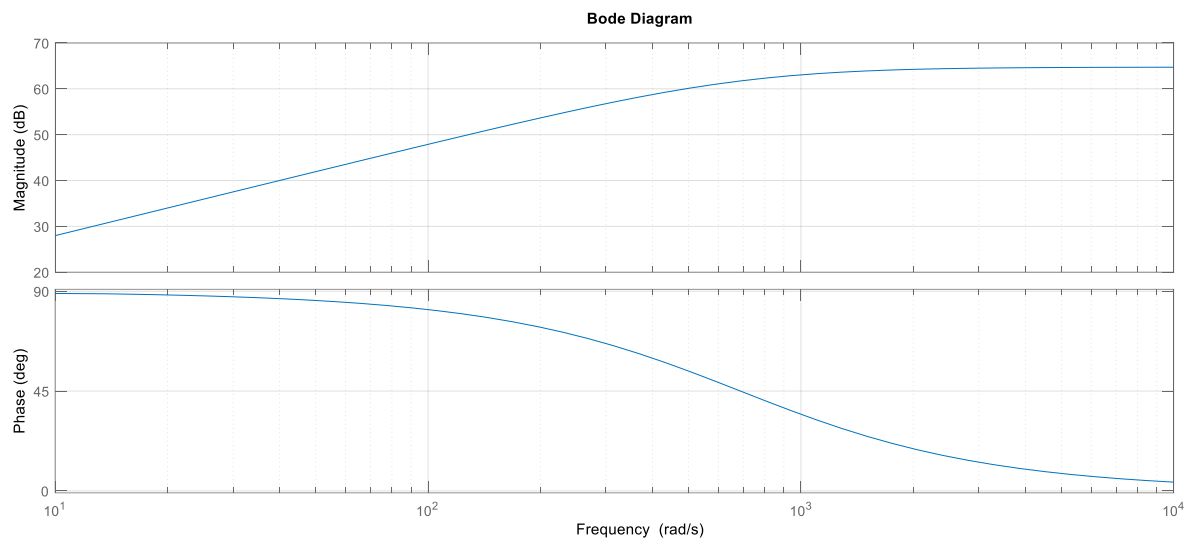


График 21. ЛАФЧХ

## Задание 6

Запишем уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **консервативное звено второго порядка**

$$W(p) = \frac{\frac{1}{m}}{p^2 + \frac{k}{m}}$$

Выполним аналитический расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m} \cdot \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s^2X(s) + \frac{k}{m}X(s) = \frac{1}{m}$$

$$X(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$w(t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{\sqrt{k \cdot m}}$$

**Step response** (переходная функция)

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{1}{11p \left(p^2 + \frac{219}{11}\right)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$h(t) = \frac{1}{219} + \frac{\cos\left(t\sqrt{\frac{219}{11}}\right)}{219}$$

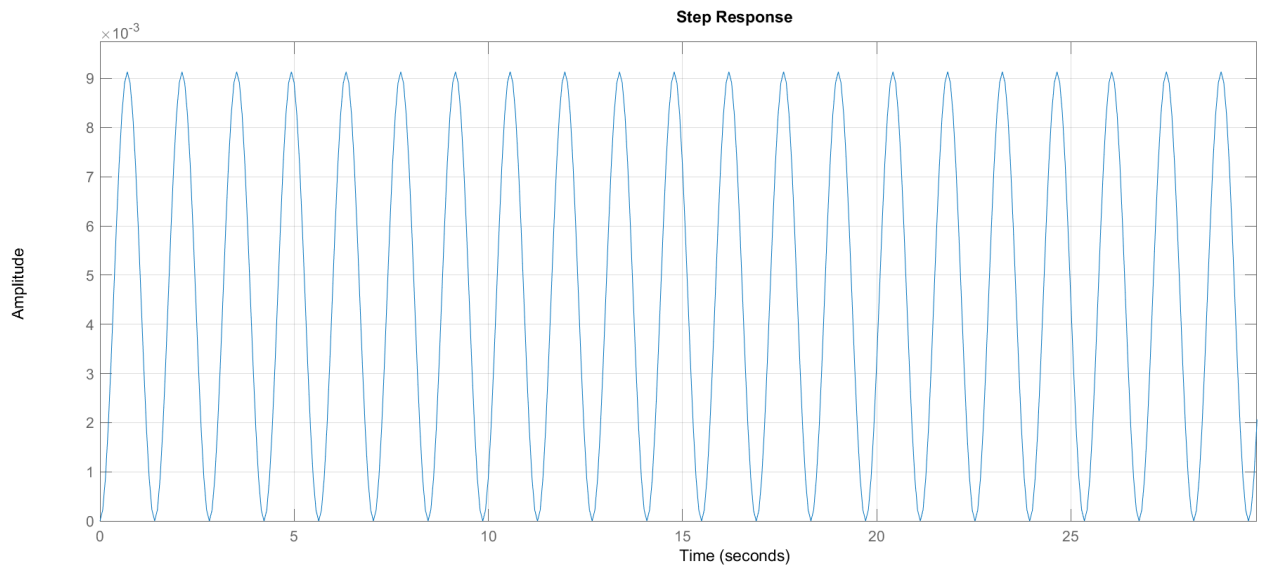


График 22. Переходная функция

Найдем вещественную и мнимую часть передаточной функции от  $j\omega$

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{1}{m}}{(j \cdot \omega)^2 + \frac{k}{m}} = \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + \frac{k}{m}}$$

**Амплитудно-частотная характеристика**

$$A(\omega) = \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + \frac{k}{m}}$$

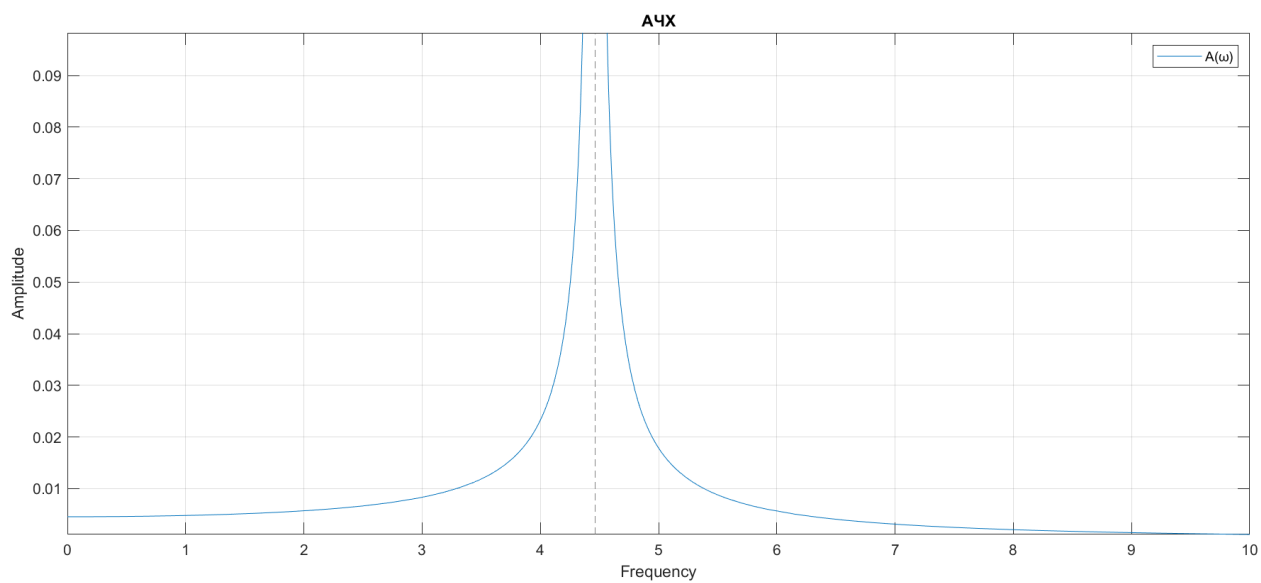


График 23. АЧХ

### Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}\left(0, -\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

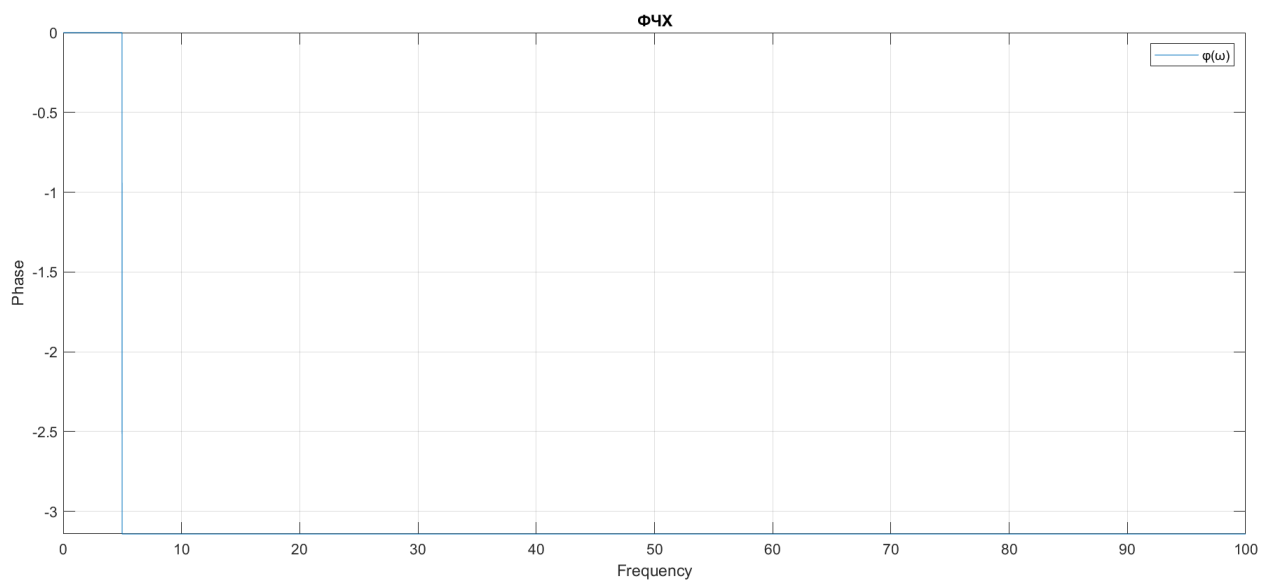


График 24. ФЧХ

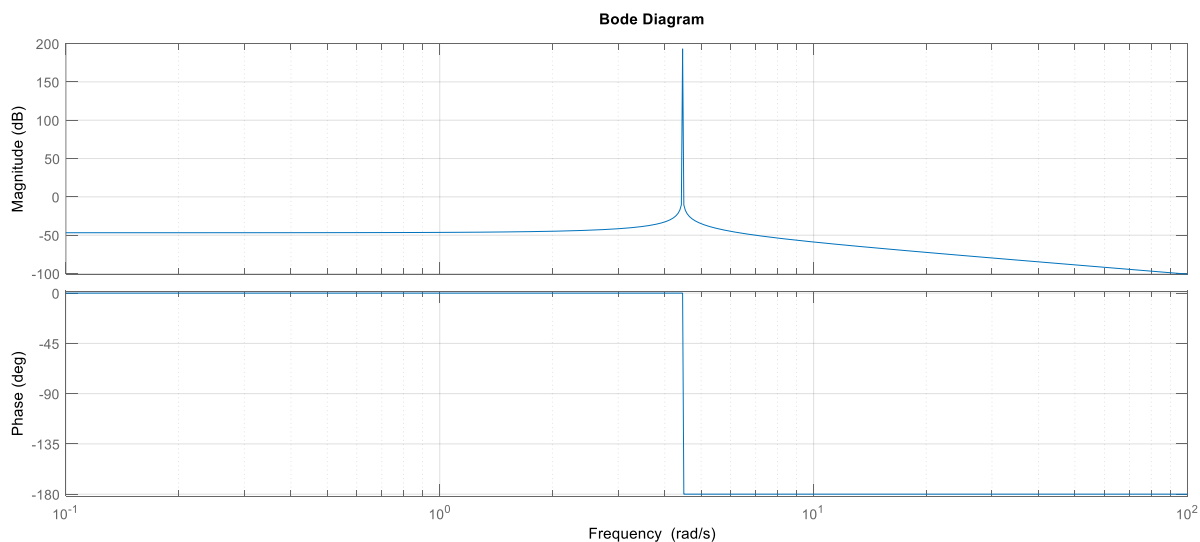


График 25. ЛАФЧХ

## Задание 7

Запишем уравнение движения маятника в вязкой жидкости

$$ml \cdot \ddot{\theta} + \eta l \cdot \dot{\theta} + mg \cdot \theta = F$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\eta}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{1}{ml} F$$

Найдем передаточную функцию исследуемого объекта. Это **апериодическое звено второго порядка**

$$W(p) = \frac{\frac{1}{ml}}{p^2 + \frac{\eta}{m}p + \frac{g}{l}}$$

Выполним расчет временных и частотных характеристик звена

**Impulse response** (весовая функция)

$$\ddot{\theta} + \frac{\eta}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{1}{ml} \cdot \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$s^2 \theta(s) + \frac{\eta}{m} s \theta(s) + \frac{g}{l} \theta(s) = \frac{1}{ml}$$

$$\theta(s) = \frac{\frac{1}{ml}}{s^2 + \frac{\eta}{m}s + \frac{g}{l}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$w(t) =$

$$\frac{46174190058650704715 \sqrt{19507} \sqrt{16972293505683} e^{-\frac{91461 t}{10310}} \sinh\left(\frac{3 \sqrt{19507} \sqrt{16972293505683} t}{201117170}\right)}{229309244123449944104767586304}$$

**Step response** (переходная функция)

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{\frac{1}{ml}}{p(p^2 + \frac{\eta}{m}p + \frac{g}{l})} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$h(t) =$

$$\frac{174727434621551754971}{883606246890091315200} - \frac{174727434621551754971 e^{-\frac{91461 t}{10310}} \left( \cosh\left(\frac{3 \sqrt{19507} \sqrt{16972293505683} t}{201117170}\right) + \frac{30487 \sqrt{19507} \sqrt{16972293505683} \sinh\left(\frac{3 \sqrt{19507} \sqrt{16972293505683} t}{201117170}\right)}{16972293505683} \right)}{883606246890091315200}$$

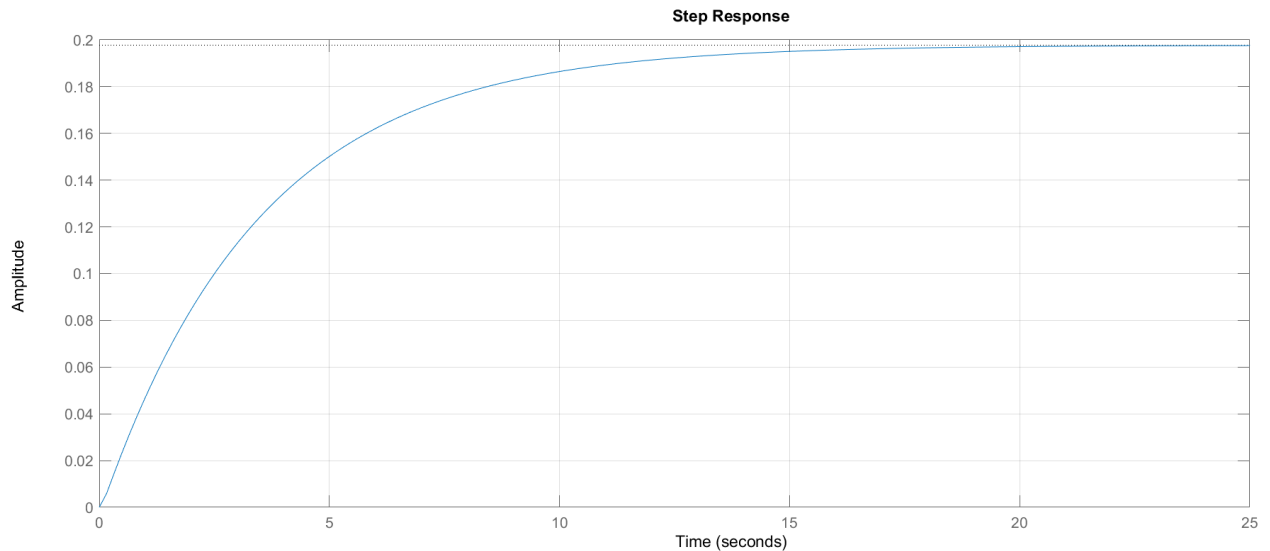


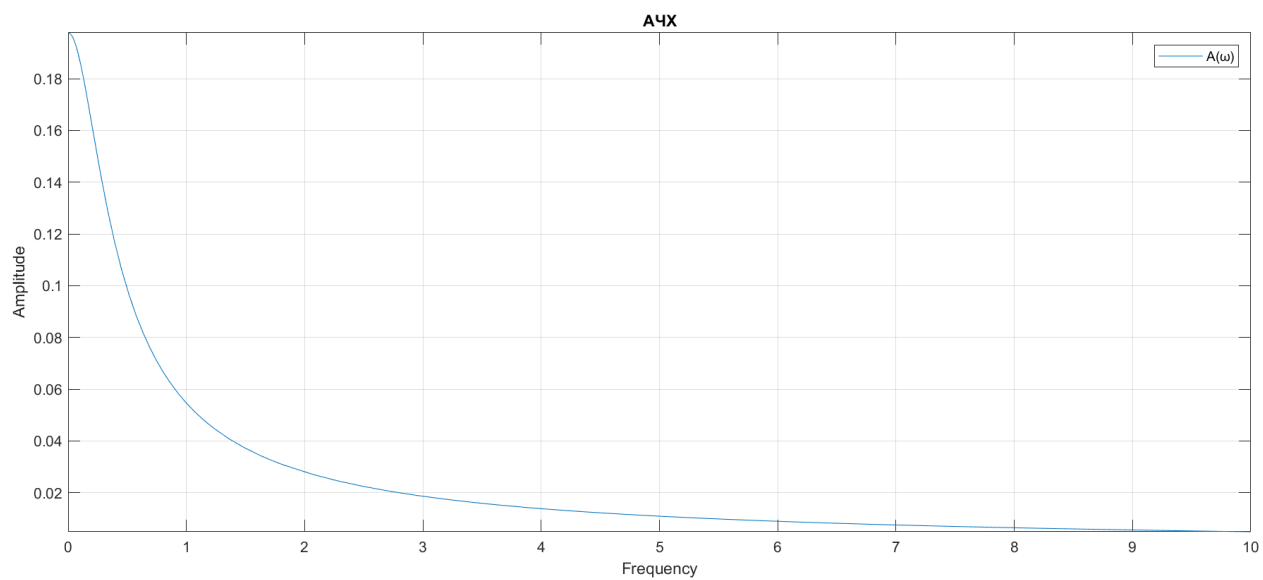
График 26. Переходная функция

Найдем вещественную и мнимую часть передаточной функции от  $j\omega$

$$W(j \cdot \omega) = \frac{\frac{1}{ml}}{(j \cdot \omega)^2 + \frac{\eta}{m}(j \cdot \omega) + \frac{g}{l}}$$

**Амплитудно-частотная характеристика**

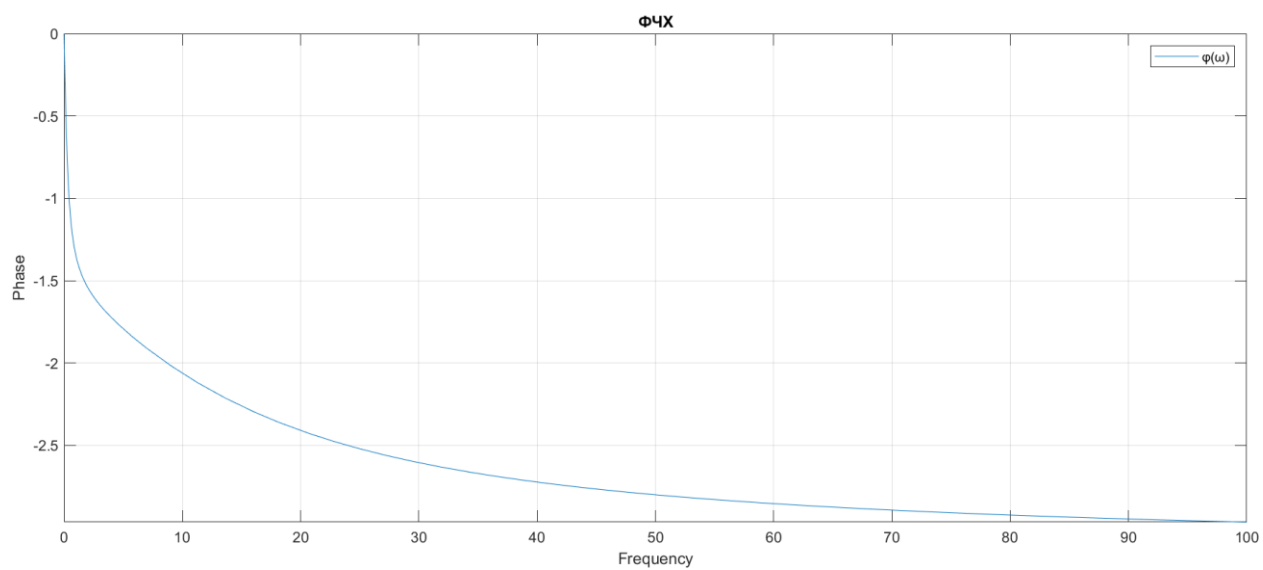
$$A(\omega) = \sqrt{(P(\omega))^2 + (Q(\omega))^2}$$



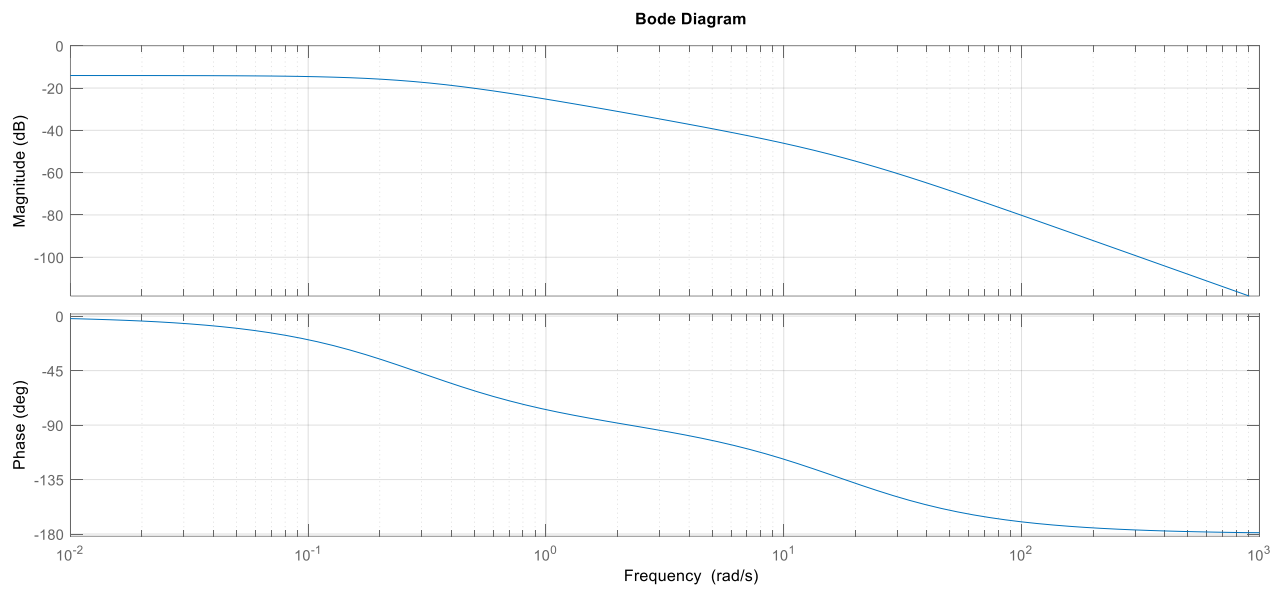
*График 27. АЧХ*

### Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), (P(\omega)))$$



*График 28. ФЧХ*



*График 29. ЛАФЧХ*

## Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы разные типы звеньев, их временные характеристики (весовая и переходная функции), а также построены частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, ЛАФЧХ) и переходная функция.