

**В.И. Бойков, А.Б. Бушуев, С.В. Быстров,
В.В. Григорьев, Н.А. Дударенко**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**



**Санкт-Петербург
2022**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**В.И. Бойков, А.Б. Бушуев, С.В. Быстров,
В.В. Григорьев, Н.А. Дударенко**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО

по направлениям подготовки

15.03.06 – «Мехатроника и робототехника»

и 27.03.04 – «Управление в технических системах»

в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
образовательных программ высшего образования бакалавриата



Санкт-Петербург
2022

В.И. Бойков, А.Б. Бушуев, С.В. Быстров, В.В. Григорьев, Н.А. Дударенко. Исследование динамических характеристик электромеханических систем. Учебно-методическое пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2022. – 70с.

Рецензент: Чепинский Сергей Алексеевич, к.т.н., доцент факультета СУиР

Учебно-методическое пособие предназначено для выполнения комплексного практического домашнего задания (кейса) по дисциплине «Динамика электромеханических систем» образовательного стандарта направлений 15.03.06 – «Мехатроника и робототехника» и 27.03.04 – «Управление в технических системах». Задание рассчитано на выполнение в течение одного семестра как индивидуально, так и в составе группы в два – три человека, в зависимости от уровня подготовки и числа обучающихся. Пособие построено по замкнутому принципу так, что все теоретические сведения подкреплены соответствующим практикумом, содержит 25 заданий. Описанные в пособии методики проектирования электромеханических систем автоматического управления могут быть полезны при организации практических занятий и лабораторных работ по смежным дисциплинам, связанным с теорией и практикой электропривода и электромеханических систем управления.

В рамках пособия рассматриваются подходы к проектированию и исследованию характеристик электромеханических систем автоматического позиционирования двух типов: с приводом постоянного тока и с приводом переменного тока (на базе асинхронного двигателя). Студентам предлагается провести самостоятельную разработку классической системы углового позиционирования, начиная от выбора исполнительного двигателя и других базовых элементов, разработки функциональной и структурной схем, заканчивая синтезом регулятора, моделированием и анализом полученных динамических характеристик. Выбор основных электромеханических и механических элементов системы рекомендуется выполнять с использованием методик, разработанных на кафедре Автоматики и телемеханики (ЛИТМО) профессором Сабининым Ю.А. и доцентом Николаевым П.В. Синтез регулятора предлагается выполнять с использованием методов последовательного компенсатора и модального управления. В пособии приведены основные теоретические материалы по применению данных методов. Рассматривается процедура синтеза модального управления для следящих систем, а также подходы к построению эталонной модели.

Учебно-методическое пособие может быть рекомендовано аспирантам и молодым специалистам, научная деятельность которых связана с исследованием и разработкой электромеханических систем.



Университет ИТМО – национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию – ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. – лидер Проекта 5–100.

© Университет ИТМО, 2022

© В.И. Бойков, А.Б. Бушуев, С.В. Быстров, В.В. Григорьев, Н.А. Дударенко, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Алгоритм проектирования электромеханической системы	6
1.1 Выбор типа исполнительного устройства	6
1.2 Разработка функциональной схемы системы	8
1.3 Расчет мощности двигателя и выбор его марки	10
1.4 Выбор типа механического преобразовательного устройства и его расчёт	21
1.5 Выбор задающего и управляющего устройств системы.....	22
1.6 Выбор датчика обратной связи по положению	25
2 Синтез регулятора, моделирование замкнутой системы	27
2.1 Разработка структурной схемы системы	27
2.2 Математическая модель исполнительного устройства.....	28
2.3 Метод последовательного компенсатора	32
2.4 Модальное управление	33
2.4.1 Прямое модальное управление	33
2.4.2 Модальное управление на основе обратной связи	37
2.4.3 Синтез модального управления для следящих систем	42
2.5 Построение регуляторов со встроенной моделью	46
2.6 Формы задания матриц эталонной модели	52
2.6.1 Канонические формы матриц эталонной модели.....	52
2.6.2 Стандартные полиномы	54
2.7 Математическое моделирование динамической системы ..	58
3 Набор технических заданий на проектирование	64
Заключение	67
Список рекомендуемой литературы	68

ВВЕДЕНИЕ

Уровень развития электромеханических систем определяет возможности и качество продукции всех отраслей промышленности, стратегические и тактические характеристики современных систем вооружения, результаты научных исследований в космосе и микромире. Всегда и везде идет борьба за улучшение технических характеристик электромеханических систем, что обеспечивает их конкурентную способность и лидерство на мировом рынке. Современные разработчики аппаратного обеспечения таких систем должны свободно ориентироваться в элементной базе, делать обоснованный выбор устройств, производить статический и динамический расчёты систем на её основе.

Основой любой электромеханической системы является исполнительное устройство (электродвигатель, электромагнит, пьезодвигатель). От физического принципа его работы во многом зависит выбор всех основных устройств и элементов электромеханической системы. Базовым комплектом таких устройств является электропривод, в котором в мехатронных системах обычно используются двигатели малой и средней мощности, их рабочий диапазон мощностей находится в пределах от 0,1 Вт до 1000 Вт. В современных точных приборных системах мехатроники и робототехники их называют сервоприводами. Во многом качество переходных процессов и точностные показатели систем зависят от их характеристик, а они, в свою очередь, определяются возможностями и параметрами исполнительных устройств.

Целью данного учебно-методического пособия является приобретение студентами навыков обоснованного и оптимального выбора исполнительного устройства электромеханической следящей системы углового позиционирования и других компонентов её сервопривода. Обобщенный объект управления такой системы определен только количественными характеристиками, необходимыми для расчета мощности двигателя, выбора его типа и марки и динамического синтеза системы управления по заданным показателям качества.

Данное пособие предназначено для выполнения комплексного практического домашнего задания (кейса) по дисциплине «Динамика электромеханических систем» образовательного стандарта направлений 15.03.06 – «Мехатроника и робототехника» и 27.03.04 – «Управление в технических системах». Задание рассчитано на выполнение в течение одного семестра в три этапа как индивидуально, так и в составе группы в два – три человека, в зависимости от уровня подготовки и числа обучающихся. Планируемый объём трудоёмкости задания составляет 30 часов (по 10 часов на каждый этап). По результатам выполнения каждого этапа составляется промежуточный отчет, который оценивается в баллах в соответствии с принятой системой (БАРС). Итоговый отчет должен быть

оформлен в соответствии с требованиями университета, содержать результаты всех этапов и общие выводы по работе, и сдан до начала промежуточной аттестации. В этом случае задание оценивается максимальным количеством баллов. Основаниями для снижения количества баллов являются: небрежное оформление, ошибки в выборе технических средств и в результатах моделирования, а также сдача задания после указанного срока.

1 АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Проектирование любой системы начинается с технического задания, где приводятся основные технические параметры объекта управления, желаемые статические и динамические характеристики системы управления, возможные возмущающие воздействия, требования относительно условий окружающей среды и другие условия функционирования.

Будем рассматривать задачу проектирования электромеханической системы углового позиционирования некоторого абстрактного объекта, который характеризуется моментом инерции J_m , моментом сопротивления M_c , а также максимально допустимыми параметрами движения (максимальные угол поворота объекта α_m , скорость ω_m и ускорение ε_m). Необходимо, чтобы переходные процессы в системе соответствовали заданному показателю колебательности и удовлетворялось требование к величине допустимой динамической ошибки слежения. Условия работы – лабораторные, возмущающие воздействия отсутствуют, особых условий нет. Типовой алгоритм проектирования такой системы состоит из следующих этапов:

- Выбор типа двигателя (переменного или постоянного тока);
- Разработка функциональной схемы системы;
- Расчет мощности двигателя и выбор его марки;
- Выбор типа механического преобразовательного устройства и его расчёт;
- Выбор устройства управления привода;
- Выбор датчика положения;
- Разработка структурной схемы системы;
- Синтез регулятора;
- Математическое моделирование разомкнутой и замкнутой систем;
- Оценка влияния изменений параметров объекта управления на динамические характеристики системы.

1.1 Выбор типа исполнительного устройства

Для того чтобы правильно выбрать тип исполнительного устройства любой электромеханической системы, нужно определиться с требованиями, которые предъявляются к объекту управления (рабочему органу). Это, в первую очередь, характер и диапазон совершаемых движений. В мехатронных системах это вращательное или поступательное движение в ограниченном или неограниченном диапазоне. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, какой двигатель сможет решить поставленную задачу и какой потребуется тип механического

преобразовательного устройства. Следует также обратить внимание на режим работы и требования к точности позиционирования. Характерными для мехатронных систем являются непрерывный продолжительный и периодически-кратковременный режимы работы, а точностные показатели определяются функциональным назначением системы и требуют особого внимания при выборе исполнительных устройств, механических преобразователей и датчиков систем линейного и углового позиционирования.

Выбор типа исполнительного устройства может зависеть и от того, какой имеется в наличии источник питания (постоянного или переменного тока), что также повлияет на структуру и состав устройства управления. На выбор типа исполнительного устройства влияют требования окружающей среды, точнее, влияние окружающей среды на двигатель и его влияние на окружающую среду. В первом случае необходимо дать оценку возможному влиянию на двигатель агрессивных факторов среды и выбрать соответствующее исполнение двигателя и всего сервопривода (IP), во втором - оценить возможное его влияние на окружающую среду, например, искрение на коллекторе недопустимо в условиях паров бензина и сильной запыленности и т.д. В рассматриваемой задаче мы не обозначаем особых условий работы проектируемой системы, считаем их лабораторными, и в каждом варианте будет задан тип двигателя, поэтому ограничимся общими рекомендациями, которые могут быть полезными на практике.

Итак, первое, что нужно решить в задаче выбора типа исполнительного устройства, - это на каком токе он будет работать. Вариантов может быть два: либо на постоянном токе, либо на переменном токе.

В интересующем нас сегменте электромеханических систем (мехатронных и робототехнических) в диапазоне мощностей до 1000 Вт среди двигателей постоянного тока преобладают электрические машины с магнитоэлектрическим возбуждением, бесколлекторные машины (вентильные двигатели) и шаговые двигатели, а среди машин переменного тока – асинхронные двух- и трех- фазные двигатели.

Нужно отметить, что в современных промышленных установках средней и большой мощности двигатели постоянного тока вытесняются асинхронными машинами с короткозамкнутым ротором из-за более простой конструкции, возможности работы от источников питания промышленной частоты, а главное из-за широкого использования современных цифровых устройств управления (частотных преобразователей).

Двигатели постоянного тока применяются там, где требуется большой пусковой момент, большая перегрузочная способность, необходимость регулирования скорости вращения нагрузки в широком диапазоне и при

наличии только источник напряжения постоянного тока. Если нет особых условий окружающей среды, описанных выше, требуется максимально простое управление, нет смены режимов работы, то имеет смысл использовать двигатели с магнитоэлектрическим возбуждением. Если есть ограничения по воздействию на окружающую среду и требования повышенной надежности с большим сроком эксплуатации, то имеет смысл применять вентильные двигатели. Шаговые двигатели часто используются в системах, где требуется повторяемость и высокая точность позиционирования объектов. Нужно отметить, что в этой области и обычные двигатели постоянного тока могут составить им конкуренцию при использовании современных алгоритмов управления в составе замкнутого сервопривода.

Современные асинхронные двигатели рекомендуется использовать при частых изменениях режимов работы в условиях малых пусковых моментов, при необходимости регулирования угловой скорости вращения нагрузки и непостоянности её момента инерции. В таких условиях надежность, экономичность и простота в эксплуатации обеспечивают асинхронным двигателям с короткозамкнутым ротором явные преимущества, особенно при управлении от частотных преобразователей, которые значительно расширяют круг решаемых задач, от непрерывного вращения до точного позиционирования объектов управления.

1.2 Разработка функциональной схемы системы

Основой любой электромеханической системы является электропривод, поэтому функциональную схему системы главным образом составляют его элементы и устройства.

Выбранный тип двигателя во многом определяет состав и структуру всей функциональной схемы системы. Для решения поставленной задачи рекомендуется ориентироваться на обобщенную функциональную схему электропривода, которая вне зависимости от типа двигателя содержит основные устройства, поясняет их взаимодействие и взаимосвязи.

Обобщенная функциональная схема электропривода приведена на рисунке 1, где ИО - исполнительный орган рабочей машины (турбина, вентилятор, оптические элементы приборов) или ОУ – объект управления, УУ – устройство управления (микропроцессор, управляющая ЭВМ), ЗУ - задающее устройство (ЭВМ, аналоговое устройство), ДПИ - датчики преобразователи информации (тахогенератор, термopара, индуктивные и емкостные датчики). Сплошными одинарными стрелками обозначены аналоговые электрические сигналы постоянного или переменного тока, пунктирные стрелки обозначают сигналы, наличие которых или отсутствие, а также форма определяются условиями конкретной технической системы, двойные стрелки обозначают механические связи.

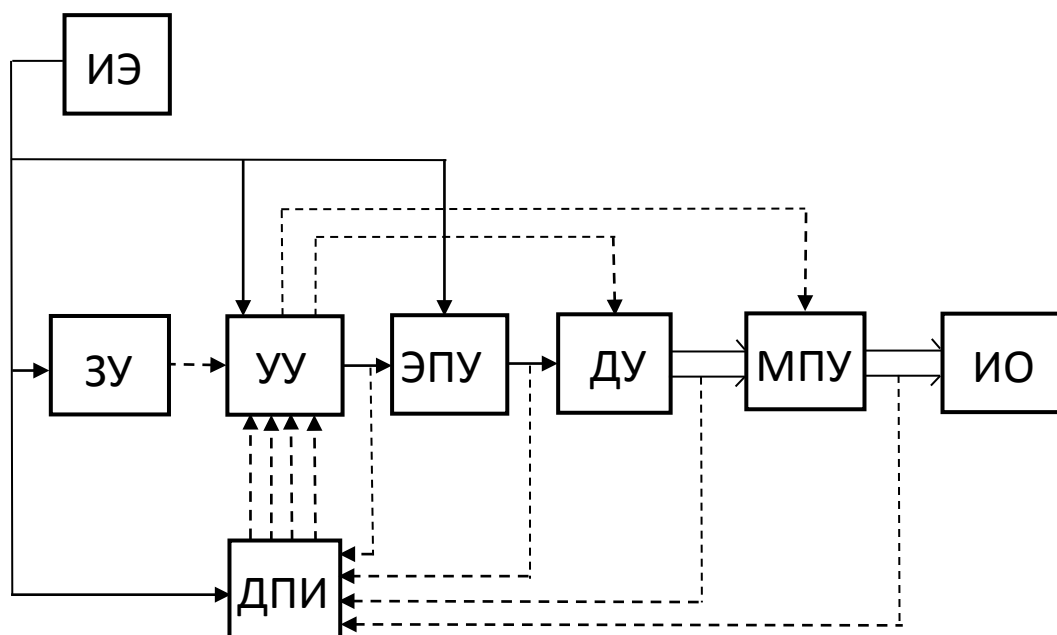


Рисунок 1 - Обобщенная функциональная схема автоматизированного электропривода

Функции, выполняемые устройствами, входящими в состав электропривода:

ИЭ - обеспечение электропитанием всех элементов и устройств электропривода;

ЭПУ - преобразует сигнал управления в форму, требуемую данным двигателем;

ДУ - преобразует электрическую энергию в механическую;

МПУ - обеспечивает изменение параметров вырабатываемой ДУ механической энергии;

ИО - выполняет заданные функции;

УУ - вырабатывает сигнал управления в функции задающего сигнала и различных дополнительных электрических сигналов, содержащих информацию о процессе преобразования энергии, реальных параметрах механического движения ДУ и ИО, кроме того, обеспечивает защиту и блокировку всех электромеханических устройств, входящих в состав электропривода;

ЗУ - формирует сигнал задания на УУ;

ДПИ - датчики-преобразователи информации служат для измерения различных координат электропривода (скорость вращения, ток, угол поворота и др.) и преобразования их в электрические сигналы одинакового вида.

При проектировании системы углового позиционирования для рассматриваемой задачи имеет смысл использовать упрощенную обобщенную схему, представленную на рисунке 2. Кроме уже введенных обозначений устройств, используются новые, характерные для данного вида схем: МКУ – микроконтроллерное устройство управления, ДУП –

датчик углового положения. МКУ решает задачи формирования сигнала управления, сравнения сигнала с задающего устройства и датчика углового положения, а также реализацию синтезированного регулятора. ДУП измеряет угол поворота объекта управления и формирует сигнал для передачи в канал управления.

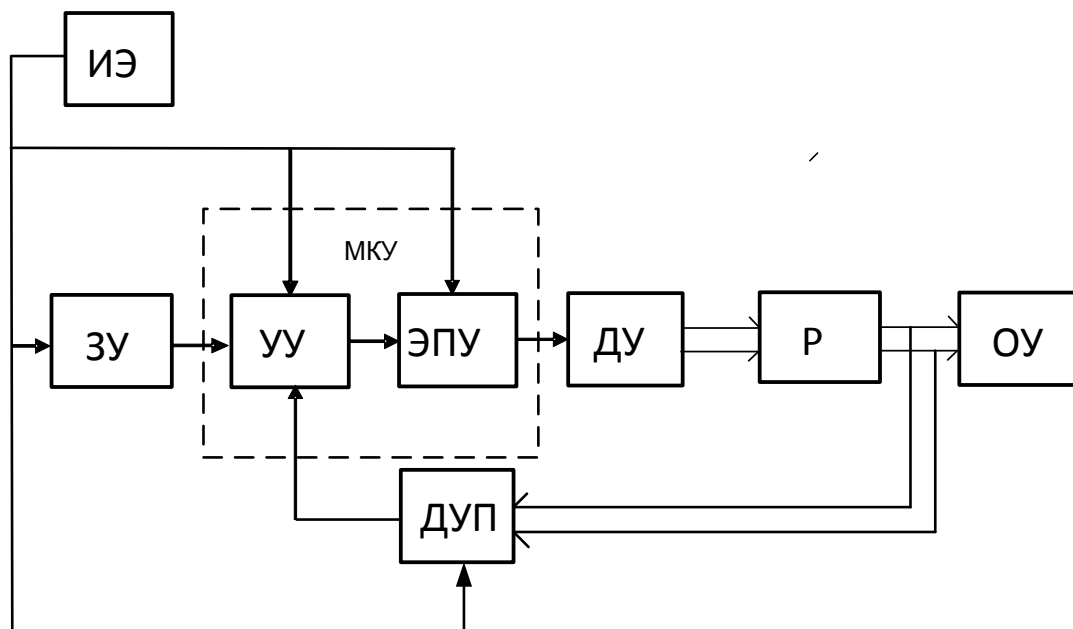


Рисунок 2 – Обобщенная функциональная схема системы углового позиционирования

Таким образом, на данном этапе задача сводится к выбору типов всех основных устройств схемы (рисунок 2) в зависимости от заданного типа двигателя и разработке под него функциональной схемы системы.

Для сравнения полученной функциональной схемы со схемами патентных аналогов можно использовать методику имитационного размерного моделирования, позволяющего численно оценить затраты ресурсов на проектирование [21].

1.3 Расчет мощности двигателя и выбор его марки

Этап выбора марки двигателя является ключевым при проектировании любых электромеханических систем, не является исключением и задача разработки следящей системы точного углового позиционирования. Решающее значение при этом отводится номинальной мощности двигателя, она должна быть больше и равной требуемой для работы электромеханической системы с заданными характеристиками мощности. Выбор машины меньшей мощности может приводить к сбоям в работе, особенно в пусковых режимах, быстрому износу изоляции, снижению производительности и уменьшению срока службы. Излишне завышенная мощность двигателя влечет за собой снижение энергетических

показателей (к.п.д.) и недогрузку, неоправданное увеличение габаритных размеров, увеличение момента инерции и как следствие ухудшение динамики всей системы. Требуемая мощность определяется исходя из механических характеристик движения нагрузки системы, возможными предельными перегрузками двигателя и нагревом его обмоток. Численно перегрузка двигателей оценивается коэффициентами перегрузочной способности по току (γ_I) или моменту (γ_M). Для двигателей постоянного тока с независимым возбуждением они равны, а у машин смешанного и особенно последовательного возбуждения перегрузочная способность по моменту должна быть несколько выше, что объясняется ростом момента при перегрузках не только из-за тока, но и магнитного потока. В машинах постоянного тока превышение допустимой перегрузки по току может приводить к искрению на коллекторе и в конечном итоге к поломке щеточно-коллекторного механизма. Рекомендуемая в большинстве случаев перегрузочная способность по току должна быть $\gamma_I = 2$. Так как искрение на коллекторе зависит не только от тока, но и от реактивной ЭДС в коммутируемой секции, которая определяется скоростью вращения, то при малых скоростях $\gamma_I = 2,5$. Для двигателей, работающих в режиме пиковых нагрузок, в том числе в следящих системах $\gamma_I = 3 - 4$. В малоинерционных двигателях с малой индуктивностью секций обмоток якоря и, как следствие, с малой ЭДС $\gamma_I \leq 10$. У асинхронных двигателей предельные возможности определяются максимальным моментом (при критическом скольжении), обычно он превышает номинальный в два – три раза, т.е. перегрузочная способность по моменту $\gamma_M = 2 - 3$.

Номинальная мощность двигателя определяется его тепловыми характеристиками, а именно теплостойкостью изоляции обмоток, которая ограничивает допустимую температуру, а, следовательно, и потери в обмотках и магнитопроводе. Все изоляционные материалы делятся на классы, для каждого определена предельная допустимая температура. Превышение этой температуры приводит к старению изоляции и выходу её из строя. Кроме того, важен фактор температуры окружающей среды: при низкой температуре воздуха двигатель может нести большую нагрузку, чем при высокой, а температура изоляции будет одна и та же. Это вносит неопределенность при выборе двигателя с учетом номинальной мощности. В соответствии с ГОСТ 183-74 рекомендуется принимать температуру окружающей среды равной $+35^\circ \text{C}$.

Итак, для того чтобы определить требуемую мощность двигателя, нужно воспользоваться уравнением движения, которое получается на основании второго закона Ньютона и для тел вращения имеет вид:

$$M - M_c = M_{\text{дин}},$$

где:

M – момент движения, Нм;

M_c – момент сопротивления, Нм;

$M_{дин}$ – динамический момент, Нм.

Применительно к электроприводу возможны следующие соотношения моментов:

1. $M > M_c$ и $M_{дин} > 0$ – режим ускорения;
2. $M < M_c$ и $M_{дин} < 0$ – режим замедления или торможения;
3. $M = M_c$ и $M_{дин} = 0$ – режим покоя или равномерного установившегося движения.

То есть появление динамического момента обусловлено ускорением или замедлением электропривода, когда меняется его кинетическая энергия.

Запас кинетической энергии во вращающемся теле можно определить по формуле:

$$A = \frac{J \cdot \omega^2}{2},$$

где $J = mr^2$ – момент инерции тела вращения массой m , кг m^2 ;

r – радиус тела, м;

ω – угловая скорость вращения, рад/с.

Мощность, получаемая при ускорении или отдаваемая при торможении вращающейся массы, определится выражением:

$$P_{дин} = \frac{dA}{dt} = J \cdot \omega \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ}{dt}.$$

А динамический момент будет определен из формулы:

$$M_{дин} = \frac{P_{дин}}{\omega} = J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{dJ}{dt}.$$

Первое слагаемое определяет изменение динамического момента при изменении угловой скорости вращения, а второе – при изменении момента инерции. Переменный момент инерции часто встречается в робототехнических системах и манипуляторах. В рассматриваемой задаче считаем его постоянным, тогда

$$M_{дин} = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Рассмотрим подробнее состав электромеханического блока системы, его структура и параметры устройств представлены на рисунке 3.

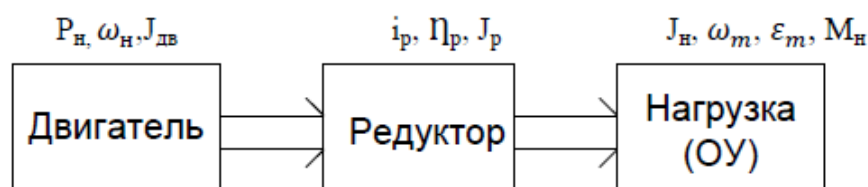


Рисунок 3 – Структура электромеханического блока системы

Основные параметры электромеханического блока системы:

J_n – момент инерции нагрузки, ω_m – максимальная угловая скорость нагрузки; ϵ_m – максимальное угловое ускорение нагрузки; M_n – момент

сопротивления нагрузки; i_p – передаточное число редуктора, η_p – к.п.д. редуктора; J_p – момент инерции редуктора; P_n – номинальная мощность двигателя; ω_n – номинальная угловая скорость вращения ротора двигателя; $J_{\partial\partial}$ – момент инерции ротора двигателя.

Параметры двигателя нужно определить в ходе расчётов и по результату его окончательного выбора по каталогам [4–8].

Параметры нагрузки (J_n , ω_m , ε_m , M_n) задаются в техническом задании на проектирование электромеханической системы. Что касается редуктора, то возможно два варианта:

1. Редуктор задан и его параметры изменить нельзя;
2. Параметры редуктора нужно определить в ходе проектирования.

В первом случае при известных параметрах редуктора (i_p , η_p , J_p) нужно определить требуемый от двигателя момент и мощность.

Требуемый момент двигателя определяется по формуле:

$$M_{тр} = M_{дин} + M_c,$$

где $M_{дин}$ и M_c – соответственно динамический и статический моменты сопротивления, приведенные к валу двигателя.

Динамический момент определяется из выражения:

$$M_{дин} = (J_{\partial\partial} + J_p + J_n/i_p^2) i_p \varepsilon_m,$$

а статический момент, если нагрузка реактивная, определяется как

$$M_c = \frac{M_n}{\eta_p \cdot i_p},$$

а если нагрузка активная –

$$M_c = \frac{M_n}{i_p} \eta_p.$$

Предположим, что нагрузка реактивная, тогда суммарный требуемый момент от двигателя вычисляется как сумма:

$$M_{тр} = (J_{\partial\partial} + J_p + J_n/i_p^2) i_p \varepsilon_m + \frac{M_n}{\eta_p \cdot i_p}.$$

Момент инерции ротора двигателя назначается исходя из соотношения:

$$J_{\partial\partial} = (3 - 5) J_p,$$

учитывая то, что большему значению будут соответствовать большие габариты и мощность двигателя.

По найденному требуемому моменту $M_{тр}$ и заданной максимальной скорости нагрузки определим максимальную требуемую мощность на валу двигателя:

$$P_{тр} = M_{тр} \cdot i_p \cdot \omega_m.$$

Далее по каталогам выбираем двигатель, обеспечивая соотношение

$$P_{\partial\partial} > P_{тр},$$

где $P_{\partial\partial}$ – максимальная мощность двигателя из каталога (при отсутствии значения можно ориентироваться на мощность, развиваемую при пуске).

После выбора двигателя следует проверить его на перегрузочную способность, учитывая реальное значение его момента инерции (из каталога).

Перегрузочная способность по моменту должна находиться в пределах 3 – 5 для двигателей постоянного тока, 2 – 3 для двигателей переменного тока и определяется по формуле:

$$\gamma_M = \frac{M_{тр.с}}{M_{дв.н}},$$

где $M_{тр.с}$ – скорректированное значение требуемого момента (с учетом $J_{дв}$ из каталога), $M_{дв.н}$ – номинальный момент выбранного двигателя.

Кроме того, рекомендуется проверить перегрузочную способность по скорости, она должна быть в пределах 0,8 – 0,9 для обоих типов двигателей:

$$\alpha = \frac{i_p \omega_m}{\omega_{дв.н}},$$

где ω_m – максимальная угловая скорость нагрузки, $\omega_{дв.н}$ – номинальная скорость вращения двигателя, i_p – передаточное число редуктора.

Чем больше значение α , тем меньше габариты и стоимость двигателя, но нужно помнить, что повышение угловой скорости вращения вала двигателя при одинаковой мощности влечет за собой увеличение передаточного числа редуктора, а следовательно, его размеров. А уменьшение скорости ротора приводит к увеличению габаритов двигателя и уменьшению размеров редуктора.

Если коэффициенты γ_M и α превышают допустимые значения, то следует выбрать другой двигатель большей мощности и снова проверить по перегрузкам.

Во втором случае, когда редуктор нужно рассчитывать, обычно находят оптимальное значение его передаточного числа с целью минимизации требуемого момента. Так как все параметры редуктора неизвестны, то рекомендуется произвольно принять значения момента инерции и к.п.д. в пределах:

$$J_p = (0,2-0,3)J_{дв},$$

$\eta_p = (0,88-0,92)$ – для конических передач и $\eta_p = (0,90-0,94)$ – для передач цилиндрических.

Выражение для требуемого момента принимает вид

$$M_{тр} = (1,2 \cdot J_{дв} + \frac{J_n}{i_p^2}) \varepsilon_m \cdot i_p + \frac{M'_n}{i_p},$$

где $M'_n = \frac{M_n}{\eta_p}$.

Чтобы найти оптимальное значение передаточного числа редуктора $i_{ро}$, нужно взять производную по i от требуемого момента и приравнять её к нулю:

$$1,2J_{дв}\varepsilon_m - \frac{J_n\varepsilon_m}{i_{ро}^2} - \frac{M'_n}{i_{ро}^2} = 0,$$

откуда найдем оптимальное значение передаточного числа

$$i_{po} = \sqrt{\frac{M'_H + J_H \varepsilon_m}{1,2 J_{дв} \varepsilon_m}}.$$

Полученное значение округляется и используется для дальнейших расчетов редуктора.

Подставим найденное значение i_{po} в выражение для требуемого момента, получим минимальное требуемое значение момента

$$M_{тр.min} = \frac{2(M'_H + J_H \varepsilon_m)}{i_{po}}.$$

Тогда требуемая минимальная мощность двигателя может быть определена так:

$$P_{дв.min} = 2(M'_H + J_H \varepsilon_m) \omega_m,$$

а для первоначального выбора двигателя при оптимальном передаточном числе редуктора и малом значении момента нагрузки ($M_H \leq J_H \varepsilon_m$), что характерно для рассматриваемого типа следящих систем, можно пользоваться соотношением

$$P_{дв} = 2P_H,$$

где P_H – мощность, необходимая для вращения нагрузки, она равна

$$P_H \cong (M'_H + J_H \varepsilon_m) \omega_m.$$

После выбора редуктора и определения его реальных значений (i_p , η_p , J_p) нужно произвести проверочный расчет $M_{тр}$ и $P_{дв}$ по формулам первого варианта с проверкой на перегрузочную способность. Если они снова не будут удовлетворены, то следует искать двигатель другой марки, ориентируясь на неравенство

$$M_{тр.c} > M_{дв.н}.$$

Возможна также коррекция передаточного числа в диапазоне $i_{pmin} < i_p < i_{po}$, где

$$i_{pmin} = \frac{\omega_{дв.н}}{\omega_m}.$$

Если двигатель подходит по перегрузке, то следующим шагом является проверка по нагреву его обмоток. Длительный разогрев обмоток за счёт потерь опасен разрушением изоляции и выходом двигателя из строя. Поэтому необходимо определить температуру возможного нагрева двигателя в характерных для системы режимах и сравнить ее с предельно допустимой для данного типа изоляции обмоток. Выполнить такие расчеты достаточно сложно, поэтому в инженерной практике прибегают к косвенным методам.

Нагрев двигателя происходит из-за потерь, которые напрямую зависят от величины тока в обмотках, а он, в свою очередь, определяет момент, который при постоянной скорости напрямую связан с мощностью. Поэтому потери, момент, ток и мощность являются косвенными характеристиками нагрева обмоток, и для выполнения поставленной задачи достаточно рассчитать их для основных режимов работы двигателя

и сравнить их с номинальными (паспортными) значениями двигателя. В инженерной практике часто используется метод эквивалентного момента, который позволяет с достаточной степенью точности вычислить момент двигателя для характерных режимов работы проектируемой системы. В задачах мехатроники и робототехники часто встречаются два режима, соответствующих принятой классификации [ГОСТ Р 52776-2007 (МЭК 60034-1-2004)]:

- продолжительный (S1),
- периодически-кратковременный (S3).

Продолжительный режим характерен для мобильных систем и сканирующих сервоприводов. Если в продолжительном режиме момент нагрузки неизменен, то проверку на перегрев можно не производить, достаточно чтобы мощность двигателя была больше или равна мощности нагрузки. А когда момент в процессе работы системы изменяется и известен закон изменения нагрузки (например, в виде нагрузочной диаграммы), можно определить эквивалентные значения тока или момента, и желательно, чтобы они были меньше номинальных значений двигателя

$$I_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{\sum I_x^2 t_x}{\sum t}} \leq I_{\text{н}} \quad \text{и} \quad M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{\sum M_x^2 t_x}{\sum t}} \leq M_{\text{н}},$$

где t_x – интервалы времени из нагрузочной диаграммы;

$\sum t$ – весь рабочий цикл по диаграмме;

I_x – среднее значение тока за интервал времени t_x ;

M_x – среднее значение момента нагрузки за интервал времени t_x .

В следящих системах со сканированием нагрузки закон изменения момента определить практически невозможно, и поэтому используют усредненное соотношение

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{M_{\text{н.ср.}}^2}{i_{\text{р}}^2} + (1,2J_{\text{дв}} + \frac{J_{\text{н}}}{i_{\text{р}}^2})^2 i_{\text{р}}^2 \varepsilon_{\text{ср}}^2},$$

где $M_{\text{н.ср.}}$ – суммарный усредненный момент нагрузки и трения в редукторе; $\varepsilon_{\text{ср}}$ – среднеквадратичная величина ускорения нагрузки.

Если сканирование осуществляется по гармоническому закону $g = g_m \sin \omega t$, то среднеквадратичное значение ускорения можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{g_m \omega^2}{\sqrt{2}}.$$

Для следящих систем, предназначенных для отработки угла поворота, характерен периодически-кратковременный режим работы: когда появляется рассогласование между углом задания и углом поворота нагрузки и напряжение управления превышает напряжение трогания, двигатель начинает вращаться и после отработки рассогласования останавливается. Таким образом, цикл работы состоит из суммы времени отработки t_p и времени паузы t_n . За время отработки двигатель, как

правило, не успевает нагреться до установившейся температуры, а за время паузы не может остыть до температуры окружающей среды. Важной характеристикой режима является продолжительность включения:

$$\theta = \frac{t_p}{t_p + t_n}.$$

Метод расчета эквивалентного момента определяется типом двигателя. Если он уже по своему назначению спроектирован для продолжительного режима работы, то и момент определяется по той же формуле. Если двигатель предназначен для повторно-кратковременных режимов, то момент определяется по формуле

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{M_i^2 t_{pi} \theta_\phi}{\sum t_{pi} \theta_n}} < M_n,$$

где θ_ϕ – фактическая продолжительность включения; θ_n – номинальная продолжительность включения.

Особенностью теплового расчета асинхронных двигателей из-за больших пусковых токов является необходимость в дополнительной проверке ограничений на допустимое количество пусков в час, оно определяется по формуле

$$h_{\text{доп}} = \frac{36(100 - \theta_\phi)}{t_n (I_n / I_n)^2},$$

где θ_ϕ – фактическая продолжительность включения по нагрузочной диаграмме;

t_n – расчетное время пуска;

I_n / I_n – кратность пускового тока двигателя.

А фактическое число пусков определяется по формуле

$$h_\phi = \frac{3600}{t_p + t_n}.$$

Условием годности двигателя по нагреву является $h_\phi < h_{\text{доп}}$.

При решении практических задач после расчета требуемой мощности двигателя следует обратиться к справочной литературе, каталогам, Интернету [4–8], чтобы выбрать марку двигателя. Кроме мощности, определяющими являются условия, в которых будет работать двигатель: будет ли он подвержен каким-либо внешним воздействиям (пыль, влага, температура окружающей среды), от этого зависит его климатическое исполнение и степень защиты от внешних воздействий. Вся необходимая информация содержится в его марке (буквенно-цифровом коде).

Категории климатических исполнений маркируются соответствующими буквами и цифрами:

У — модели для эксплуатации в умеренном климате;

ХЛ — электродвигатели, адаптированные к холодному климату;

ТС — исполнения для сухого тропического климата;

ТВ — исполнения для влажного тропического климата;

Т — универсальные исполнения для тропического климата;

О — электродвигатели для эксплуатации на суше;
М — двигатели для работы в морском климате (холодном и умеренном);
В — модели, которые могут использоваться в любых зонах на суше и на море.

Цифры в номенклатуре модели указывают на тип ее размещения:

1 — возможность эксплуатации на открытых площадках;
2 — установка в помещениях со свободным доступом воздуха;
3 — эксплуатация в закрытых цехах и помещениях;
4 — использование в производственных и других помещениях с возможностью регулирования климатических условий (наличие вентиляции, отопления);

5 — исполнения, разработанные для эксплуатации в зонах повышенной влажности, с высоким образованием конденсата.

Пример маркировки электродвигателей:

А И Р С 1 1 2 М А 8 Б У 3
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Марка
2. Признак модификации
3. Высота оси вращения
4. Установочный размер по длине станины
5. Длина сердечника
6. Число полюсов
7. Признак по назначению (конструктивная модификация)
8. Климатическое исполнение
9. Категория размещения

Степень защиты корпусов электродвигателей от попадания механических частиц и проникновения влаги определена стандартом EN 60034 (часть 5). Код степени защиты формируется из обозначения IP (International Protection) и двух цифр, первая из которых показывает уровень защиты от твердых частиц, а вторая – от проникновения влаги. Возможные варианты сведены в таблицу 1.

Например, для использования на улице рекомендуется оборудование со степенью защиты IP64, для работы под водой необходима максимальная степень защиты IP68. В условиях промышленных предприятий все устройства с низким IP должны быть установлены в специальные шкафы, которые, в свою очередь, имеют степень защиты, соответствующую условиям эксплуатации. Современные электродвигатели, установленные на открытых площадках, должны иметь степень защиты не ниже IP55, что позволяет им выдерживать продолжительную работу при сильном запылении и под струями воды. Любое оборудование с высоким IP является более надежным и в то же время более дорогим. Кроме того, при продолжительной работе в тяжелых условиях эксплуатации необходимо

обеспечивать специальное техническое обслуживание, регламент которого обычно задается производителем.

Таблица 1 – Порядок обозначения степени защиты корпусов двигателей

I P NM	N – защита от механических частиц	M – защита от влаги
0	Нет защиты	Нет защиты
1	Защита от попадания посторонних предметов размерами свыше 50 мм (например, от случайного касания руками)	Защита от вертикально падающей воды (конденсация)
2	Защита от попадания посторонних предметов размерами свыше 12 мм (например, от случайного касания пальцами)	Защита от воды, падающей под углом 15° к вертикали
3	Защита от попадания посторонних предметов размерами свыше 2,5 мм (например, инструментов, провода)	Защита от воды, падающей под углом 60° к вертикали
4	Защита от попадания посторонних предметов размерами свыше 1 мм (например, тонкой проволоки)	Защита от водяных брызг со всех сторон
5	Защита от пыли	Защита от водяных струй со всех сторон
6	Полная защита от пыли (пыленепроницаемый)	Защита от сильных водяных струй со всех сторон
7		Защита от попадания воды при кратковременном погружении
8		Защита от попадания воды при длительном погружении

В технических паспортах электродвигателей можно найти информацию о температурном классе изоляции и режимах работы. В настоящее время чаще всего можно встретить температурные классы изоляции В, F и H. В соответствии со стандартом EN 60034-1 температура обмоток двигателей с такой изоляцией не должна повышаться более, чем на 80–125 °С при температуре окружающей среды до +40°С (таблица 2).

Таблица 2 – Допустимое повышение температуры изоляции обмоток

Температурный класс изоляции	Максимально допустимое повышение температуры при температуре окружающего воздуха +40°C
B	+80°C
F	+105°C
H	+125°C

Режимы работы электродвигателей определяет стандарт IEC 34 (EN 60034):

Режим S1 (продолжительный). При таком режиме эксплуатации нагрузка остается постоянной в течение всего времени, пока температура электродвигателя не достигнет необходимого значения. Мощность привода рассчитывается по формулам, приведенным выше.

Режим S2 (кратковременный). При эксплуатации в этом режиме температура двигателя в период его включения не достигает установившегося значения. За время отключения электродвигатель охлаждается до температуры окружающей среды. При кратковременном режиме эксплуатации необходимо проверять перегрузочную способность электропривода.

Режим S3 (периодически-кратковременный). Электродвигатель работает с периодическими отключениями. В периоды включения и отключения его температура не успевает достигнуть заданного значения или охладиться до температуры окружающей среды. При расчете мощности двигателя обязательно учитывается продолжительность пауз и потерь в переходные периоды. При выборе электродвигателя важным параметром является допустимое количество включений за единицу времени.

Режимы S4 (периодически-кратковременный, с частыми пусками) и **S5** (периодически-кратковременный с электрическим торможением). В обоих случаях работа двигателя рассматривается по тем же параметрам, что и в режиме эксплуатации S3.

Режим S6 (периодически-непрерывный с кратковременной нагрузкой). Работа электродвигателя в данном режиме предусматривает эксплуатацию под нагрузкой, чередующуюся с холостым ходом.

Режим S7 (периодически-непрерывный с электрическим торможением).

Режим S8 (периодически-непрерывный с одновременным изменением нагрузки и частоты вращения).

Режим S9 (режим с непериодическим изменением нагрузки и частоты вращения).

1.4 Выбор типа механического преобразовательного устройства и его расчёт

После предварительного расчета мощности двигателя и оптимального значения передаточного отношения нужно выбрать механическое преобразовательное устройство, в рассматриваемом случае это редуктор. От его правильного выбора зависит эффективность передачи мощности двигателя к нагрузке, надежность и долговечность работы всей системы. В настоящее время промышленностью выпускается большое разнообразие типов и размеров редукторов, а также мотор-редукторов (конструктивно объединенный комплект двигателя и редуктора), что иногда затрудняет принятие решения по конкретной задаче. Возможны два пути решения поставленной задачи:

1. Выбрать редуктор по каталогам [9,10,11] в соответствии с техническим заданием и расчетными данными.

2. Выбрать мотор-редуктор по каталогам [8,12,13] с учетом выбранного типа двигателя, его требуемой расчетной мощности и всех полученных параметров.

В первом случае оставляем выбранную марку двигателя и, решая задачу выбора типа редуктора, ограничимся устройствами с цилиндрическими и коническими передачами, которые в наибольшей степени удовлетворяют требованиям следящих систем. Во внимание будем принимать следующие характеристики:

- передаточное число редуктора (i_p);
- крутящий момент на выходном валу (M_p);
- максимальная угловая скорость вращения выходного вала (ω_2);
- угловая скорость вращения входного вала (ω_1);
- коэффициент полезного действия редуктора (η_p);
- наличие реверсивного движения.

Передаточное число должно быть целым и близким по величине к расчетному оптимальному значению, а крутящий момент больше максимального момента нагрузки.

Для реализации больших значений передаточных чисел используют многоступенчатые редукторы. Чем больше ступеней, тем больше передаточное отношение и габариты устройства.

В реальных задачах рассматриваются ещё и специальные характеристики, такие как:

- допустимая радиальная консольная нагрузка на выходном валу;
- характер внешней нагрузки;
- время работы в сутки;
- температура окружающей среды;
- климатическое исполнение;

- конструктивные особенности (по способу монтажа, габаритные и присоединительные размеры, исполнение выходного вала и др.).

В данной задаче особых требований к ним не предъявляется.

После выбора редуктора по каталогам следует определить реальные значения требуемого момента, суммарного момента инерции, приведенного момента нагрузки. Суммарный момент инерции увеличить на 10–15 %, так как потребуются муфты для соединения редуктора с нагрузкой и двигателем. Данные значения будут необходимы при определении параметров передаточных функций соответствующих элементов системы.

Во втором варианте выбирается мотор-редуктор. Такое решение должно быть более компактным, так как не требует дополнительных устройств механической связи двигателя и редуктора, сам редуктор по всем характеристикам оптимально подобран производителем. Нужно использовать полученные в результате расчета данные, чтобы выбрать по каталогам нужный вариант. К ним относятся: требуемый момент на выходном валу и максимальная угловая скорость вращения выходного вала (нагрузки), наличие реверсивного движения. Остальные специальные характеристики в рассматриваемой задаче не заданы:

- допустимая радиальная консольная нагрузка на выходном валу;
- характер внешней нагрузки;
- время работы в сутки;
- температура окружающей среды;
- климатическое исполнение;
- наличие упругих элементов (муфты, ремни и др.) на выходном валу мотор-редуктора;

- конструктивные особенности (по способу монтажа, габаритные и присоединительные размеры, исполнение выходного вала и др.)

После окончательного выбора мотор-редуктора следует пересчитать основные его параметры с учетом реальных значений, что потребуется в дальнейшем для определения параметров передаточных функций элементов привода.

1.5 Выбор задающего и управляющего устройств системы

Современные электромеханические системы мехатроники и робототехники являются цифровыми, что обеспечивается применением соответствующих элементов и устройств, а также специализированного программного обеспечения. Двигатели, механические преобразовательные устройства, чувствительные элементы датчиков и объекты управления всегда непрерывны, а вот задающие устройства и устройства управления – цифровые, что и определяет тип системы в целом. Широкое применение цифровых устройств в электроприводе обусловлено бурным развитием

вычислительной техники, созданием микроконтроллеров высокой производительности и различных форм-факторов. Цифровые устройства отличаются от аналоговых высоким быстродействием, гибкостью и легкостью настройки, отсутствием дрейфа параметров, возможностью реализации сложных законов управления.

Задающие устройства следящих систем могут быть реализованы различными способами:

- в цифровом виде это может быть компьютер верхнего уровня, который по линии связи передает данные сигнала задания на управляющее устройство, или это может быть программа, записанная в память устройства управления, по которой задание формируется.
- в непрерывной реализации это может быть потенциометр, сельсин или поворотный трансформатор, механические входные оси которых связаны с задающим приводом, а выходное напряжение, пропорциональное углу поворота, подается на аналоговый вход устройства управления.

В данной практической задаче выбор задающего устройства может быть ограничен только диапазоном угла задания и питающим напряжением.

Выбор устройства управления представляет собой более сложную задачу, так как необходимо учесть целый ряд факторов. В электромеханических системах цифровые устройства управления могут выполнять множество функций:

- принимают и обрабатывают сигналы с задающих устройств и датчиков обратной связи, несущих информацию о параметрах механического движения;
- формируют сигнал управления и передают его через силовой преобразователь (драйвер) на двигательное устройство;
- обеспечивают защиту и блокировку всех электромеханических устройств, входящих в состав систем;
- обеспечивают безопасные режимы пуска и эффективное торможение (с отдачей энергии в сеть);
- делают возможным реализацию стандартных и нестандартных цифровых регуляторов.

На данном этапе нужно выбрать цифровое устройство управления для исследуемой электромеханической системы, которое бы обеспечивало надёжную работу исполнительного устройства во всех характерных для системы режимах с выполнением требований технического задания по динамике и точности углового позиционирования объекта управления. При использовании электропривода постоянного тока рекомендуется поиск вести среди выпускаемых в России и за рубежом управляемых выпрямителей и специализированных контроллеров [1,3]. При разработке

привода переменного тока с использованием асинхронных двигателей следует рассматривать специализированные частотные преобразователи (ПЧ) [1,2].



Рисунок 4 – Устройства управления: преобразователь частоты PI, блок управления вентильным двигателем BLSD, контроллер управления коллекторным двигателем BDM-R

Работа в составе следящих систем накладывает определенные требования на структуру управляющих устройств, состав входных и выходных каналов передачи информации. Общими требованиями для всех типов приводов являются:

1. Номинальная мощность (ток) устройства управления должна быть больше или равен номинальной мощности (току) двигателя.
2. Напряжение питания должно соответствовать параметрам общего источника энергии.
3. Диапазон изменения выходного напряжения должен соответствовать возможным изменениям напряжения управления двигателя.
4. Должна быть предусмотрена возможность организации канала связи с задающим устройством, которое выдает задание на угол поворота нагрузки.
5. Обеспечена возможность изменять общий коэффициент передачи системы.
6. Наличие стандартных интерфейсов типа: USB, SPI, I²C, RS-485, Ethernet и др. для связи с различными внешними устройствами.
7. Наличие специальных входов для съема информации с датчика обратной связи и выхода для передачи сигнала управления через силовой драйвер на исполнительный двигатель системы.
8. Микроконтроллер устройства управления должен иметь достаточное количество входов аналогового ввода (АЦП или аналоговых компараторов) для подключения аварийных датчиков отключения.

Особых требований к габаритам, климатическому исполнению и охлаждению устройства управления в данной задаче не предъявляется. Допускается превышение номинальной мощности на 40%.

1.6 Выбор датчика обратной связи по положению

В рассматриваемой системе датчик угла поворота играет важную роль. Он измеряет угловое положение выходного вала системы или объекта управления, преобразует полученную информацию в сигнал нужной формы и передает его на устройство управления.

Датчики угла поворота могут быть различного принципа действия и конструктивного исполнения. Это могут быть потенциометрические преобразователи, емкостные или индуктивные датчики, энкодеры, сельсины и поворотные трансформаторы. Нужно отметить, что в последнее время в мехатронных системах массово применяются энкодеры, они почти полностью вытесняют все остальные типы датчиков. Это можно объяснить их высокой точностью, малыми габаритами, наличием для них в контроллерах устройств управления специальных входов, а также тем, что производители двигателей и сервоприводов стали их включать в комплект своей продукции.



Рисунок 5 – Датчики угла поворота: потенциометрические Buster 8820; датчик угла Холла; энкодеры инкрементальные и абсолютные Omron

Для решения многих простых задач всё ещё применяют потенциометрические датчики, которые имеют меньшую точность, но обладают высокой надежностью, малыми габаритами и простотой обработки сигнала.

При выборе датчика [14] следует в первую очередь обращать внимание на следующие характеристики:

- Диапазон измерения угла
- Погрешность измерения угла (класс точности)
- Реверсивность измерений
- Конструктивная совместимость с выходной осью системы
- Питающее напряжение

Такие характеристики, как рабочий температурный диапазон, климатическое исполнение, отклонение статической характеристики от линейности и другие, в данной задаче во внимание не принимаются. Диапазон измерения угла должен охватывать весь рабочий диапазон углов

поворота системы до заданного максимального значения. Существенное превышение диапазона измерений (больше чем на 20-40%) обычно влечет за собой увеличение погрешности измерений и увеличение массогабаритных характеристик датчика.

Погрешность работы датчика должна быть не менее чем в три раза меньше допустимой ошибки всей системы. Неоправданное применение датчиков более высокой точности измерения приводит к удорожанию всей системы в целом.

Реверсивность измерений предполагает, что датчик может работать в условиях изменения регулируемой величины (угла поворота) относительно нуля, как в положительном направлении, так и в отрицательном, изменяя при этом знак или фазу выходного сигнала. Для датчиков обратной связи это необходимо для того, чтобы отрицательная обратная связь не поменяла свой знак.

Конструктивная совместимость с ОУ иногда является определяющим фактором. Желательно, чтобы датчик мог быть установлен на объект управления или выходную ось системы без дополнительных кинематических связей, оказывая минимальное воздействие на сам объект. Бесконтактные датчики, не оказывая никакого влияния на ОУ, всё равно требуют конструктивных установочных элементов для оптимального их расположения относительно объекта измерения.

Питающее напряжение датчика должно быть того же уровня, что и у других элементов системы. Число источников или конвертеров питания увеличивать нежелательно.

После выбора всех элементов системы можно переходить к синтезу регулятора.

2 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА, МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Следующим этапом проектирования электромеханической системы является синтез регулятора, обеспечивающий в замкнутой системе требуемые показатели качества в соответствии с техническим заданием. Как правило, выделяют два основных подхода к синтезу регуляторов. Первый подход базируется на представлении модели системы в частотной области и использовании метода амплитудно-частотных характеристик. В основе второго подхода лежит представление модели во временной области и использование принципа синтеза регулятора с заданием эталонной модели поведения, обладающей желаемыми показателями качества процессов. В рамках выполнения данной исследовательской работы предлагается использовать второй подход.

В представленных ниже параграфах данного раздела приводятся следующие методы синтеза регуляторов: метод последовательного компенсатора, прямое модальное управление, модальное управление на основе обратных связей, модальное управление для следящих систем. В отдельный параграф вынесены основные принципы построения эталонной модели.

2.1 Разработка структурной схемы системы

Структурная схема системы автоматического управления несет информацию о математическом описании всех её элементов. Чем подробнее и точнее описание отдельных устройств, тем более качественным и достоверным будет результат моделирования всей системы в различных режимах работы.

Для решения учебных задач часто вводят некоторые допущения и ограничения, которые оправданы при изучении частных вопросов и характеристик электромеханических систем. В данном пособии рассматривается линейное непрерывное представление системы и входящих в неё устройств. При этом не рассматриваются какие-либо нелинейности отдельных элементов (люфты механических преобразовательных устройств, зоны ограничения электронных усилителей и др.), все цифровые устройства описываются как непрерывные, чаще всего как безынерционные звенья со своими коэффициентами передачи.

Согласно функциональной схеме системы углового позиционирования (рисунок 2) можно составить структурную схему системы управления, показанную на рисунке 6.

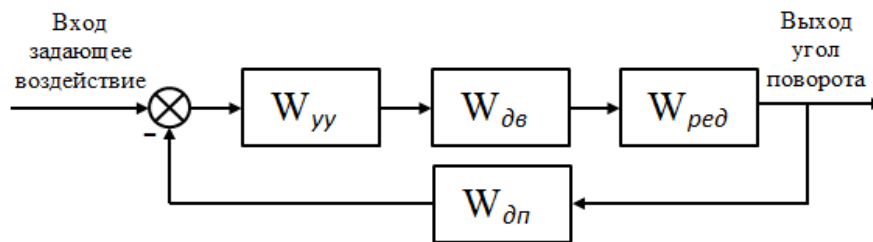


Рисунок 6 – Структурная схема системы управления общего вида

На рисунке 6: W_{yy} – передаточная функция устройства управления; $W_{дв}$ – передаточная функция двигателя; $W_{ред}$ – передаточная функция редуктора; $W_{дп}$ – передаточная функция датчика положения.

Далее для заданного типа двигателя необходимо составить структурную схему системы, с учетом данных каталогов определить все параметры передаточных функций, преобразовать структуру к виду с отрицательной единичной обратной связью, выполнить синтез регулятора и разработать схему моделирования системы в среде Matlab Simulink.

2.2 Математическая модель исполнительного устройства

Исполнительный двигатель является основным устройством, определяющим динамику всей системы. При разработке структурной схемы ограничение мощности источников питания во внимание принимать не будем.

Для математического описания двигателя постоянного тока с независимым (параллельным) возбуждением воспользуемся уже ставшей классической формулой вида

$$W(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{k_{дв}}{T_m T_\gamma s^2 + T_m s + 1},$$

где:

$$\frac{R_\gamma J}{k_{эм}^2} = T_m \text{ – электромеханическая постоянная времени двигателя, с;}$$

$$\frac{L_\gamma}{R_\gamma} = T_\gamma \text{ – электромагнитная постоянная времени якоря двигателя, с;}$$

$$k_{дв} = I/k_{эм} \text{ – коэффициент передачи двигателя, 1/с*В.}$$

Входной величиной двигателя является напряжение управление, а на выходе рассматривается угловая скорость вращения, момент сопротивления нагрузки в этом случае величина постоянная и пренебрежимо малая. В зависимости от соотношения величин постоянных времени двигателя вид его передаточной функции можно изменять. Так, если $4T_\gamma > T_m$, что встречается достаточно редко, двигатель описывается

колебательным звеном. Чаще всего $4T_{\text{я}} < T_{\text{м}}$, и передаточную функцию можно представить в виде

$$W(s) = \frac{k_{\text{дв}}}{(T_{\text{м}}s + 1)(T_{\text{я}}s + 1)}.$$

При анализе систем автоматического управления с двигателем постоянного тока часто пренебрегают электромагнитной постоянной, ввиду ее малости ($T_{\text{я}} \rightarrow 0$) по сравнению с другими постоянными времени системы, и используют передаточную функцию вида

$$W(s) = \frac{k_{\text{дв}}}{(T_{\text{м}}s + 1)}.$$

Кроме того, если выходной величиной является не угловая скорость, а угол поворота вала двигателя, которые связаны соотношением $\omega(p) = p\theta(p)$, где $\theta(p)$ – изображение угла поворота вала двигателя, передаточная функция принимает вид

$$W(s) = \frac{k_{\text{дв}}}{s(T_{\text{м}}s + 1)}.$$

При решении многих технических задач оказывается возможным пренебречь временем разгона (переходным процессом) по сравнению с полным временем вращения вала, и тогда двигатель приближенно можно описать идеальным интегрирующим звеном

$$W(s) = \frac{k_{\text{дв}}}{s}.$$

Определение параметров передаточных функций иногда бывает затруднено отсутствием в каталогах необходимых данных. В этом случае для практических расчетов могут быть полезны следующие формулы:

- индуктивность обмотки якоря

$$L_{\text{я}} \approx \frac{30}{\pi} \frac{U_{\text{ном}} c_x}{p n_{\text{ном}} I_{\text{яном}}}, [\text{Гн}]$$

где $U_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение на якоре, [В];

$n_{\text{ном}}$ – номинальная частота вращения ротора, [обороты/мин] (задается в паспорте);

$I_{\text{яном}}$ – номинальный ток якоря, [А];

c_x – эмпирический коэффициент (0.4 – для машин без компенсационной обмотки, 0.1 – с компенсационной обмоткой);

– механическая постоянная времени

$$T_{\text{м}} = \frac{J R_{\text{я}} \omega_{\text{ном}}^2}{(U_{\text{ном}} - I_{\text{яном}} R_{\text{я}})^2}$$

или

$$T_M = \frac{J R_{\text{я}} I_{\text{яном}}^2 \omega_{\text{ном}}^2}{P_{\text{ном}}^2},$$

где J – приведенный к якорю момент инерции механического узла, [н*м²]; $R_{\text{я}}$ – сопротивление якорной цепи, [Ом]; $U_{\text{ном}}$ – номинальное рабочее напряжение двигателя; $I_{\text{яном}}$ – номинальный рабочий ток двигателя, [А]; $P_{\text{ном}}$ – номинальная мощность двигателя, [Вт]; $\omega_{\text{ном}}$ – номинальная угловая скорость вращения ротора, [1/с].

Необходимо также учитывать, что при введении добавочного сопротивления в цепь якоря постоянные времени изменяются, причем $T_{\text{я}}$ уменьшается, а T_M растет. Если двигатель рассматривается совместно с механической нагрузкой и редуктором на его валу, то при расчетах T_M нужно учитывать момент инерции редуктора и нагрузки приведенный к валу двигателя.

Если необходимо учитывать момент нагрузки, то представляется возможным для учета динамики двигателя использовать структуру, показанную на рисунке 7.

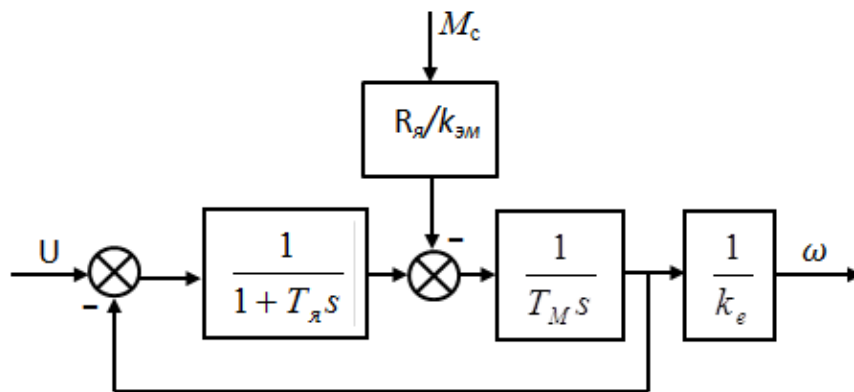


Рисунок 7 - Структурная схема двигателя постоянного тока независимого возбуждения

Коэффициенты $k_{\text{эм}}$ и k_e зависят от конструктивных постоянных машины c_m и c_e соответственно и величины рабочего потока:

$$k_{\text{эм}} = c_m \Phi; \quad k_e = c_e \Phi,$$

где $c_e = c_m = pN/2\pi a$ – конструктивные постоянные электрической машины (p – число пар полюсов, N – число активных проводников обмотки якоря, a – число параллельных ветвей).

Для описания динамики асинхронных двигателей будем рассматривать только механические процессы, без учета электромагнитных явлений. В результате их анализа после линеаризации механических характеристик обычно получают передаточные функции вида

$$W(s) = \frac{\omega(s)}{U_y(s)} = \frac{k_{\text{дв}}}{T_M s + 1}$$

где $k_{\text{дв}} = k_u/k_\omega$, $T_M = J/k_\omega$, а

$$k_u = M_n / U_{yn},$$

$$k_\omega = (M_{кз} - M_n) / \omega_n,$$

где $M_n, M_{кз}, \omega_n, U_{yn}$ - соответственно номинальный момент, момент короткого замыкания, номинальная угловая скорость вращения при номинальном напряжении управления. А для случая, когда на выходе двигателя рассматривается угол поворота, передаточная функция принимает вид

$$W(s) = \frac{\alpha(s)}{U_y(s)} = \frac{k_{\partial\partial}}{s(T_m s + 1)}.$$

Электромеханическая постоянная времени T_m характеризует время разгона двигателя до скорости холостого хода при отсутствии статической нагрузки и постоянном моменте двигателя, равном пусковому. Фактическое время разгона будет больше, так как в процессе нарастания скорости момент двигателя падает в соответствии с механической характеристикой.

В случае необходимости учета электромагнитных процессов и момента сопротивления нагрузки можно воспользоваться структурной схемой, показанной на рисунке 8.

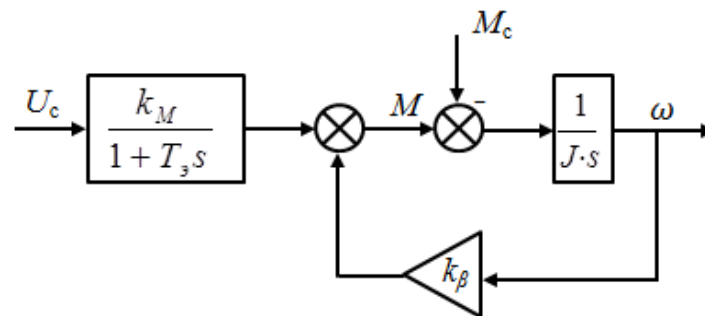


Рисунок 8 – Структурная схема асинхронного двигателя с учетом электромагнитной инерции и момента сопротивления нагрузки

На структурной схеме (рисунок 8) электромагнитная постоянная времени может быть определена из выражения

$$T_3 = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2},$$

где L_1 – индуктивность обмотки статора; L_2 – индуктивность обмотки ротора, приведенная к обмотке статора; R_1 – активное сопротивление обмотки статора; R_2 – активное сопротивление обмотки ротора, приведенное к обмотке статора.

Максимальное значение коэффициента чувствительности по моменту определяется из уравнения

$$k_M = 2M_{кн} U_{от},$$

где $M_{кн}$ – критический момент асинхронного двигателя при номинальном напряжении обмоток статора;

$U_{от} = \frac{U_1}{U_{1н}}$ – относительное напряжение статора,

где U_1 – фазное напряжение обмоток статора; $U_{1н}$ – номинальное напряжение статора;

$k_\beta = \frac{\Delta M}{\Delta \omega}$ – жесткость механической характеристики асинхронного двигателя.

После расчета всех параметров математической модели двигателя можно перейти непосредственно к синтезу регулятора.

2.3 Метод последовательного компенсатора

В основе метода последовательного компенсатора лежит идея последовательной компенсации нежелательных полюсов передаточной функции (матрицы) исходного объекта управления путем сокращения с нулями передаточной функции (матрицы) последовательного компенсатора. Последовательный компенсатор, в свою очередь, формируется таким образом, чтобы в результате последовательного соединения компенсатора с передаточной функцией $W_{пк}(s)$ с объектом управления с передаточной функцией $W_{оу}(s)$ при замыкании единичной отрицательной обратной связи (рисунок 9) результирующая передаточная функция (матрица) замкнутой системы имела характеристический полином, совпадающий с желаемым характеристическим полиномом.

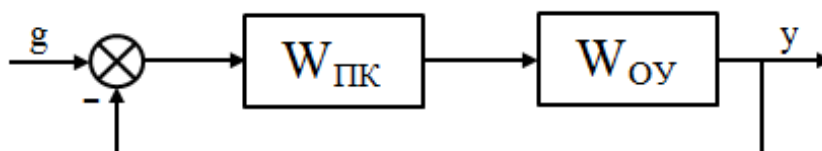


Рисунок 9 – Функциональная схема объекта управления с регулятором типа «последовательный компенсатор»

Рассмотрим линейный непрерывный объект управления, описание которого задается моделью «вход-выход» в виде передаточной функции (матрицы) в форме

$$W_{оу}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Введем также в рассмотрение желаемую передаточную функцию (матрицу) $\Phi_{ж}(s)$ замкнутой единичной отрицательной обратной связью по выходу системы, описание которой задается в следующем виде:

$$\Phi_{ж}(s) = C(sI - F)^{-1}G.$$

Стоит отметить, что динамика замкнутой системы с желаемой передаточной функцией (матрицей) соответствует динамике эталонной модели, обладающей желаемыми показателями качества. Желаемая

передаточная функция (матрица) $W_{\text{ж}}(s)$ в прямой цепи замкнутого контура определяется выражением вида

$$W_{\text{ж}}(s) = \Phi_{\text{ж}}(s)(I - \Phi_{\text{ж}}(s))^{-1}.$$

С другой стороны, желаемая передаточная функция (матрица) представляет собой последовательное соединение последовательного компенсатора и объекта управления и, следовательно, может быть представлена в форме

$$W_{\text{ж}}(s) = W_{\text{оу}}(s) \cdot W_{\text{пк}}(s).$$

Из последнего соотношения получаем передаточную функцию (матрицу) последовательного компенсатора в виде

$$W_{\text{пк}}(s) = W_{\text{оу}}^{-1}(s) \cdot W_{\text{ж}}(s) = W_{\text{оу}}^{-1}(s) \cdot \Phi_{\text{ж}}(s) \cdot (I - \Phi_{\text{ж}}(s))^{-1}.$$

Примечание. В результате сокращения нулей и полюсов передаточной функции (матрицы) исходного объекта управления свойство полной наблюдаемости и/или полной управляемости синтезируемой системы может быть нарушено, система становится частично наблюдаемой и/или частично управляемой. При этом полученная передаточная функция (матрица) системы описывает поведение только полностью управляемой и полностью наблюдаемой части спроектированной системы. Соответственно, при ненулевом начальном состоянии в ее поведении по выходу могут присутствовать компоненты свободного движения неуправляемой части системы. Таким образом, реализация модального управления методом последовательного компенсатора целесообразна в условиях нулевых начальных условий.

2.4 Модальное управление

Под модальным управлением принято понимать способ обеспечения в замкнутой системе с помощью управления заранее заданных корней (мод), назначенных на основе требуемых показателей качества процессов. В основе процедуры синтеза модального управления лежат условия векторного и матричного подобия процессов в проектируемой системе процессам в некоторой эталонной (желаемой) системе, обладающей желаемыми показателями качества. Эталонную систему при этом называют модальной моделью. Решение задачи модального управления обычно осуществляется на базе неоднородного матричного уравнения типа Сильвестра.

2.4.1 Прямое модальное управление

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект управления, имеющий модельное описание в форме «вход-состояние-выход», следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t)|_{t=0} = x(0), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

где

x - n -мерный вектор состояния, $x \in R^n$;

u - r -мерный вектор управляющих воздействий, $u \in R^r$;

$x(0)$ - n -мерный вектор начальных условий;

y - m -мерный вектор выходных переменных;

A - $n \times n$ -матрица состояния, определяющая динамические свойства объекта управления, $A \in R^{n \times n}$;

B - $n \times r$ -матрица входов (управляющих воздействий), $B \in R^{n \times r}$;

C - $m \times n$ -матрица выходов, $C \in R^{m \times n}$.

Будем считать, что объект управления вида (2.1) обладает свойством полной управляемости и полной наблюдаемости, что означает, что ранг матрицы управляемости $U = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ и ранг матрицы наблюдаемости $Q = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$ равны порядку системы, т.е. $\text{rank}(U) = n$, $\text{rank}(Q) = n$.

Модальную (эталонную) модель системы, обеспечивающей желаемое качество процессов, будем формировать в пространстве состояний в виде автономной динамической системы, имеющей представление

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Gamma z(t), & z(t)|_{t=0} = z(0) \\ \eta(t) = Hz(t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

где z - n -мерный вектор состояния эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора состояния объекта управления, $z \in R^n$;

η - r -мерный вектор выходных переменных эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора управляющих воздействий, $\eta \in R^r$;

$z(0)$ - n -мерный вектор начальных условий эталонной модели;

Γ - $n \times n$ -матрица состояния эталонной модели, задающая желаемое качество процессов в переходном и установившемся режимах, $\Gamma \in R^{n \times n}$.

Желаемое качество процессов системы автоматического управления определяется расположением корней характеристического полинома на комплексной плоскости корней. Матрица Γ определяет динамику эталонной модели таким образом, что её характеристический полином $\det(\lambda I - \Gamma) = 0$ совпадает с желаемым характеристическим полиномом $\det[\Gamma - sI] = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^* s + \alpha_0^* = 0$, а её собственные числа совпадают с желаемыми корнями $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ замкнутой системы. При

формировании матрицы Γ необходимо учитывать тот факт, что спектры собственных значений матрицы состояния эталонной модели Γ и матрицы состояния объекта управления A не должны совпадать;

H - $r \times n$ -матрица выхода эталонной модели, $H \in R^{r \times n}$, которая выбирается из условия полной наблюдаемости пары матриц (Γ, H) .

Под *прямым модальным управлением* будем понимать управление динамическим объектом вида (2.1), формируемое в виде прямой связи с матрицей H по вектору состояния модальной модели (2.2) и имеющем представление

$$u(t) = -Hz(t). \quad (2.3)$$

Найдем связь между процессами $x(t)$, происходящими в замкнутой системе, и процессами $z(t)$ эталонной модели. Для этого потребуем, чтобы вектор состояния $x(t)$ замкнутой системы с точностью до линейного неособого преобразования повторял бы движение $z(t)$ эталонной модели, то есть, чтобы для любого момента времени выполнялось соотношение

$$x(t) = Mz(t), \forall t \geq 0, \quad (2.4)$$

где M - $n \times n$ - невырожденная матрица, определяющая преобразование вектора эталонной модели, такая что существует M^{-1} .

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение динамическую систему с расширенным вектором состояния $\tilde{x} = [x^T, z^T]^T$, которая при объединении (2.1) – (2.3) позволяет записать следующее векторно-матричное уравнение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) - BHx(t) \\ 0x(t) + \Gamma z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BH \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}\tilde{x}(t), \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Решение системы (2.5) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t} \tilde{x}(0),$$

$$x(t) = Ix + 0z = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \tilde{C}_x \tilde{x}(t), \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & -BH \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \tilde{C}_x = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Вычисление матричной экспоненты $e^{\tilde{A}t}$ базируется на использовании матричного уравнения типа уравнения Сильвестра и свойств матричной функции от матрицы. Подставим условие преобразования векторов (2.4) в уравнение движения замкнутой системы (2.1) – (2.3):

$$M\dot{z}(t) = AMz(t) - BHx(t) = (AM - BH)z(t).$$

Тогда

$$\dot{z}(t) = M^{-1}(AM - BH)z(t)$$

Для того, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы и его корни совпадали бы с характеристическим уравнением и корнями матрицы состояний Γ эталонной модели (2.2) требуется выполнение матричного равенства:

$$M^{-1}(AM - BH) = \Gamma,$$

откуда,

$$M\Gamma - AM = -BH. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) есть матричное уравнение типа уравнения Сильвестра.

Сформулируем условия разрешимости полученного матричного уравнения. Матричное уравнение Сильвестра (2.8) имеет единственное решение относительно невырожденной матрицы M при выполнении следующих условий:

1) Пара матриц (A, B) должна быть полностью управляема, а пара матриц (H, Γ) – полностью наблюдаема.

2) Матрица состояния эталонной модели Γ и матрица состояния исходного объекта управления A не должны иметь одинаковых собственных чисел, т.е. корни характеристического уравнения объекта управления (разомкнутой системы) и желаемые корни характеристического уравнения замкнутой системы не должны совпадать.

На основании матричного уравнения типа уравнения Сильвестра (2.8) матрицу \tilde{A} вида (2.7) можно записать в следующей форме:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & M\Gamma - AM \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

В свою очередь, степенная функция матрицы \tilde{A} будет иметь вид

$$\tilde{A}^p = \begin{bmatrix} A^p & M\Gamma^p - A^p M \\ 0 & \Gamma^p \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Таким образом, используя свойства матричных функций от матрицы, можно сформировать представление для матричной экспоненты $e^{\tilde{A}t}$, построенной на степенных матричных функциях \tilde{A}^p от матрицы вида (2.9), в форме:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{At} & Me^{\Gamma t} - e^{At}M \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Следовательно, выражение (2.6) приобретает вид

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At} & Me^{\Gamma t} - e^{At}M \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Покомпонентное представление процессов $x(t)$ и $z(t)$ можно записать следующим образом

$$x(t) = e^{At}x(0) + (Me^{\Gamma t} - e^{At}M)z(0) = e^{At}(x(0) - Mz(0)) + Me^{\Gamma t}z(0), \quad (2.13)$$

$$z(t) = e^{\Gamma t}z(0). \quad (2.14)$$

В свою очередь, в силу (2.4) соотношение (2.13) приобретает вид

$$x(t) = e^{At}(\underbrace{x(0) - MM^{-1}x(0)}_0) + Me^{\Gamma t}z(0) = Me^{\Gamma t}z(0) = Me^{\Gamma t}M^{-1}x(0) \quad (2.15)$$

Очевидно, что при прямом модальном управлении динамические показатели качества системы (2.1)–(2.3) полностью определяются структурой матрицы состояния Γ модальной модели (2.2).

Следует отметить, что управление динамическим объектом вида (2.1) с помощью прямой связи по состоянию модальной модели (2.3) не обладает свойством робастности к неточности знания параметров матричных компонентов и погрешностям вычислений.

2.4.2 Модальное управление на основе обратной связи

Рассмотрим процедуру синтеза управления $u(t)$ линейным непрерывным динамическим объектом управления вида (2.1) по вектору состояния $x(t)$. Другими словами, будем формировать закон управления не с помощью отрицательной прямой связи по вектору состояния $z(t)$ эталонной модели, а с помощью отрицательной обратной по вектору состояния $x(t)$ объекта управления. Формирование управляющих воздействий будет осуществляться в виде статического регулятора, как линейная функция состояния в виде

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.16)$$

где K - $r \times n$ -матрица линейных стационарных обратных связей. Функциональная схема статического регулятора для объекта управления (ОУ) с одним входом и одним выходом представлена на рисунке 10.

Замкнутая система, полученная в результате объединения объекта управления (2.1) с управляющим воздействием вида (2.16), принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t), x(t)|_{t=0} = x(0), \\ y = Cx \end{cases}, \quad (2.17)$$

где

$$F = A - BK \quad (2.18)$$

представляет собой матрицу состояния замкнутой системы управления размерности $n \times n$. При этом матрица линейных стационарных связей K должна быть сформирована таким образом, чтобы выполнялось векторное условие подобия $x(t) = Mz(t), \forall t \geq 0$ и чтобы алгебраические спектры

собственных чисел матрицы состояния F замкнутой системы (2.17) и матрицы состояния Γ модальной модели (2.2) совпадали.

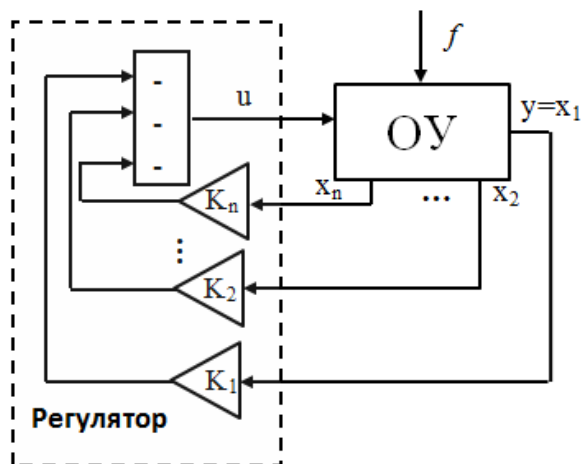


Рисунок 10 - Функциональная схема статического регулятора

В силу векторного условия подобия выражение (2.3) может быть записано в форме

$$u(t) = -Hz(t) = -HM^{-1}x(t). \quad (2.19)$$

С другой стороны, выражение (2.16), также задающее правило формирования управляющих воздействий, позволяет записать равенство $HM^{-1} = K$. Откуда следует

$$H = KM. \quad (2.20)$$

После подстановки матрицы H в форме (2.20) в выражение (2.8), матричное уравнение типа Сильвестра приобретает следующий вид:

$$M\Gamma - AM = -BKM. \quad (2.21)$$

С учетом введенных ранее для матрицы состояния замкнутой системы F обозначений вида (2.18) матричное уравнение типа уравнения Сильвестра приводит к матричному условию подобия матрицы состояния замкнутой системы F и матрицы состояния эталонной модели Γ

$$M\Gamma = FM \quad (2.22)$$

Если воспользоваться свойством матричной функции от матрицы сохранять матричное подобие, то для матричной экспоненты можно записать следующее соотношение:

$$Me^{\Gamma t} = e^{Ft}M. \quad (2.23)$$

Умножение соотношения (2.23) на вектор состояния эталонной модели $z(0)$ справа позволяет перейти к следующему векторно-матричному представлению:

$$Me^{\Gamma t}z(0) = e^{Ft}Mz(0). \quad (2.24)$$

В силу представления (2.14) левая часть соотношения (2.24) может быть записана в виде

$$Me^{\Gamma t}z(0) = Mz(t), \quad (2.25)$$

а в силу условия векторного подобия процессов $x(t)$ и $z(t)$ (2.4) правая часть соотношения (2.24) может быть представлена в форме

$$e^{Ft}Mz(0) = e^{Ft}x(0) = x(t). \quad (2.26)$$

Таким образом, при выполнении условия согласования начальных состояний в форме $z(0) = M^{-1}x(0)$ модальное управление вида (2.16), сформированное в виде отрицательной обратной связи по вектору состояния исходного объекта управления, обеспечивает в замкнутой системе векторное подобие ее текущего состояния состоянию эталонной модели в форме $x(t) = Mz(t), \forall t \geq 0$ и, как следствие, гарантирует в замкнутой системе желаемые динамические показатели качества.

Зафиксируем последовательность решения задачи синтеза модального управления:

1. Проверка пары (A, B) на полную управляемость.
2. По требуемым показателям качества назначение желаемых корней или коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы.
3. Формирование матриц описания эталонной (модальной) модели. Матрица Γ формируется по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома либо в одном из канонических видов, либо на базе стандартных полиномов. При этом матрица состояния Γ эталонной модели и матрица состояния A исходного объекта управления не должны иметь одинаковых собственных значений. Матрица выхода H эталонной модели назначается из условия полной наблюдаемости пары матриц (Γ, H) .
4. Решение матричного уравнения типа уравнения Сильвестра $M\Gamma - AM = -BH$ относительно матрицы преобразования подобия M , такой что существует M^{-1} , с последующим вычислением искомой матрицы линейных стационарных обратных связей K по соотношению $K = HM^{-1}$.

Пример. Объект управления имеет структурное представление, представленное на рисунке 11. Требуется построить замкнутую систему, степень устойчивости которой $\eta = 10$.

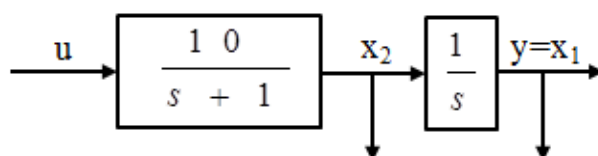


Рисунок 11 – Структурная схема объекта управления

Решение. На основе структурного представления (рисунок 11) составим

модельное описание объекта управления второго порядка ($n = 2$) в форме «ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД»

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 10u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

откуда найдем матрицы состояния $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, входа $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ и выхода

$C = [1 \ 0]$ объекта управления. Закон управления, который бы обеспечивал в замкнутой системе заданные требования к степени ее устойчивости, будем искать в виде статического регулятора (2.16), имеющего представление $u(t) = -Kx(t)$, где K - 1×2 -матрица линейных стационарных обратных связей по состоянию объекта управления.

В соответствии с процедурой решения задачи модального управления проверим пару матриц (A, B) объекта управления на полную управляемость. Для этого сформируем матрицу управляемости и найдем ее ранг

$$\text{rank}(U_{(A,B)}) = \text{rank}([B \ AB]) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}\right) = 2 = n.$$

Следовательно, пара матриц (A, B) является полностью управляемой.

Назначим желаемые корни, исходя из требований к степени устойчивости замкнутой системы, так что $s_1^* = s_2^* = -10$. По желаемым корням сформируем матрицу состояния эталонной модели в канонической диагональной форме

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что желаемые корни $s_1^* = s_2^* = -10$ замкнутой системы и корни исходного объекта управления $s_1 = 0, s_2 = -1$ не совпадают.

Матрицу выхода H эталонной модели выберем из условия полной наблюдаемости пары матриц (Γ, H) , так что $H = [1 \ 0]$. Напомним, что система является полностью наблюдаемой, если ранг матрицы наблюдаемости равен порядку системы. В данном случае,

$$\text{rank}(Q_{(\Gamma,H)}) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} H \\ H\Gamma \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 = n.$$

Следовательно, пара матриц (Γ, H) является полностью наблюдаемой.

На базе модельного описания объекта управления и эталонной модели запишем уравнение типа уравнения Сильвестра (2.8) в виде

$$M\Gamma - AM = -BH,$$

где $M - 2 \times 2$ – невырожденная матрица, определяющая преобразование вектора эталонной модели, такая что существует M^{-1} . Отметим, что все условия разрешимости матричного уравнения типа уравнения Сильвестра выполняются, а именно: пара матриц (A, B) является полностью управляемой; пара матриц (Γ, H) является полностью наблюдаемой; матрица состояния A исходного объекта управления и матрица состояния Γ эталонной модели не имеют одинаковых собственных значений.

Решим матричное уравнение типа уравнения Сильвестра относительно матрицы M . В результате получим

$$M = \begin{bmatrix} -1/9 & -19/810 \\ 10/9 & 10/81 \end{bmatrix}.$$

В соответствие с выражением (2.20) найдем матрицу линейных стационарных обратных связей

$$K = HM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 1.9 \\ -90 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1.9 \end{bmatrix}.$$

Проверочный расчет можно выполнить путем подстановки найденной матрицы линейных стационарных обратных связей K в матрицу замкнутой системы $F = A - BK$ вида (2.18). В результате вычислений получим

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического полинома матрицы состояния F равны $s_{1,2} = -10$, что соответствует желаемым корням эталонной системы, то есть $s_{1,2} = s_{1,2}^* = -10$ и удовлетворяет требованию к степени устойчивости замкнутой системы $\eta = 10$.

Структурная схема замкнутой системы с найденным законом управления в форме $u(t) = -10x_1(t) - 1.9x_2(t)$ представлена на рисунке 12.

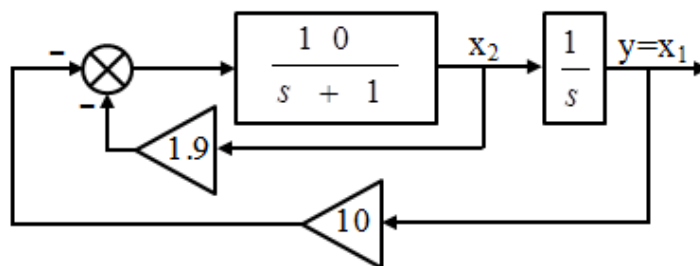


Рисунок 12 – Структурная схема замкнутой системы

Примечание 1. В системах управления вида (2.1) с одним входом и одним выходом при формировании управляющих воздействий по закону (2.16) матрица линейных стационарных обратных связей K может быть

найдена с помощью формулы Аккермана [22], имеющей следующее представление:

$$K = [0_{1 \times (n-1)} \ 1] \cdot U_{(A,B)}^{-1} \cdot D(A), \quad (2.27)$$

где $U_{(A,B)}^{-1} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ – матрица управляемости пары матриц (A, B) , $D^*(A) = A^n + a_{n-1}^*A^{n-1} + a_{n-2}^*A^{n-2} + \dots + a_1^*A + a_0^*I$ – матричный полином, построенный на основе характеристического полинома замкнутой системы

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^*\lambda^{n-1} + a_{n-2}^*\lambda^{n-2} + \dots + a_1^*\lambda + a_0^*, \quad (2.28)$$

обеспечивающего желаемые корни λ_i^* ее матрице состояния $F = A - BK$.

2.4.3. Синтез модального управления для следящих систем

Рассмотрим процедуру синтеза модального управления для следящих систем, ориентированных на воспроизведение на выходе системы $y(t)$ задающего воздействия $g(t)$ с некоторой допустимой ошибкой $e(t) = y(t) - g(t)$. Предполагается, что исходный объект управления с полной информацией. Функциональная схема следящей системы представлена на рисунке 13.

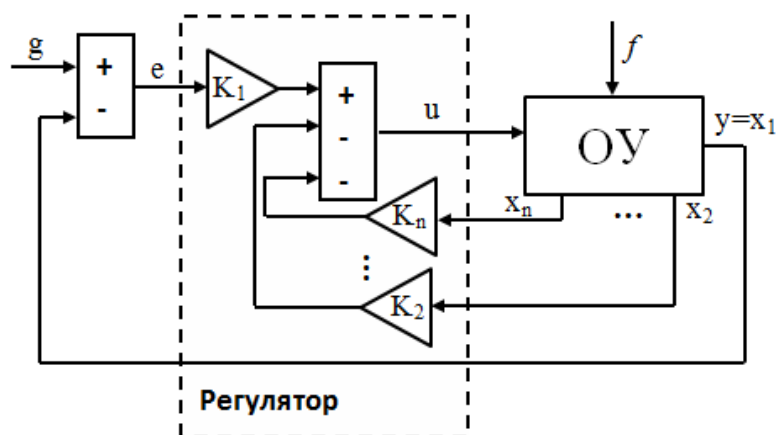


Рисунок 13 – Функциональная схема следящей системы

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект управления (2.1) в форме

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t)|_{t=0} = x(0) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

такой, что пара матриц (A, B) является управляемой, а пара матриц (A, C) – наблюдаемой.

Замечание 1. В случае, если имеет место объект управления с неполной информацией, необходимо проектировать динамический наблюдатель вектора $x(t)$ состояния объекта управления.

Эталонную модель системы, обеспечивающую желаемое качество процессов, будем формировать в соответствии с модельным описанием в пространстве состояний вида (2.2)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Gamma z(t), & z(t)|_{t=0} = z(0) \\ \eta(t) = Hz(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

Матрица состояния Γ эталонной модели задается в одном из канонических базисов таким образом, чтобы спектр ее собственных значений не совпадал со спектром собственных значений матрицы состояния A объекта управления. Матрица выхода H формируется, исходя из условия полной наблюдаемости пары матриц (Γ, H) .

Будем реализовывать в следящей системе управление, обеспечивающее единичную обратную связь по выходной (регулируемой) переменной, в виде

$$u(t) = k_1 e - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n = k_1 g - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n = K_g g(t) - Kx(t) \quad (2.31)$$

Подстановка управления вида (2.31) в модель объекта управления (2.1) позволяет получить векторно-матричное описание замкнутой системы в форме

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), & x(t)|_{t=0} = x(0), \\ y(t) = Cx(t), \\ e(t) = g(t) - y(t), \end{cases} \quad (2.32)$$

где F - $n \times n$ -матрица замкнутой системы, такая что

$$F = A - BK, \quad (2.33)$$

$G = BK_g$ - $n \times r$ - матрица входа.

Для нахождения матрицы линейных стационарных обратных связей K воспользуемся матричным уравнением типа Сильвестра (2.8)

$$M\Gamma - A M = -BH,$$

решение которого относительно матрицы M позволяет найти матрицу K в силу соотношения (2.20)

$$K = HM^{-1} \quad (2.34)$$

Получим передаточную функцию замкнутой системы. Для этого введем в рассмотрение оператор изображения Лапласа так, что $X(s) = \mathcal{L}(x)$, $G(s) = \mathcal{L}(g)$, $Y(s) = \mathcal{L}(y)$. Применяя преобразование Лапласа и считая начальные условия нулевыми, получим уравнения (2.32) в изображениях, связывающие преобразование Лапласа входа $G(s)$ и выхода $Y(s)$

$$\begin{cases} sX(s) = FX(s) + G \cdot G(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} X(s) = (sI - F)^{-1} G \cdot G(s) \\ Y(s) = C(sI - F)^{-1} G \cdot G(s) \end{cases}.$$

В результате передаточная матрица $\Phi(s)$ отношения «вход–выход» системы (2.32) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{Y(s)}{G(s)} = C(sI - F)^{-1} G = C(sI - F)^{-1} BK_g = \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^* s + \alpha_0^*} \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $m \leq n$.

Положим, что для следящей системы решена задача модального управления и матрица линейных стационарных обратных связей K выбрана таким образом, что обеспечены желаемые коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_{n-1}^*$ или желаемые корни $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$.

Так как передаточная функция замкнутой системы определяет связь выходной (регулируемой) переменной с задающим воздействием $Y(s) = \Phi(s)G(s)$, то свойства замкнутой системы зависят от вида передаточной функции, а именно, от полиномов числителя и знаменателя. Полином знаменателя определяет желаемые корни или полюса замкнутой системы, а полином числителя определяет нули передаточной функции. Если нули отсутствуют, то есть

$$\Phi(s) = \frac{b_0}{s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^* s + \alpha_0^*},$$

то качество процессов в системе целиком и полностью определяется полюсами и при этом, если закон управления найден с помощью модального управления, имеет место однозначная связь между корнями (коэффициентами характеристического полинома) и показателями качества процессов в замкнутой системе. Отношение коэффициентов $\frac{b_0}{\alpha_0^*}$ в

статических системах определяет коэффициент передачи замкнутой системы k (статический коэффициент), а для астатических систем это отношение равно 1 ($\frac{b_0}{\alpha_0^*} = 1$).

Рассмотрим взаимосвязь доминирующих (ближайших к мнимой оси) нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы. Если

доминирующие нули достаточно далеко удалены влево от доминирующих полюсов, то нули оказывают слабое влияние на качество переходных процессов. Приближение доминирующих нулей к доминирующим полюсам и к мнимой оси оказывает более сильное влияние на качество переходных процессов, заключающееся в увеличении значения перерегулирования и, как следствие, увеличении времени переходных процессов.

Вычисление матрицы K_g прямой связи по задающему воздействию $g(t)$ осуществляется, исходя из условия равенства выхода входу $y(t) = g(t)$ в неподвижном состоянии $g(t) = g_0 = \text{const}$. В данном случае $\Phi(0)$ принимает вид

$$\Phi(0) = C(sI - F)^{-1} \Big|_{s=0} BK_g = C(-F)^{-1} BK_g = I,$$

а матрица K_g может быть вычислена в силу следующего соотношения:

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}. \quad (2.36)$$

Таким образом, управляющее воздействие вида (2.31) принимает вид

$$\begin{aligned} u(t) &= K_g e(t) - K_x x(t) = K_g (g(t) - y(t)) - K_x x(t) = \\ &= K_g g(t) - K_g Cx(t) - K_x x(t) = \\ &= K_g g(t) - (K_g C + K_x)x(t) = K_g g(t) - Kx(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}, \quad K_x = K - K_g C = HM^{-1} + (CF^{-1}B)^{-1}C \quad (2.38)$$

Примечание 1. В случае, когда ранг матрицы входов B (управляющих воздействий) равен размерности вектора состояния, матрица B является обратимой, и, как следствие, матрица линейных стационарных обратных связей K может быть вычислена в силу соотношения

$$K = B^{-1}(A - F) = B^{-1}(A - \Gamma). \quad (2.39)$$

Примечание 2. В случае, когда ранг матрицы входов B (управляющих воздействий) меньше размерности вектора состояния, а разность матриц состояния объекта управления и эталонной модели принадлежит образу (пространству столбцов) матрицы входов B объекта управления, так что $(A - \Gamma) \in \text{Im}(B)$, матрица линейных стационарных обратных связей K в силу необратимости матрицы управляющих воздействий B может быть вычислена по формуле

$$K = (B^T B)^{-1} B^T (A - \Gamma). \quad (2.40)$$

Формулу (2.40) целесообразно использовать, когда матрицы состояния объекта управления A и эталонной модели Γ заданы в сопровождающих (фробениусовых) формах.

2.5 Построение регуляторов со встроенной моделью

Метод встроенной модели позволяет улучшать точностные показатели качества системы, а именно, позволяет получить нулевую ошибку в установившемся режиме для заданного класса внешних воздействий, модель которых задается автономным разностным уравнением.

Рассмотрим следящую систему с функциональной схемой, показанной на рисунке 14.

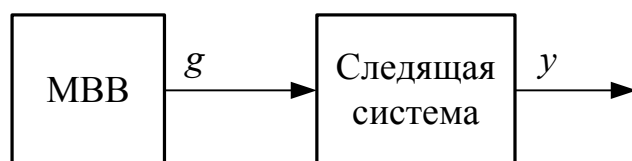


Рисунок 14 – Схема системы управления

На рисунке 14 обозначены: y – регулируемая переменная; g – задающее воздействие; MBV – модель внешних воздействий.

На рисунке 15 показана структурная схема следящей системы со встроенной моделью.

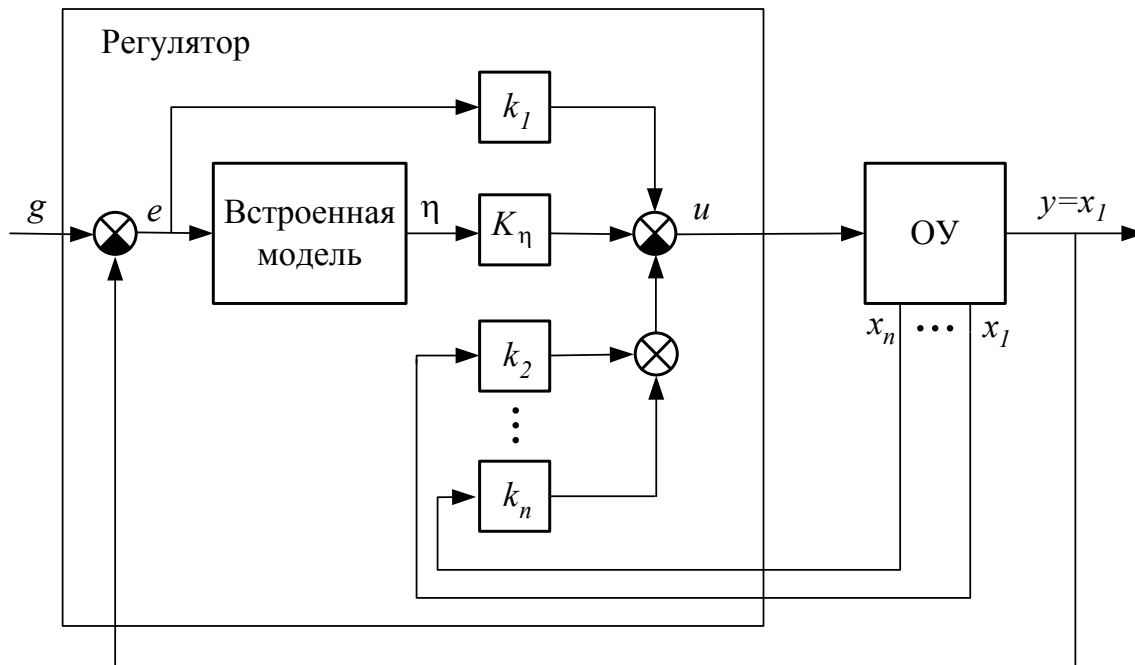


Рисунок 15 – Структурная схема регулятора следящей системы

На рисунке 15 обозначены: e – ошибка слежения $e = g - y$; η – q -мерный вектор состояний встроенной модели, K_η – матрица размера $1 \times q$ коэффициентов прямых связей по состоянию встроенной модели,

$K_\eta = [k_{1\eta} \quad k_{2\eta} \quad \dots \quad k_{q\eta}]$, k_1, \dots, k_n – коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояния.

Будем полагать, что в результате анализа задающих воздействий выделены воздействия, приводящие к наиболее существенным ошибкам в установившемся режиме, и класс этих воздействий генерируется линейным автономным разностным уравнением. Другими словами, будем считать, что получена модель внешних воздействий (MBV) в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma \xi \\ g = H_\xi \xi \end{cases}$$

где $\xi \in R^q$ – вектор состояния MBV; Γ – $q \times q$ -матрица, задание которой определяет виды внешних воздействий; H_ξ – $1 \times q$ – матрица выходов MBV.

Класс внешних воздействий, генерируемый моделью, определяется решением этого уравнения, т.е. определяется формулой

$$g(t) = H e^{\Gamma t} \xi(0).$$

Уравнение движения объекта управления задано в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

где $x \in R^n$; y – регулируемая величина, причем $y = x_1$; B – $n \times 1$; A – $n \times n$; C – $1 \times n$, $C = [1 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$.

Будем полагать, что измеряются ошибка $e = g - y$ и переменные вектора состояния x_2, x_3, \dots, x_n , а также что пара (A, B) полностью управляема, пара (C, A) полностью наблюдаема.

Синтезируем регулятор со встроенной моделью, описание которого задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \Gamma \eta + B_\eta e, \\ u &= k_1 e + k_\eta \eta - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n, \end{aligned}$$

где $\eta \in R^q$ – вектор состояния встроенной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния внешних воздействий; Γ – $q \times q$ – матрица, совпадающая с матрицей MBV; B_η – матрица входов встроенной модели (MBV).

Матрица входов MBV выбирается из условия полной управляемости пары Γ, B_η . Задача синтеза регулятора состоит в нахождении коэффициентов обратной связи k_1, k_2, \dots, k_n и матрицы коэффициентов K_η , обеспечивающих в замкнутой системе желаемое качество процессов.

Если воспользоваться методом модального управления, то искомые параметры регулятора должны обеспечивать в замкнутой системе

желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенного из требуемых показателей качества.

Замечание. Приведенная структура регулятора со встроенной моделью при условии устойчивости замкнутой системы обеспечивает нулевую установившуюся ошибку для заданного класса задающих воздействий.

Сведем задачу синтеза регулятора к задаче модального управления. Рассмотрим формирование задающих воздействий и подставим вместо ошибки разность $g - y$, получим

$$\begin{aligned} u &= k_1 g + k_\eta \eta - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n = k_1 g + k_\eta \eta - kx = \\ &= k_1 g - \begin{bmatrix} -K_\eta & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$ – матрица обратных связей, причем

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} -K_\eta & k \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение расширенную модель объекта управления, объединив уравнение движения объекта с уравнением встроенной модели:

$$\begin{cases} \eta = \Gamma \eta(m) + B_\eta g(m) - B_\eta y(m) \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases},$$

и расширенный вектор состояния

$$\begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g.$$

Получаем уравнение

$$\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{B}_1 g,$$

матрицы которого равны

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения движения системы будут иметь вид

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{B}_1 g(m) \\ u = k_1 g - \bar{k}\bar{x} \end{cases}$$

или

$$\bar{x} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{k})\bar{x} + (\bar{B}_1 + k_1 \bar{B})g,$$

где $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{k}$ – матрица размера $(n+q) \times (n+q)$, определяющая

динамические свойства замкнутой системы; $\bar{B}_g = \bar{B}_1 - \bar{B}\bar{k}_1$ – матрица размера $(n + q) \times 1$ входов по задающему воздействию.

Если пара (\bar{A}, \bar{B}) полностью управляема, то выбором матрицы \bar{k} можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы. Отметим, что пара (\bar{A}, \bar{B}) будет полностью управляема при выполнении следующих условий:

- пара (A, B) объекта полностью управляема, а пара (C, A) полностью наблюдаема;

- пара (Γ, B_η) полностью управляема;

- матрицы A и Γ не должны иметь одинаковых собственных чисел.

Приведем последовательность синтеза регулятора со встроенной моделью для объекта управления с заданными матрицами модели A, B и C :

- 1) проверка пары (A, B) на полную управляемость, пары (C, A) на полную наблюдаемость;

- 2) по требуемым показателям качества процессов назначение желаемых корней замкнутой системы $s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n+q}^*$;

- 3) по желаемым корням назначение матриц дискретной эталонной модели – матрицы $\bar{\Gamma} - (n + q) \times (n + q)$ и матрицы выходов $\bar{H} - 1 \times (n + q)$ из условия полной наблюдаемости пары;

- 4) формирование матриц расширенного описания объекта

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix},$$

- 5) решение задачи модального управления: вычисление матрицы \bar{k} обратных связей на основе матричного уравнения Сильвестра:

$$\begin{aligned} \bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} &= -\bar{B}\bar{H} \\ \bar{k} &= \bar{H}\bar{M}^{-1}, \end{aligned}$$

где \bar{M} – матрица размера $(n + q) \times (n + q)$.

Полученная значения матрица линейных обратных связей \bar{k} и определяет искомое решение задачи синтеза регулятора с встроенной моделью.

Пример. Рассмотрим в качестве примера объект управления первого порядка, описание которого задается уравнением

$$\dot{y} = u.$$

Будем полагать, что в результате анализа задающих воздействий $g(t)$ выделен класс воздействий, приводящий к наиболее существенным ошибкам в установившемся режиме и описание этого класса воздействий определяется соотношением

$$g(t) = g_0 + g_1 t,$$

где g_0 – амплитуда постоянной составляющей, g_1 – скорость изменения задающего воздействия. Построим автономную модель внешних воздействий (МВВ), на выходе которой формируются в зависимости от выбора начальных условий подобные воздействия. Для этого введем переменные состояния МВВ. Обозначим в качестве первой переменной $\xi_1 = g$, а в качестве второй – скорость ее изменения $\xi_2 = \dot{\xi}_1 = \dot{g}$.

Тогда МВВ можно представить в форме

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \\ g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Если ввести обозначения

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то приходим к уравнению

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t) \\ g = H \xi(t) \end{cases}$$

Класс внешних воздействий, генерируемый моделью, определяется решением этого уравнения, т.е. определяется формулой

$$g(t) = H e^{\Gamma t} \xi(0),$$

где

$$e^{\Gamma t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а тогда

$$g(t) = H e^{\Gamma t} \xi(0) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \xi_1(0) + \xi_2(0) \cdot t$$

Из полученного выражения следует, что $\xi_1(0)$ определяет значение амплитуды постоянной составляющей $g(t)$, а начальное условие $\xi_2(0)$ определяет значение скорости изменения $\dot{g}(t)$, то есть

$$\xi_1(0) = g_0, \xi_2(0) = g_1.$$

Сформируем встроенную модель, описание которой задается уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e,$$

где $B_\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$ – вектор состояния встроенной модели, $e = g - y = g - x_1$ –

ошибка, матрица входов по ошибке встроенной модели. Матрица $B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

выбрана из условия полной управляемости встроенной модели.

Модель расширенного объекта, включающая модель объекта управления и встроенную модель, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} g,$$

матрицы и вектор состояния расширенного объекта равны

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Закон управления формируется как функция переменных вектора состояния в виде

$$u = k_3 g - k_3 x_1 + k_2 \eta_2 + k_1 \eta_1 = k_3 g - [-k_1 \quad -k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу прямых и обратных связей следующим образом

$$\bar{K} = [-k_1 \quad -k_2 \quad k_3].$$

В силу того, что матрица замкнутой системы равна

$$\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix},$$

то характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\det [sI - \bar{F}] = s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + k_3 = 0.$$

Для обеспечения желаемых динамических свойств замкнутой системы воспользуемся методом модального управления.

Требуется построить регулятор (используя подход встроенной модели), обеспечивающий в замкнутой системе требуемое быстрое действие, время переходного процесса $t_n \leq t_n^* = 0,63$ с.

Для системы третьего порядка выберем в качестве стандартного полинома бином Ньютона

$$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 = 0,$$

Нормированное время переходного процесса равно $\tau_n^* = 6,3$, а желаемое время переходного процесса составляет $t_n^* = 0,63$. Тогда

$\omega_0 = \frac{\tau_{\Pi}^*}{t_{\Pi}^*}, \omega_0 = \frac{4,8}{0,48} = 10$, при этом желаемое характеристическое уравнение

замкнутой системы имеет вид

$$s^3 + 30s^2 + 300s + 1000 = 0,$$

а желаемые корни $s_1^* = s_2^* = s_3^* = -10$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s у характеристического полинома замкнутой системы и желаемого характеристического полинома, получим искомые коэффициенты $k_1 = 1000, k_2 = 300, k_3 = 30$, и желаемую матрицу описания замкнутой системы в виде

$$\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1000 & -300 & -30 \end{bmatrix}.$$

2.6 Формы задания матриц эталонной модели

Рассмотрим различные формы задания матриц эталонной (модальной) модели для объекта управления с одним входом и одним выходом, модельное описание которого удовлетворяет виду (2.1). Приведем два основных подхода к формированию матриц эталонной модели: канонические формы задания матриц эталонной модели и назначение матриц эталонной модели на основе стандартных полиномов.

2.6.1 Канонические формы матриц эталонной модели

1. Каноническая управляемая форма задания матрицы эталонной модели

Если предположить, что желаемый характеристический полином замкнутой системы определяется коэффициентами $\alpha_i^*, i = 0, 1, \dots, k-1$, то есть

$$\det[F - sI] = s^n + \alpha_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^* s + \alpha_0^*,$$

где F – $n \times n$ -матрица состояния замкнутой системы, такая что $F = A - BK$, где A – $n \times n$ -матрица состояния, B – $n \times 1$ -матрица входов исходного объекта управления, а K – $1 \times r$ -матрица линейных стационарных отрицательных обратных связей, то матрица Γ эталонной модели вида (2.2) в канонической управляемой форме задается в виде:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0^* & -\alpha_1^* & -\alpha_2^* & \dots & -\alpha_{n-2}^* & -\alpha_{n-1}^* \end{bmatrix};$$

При этом матрица выходов эталонной модели H , выбранная из условия полной наблюдаемости пары (Γ, H) будет иметь вид:

$$H_{1 \times n} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0].$$

2. Овеществленная диагональная форма

Будем полагать, что все желаемые корни замкнутой системы вещественны и различны, так что $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$ – вещественные различные корни. Тогда каноническая диагональная форма матрицы эталонной модели Γ задается в следующей форме:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} s_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_n^* \end{bmatrix}$$

Матрица выходов эталонной модели H , выбранная из условия полной наблюдаемости пары (H, Γ) имеет вид:

$$H = [1, \ 1, \ 1, \ \dots, \ 1, \ 1]_{1 \times n}.$$

3. Желаемые корни замкнутой системы вещественны, но среди них имеют место кратные корни, такие что $s_i^*, s_2^*, \dots, s_n^*$ – вещественные одинаковые корни кратности n , то есть $s_1^* = s_2^* = \dots = s_n^*$.

В этом случае каноническая диагональная форма матрицы состояния Γ эталонной модели будет иметь представление

$$\Gamma = \begin{bmatrix} s_1^* & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_1^* & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_1^* \end{bmatrix}.$$

Матрица H в этом случае, выбранная из условия полной наблюдаемости пары (Γ, H) , будет иметь вид:

$$H = [1, \ 0, \ 0, \ \dots, \ 0, \ 0].$$

4. Среди желаемых корней замкнутой системы имеет место пара комплексно-сопряженных корней, а остальные корни вещественны и различны, то есть $s_{1,2}^* = \alpha \pm j\beta, \alpha < 0, \beta > 0, s_3^*, s_4^*, \dots, s_n^*$ – вещественны и различны.

В данном случае овеществленная каноническая диагональная форма матрицы состояния Γ эталонной модели будет иметь вид:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3^* & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_n^* \end{bmatrix},$$

а матрица выхода H эталонной модели задается следующим образом:

$$H = [1, \quad 0, \quad 1, \quad \cdots, \quad 1, \quad 1].$$

2.6.2 Стандартные полиномы

Рассмотрим задачу формирования матриц эталонной модели на основе стандартных полиномов. Наиболее часто используемыми для данных целей являются полином Баттерворта и бином Ньютона. Все стандартные полиномы, а именно их задание, зависят от одного параметра - $\omega_0 > 0$, определяющего желаемые коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы или его желаемые корни. Желаемые коэффициенты характеристического полинома системы определяются по заданным показателям качества системы, таким как величина перерегулирования σ , время переходного процесса $t_{\text{п}}$, статический коэффициент k , на основе стандартных переходных функций.

1. Биномиальный стандартный полином (полином Ньютона)

При биномиальном распределении Ньютона n комплексных чисел s_i задаются равными и вещественными значениями, так что $s_i = -\omega_0$. Биномиальный полином Ньютона n -го порядка задается в общем виде выражением

$$D(s) = (s + \omega_0)^n,$$

где n – порядок системы или объекта управления. Отличительной чертой бинома Ньютона является тот факт, что все корни матрицы состояния Γ эталонной модели задаются одинаковыми и равными $s_1^* = s_2^* = s_3^* = \cdots = s_n^* = -\omega_0$. Биномиальные полиномы для систем 1-6 порядка представлены в таблице 3.

Для стандартных полиномов связь с качеством переходных процессов устанавливается с помощью нормированных переходных функций (рисунок 16), полученных на основе передаточных функций замкнутой системы, у которых знаменатель совпадает со стандартным полиномом, а числитель – не имеет нулей и отношение коэффициентов $\frac{b_0}{a_0} = 1$ (то есть

имеет место астатическая система). Нормированные переходные функции формируются на основе желаемого полинома n -го порядка при значении параметра $\omega_0 = 1$.

Таблица 3 – Биномиальные полиномы для систем n -го порядка

n	Биномиальный полином Ньютона
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$
5	$s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5$
6	$s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6$

Для нормированных переходных функций $h(\tau, n)$, вид которых зависит от порядка системы, вводится нормированное время τ относительно параметра полинома ω_0 , связанное с истинным временем t соотношением:

$$t: \tau = \omega_0 t.$$

Пусть t_n – заданное время переходного процесса, тогда по нормированной переходной функции $h(\tau, n)$ определяется нормированное время переходных процессов τ_n , а из связи нормированного времени и истинного времени t_n определяется параметр полинома ω_0 , определяющий желаемые коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы

$$\omega_0 = \frac{\tau_n}{t_n}.$$

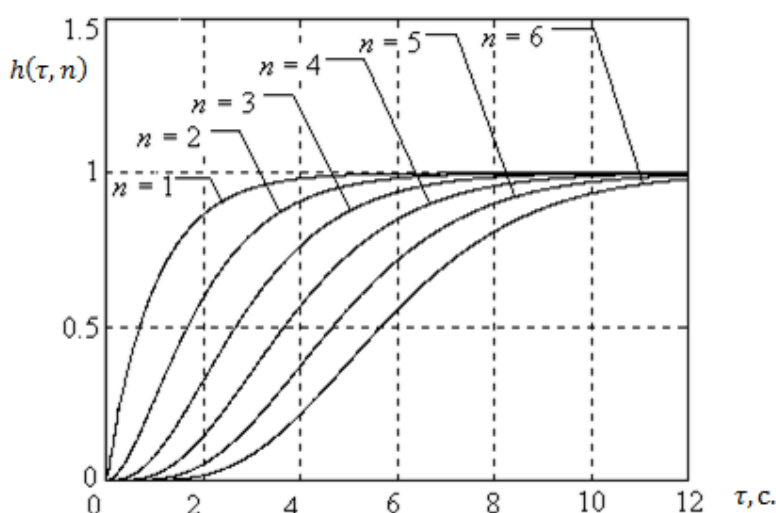


Рисунок 16 – Нормированные переходные характеристики системы с биномиальным характеристическим полиномом

Приведем пример матрицы состояния Γ и выхода H эталонной модели в канонической диагональной форме

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \omega_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_0 \end{bmatrix}$$

Матрица H в этом случае, выбранная из условия полной наблюдаемости пары (Γ, H) будет иметь вид:

$$H = [1, 0, 0, \cdots, 0, 0].$$

Очевидно, что для системы с биномиальным распределением корней ее характеристического полинома обеспечивается нулевое перерегулирование, то есть $\sigma = 0$.

2. Полином Баттерворта

Полиномом Баттерворта называется алгебраический полином n -го порядка, n корней которого совпадают с n комплексными числами, подчиняющимися распределению Баттерворта, и имеют отрицательную вещественную часть. При этом все комплексные числа имеют ненулевую вещественную часть $\operatorname{Re} s_i \neq 0$ и равные модули $\omega_0 = |s_i|$, а их значения определяются значением ω_0 и находятся из выражения

$$s_i = \omega_0 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i-1}{2n}\pi\right)}, i = \overline{1, 2n}.$$

Таким образом, полином Баттерворта задает желаемые корни в левой полуплоскости комплексной плоскости корней на полуокружности радиусом ω_0 , причем угол между соседними радиус-векторами, определяющими желаемые корни, равен $180^\circ/n$, где n – порядок полинома, а угол между ближайшим к мнимой оси корнем и мнимой осью составляет $90^\circ/n$.

Таблица 4 – Полиномы Баттерворта для систем n -го порядка

n	полином Баттерворта
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 1.414\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 2.613\omega_0 s^3 + 3.414\omega_0^2 s^2 + 2.613\omega_0^3 s + \omega_0^4$
5	$s^5 + 3.236\omega_0 s^4 + 5.236\omega_0^2 s^3 + 5.236\omega_0^3 s^2 + 3.236\omega_0^4 s + \omega_0^5$
6	$s^6 + 3.86\omega_0 s^5 + 7.46\omega_0^2 s^4 + 9.13\omega_0^3 s^3 + 7.46\omega_0^4 s^2 + 3.86\omega_0^5 s + \omega_0^6$

Нормированные переходные функции для полиномов Баттерворта представлены на рисунке 17.

Приведем пример матрицы состояния Γ и выхода H эталонной модели в канонической управляемой форме для полинома Баттерворта 2-го порядка

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -1,414\omega_0 \end{bmatrix}; H = [0 \quad 1].$$

Следует отметить, что перерегулирование для системы с полиномом Баттерворта ограничено величиной в 15%, т.е. $\sigma \leq 15\%$.

Вычисление коэффициентов a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) желаемого характеристического полинома системы стандартного вида (полином Баттерворта и полином Ньютона) осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом:

1) по нормированным переходным функциям (рисунок 16, рисунок 17) определяется значение t_{Π}^* ;

2) параметр ω_0 определяется по значениям заданного значения времени переходного процесса t_{Π} и нормированного времени переходного процесса t_{Π}^* в силу соотношения $\omega = t_{\Pi}^* / t_{\Pi}$;

3) коэффициенты a_i желаемого характеристического полинома определяются выражением $a_i = \alpha_i \omega^{n-i}$, где значения α_i находятся по таблице 3 или таблице 4 в соответствии с порядком системы n , в зависимости от выбранного типа распределения корней характеристического полинома.

4) коэффициент b определяется по заданной величине статического коэффициента k системы в соответствии с соотношением $b = k a_0$.

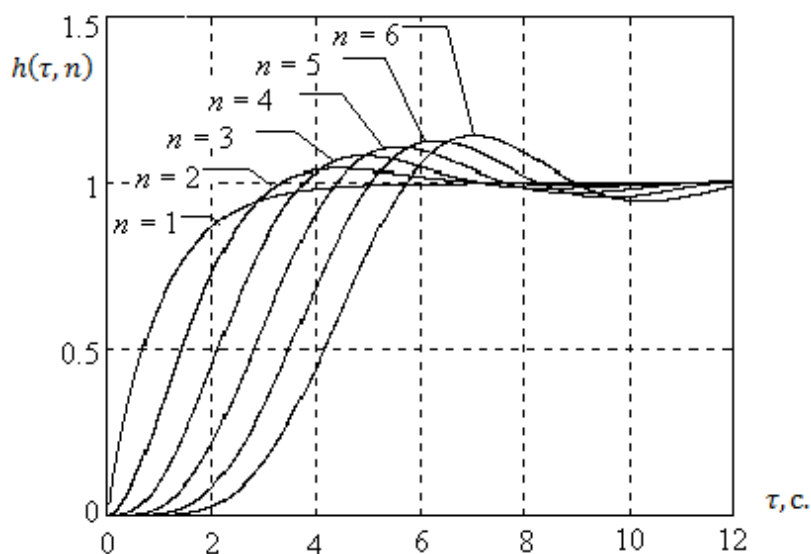


Рисунок 17 – Нормированные переходные характеристики системы с характеристическим полиномом Баттерворта

В случае, когда необходимо оценить быстродействие системы без построения ее переходной характеристики, используется такой характеристикой системы как степень устойчивости η . Степень устойчивости определяется абсолютным значением вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического полинома матрицы состояния системы. Зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса системы определяется в силу следующего соотношения

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05}.$$

Таким образом, зная степень устойчивости системы (или ее корни) можно определить величину времени переходного процесса. Уменьшить время переходного процесса при фиксированном характеристическом полиноме можно за счет изменения нулей (корней числителя) передаточной функции системы.

В таблицах 5 и 6 приведены значения нормированного времени переходного процесса τ_n^* системы n -ого порядка для полиномов Ньютона и Баттерворта соответственно.

Таблица 5 – Значения нормированного времени переходного процесса системы n -ого порядка для полинома Ньютона

n	1	2	3	4	5	6
τ^*	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5
σ	0	0	0	0	0	0

Таблица 6 – Значения нормированного времени переходного процесса системы n -ого порядка для полинома Баттерворта

n	1	2	3	4	5	6
τ^*	3	4,9	6,0	6,8	7,7	10,8
σ	0	4,5	8,0	11	13,5	14,3

2.7 Математическое моделирование динамической системы

Моделирование системы управления обычно выполняется для решения одной из следующих задач:

- проверка корректности выполненного синтеза регулятора с точки зрения удовлетворения заданным показателям качества системы управления;
- проверка корректности сделанных допущений и оценка влияния неучтенных факторов на показатели качества системы.

Для решения первой задачи обычно применяют ту же модель, которая использовалась при синтезе регулятора. Кроме вычислительных

неточностей на качестве системы управления могут сказаться нули динамической модели, которые не учитываются при синтезе регулятора методом модального управления. Моделирование также позволяет проверить точностные свойства следящей системы при различных типовых входных и (или) возмущающих воздействиях.

Так, для системы с регулятором на основе встроенной модели воздействия, пример которой приведен в параграфе 2.5, методом моделирования в среде Matlab Simulink легко проверить показатели качества в переходных режимах и погрешность отработки задающего воздействия. Требовалось построить регулятор (используя подход встроенной модели) обеспечивающий в замкнутой системе время переходного процесса $t_n \leq 0,63\text{с}$.

Математическая модель рассматриваемой системы определена уравнением (2.41). В ходе синтеза получены значения коэффициентов регулятора, значения которых с учетом его структуры равны: $K1=1000$, $K2=300$, $K3=30$. Схема моделирования системы управления показана на рисунке 18.

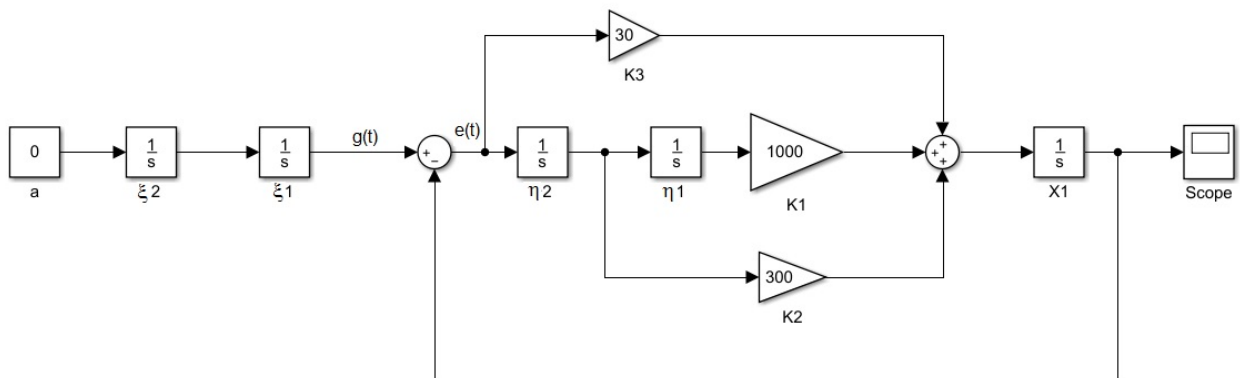


Рисунок 18 – Схема моделирования системы управления (2.41)

Генератор задающего воздействия представлен интеграторами $\xi1$ и $\xi2$. Переменные состояния встроенной модели определяются интеграторами $\eta1$ и $\eta2$. Объект управления представлен интегратором $x1$.

Задающее воздействие $g(t)=1$ формируется при задании начальных условий генератора $\xi1(0)=1$, $\xi2(0)=0$ и значения параметра $a=0$. На рисунке 19 показана реакция системы на указанное задающее воздействие (переходная функция системы).

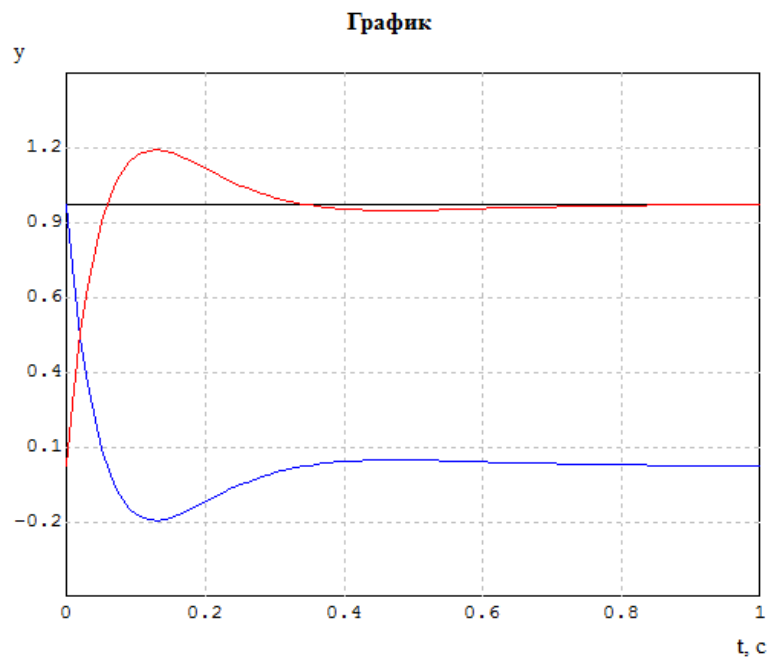


Рисунок 19 - Переходная функция системы при $g(t)=1$

По графику переходной функции легко вычислить показатели качества - время переходного процесса $t_n = 0.32 \leq t_n^* = 0.63$ с. и значение перерегулирования $\sigma = 21\%$. Значение установившейся ошибки при постоянном воздействии $e_{уст} = 0$.

Показатели точности обработки других типовых воздействий также легко проверяются методом моделирования. Так, график отработки воздействия $g(t)=1+2t$ показан на рисунке 20. Это воздействие формируется генератором задающего воздействия при задании начальных условий $\xi_1(0)=1$, $\xi_2(0)=2$ и значения параметра $a=0$.

Моделирование показывает, что ошибка в установившемся режиме отработки входного воздействия с постоянной составляющей и воздействия с постоянной скоростью равна нулю.

График отработки воздействия $g(t)=2t$ показан на рисунке 21. Это воздействие формируется генератором задающего воздействия при задании начальных условий $\xi_1(0)=0$, $\xi_2(0)=2$ и значения параметра $a=0$. Моделирование показывает, что ошибка в установившемся режиме отработки входного воздействия с постоянной скоростью равна нулю.

График отработки воздействия $g(t)=1+2t+0.05t^2$ показан на рисунке 22. Это воздействие формируется генератором задающего воздействия при задании начальных условий $\xi_1(0)=1$, $\xi_2(0)=2$ и значения параметра $a=0.05$. Моделирование показывает, что ошибка в установившемся режиме отработки входного воздействия с постоянной составляющей, с постоянной скоростью и с постоянным ускорением равна нулю.

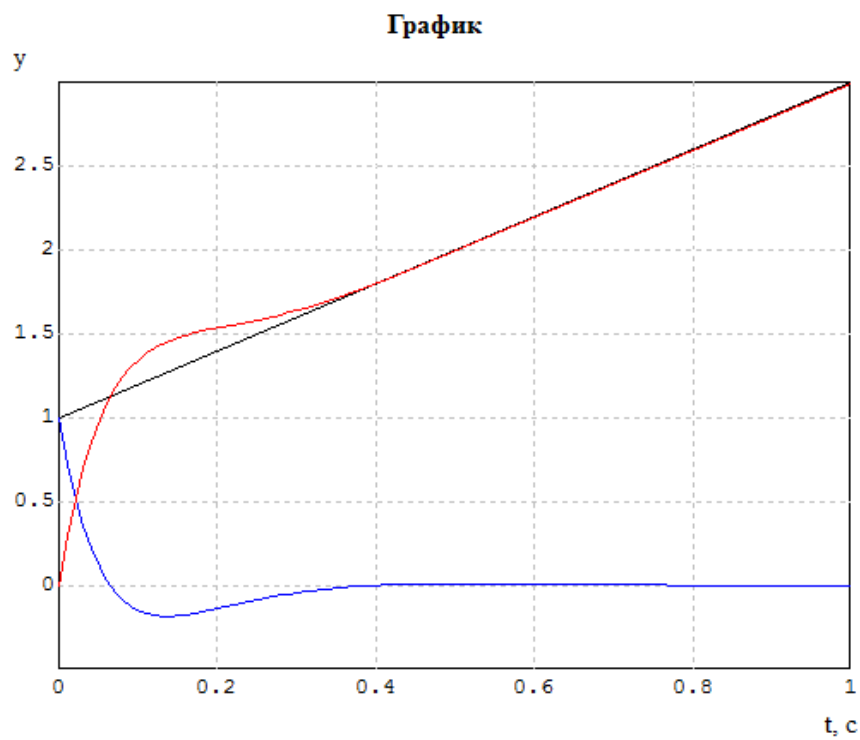


Рисунок 20 - Реакция системы на входное воздействие в виде суммы постоянной составляющей и воздействия с постоянной скоростью $g(t) = 1 + 2t$

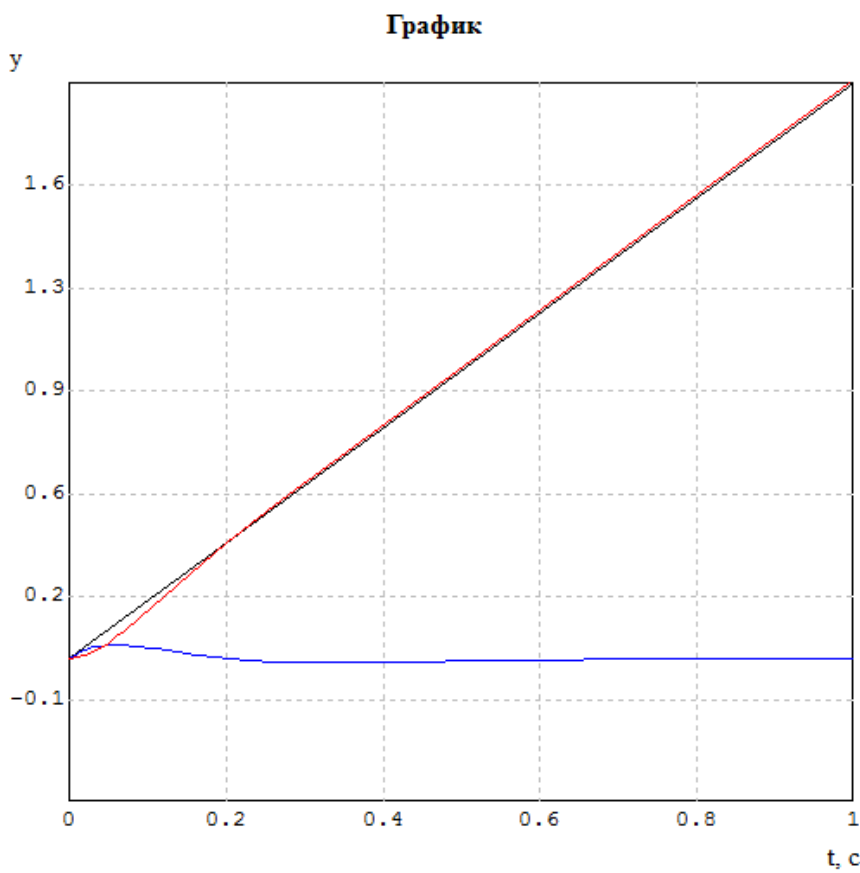


Рисунок 21 - Реакция системы на входное воздействие с постоянной скоростью $g(t) = 2t$

Таким образом, получено подтверждение корректности синтеза регулятора и факта, что использование регулятора с встроенной моделью позволяет в системе обеспечить в установившемся режиме нулевую ошибку на типовой класс входных воздействий, наиболее существенно влияющих на точностные показатели системы.

Для решения задачи проверки корректности сделанных допущений используемая математическая модель должна быть изменена в сторону усложнения. Так, для проверки влияния ограниченности мощности и амплитуды сигнала на выходе электронного преобразующего устройства (ЭПУ) на выход регулятора устанавливают нелинейный блок Saturation из библиотеки Discontinuities Simulink. Также при помощи нелинейного блока Backlash можно учесть люфт в редукторе; нелинейный блок Dead Zone позволяет учесть при моделировании зону нечувствительности в регулировочной характеристике электродвигателя.

Использование математического моделирования позволяет оценить влияние и таких непростых факторов, как разрядность цифрового вычислительного устройства и выбранного периода квантования информации в цепях измерения и управления.

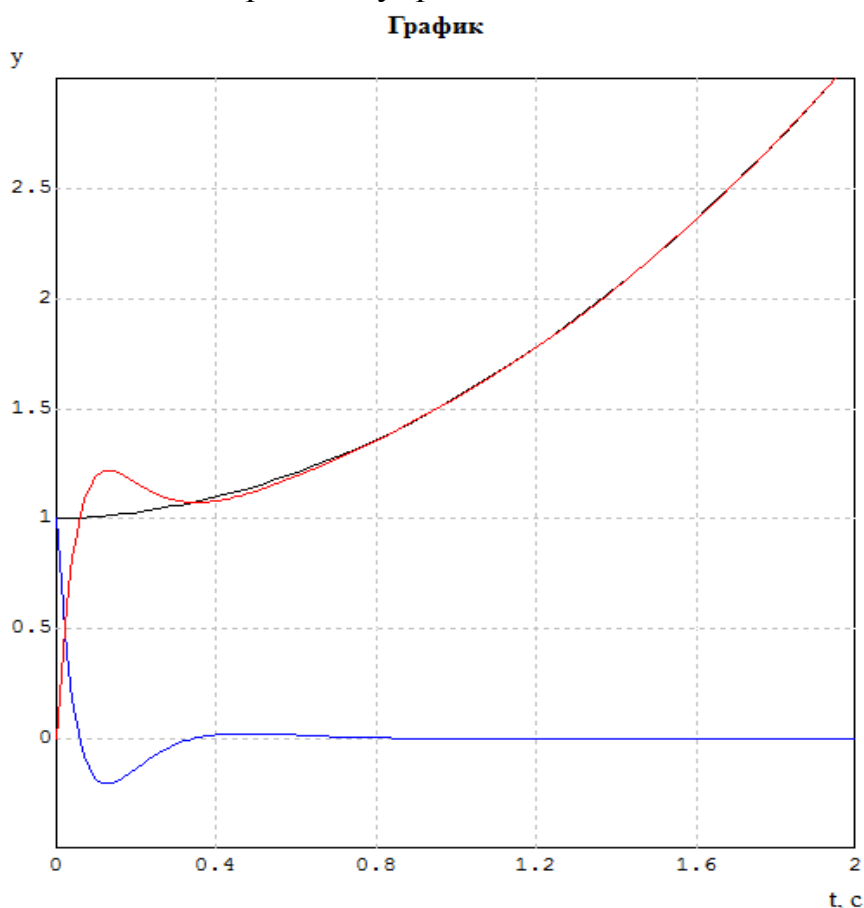


Рисунок 22 - Реакция системы на входное воздействие в виде суммы воздействий постоянной составляющей, с постоянной скоростью и с постоянным ускорением $g(t) = 1 + 2t + 0,05t^2$.

Моделирование асинхронных двигателей часто выполняется с учетом нелинейности его механической характеристики, например с использованием формулы Клосса [19]. При решении подобных задач следует пользоваться специальной литературой [20] .

3. НАБОР ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ НА ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Основное задание. Разработка электромеханической системы углового позиционирования и исследование её динамики.

1. По заданным характеристикам механической нагрузки (объекта управления ОУ) рассчитать требуемый от двигателя момент и номинальную мощность. Предварительно выбрать двигатель заданного типа по каталогам и определить оптимальное значение передаточного числа редуктора. С учетом всех полученных расчетных значений окончательно выбрать двигатель с редуктором или мотор-редуктор для системы позиционирования. Характеристики нагрузки приведены в таблице 1 (1,2,3,4), где исходными данными для расчета являются:

- момент сопротивления нагрузки (M_n);
- момент инерции нагрузки (J_n);
- максимальная угловая скорость вращения нагрузки (Ω_m);
- максимальное ускорение нагрузки (ϵ_m).

2. Для заданного типа двигателя разработать функциональную схему привода. В состав схемы должны войти:

- задающее устройство (ЗУ);
- устройство управление (УУ);
- исполнительный двигатель (ИД);
- редуктор (Р);
- объект управления (ОУ)
- датчики скорости (при необходимости) и положения (ДС и ДП).

Выбрать по каталогам все технические средства системы, включая источники питания, обеспечивая возможность их подключения в соответствии с функциональной схемой.

3. Разработка структурной схемы привода (в передаточных функциях)

3.1 Определиться с видом передаточных функций всех устройств, входящих в состав привода. Рассчитать все параметры передаточных функций.

3.2 Математическое моделирование системы без регулятора.

а) Составить схему моделирования системы позиционирования в среде Simulink.

б) Найти реакцию привода в разомкнутом и замкнутом состояниях на ступенчатое воздействие. Зафиксировать графики переходных характеристик.

3.3 Синтез регулятора и моделирование системы с ним.

а) Известными способами синтезировать регулятор электромеханической системы углового позиционирования, который бы обеспечивал ей характеристики, приведенные в таблице 1 (5,6,7), где

α_{\max} – максимальное угловое перемещение ОУ;

M – допустимый показатель колебательности системы;

δ – допустимая динамическая ошибка в процентах от максимальной амплитуды.

б) Найти эквивалентное гармоническое воздействие системы по заданным её характеристикам (таблица 7 (3,4,5)).

в) Провести моделирование системы с регулятором в среде Simulink, получить переходную характеристику и реакцию системы на эквивалентное гармоническое воздействие. По переходной характеристике проверить соответствие системы заданному показателю колебательности M , а по реакции на эквивалентное гармоническое воздействие соответствие заданной динамической ошибке δ .

г) Исследовать влияние изменения момента инерции нагрузки на динамические характеристики системы с регулятором. Провести моделирование для двух новых значений момента инерции на 25% меньше и больше заданного значения.

д) Провести анализ полученных результатов.

Оформление результатов проектирования следует выполнять в соответствии с методическими рекомендациями [18].

4. Варианты заданий

Номер варианта каждого студента соответствует его номеру в ИСУ списка группы.

Таблица 7 – Варианты технических заданий

№ параметра	1	2	3	4	5	6	7	8
№ варианта	M_n , Н м	J_n , кг м ²	Ω_m , рад/с	ε_m , рад/с ²	α_{max} , град	M	δ , %	Тип двигателя
1	0,12	0,21	0,05	2,0	45	1,1	1	ДПТ
2	12	49	0,3	2,0	30	1,2	5	АД
3	0,25	0,51	3	1,2	5	1,0	1	ДПТ
4	24	120	0,2	1,1	90	1,1	1	АД
5	35	90	0,18	0,8	180	1,0	1	АД
6	5,1	4,2	0,26	1,2	360	1,15	5	ДПТ
7	0,4	0,72	0,8	0,5	45	1,08	2	ДПТ
8	2,8	75	0,22	1,2	2	1,1	2	АД
9	10	110	3,2	1,5	45	1,1	5	ДПТ
10	0,12	0,21	6,5	2,0	45	1,1	1	ДПТ
11	12	49	3,0	2,0	30	1,2	5	АД
12	0,25	0,51	0,3	1,2	5	1,0	1	ДПТ
13	24	120	2,8	1,1	90	1,1	1	АД
14	35	90	0,18	0,8	180	1,0	1	АД
15	5,1	4,2	0,07	1,2	360	1,15	5	ДПТ
16	0,4	0,72	0,8	0,5	45	1,08	2	ДПТ

17	2,8	75	2,0	1,2	2	1,1	2	АД
18	0,4	5	6,0	0,8	30	1,1	1	ДПТ
19	2,8	4	9,0	1,2	5	1,1	1	АД
20	10	30	2,5	0,5	90	1,2	5	АД
21	0,12	24	1,2	1,2	180	1,0	2	ДПТ
22	0,25	36	0,6	2,0	45	1,0	2	ДПТ
23	24	120	0,9	2,0	30	1,1	1	АД
24	35	210	0,1	1,2	5	1,0	1	ДПТ
25	5,1	38	0,25	1,1	90	1,15	5	ДПТ

В таблице 7 обозначены: M_H – момент сопротивления нагрузки, Н*м; J_H – момент инерции нагрузки, кг м²; Ω_m – максимальная угловая скорость вращения нагрузки, рад/с; ε_m – максимальное ускорение нагрузки, рад/с²; α_{max} – максимальное угловое перемещение ОУ, рад; M – показатель колебательности; δ – перерегулирование, %; ДПТ – двигатель постоянного тока; АД – асинхронный двигатель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках предложенного учебно-методического пособия приведены теоретические и практические рекомендации для выполнения комплексного практического домашнего задания по дисциплине «Динамика электромеханических систем» образовательного стандарта направлений 15.03.06 – «Мехатроника и робототехника» и 27.03.04 – «Управление в технических системах». В пособии описаны методики проектирования и исследования характеристик электромеханических систем автоматического позиционирования. Приводятся как практические, так и теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий.

В результате выполнения комплексного кейса студенты приобретут практические навыки проектирования и исследования характеристик электромеханических систем автоматического позиционирования двух типов: с приводом постоянного тока и с приводом переменного тока (на базе асинхронного двигателя).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Промышленная автоматизация производственных процессов (контроллеры, сервоприводы): <https://www.consys.ru/>
2. Преобразователи частоты: <https://owen-ufa.ru/product-category/privodnaya-tehnika/>
3. Контроллеры двигателей постоянного тока: https://dip8.ru/shop/silovaya_elektronika/category/kontrollery_dvigatelay_postoyannogo_toka/brand-is-elmn/
4. Каталог Maxon: https://innodrive.ru/files/maxon_EN_Program_2021-22.pdf
5. Каталог импортных двигателей: <https://www.электродвигатели-редукторы.рф/category/importnye-dvigateli/?yclid=7412784996347281407>
6. ДС Двигатели Maxon: <https://ru.farnell.com/c/automation-process-control/motors-motor-controls/electric-motors?brand=maxon-motor>
7. Двигатели малой мощности: <https://www.td-electroprivod.ru/>
8. Малогабаритные АС двигатели и мотор-редукторы: <http://sirius-drive.ru/>
9. Редукторы: <https://cable.ru/reductiongears/products-rc.php>
10. Редукторы для медицинских приборов: <https://www.directindustry.com.ru/proizvoditel-promyshlennyy/reduktor-medicinskogo-pribora-212919.html>
11. Редукторы: <https://reducers.com/products/reduktory/>
12. Мотор-редукторы и устройства управления: <http://gearmotor.ru/products.htm?yclid=16235553445317705727>
13. Мини мотор-редукторы: <https://2magnita.ru/goods/Mini-motor-reduktor-SKU248306-12-v-3-ob-min?from=Mjgl>
14. Датчики углового положения: https://www.sensor-systems.ru/category_49.html
15. Бойков В.И., Быстров С.В., Власов С.М., Григорьев В.В., Николаев Н.А., Нуйя О.С. Преобразователи информации в системах управления. Часть 1 – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 65 с.
16. Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. Проектирование регуляторов систем управления – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 94 с.
17. Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К. Цифровые системы управления: Учебное пособие. – СПб: ниверситет ИТМО, 2019. – 133 с.
18. Блинников А.А., Бойков В.И., Быстров С.В., Николаев Н.А., Нуйя О.С. Правила оформления пояснительной записки и конструкторской документации. – СПб: Университет ИТМО, 2014. – 55с.

19. Естественные механическая и эл. механическая характеристика АД. Формула Клосса: <http://msd.com.ua/teoriya-elektroprivoda/estestvennye-mexanicheskaya-i-el-mexanicheskaya-xarakteristika-ad-formula-klossa/>
20. Усольцев А.А. Электрические машины автоматических устройств/ Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 213с.
21. Бушуев А.Б., Литвинов Ю.В. Функционально-структурное моделирование технических систем. – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 28с.
22. Ушаков А.В., Вундер (Полинова) Н.А. Современная теория управления. Дополнительные главы: Учебное пособие для университетов / Под ред. А.В. Ушакова – СПб.: Университет ИТМО, 2015. – 182с.

Бойков Владимир Иванович
Бушуев Александр Борисович
Быстров Сергей Владимирович
Григорьев Валерий Владимирович
Дударенко Наталия Александровна

**Исследование динамических характеристик
электромеханических систем
Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А