GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 1
Matrice, calcul matriceal; Determinanţi

Matricea este un tablou dreptunghiular de elemente ce aparţin unui inel comutativ, în particular unui corp comutativ. Vom lucra peste corpul numerelor reale, $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} ; a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Are linii şi coloane. Mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ fiind un inel comutativ. Matricele se pot aduna şi înmulţi cu scalari. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$, definim suma $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$, matricea obţinută prin adunarea pe componente. Înmulţirea cu un scalar se face înmulţind fiecare componentă cu respectivul scalar: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{i,j}) = (\alpha \cdot a_{i,j})$

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ formează un grup abelian. Elementul neutru pentru adunarea matricelor este matricea $0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Opusa unei matrice se obţine din schimbarea semnului fiecărui element al matricei, adică $-A = (-a_{i,j})$. Este clar că $-A + A = A - A = 0_{m,n}$.

Notăm cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătrate cu n linii şi n coloane.

O altă operaţie ce se poate face cu matrice este înmulţirea. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Înmulţirea se face linie cu coloană.

$$A \cdot B = ((A \cdot B)_{i,l})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} = (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant p}}$$

.

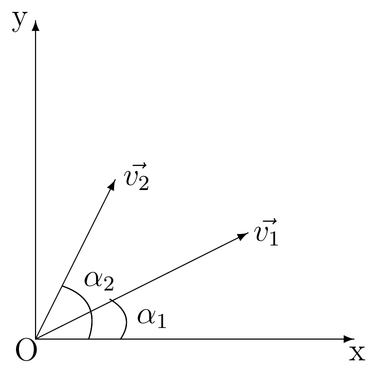
Notând cu $L_i(A)$ linia i a lui A şi cu $C_l(B)$ coloana l a lui B, atunci $(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B)$, produsul dintre linia i a matricei A şi coloana l a matricei B.

$$(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l}.$$

Determinanţi

Motivaţia pentru introducerea determinantului este una geometrică. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Determinantul matricei A este volumul paralelipipedului construit cu vectorii coloanele lui A (sau liniile acesteia).

În particular în plan, deci pentru $n = 2$ este aria paralelogramului ce are ca laturi coloanele matricei.



Considerăm $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ în $\mathbb{R}^2$ şi paralelogramul construit cu aceştia. Aria paralelogramului este $||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ unde α_j este unghiul făcut de $\vec{v_j}$ cu partea pozitivă a axei Ox. Presupunem că $\alpha_2 > \alpha_1$. Folosind expresiile $\sin(\alpha_j) = \frac{y_j}{||\vec{v_j}||}, \cos(\alpha_j) = \frac{x_j}{||\vec{v_j}||}$ rezultă aria paralelogram $= ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot (\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)) = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

Notăm cu S_n mulţimea permutărilor (bijecţiilor) $\sigma : [n] \longrightarrow [n[$, unde am notat cu $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. S_n este un grup cu operaţia de compunere a funcţiilor pentru care unitatea este $1 = \mathrm{id}_{[n]} : [n] \longrightarrow [n], 1(i) = i$.

Definiţia 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim determinantul matricei A

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$$

Exemplul 2. (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. $S_2 = \{1, (12)\}$, unde (12) este bijecţia $\sigma : [2] \longrightarrow [2], \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$. Signatura acestei bijecţii (12) este -1, având o inversiune.

Folosind **definiţia ??** avem în formula $\det(A)$ doi termeni corespunzători elementelor din S_2. Astfel, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(2) Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Primii trei termeni ai sumei corespund permutărilor id_{S_3}, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ care au signatură 1 (sunt 3-cicli) iar următoarii trei termeni corpund transpoziţiilor $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ care au signatura -1.

Matricea transpusă a unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notată cu ${}^tA$ este definită $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Exemplul 3. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, transpusa este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propoziţia 4 (Proprietăţi ale determinanţilor)**.** *Determinantul verifică următoarele proprietăţi.*

(1) $\det({}^tA) = \det(A)$*, unde* ${}^tA$ *este transpusa matricei* A*.*
(2) *dacă* A *are o linie nulă, atunci* $\det(A) = 0$.
(3) *dacă* $B \in \mathcal{M}_n(R)$ *se obţine din* A *prin înmulţirea unei linii cu* $\lambda \in \mathbb{R}$*, atunci* $\det(B) = \lambda \det(A)$
(4) *dacă* A *are două linii proporţionale atunci* $\det(A) = 0$
(5) *dacă* $L_i(A) = (b_{i1} + c_{i1}, \dots, b_{in} + c_{in})$*, şi* B *şi respectiv* C *sunt matricele obţinute din* A *înlocuind* $L_i(A)$ *cu* $(b_{i1}, \dots, b_{in})$ *şi respectiv* $(c_{i1}, \dots, c_{in})$*, atunci* $\det(A) = \det(B) + \det(C)$*.*
(6) *dacă* B *se obţine din permutarea a două linii a lui* A *atunci* $\det(B) = -\det(A)$*.*
(7) *dacă* B *se obţine din* A *prin adunarea la o linie a lui* A *a multiplului unei alte linii a lui* A $(L_i(B) = L_i(A) + \lambda \cdot L_j(A))$*, atunci* $\det(B) = \det(A)$.

Observaţia 5. Din (1) rezultă faptul că sunt adevărate aserţiunile similare $2 - 7$ pentru coloane.

Exemplul 6 (Determinantul Vandermonde de ordin 3)**.** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ scădem $a_1 \cdot L_1$ din L_2 şi respectiv $a_1 \cdot L_2$ din L_3 şi obţinem $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} =$ $a_3(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) - a_2(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)$.

Dezvoltări ale determinanţilor, formula Laplace

Fie $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pentru mulţimile $I \subset [p] = \{1, \dots, p\}$ şi $J \subset [q] = \{1, \dots, q\}$, notăm cu $A_{I,J}$ matricea obţinută prin intersecţia liniilor I cu coloanele J. Dacă $|I| = |J| = m$, atunci $\det(A_{I,J})$ se numeşte minor de ordin m a lui A.

Exemplul 7.
- Dacă $I = \{i\}$ şi $J = \{j\}$ atunci $A_{I,J} = a_{ij} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $I = J = \{1, 2\}$ atunci $A_{I,J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant m \leqslant p$ şi $I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \dots < i_m$ şi $j_1 < \dots < j_m$. Fie $\overline{I} = [p] \backslash I$ şi $\overline{J} = [p] \backslash J$ complementele mulţimilor I şi J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din A corespuzător mulţimilor de indici I şi J şi cu $M' = (-1)^{i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m} \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$ complementul algebric al lui M.

Teorema 8 (Formula Laplace)**.** *Fie $p \in \mathbb{N}^\star$ şi $1 \leqslant m \leqslant p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \dots \leqslant i_m \leqslant p$. Atunci*

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obţinut din} \\ \text{liniile } i_1, \dots, i_m \\ \text{şi } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Exerciţiul 9. *Demonstraţi*

(1) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $N \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$,

(2) $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ N & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $N \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,

(3) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$ pentru $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-1)^{mn} \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi* $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Am încheiat primul curs cu formula Laplace pe care o reamintesc.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant m \leqslant p$ şi $I = \{i_1, \ldots, i_m\}, J = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \ldots < i_m$ şi $j_1 < \ldots < j_m$. Fie $\overline{I} = [p]\backslash I$ şi $\overline{J} = [p]\backslash J$ complementele mulţimilor I şi J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din Acorespuzător mulţimilor de indici I şi J şi cu $M' = (-1)^{i_1+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m} \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$ complementul algebric al lui M.

Teorema 1 (Formula Laplace)**.** *Fie $p \in \mathbb{N}^\star$ şi $1 \leqslant m \leqslant p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_m \leqslant p$. Atunci*

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obţinut din} \\ \text{liniile } i_1, \ldots, i_m \\ \text{şi } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Curs 2
Dezvoltări ale determinanţilor

Un caz particular al formulei Laplace, deja întâlnit de dumneavoastră în clasa a XI-a, este cel al dezvoltării după o linie sau după o coloană. Pentru că formula Laplace am dat-o pentru o mulţime de indici de linii, voi da în continuare formula de dezvoltare a determinantului pe linie.

Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi aplicăm formula Laplace pentru $|I| = |J| = 1$. Pentru $I = \{i\}, J = \{j\}$ minorul de ordin 1 asociat acestor mulţimi este $M = \det(a_{i,j}) = a_{i,j}$, iar complementul său algebric este $M'_{ij} = (-1)^{i+j} A_{\bar{i},\bar{j}} = (-1)^{i+j} A_{[n]\backslash\{i\},[n]\backslash\{j\}}$.

Aplicând formula Laplace pentru $I = \{i\}$ avem

$$\det(A) = a_{i1}M'_{i1} + a_{i2}M'_{i2} + \ldots + a_{in}M'_{in}, \tag{1}$$

adică expresia dezvoltării determinantului după linia i.

Ceea ce am prezentat la curs este formula de dezvoltare a determinantului pe coloană. Considerăm coloana j a unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, şi aplicând formula Laplace pentru dezvoltarea pe coloana $J = \{j\}$ obţinem

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, unde $A_{ij} = M'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{\bar{i},\bar{j}}$ este ca şi mai sus complementul algebric al matricei a_{ij}.

Considerăm acum pentru $p \neq i$ matricea $B_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obţinută din A înlocuind $L_p(A)$, cu $L_i(A)$. Deci $L_p(B_p) = L_i(A) = L_i(B_p)$.

$$B_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_p = L_i(A) \\ \\ \leftarrow L_i = L_i(A) \\ \\ \\ \end{array}$$

Dezvoltăm $\det(B_p)$ după linia p şi avem din proprietăţile determinanţilor

$$0 = \det(B_p) = a_{i1}M'_{p1} + a_{i2}M'_{p2} + \ldots + a_{in}M'_{pn} \tag{2}$$

pentru orice $p \neq i$. Complemenţii algebrici rămân aceeaşi pentru că matricea B_p este aceeaşi cu matricea A în afara liniei p, după care dezvoltăm.

Numim adjuncta matricei A şi notăm cu $A^\star$ matricea care are pe poziţia (i,j) complementul algebric $M'_{j,i}$.

$$A^\star = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \ldots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \ldots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{2n} & \ldots & M'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observaţia 2. Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă că $A \cdot A^\star = \det(A) \cdot I_n$, unde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Similar, lucrând cu versiunea pe coloane obţinem:

$$\det(A) = a_{1j}M'_{1j} + a_{2j}M'_{2j} + \ldots + a_{nj}M'_{nj} \tag{3}$$

şi

$$0 = \det(C_p) = a_{1j}M'_{1p} + a_{2j}M'_{2p} + \ldots + a_{nj}M'_{np} \tag{4}$$

unde C_p este obţinută din A înlocuind $C_p(A)$ cu $C_j(A)$. pentru orice $p \neq j$.

Observaţia 3. Folosind ecuaţiile (3) şi (4) rezultă $A^\star \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

O consecinţă a **observaţiilor 2** şi **3** este

Teorema 4. *Pentru orice* $A \in \mathcal{M}_n(R)$ *avem* $A \cdot A^\star = A^\star \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

Definiţia 5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte inversabilă, dacă şi numai dacă $(\exists)B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. În acest caz B se numeşte inversa matricei A şi se notează cu A^{-1}.

Corolarul 6. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Atunci* A *este inversabilă* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. *În acest caz* $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^\star$.

Avem şi următorul rezultat:

Teorema 7. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. *Atunci* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

În cele ce urmează voi prezenta câteva exemple de calcul de determinanţi.

Exemplul 8. Calculaţi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & g & h & i & j & 0 \\ 0 & 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & n & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 \\ t & u & x & y & z & w \end{vmatrix}$$

- dezvoltăm după prima coloană: $\Delta = a \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \\ u & x & y & z & w \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} =$

$$= aw \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} - tf \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} \cdot (aw - tf) =$$

$$\ldots = (gs - jp) \cdot (aw - tf) \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf).$$

- Folosind formula Laplace pentru mulţimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{1, 2\}$. Mulţimea indicilor coloanelor este $J \subset [6], |J| = 2$. Numărul acestor submulţimi este $\binom{6}{2} = C_6^2 = 15$. Astfel J este oricare dintre următoarele mulţimi: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}$, $\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}$.

  $\det(A) = \sum_J \det(A_{I,J})(-1)^{3+4+j_1+j_2} \det(A_{\overline{I},\overline{J}}) =$

$= \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} a & b & e & f \\ 0 & g & j & 0 \\ 0 & p & s & 0 \\ t & u & z & w \end{vmatrix}$. Toţi ceilalţi determinanţi 2×2 ce apar în formula Laplace sunt 0, având cel puţin o coloană nulă. Pentru determinantul 4×4 dezvoltăm după liniile $I = \{2, 3\}$, şi 2 coloane din cele 4.

Obţinem $\Delta = (kn - ml) \cdot \begin{vmatrix} g & j \\ p & s \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a & f \\ t & w \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf)$.

Exemplul 9. Să se arate că $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$, unde $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Folosim formula Laplace pentru mulţimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{n+1, \ldots, n+p\}$ şi mulţimea de indici ai coloanelor este $J = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset [n+p]$, $|J| = p$.

$\det(A) = \sum_{J \subset [n+p], |J|=p} \det(A_{I,J})(-1)^{n+1+\ldots+n+p+j_1+\ldots+j_p} \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$

Singurul determinant nenul $\det(A_{I,J})$ este pentru $J = [p] = \{1, 2, \ldots, p\}$.

Obţinem pentru $I = \{n+1, \ldots, n+p\}$, $\overline{I} = [n+p] \backslash \{n+1, \ldots, n+p\} = \{1, \ldots, n\}$ şi pentru $J = \{1, 2, \ldots, p\}$, $\overline{J} = [n+p] \backslash \{1, 2, \ldots, p\} = \{p+1, \ldots, p+n\}$.

Avem deci

$\det(A) = \det(A_{\{n+1,\ldots,n+p\},\{1,2,\ldots,p\}})(-1)^{n+1+\ldots+n+p+1+\ldots+p} \det(A_{\{1,\ldots,n\},\{p+1,\ldots,p+n\}}) =$
$= \det(P)(-1)^{np} \cdot \det(N)$.

Exemplul 10. Determinantul Vandermonde. Să se arate că

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Am demonstrat în cursul trecut că formula este adevărată pentru $n = 3$. Demonstrăm prin inducţie. Presupunem formula adevărată pentru $n-1$ şi demonstrăm pentru n.

Facem următoarele operaţii: $L_2' = L_2 - a_1 \cdot L_1$, $L_3' = L_3 - a_1 \cdot L_2$, $L_n' = L_n - a_1 \cdot L_{n-1}$. Obţinem

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \ldots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & \ldots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

dezvoltând după prima coloană obţinem

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2-a_1 & \ldots & a_n-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & \ldots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

dând factori comuni pe fiecare dintre cele $(n-1)$ coloane (a_j-a_1), $2\leqslant j\leqslant n$, obţinem

$$=(a_2-a_1)\ldots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}=(a_2-a_1)\ldots(a_n-a_1)V(a_2,\ldots,a_n).$$

Folosind ipoteza de inducţie obţinem $V(a_1,a_2,\ldots,a_n)=$
$=(a_2-a_1)\ldots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$.

Exemplul 11. Determinanţi tridiagonali. Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ să se calculeze

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-\beta\gamma.\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-2\alpha\beta\gamma.$$

Dezvoltăm Δ_n după prima linie şi obţinem $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$, ultimul determinant având $n-1$ linii şi coloane. Dezvoltând acest determinant după prima coloană obţinem

$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2}$ de unde $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} + \beta\gamma\Delta_{n-2} = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0$. Presupunem că are rădăcini distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Avem $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ şi $\lambda_1\lambda_2 = \beta\gamma$.

$\Delta_2 = \alpha^2 - \beta\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Demonstrăm prin inducţie că $\Delta_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Verificarea a fost făcută pentru $n = 2$, presupunem deci formula adevărată pentru $2 \leqslant k < n$ şi demonstrăm pentru n.

$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} = (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Exemplul 12. Un graf $\Gamma = (V, E)$ este o pereche de mulţimi V, mulţimea vârfurilor şi E mulţimea muchiilor ce unesc vârfurile. K_n este graful complet cu n vârfuri şi câte o muchie între fiecare două vârfuri. Numim arbore un graf aciclic (fără cicli) şi conex (orice două vârfuri pot fi unite printr-un drum în graf). Un subarbore al unui graf se numeşte arbore generator dacă conţine toate vârfurile grafului Γ. Notăm cu $\tau(\Gamma)$ numărul arborilor generatori ai grafului Γ. Numim valenţa unui vârf, sau gradul acestuia, şi notăm $d(v)$ numărul muchiilor incidente cu $v \in V$.

Pentru orice graf Γ, considerăm matricea $Q \in \mathcal{M}_{|V|}(\mathbb{Z}), Q = (q_{i,j})$, unde

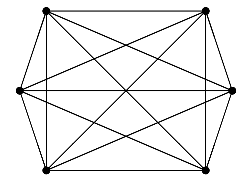
$$q_{i,j} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ \text{- nr. de muchii ce uneşte } v_i \text{ cu } v_j & i \neq j \end{cases}.$$

Teorema 13 (matice-arbore)**.** *Considerăm $\Gamma = (V, E)$ un graf fără bucle şi matricea Q asociată acestui graf. Atunci $\tau(\Gamma) = (-1)^{r+s}\det(Q_{r,s})$, unde matricea $Q_{r,s}$ este obţinută din Q tăind linia r şi coloana s.*

Datorită faptului că suma coloanelor este vectorul nul complemenţii algebrici sunt constanţi pe fiecare linie, deci vom dezvolta după linia şi coloana 1.

Formula Cayley $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

$$Q(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$



K_6

Tăiem linia şi coloana 1 a matricei Q şi obţinem $\tau(K_n) = (-1)^{1+1}\det(Q_{1,1}) =$
$= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$, determinant cu $n-1$ linii şi coloane. Sumând toate coloanele la prima obţinem $\tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$. Scăzând prima linie din fiecare cealaltă linie obţinem $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 3

În cursul anterior am făcut mai multe exemple de determinanţi. Voi începe cursul de astăzi cu o aplicaţie, anume expresia inversei unei matrice 2×2.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$. Avem ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de unde adjuncta $A^\star = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Astfel,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. $\det(A) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Conform formulei de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = {}^tA$.

Reamintesc şi următorul rezultat enunţat cursul trecut

Teorema 2. *Pentru* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avemi* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstraţie: Folosim formula Laplace. Fie $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Rezultă din exerciţiul (2) de la sfârşitul cursului 1 că $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ şi $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$, adunăm la $C_{n+j}(C)$ următoarea combinaţie liniară $b_{1j}C_1(C) + b_{2j}C_2(C) + \ldots + b_{nj}C_n(C) = \begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \cdot C_j(B)$. $\begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ iar $C_j(B) \in \mathcal{M}_{n,1}$. Făcând combinaţia liniară de mai sus, pe primele n linii ale coloanei $n+j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, ale noii matrice vom avea $0 + A \cdot C_j(B)$, iar pe ultimele n linii vom avea $C_j(B) + (-I_n) \cdot C_j(B)$.

Deci în urma acestor combinaţii liniare cu coloane obţinem matricea

$C' = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Am obţinut C' prin combinaţii liniare cu coloane, deci $\det(C) = \det(C') = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B)\det(-I_n) =$ (vezi exerciţiul (3) de la sfârşitul cursului 1) $= (-1)^{n^2}(-1)^n \det(A \cdot B) = (-1)^{n^2+n}\det(A \cdot B) = (-1)^{n(n+1)}\det(A \cdot B) = \det(A \cdot B)$. De aici egalitatea dorită.

$\square$

Corolarul 3. *Pentru* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avem* $\det(AB) = \det(BA)$.

Demonstraţie: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

□

Corolarul 4. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *inversabilă şi* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Atunci* $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$.

Demonstraţie: $\det(AXA^{-1}) = \det(A^{-1}AX) = \det(I_nX) = \det(X)$. □

Ultimul rezultat legat de determinanţi pe care îl voi menţiona este

Teorema 5 (Binet-Cauchy)**.** *Fie* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R}), k \leqslant \min\{n, p, r\}$, $I = \{i_1, \dots i_k\} \subset [n]$ *şi* $L = \{l_1, \dots l_k\} \subset [r]$. *Atunci*

$$\det(A \cdot B)_{I,L} = \sum_{\substack{J \subset [p] \\ |J| = k}} \det(A_{I,J}) \det(B_{J,K})$$

Acest rezultat se foloseşte **esenţial** în demonstraţia teoremei matrice-arbore pe care am enunţat-o cursul trecut.

Observaţia 6. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. Voi da un exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\det(A + B) = 0 \neq 2 = 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

Voi introduce o altă funcţie pe mulţimea matricelor pătrate.

Definiţia 7. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Urma* matricii $A, \operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

Avem deci $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. De exemplu $\operatorname{tr}(I_n) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.
Voi enumera proprietăţile de bază

- este clar că $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
- $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
  $\operatorname{tr}(\alpha A) = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{jj}) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{jj} = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{kj} b_{jk}) =$
  $= \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj}) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA)$.
- $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversabilă. Din proprietatea anterioară rezultă
  $\operatorname{tr}(AXA^{-1}) = \operatorname{tr}(X)$.

Exemplul 8. Să se demonstreze că NU există $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ a.î. $AB - BA = I_n$. Presupunem că ar exista două astfel de matrice A, B, atunci $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = n \Leftrightarrow 0 = n$. O contradicţie.

Spaţii vectoriale

Definiţia 9. Un spaţiu vectorial peste un corp comutativ $\mathbb{K}$ (vom lucra peste $\mathbb{R}$) este un grup abelian (comutativ) $(V, +)$ ce are şi o multiplicare externă cu scalari din $\mathbb{K}$ ($(\alpha, v) \longmapsto \alpha v \in V$, cu $\alpha \in \mathbb{K}$ şi $v \in V$), înmulţire ce îndeplineşte următoarele proprietăţi:

(1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$,
(2) $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(3) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1\alpha_2)v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(4) $1 \cdot v = v$.

De aici înainte toate consideraţiile vor fi făcute pentru corpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Elementele din V se numesc vectori iar cele din $\mathbb{R}$ se numesc scalari.

Exemple:

(1) 0
(2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$
(3) $\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R}\}$

Pentru $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, adunarea este $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

şi înmulţirea cu scalari $\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Opusul unui vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ este obţinut schimbând semnul pe fiecare coordonotă.

(4) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n} | a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$. Operaţiile sunt cele prezentate în primul curs, adunarea matricelor şi înmulţirea acestora cu scalari.

$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} | a_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^m.$

Similar $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} | a_j \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$.

(5) $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = \mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n.

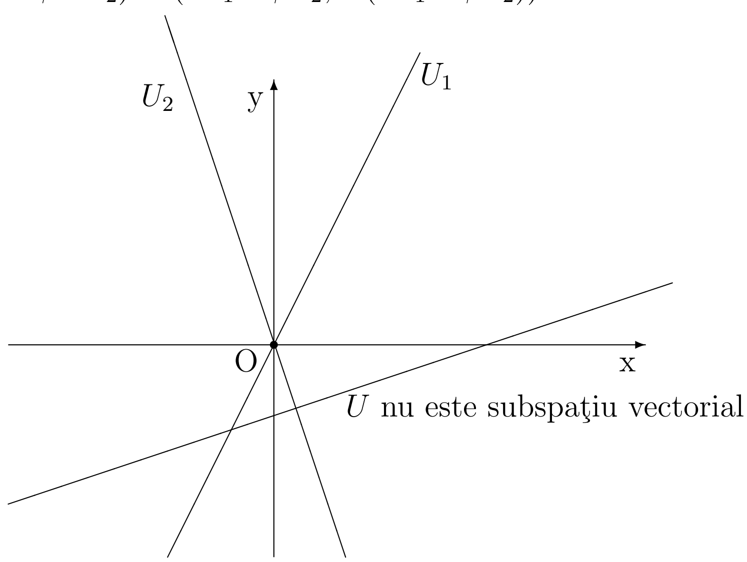
Suma şi respectiv înmulţirea cu scalari sunt cele obişnuite.

(6) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie}\}$ unde X este o mulţime nevidă.
Operaţiile sunt: fie $f, g \in \mathcal{F}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ptr. $x \in X$, iar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, pentru $x \in X$.
(7) $\mathcal{C}((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie continuă}\}$
(8) $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie continuă cu f' continuă}\}$.

Definiţia 10. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, $U \subset V$ se numeşte subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă pentru $(\forall) v_1, v_2 \in U$ şi pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$.

Observaţia 11. O condiţie necesară pentru o submulţime U a spaţiului vectorial V să fie subspaţiu vectorial este ca $0 \in U$, unde 0 este elementul neutru din V.

Exemplul 12. Considerăm $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ şi $U = \{(x, mx) | x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid y = mx, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
Să vedem că într-adevăr avem un subspaţiu vectorial.
Fie $v_1 = (x_1, mx_1), v_2 = (x_2, mx_2) \in U$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Avem $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(x_1, mx_1) + \beta(x_2, mx_2) = (\alpha x_1, \alpha m x_1) + (\beta x_2, \beta m x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha m x_1 + \beta m x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, m(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in U$.



U din figura de mai sus nu este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^2$, nu conţine originea. Pe de altă parte, U_1 şi U_2 sunt. Cele două linii U_1 şi U_2 sunt reprezentări grafice pentru aceste subspaţii. U_1 este o dreaptă de pantă pozitivă, pe când, U_2 are panta negativă.

Observaţia 13. Fie $(V_i)_{i \in I}$ subspaţii vectoriale ale unui $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial V . Atunci $\bigcap_{i \in I} V_i$ este un subspaţiu vectorial a lui V.

Demonstraţie: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $v_1, v_2 \in \bigcap_{i\in I} V_i$. Din definiţia intersecţiei rezultă că $v_1, v_2 \in V_i, (\forall) i \in I$. Dar V_i sunt subspaţii vectoriale, deci $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_i$ pentru $(\forall) i \in I$, deci $(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \bigcap_{i\in I} V_i$.

□

Definiţia 14. Fie $S \subset V$, submulţime. Notăm

$$< S > = \bigcap_{\substack{W \text{ subspaţiu în} V \\ S \subset W}} W$$

intersecţia tuturor subspaţiilor lui V ce conţin pe S. $< S >$ se numeşte subspaţiul generat de mulţimea S.

Se observă că $< \phi >= 0$.
$< S >$ se descrie astfel:
$< S >= \{a_1 v_1 + \ldots a_n v_n | n \in \mathbb{N}^\star, v_1, \ldots, v_n \in S, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$
Mai mult dacă $(V_i)_{i\in I}$ sunt subspaţii în V, cu $I \neq \phi$, atunci

$$< \bigcup_{i\in I} V_i >= \{x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} | n \in \mathbb{N}^\star, i_1, \ldots, i_n \in I, x_{i_j} \in V_{i_j}\}$$

este cel mai mic spubspaţiu care include toate V_i- urile, şi se notează $\sum_{i\in I} V_i$. Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $\sum_{i\in I} V_i = V_1 + \ldots + V_n$.

Definiţia 15. $S \subset V$ se numeşte sistem de generatori pentru V dacă $< S >= V$.

Exemplul 16. Fie $S = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. După cum am menţionat mai sus, $< S >$ este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ai vectorilor v_1, v_2 cu coeficienţi în $\mathbb{R}$, deci $< S >= \{\alpha v_1 + \beta v_2 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Să demonstrăm că $< S >= \mathbb{R}^2$. $< S >\subset \mathbb{R}^2$ prin definiţie. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ atunci $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) \in< S >$. Avem deci egalitate şi astfel S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 4
Spaţii vectoriale. Bază

Voi începe cu o noţiune pe care am întâlnit-o în cursul trecut. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

Definiţia 1. Considerăm $S \subset V$. Numim *combinaţie liniară* de elemente din S orice sumă de tipul $\sum_{i\in I}\alpha_i v_i$, cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$ şi $v_i \in S$. Dacă $|I| = n < \infty$, atunci combinaţia liniară finită se scrie $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Sistem de generatori este $S \subset V$ pentru care $< S >= V$. Acest lucru înseamnă că orice $v \in V$, se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S.

Observaţia 2. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $S \subset V$ un sistem de generatori pentru V.

(1) Dacă $S \subset S' \Longrightarrow S'$ este sistem de generatori.
(2) Dacă $S \subset < S' > \Longrightarrow S'$ este sistem de generatori.

Exemplul 3. (1) $\mathbb{R}[X]_n = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali. Orice polinom de grad cel mult n este o combinaţie liniară cu coeficienţi reali de elemente din $\mathcal{B} = \{X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1\}$, deci $\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_n$.

(2) În particular pentru $n = 3$, $\mathbb{R}[X]_3 = \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$. De exemplu $X + 1 = 0X^3 + 0X^2 + 1X + 1$.

Definiţia 4. $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ se numesc vectori *liniar independenţi* dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară nulă de aceşti vectori este trivială.

Definiţia de mai sus se scrie: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ liniar independenţi dacă şi numai dacă $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_kv_k = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0 \in \mathbb{R}$

Observaţia 5. (1) $(\forall)v \in V\backslash\{0_V\}$ este liniar independent. $a \cdot v = 0_V \Rightarrow a = 0$.

(2) 0_V NU este liniar independent . Pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^\star, a \cdot 0_V = 0_V$. Mai mult 0_V nu face parte dintr-un sistem de vectori liniar independenţi. Fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, 0_V\}$ un sistem de vectori ce conţine vectorul 0_V. Pentru $(\forall)a \in \mathbb{R}^\star$ avem combinaţia liniară nulă $0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k + a0_V = 0_V$, în care avem un coeficient nenul.

(3) Dacă $F \subset V$ este o mulţime de vectori liniar independenţi în V şi $F' \subset F \Rightarrow$ F' este mulţime de vectori liniar independenţi

Definiţia 6. Numim *bază* a spaţiului vectorial V un sistem de vectori $\{v_1, \ldots, v_p\}$ care este atât liniar independent cât şi sistem de generatori pentru V.

Exemplul 7. (1) $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$ este bază pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Am văzut în **exemplul 3** (2) că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Verificăm faptul că este sistem de vectori liniar independenţi.

Considerăm $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_01 = 0 \in \mathbb{R}[X]_3$. În membrul drept avem polinomul nul iar egalitatea înseamnă că cele două polinoame sunt identice, rezultă faptul că au aceeaşi coeficienţi. Deci $a_j = 0, 0 \leqslant j \leqslant 3$.

(2) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ Considerăm $\mathcal{B} = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Arătăm că este bază pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Considerăm un element arbitrar din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Deci $\mathcal{B}$ este sistem de generatori.

Dacă $aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

Aşadar $\mathcal{B}$ este şi sistem liniar independent, şi deci bază.

(3) Considerăm acum $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, unde $E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pe poziţia (i, j)} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$ Se demonstrează ca şi în exemplul anterior că $\mathcal{B}$ este bază pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Se pun două întrebări fireşti :

1. Dacă există bază a unui spaţiu vectorial V.

2. Ce legătură este între două baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial ?

Vis-a-vis de prima întrebare avem următoarea

Teorema 8. *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$, F un sistem de vectori liniar independenţi şi S un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V, cu $F \subset S$. Atunci există o bază $\mathcal{B}$ a lui V a.î. $F \subset \mathcal{B} \subset S$.*

Pentru orice spaţiu vectorial există sisteme de vectori liniar independenţi, de exemplu, $(\forall)v \neq 0_V$ (**observaţia 5** (1)).

Corolarul 9. (1) *F liniar independent în $V \Rightarrow (\exists)$ bază $\mathcal{B}$ cu $F \subset \mathcal{B}$.*

(2) *S sistem de generatori în $V \Rightarrow (\exists)$ bază $\mathcal{B}$ cu $\mathcal{B} \subset S$.*

(3) *Orice spaţiu vectorial are o bază.*

La a doua întrebare răspunsul este dat de

Teorema 10. *Fie V un spaţiu vectorial şi $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ baze pentru V. Atunci $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ (există deci o bijecţie $f : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$).*

Exemplul 11. $\mathbb{R}[X]_2 = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$. Avem baza $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$. prezentată anterior. Să verificăm că $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$ este bază .

Sistem de generatori: exprimăm elementele din $\mathcal{B}_1$ ca nişte combinaţii liniare de vectorii din $\mathcal{B}_2$ şi aplicăm **observaţia 2** (2), pentru $S = \mathcal{B}_1$ şi $S' = \mathcal{B}_2$.

Considerăm $X \in \mathcal{B}_1$, $X = 1 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1) \in < \mathcal{B}_2 >$.

Similar $X^2 \in \mathcal{B}_2, X^2 = 1 \cdot (X-1)^2 + 2 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1$, de unde $X^2 \in < \mathcal{B}_2 >$. Din observaţia mai sus menţionată rezultă $\mathcal{B}_2$ este sistem de generatori.

Sistem liniar independent: considerăm $a_1(X-1)^2 + a_2(X-1) + a_3 \cdot 1 = 0$, unde 0 este polinomul nul.

Identificând coeficienţii termenilor $X^2, X, 1$ rezultă: $\begin{cases} a_1 & = 0 \\ -2a_1 + a_2 & = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$..

Vedem în acest exemplu că $|B_1| = |\mathcal{B}_2| = 3$.

Pentru că oricare două baze într-un spaţiu vectorial V au acelaşi cardinal putem da

Definiţia 12. Fie V un spaţiu vectorial. Numim *dimensiunea spaţiului vectorial* V şi notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze $\mathcal{B}$ a lui V.

Observaţia 13.
(1) $\dim_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Baza spaţiului vectorial 0 este ϕ (mulţimea vidă).
(2) $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, o bază fiind descrisă în **exemplul 7** (2). Pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avem $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$, o bază fiind specificată în **exemplul 7** (3).
(3) $\dim(\mathbb{R}[X]_2) = 3$, o bază fiind $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$ sau $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$.

Definiţia 14. Fie $\{V\}_{i\in I}$ subspaţii ale spaţiului vectorial V. Notăm $< \bigcup_{i\in I} V_i >$, subspaţiul generat de reuniunea subspaţiilor V_i, cu $\sum_{i\in I} V_i$ şi numim acest subspaţiu, suma subspaţiilor V_i.

Deci $\sum_{i\in I} V_i = \{\underbrace{v_{i_1} + v_{i_2} + \ldots + v_{i_k}}_{\text{finită}} \mid v_{i_j} \in V_{i_j}\}$.

Teorema 15 (teorema Grassmann)**.** *Fie V un spaţiu vectorial şi U_1, U_2 subspaţii ale sale. Atunci* $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Observaţia 16. Acest rezultat este o manifestare a principiului includerii-excluderii. Acesta este: dacă A, B sunt mulţimi finite, atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. În demonstraţia teoremei A şi B sunt baze pentru U_1 şi respectiv U_2.

Morfisme de spaţii vectoriale

Definiţia 17. Se numeşte morfism de spaţii vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcţie omogenă şi aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v \in V$.

Propoziţia 18. *$f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$ avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.*

Observaţia 19. *$f : V \longrightarrow W$ morfism, atunci $f(0_V) = 0_W$.*

Exemplul 20. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Să demonstrăm că este morfism.

Fie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = \alpha \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spaţii vectoriale reale şi $U \subset V$ un subspaţiu vectorial. Atunci $f(U)$ este subspaţiu în W.

În particular $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(v)|v \in V\}$, *imaginea morfismului f* este subspaţiu în W.

Demonstraţie: Fie $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow (\exists)\ v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = w_1$ şi $f(v_2) = w_2$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$. Ultima egalitate are loc pentru că f este morfism. $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ şi astfel am arătat că $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \mathrm{Im}(f)$, adică $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în W.

$\square$

Dacă $Y \subset W$ este un subspaţiu în W, atunci $f^{-1}(Y) = \{v \in V \mid f(v) \in Y\}$ este subspaţiu vectorial în V.

În particular $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_W) = \{v \in V|f(v) = 0_W\}$, *nucleul morfismului f*, este subspaţiu în V. Demonstrăm acest lucru.

Demonstraţie: Fie $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha 0_W + \beta 0_W = 0_W \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

$\square$

Teorema 21 (rang-defect)**.** *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci* $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ se numeşte *rangul* aplicaţiei f, şi $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ *defectul* lui f.

Demonstraţie: $\mathrm{Ker}(f) \subset V$. $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) < \infty$. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ bază pentru $\mathrm{Ker}(f)$. Completăm la o bază pentru V. Fie $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ această bază. Demonstrăm că $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este bază pentru $\mathrm{Im}(f)$.

Considerăm $w \in \mathrm{Im}(f)$ arbitrar. $(\exists) v \in V$ a.î. $f(v) = w$.

Dar $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ este bază pentru V, deci $(\exists)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n$.

Atunci $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(u_n) = \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(u_n)$, pentru că $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Ker}(f)$. Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este sistem de generatori.

Considerăm acum $\beta_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \beta_n f(u_n) = 0_W \Leftrightarrow f(\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n) = 0_W \Leftrightarrow \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n \in \mathrm{Ker}(f)$. $\{v_1, \dots v_k\}$ bază în $\mathrm{Ker}(f)$. Deci $(\exists)\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ a.î. $\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k \Leftrightarrow \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k - \beta_{k+1} u_{k+1} - \dots - \beta_n u_n = 0_V \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$. Ultima implicaţie are loc datorită faptului că $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ este bază în V. Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este sistem liniar independent. $\square$

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecţia 5
Spaţii vectoriale factor, teoreme de izomorfism, sume directe

În cursul anterior am definit noţiunile de sistem de generatori, sistem de vectori liniar independenţi cât şi noţiunea de bază pentru un spaţiu vectorial. Reamintesc faptul că lucrăm cu spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Am enunţat două teoreme care spun că fiecare spaţiu vectorial are o bază şi respectiv oricare două baze ale unui spaţiu vectorial au acelaşi cardinal.

Definiţia 1. Fie V un spaţiu vectorial. Numim *dimensiunea spaţiului vectorial* V şi notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze $\mathcal{B}$ a lui V.

Am enunţat

Teorema 2 (teorema Grassmann)**.** *Fie V un spaţiu vectorial şi X şi Y subspaţii ale sale. Atunci* $\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$.

Observaţia 3. Teorema Grassmann este o versiune a principiului includerii-excluderii: pentru două mulţimi finite A, B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

O demonstraţie a teoremei Grassmann se face aşa: se alege o bază $\mathcal{B}$ a subspaţiului $X \cap Y$ şi se completează atât la o bază $\mathcal{B}_1$ a lui X cât şi la una $\mathcal{B}_2$ a lui Y. Se demonstrează că $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ este bază a spaţiului $X + Y$.

Definiţia 4. Se numeşte morfism de spaţii vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcţie omogenă şi aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v \in V$.

Am enunţat

Propoziţia 5. *$f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi $v_1, v_2 \in V$, $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.*

Asociate unui morfism $f : V \longrightarrow W$ de spaţii vectoriale avem următoarele subspaţii: *nucleul morfismului* f, $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0_W\} = f^{-1}(0_W)$, şi *imaginea morfismului* f, $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(v) | v \in V\}$. $\mathrm{Ker}(f)$ este subspaţiu în V, iar $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în W.

Teorema 6 (rang-defect). *Fie* $f : V \longrightarrow W$ *morfism de spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci* $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ se numeşte *rangul* aplicaţiei f, şi $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ *defectul* lui f.

Observăm că f este injectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0_V$ şi f este surjectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = W$.

Exemplul 7. Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\binom{x}{y} = x + y$. Să determinăm $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ şi o bază pentru acest subspaţiu.

Este uşor de arătat că f este morfism de spaţii vectoriale.

f este surjectiv: $(\forall)x \in \mathbb{R}, x = f\binom{x}{0}$; deci $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Din **teorema 6** şi din faptul că $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, rezultă că $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Să găsim o bază pentru $\mathrm{Ker}(f)$.

Nucleul aplicaţiei f este mulţimea $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | f\binom{x}{y} = 0\} = \{\binom{x}{y} | x + y = 0\} = \{\binom{x}{y} | y = -x\} = \{\binom{x}{-x} | x \in \mathbb{R}\}$. Bază pentru acest spaţiu este $v = \binom{1}{-1}$. Este liniar independent fiind un vector nenul. Este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Ker}(f)$ pentru că $\binom{x}{-x} = x \cdot \binom{1}{-1}, x \in \mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică a subspaţiului vectorial $\mathrm{Ker}(f)$ este a două bisectoare a axelor de coordonate din $\mathbb{R}^2$, o dreaptă ce trece prin origine. Şi de aici se vede că această submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ verifică condiţia necesară de a fi subspaţiu, conţine 0.

Avem

Propoziţia 8. *Fie* $f : V \longrightarrow W$ *morfism de spaţii vectoriale. Atunci*

(1) $X \subset V$, *subspaţiu* $\Rightarrow f(X)$ *subspaţiu în* W*; în particular* $\mathrm{Im}(f)$ *imaginea lui* f*, este subspaţiu în* W.

(2) $Y \subset W$, *subspaţiu* $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ *subspaţiu în* V*, în particular* $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ *este subspaţiu în* V.

Demonstraţie: Voi demonstra punctul (1). Fie X subspaţiu în $V, w_1, w_2 \in f(X)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\exists)v_1, v_2 \in X$ a.î. $f(v_j) = w_j, j = 1, 2$. Atunci $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(w_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in f(X)$. Deci $f(X)$ este subspaţiu vectorial în W.

Similar se demonstrează punctul (2).

□

Din **propoziţia 8** există o corespondenţă bijectivă între
$\{X \subset V | X \text{ subspaţiu şi } \mathrm{Ker}(f) \subset X\}$ şi $\{Y \subset W | Y \text{ subspaţiu în } W\}$, dată de
$X \mapsto f(X)$ şi $Y \mapsto f^{-1}(Y)$.

Spaţii vectoriale factor

Fie V un spaţiu vectorial şi X un subspaţiu al său. Pentru că V este grup abelian atunci X este subgrup normal şi deci putem forma grupul factor $V/X = \{\widehat{v} | v \in V\}$, unde $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X$.

Operaţia de adunare pe V/X este: $\hat{v_1} + \hat{v_2} = \widehat{v_1 + v_2}$, iar $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \hat{v}$ (proiecţia canonică) este morfism surjectiv de grupuri abeliene.

V/X are structura de $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial, unde înmulţirea cu scalari este $\alpha \cdot \hat{v} = \widehat{\alpha \cdot v}, (\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$.

Operaţia externă este corect definită: $\hat{v_1} = \hat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in X \Rightarrow \alpha v_1 - \alpha v_2 \in X \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$.

V/X devine $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial (de verificat axiomele).

În plus, $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \hat{v}$ este morfism de spaţii vectoriale.

Avem $\pi(v_1 + v_2) = \widehat{v_1 + v_2} = \hat{v_1} + \hat{v_2} = \pi(v_1) + \pi(v_2)$ şi $\pi(\alpha v) = \widehat{\alpha v} = \alpha\hat{v} = \alpha\pi(v)$.

V/X se numeşte *spaţiul vectorial factor al lui V în raport cu X*.

Teorema 9 (teorema fundamentală de izomorfism). *Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spaţii vectoriale. Atunci există un izomorfism de spaţii vectoriale $V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.*

Demonstraţie: Din demonstraţia teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri ştim că aplicaţia $\overline{f} : V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$, $\overline{f}(\hat{v}) = f(v), v \in V$ este corect definită şi este izomorfism de grupuri.

În plus $\overline{f}(\alpha\hat{v}) = \overline{f}(\widehat{\alpha v}) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\overline{f}(\hat{v})$. Deci $\overline{f}$ este chiar izomorfism de spaţii vectoriale.

□

Dacă V/X este un spaţiu vectorial factor, atunci morfismul $\pi : V \longrightarrow V/X$ induce o bijecţie între subspaţiile vectoriale $U \subset V$ a.î. $X \subset U$ şi subspaţiile lui V/X, dat de $U \longmapsto \pi(U) = U/X = \{\hat{x} | x \in U\}$

Teorema 10 (teorema I-a de izomorfism). *Fie V un spaţiu vectorial, X şi U subspaţii cu $X \subset U$. Atunci $\frac{V/X}{U/X} \cong V/U$.*

Demonstraţie: Fie $f : V/X \to V/U$, $f(\hat{v}) = \overline{v}$, unde $\hat{v}$ este clasa modulo X iar $\overline{v}$ este clasa modulo U. f este corect definită: $\hat{v_1} = \hat{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \Rightarrow \overline{v_1} = \overline{v_2}$. Se verifică uşor că f este morfism de spaţii vectoriale. Este clar că f este surjectiv, $f(V/X) = V/U$.

$\operatorname{Ker}(f) = \{\hat{v} | \overline{v} = \overline{0}\} = \{\hat{v} | v \in U\} = U/X$. Concluzia rezultă din **teorema 9**.

□

Teorema 11 (teorema II-a de izomorfism). *Fie V un spaţiu vectorial şi U şi X subspaţii ale sale. Atunci $(U + X)/U \cong X/(X \cap U)$.*

Demonstraţie: Definim $f : X \to (U + X)/U, f(v) = \hat{v}$, (clasa modulo U). Este clar că f este morfism de spaţii vectoriale.

f surjectiv: fie $\widehat{u + x} \in (U + X)/U$. $\widehat{u + x} = \hat{u} + \hat{x} = \hat{x} = f(x)$, pentru $u \in U$ şi $x \in X$.

Pentru $x \in X, x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{0} \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x \in U \cap X$. Deci $\mathrm{Ker}(f) = U \cap X$. Folosind **teorema 9** rezultă afirmaţia din enunţ.

$\square$

Propoziţia 12. *Fie V un spaţiu vectorial real finit dimensional şi X un subspaţiu al său. Atunci* $\dim(V/X) = \dim(V) - \dim(X)$.

Demonstraţie: Considerăm $\pi : V \to V/X$, $\pi(x) = \widehat{x}$. $\mathrm{Ker}(\pi) = X$. Aplicăm **teorema 6** morfismului π, care este surjectiv. Avem $\dim(V) = \dim(V/X) + \dim(X)$, de unde concluzia.

$\square$

Observaţia 13. Teorema 2 se poate demonstra folosind **teorema 11** şi **propoziţia 12**

Spaţiul morfismelor între două spaţii vectoriale

Fie ca şi mai sus V, W două spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale. Notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W | f\ morfism\}$, mulţimea morfismelor spaţiilor vectoriale V şi W.

Propoziţia 14. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ *este un spaţiu vectorial real.*

Demonstraţie: Fie $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $\alpha f + \beta g$ este morfism de spaţii vectoriale. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ şi $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha f + \beta g)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha f(a_1 v_1 + a_2 v_2) + \beta g(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha a_1 f(v_1) + \alpha a_2 f(v_2) + \beta a_1 g(v_1) + \beta a_2 g(v_2) = a_1(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)) + a_2(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)) = a_1(\alpha f + \beta g)(v_1) + a_2(\alpha f + \beta g)(v_2)$.

Deci conform **propoziţiei 5** $(\alpha f + \beta g) \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$\square$

Spaţii duale

Un caz particular al spaţiului morfismelor între două spaţii vectoriale este pentru $W = \mathbb{R}$.

Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial. Notăm cu $V^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Morfismele de la V la $\mathbb{R}$ se numesc şi funcţionale liniare. Pe mulţimea acestor funţionale liniare avem operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari.

- $(f + g)(v) = f(v) + g(v), (\forall) v \in V, f, g \in V^\star$
- $(\alpha f)(v) = \alpha f(v), (\forall) v \in V, f \in V^\star, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale, atunci $f^\star : W^\star \longrightarrow V^\star$ prin $f^\star(w^\star) = w^\star \circ f$ pentru orice $w^\star \in W^\star$.

Avem următoarele proprietăţi:

(1) fie $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morisme de spaţii vectoriale, atunci $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.
(2) dacă $1_V : V \longrightarrow V$ este morfismul identic, atunci $(1_V)^\star = 1_{V^\star}$.
(3) dacă $f : V \longrightarrow W$ este izomorfism, atunci şi $f^\star$ este izomorfism.

Propoziţia 15. *Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial de dimensiune finită n. Atunci* $\dim(V^\star) = n$.

Demonstraţie: Fie $(e_i)_{i=1,n}$ bază a spaţiului vectorial V. Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$ considerăm $e_i^\star \in V^\star$, definite prin $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}, (\forall) j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{i,j}$ este simbolul lui Kronecker. $\left(\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\right)$.

Arătăm că $(e_i^\star)_{i=1,n}$ este bază a spaţiului vectorial $V^\star$.

- liniar independenţa: fie $a_j \in \mathbb{R}$ şi considerăm $a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star = 0$, funcţionala liniară nulă. Atunci pentru $(\forall) i = \overline{1,n}$, $(a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star)(e_i) = 0 \Leftrightarrow a_i \cdot 1 = 0$.

- sistem de generatori: fie $f \in V^\star$, cu $f(e_i) = b_i \in \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$. Atunci $f = b_1 e_1^\star + \cdots + b_n e_n^\star$. Se verifică egalitatea pentru orice vector e_i din baza lui V.

$\square$

Observaţia 16. *Baza din* **propoziţia 15** *se numeşte baza duală bazei* $(e_i)_{i=1,n}$.

Sume directe externe

Dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ spaţii vectoriale, atunci suma lor directă este $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari pe componente.

Mai precis:

- $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots v_n + w_n)$, unde $v_j, w_j \in V_j$, pentru $(\forall) j = 1, n$.
- $\alpha \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$

Se mai notează cu $\bigoplus_{i=1,n} V_i$.

Pentru fiecare $j = 1, n$, definim

- $q_j : V_j \longrightarrow \bigoplus_{i=1,n} V_i$, $q_j(v) = (0, \ldots, v, \ldots 0)$, cu v pe poziţia j. q_j este morfism injectiv.
- $\pi_j : \bigoplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow V_j$, $\pi(v_1, \ldots, v_n) = v_i$. π_j este morfism surjectiv.

Propoziţia 17. *Fie V_1, V_2 spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demonstraţie: $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$ este morfism surjectiv de spaţii vectoriale. $\mathrm{Ker}(\pi_1) = 0 \oplus V_2 = q_2(V_2) \cong V_2$ (pentru că q_2 este injectiv). Din **teorema 9** rezultă că $V_1 \oplus V_2 / 0 \oplus V_2 \cong V_1$. Din **teorema 6** rezultă că $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

$\square$

Corolarul 18. *Dacă avem spaţiile vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_n$ finit dimensionale, atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_n)$$

unde $n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant 2$.

Sume directe interne

Fie V spaţiu şi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subspaţii în V. Spunem că V este suma directă internă a familiei $\{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$, dacă

- $V = V_1 + \ldots + V_n$
- pentru orice $i : V_i \cap (\sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} V_j) = 0$.

(aceste două condiţii sunt echivalente cu faptul că orice $v \in V$ se exprimă în mod unic ca $v = v_1 + \ldots + v_n$ cu $v_i \in V_i, \forall i$).

În acest caz scriem $V = V_1 \dot{\oplus} V_2 \dot{\oplus} \ldots \dot{\oplus} V_n$, sau $V = \dot{\bigoplus}_{i=\overline{1,n}} V_i$.

Observaţia 19. Dacă $V = \dot{\bigoplus}_{i=\overline{1,n}} V_i$, atunci $\dot{\bigoplus}_{i=\overline{1,n}} V_i \cong \oplus_{i=\overline{1,n}} V_i$, deoarece aplicaţia $f : \oplus_{i=\overline{1,n}} V_i \longrightarrow \dot{\bigoplus}_{i=\overline{1,n}} V_i$, definită prin $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ este izomorfism de spaţii vectoriale. În particular $\dim(\dot{\bigoplus}_{i=\overline{1,n}} V_i) = \dim(\oplus_{i=\overline{1,n}} V_i)$. Mai mult, dacă $\mathcal{B}_i$ e bază în V_i pentru fiecare $i = \overline{1,n}$, atunci $\cup_{i=\overline{1,n}} \mathcal{B}_i$ este bază în V.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 6
Sisteme de ecuaţii

Pentru a începe să discutăm despre rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, vom introduce în cele ce urmează rangul unei matrice.

Definiţia 1. Se numeşte *rangul* matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), A \neq 0_{m,n}$, ordinul maxim al unui minor nenul al matricii A . Vom nota rangul cu $\text{rang}(A)$. Prin convenţie $\text{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Aşadar $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţii minorii de ordin mai mare (dacă există) sunt nuli.

Observaţia 2. (1) $\text{rang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$
(2) $\text{rang}({}^tA) = \text{rang}(A)$
(3) $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ nuli.

Demonstraţie: "$\Rightarrow$ "Clar. "$\Leftarrow$" Din formula Laplace, un minor de ordin $s > r+1$, deci e nul. Sau altfel: Folosind dezvoltarea după o linie, rezultă că orice minor de ordin $r+2$ e combinaţie liniară de ordin $r+1$, deci nul, şi aşa mai departe prin inducţie.

$\square$

(4) $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ ptr. orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.

Demonstraţie: Din formula Binet-Cauchy un minor de ordin r a matricei $A \cdot B$ este o combinaţie liniară de minori de ordin r ai matricei A (respectiv B), deci $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \text{rang}(A)$ şi $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \text{rang}(B)$.

$\square$

(5) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), U \in \mathcal{M}_m(R)$ inversabilă şi $V \in \mathcal{M}_n(R)$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A) = \text{rang}(A \cdot V)$.

Demonstraţie: $\text{rang}(U \cdot A) \leqslant \min\{\text{rang}(U), \text{rang}(A)\} \leqslant \text{rang}(A)$ şi $\text{rang}(A) = \text{rang}(U^{-1}(U \cdot A)) \leqslant \text{rang}(U \cdot A)$. Din cele două inegalităţi ne rezultă prima egalitate. Similar se demonstrează şi a două egalitate.

$\square$

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Notăm cu $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ coloanele matricei A. $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$.

Teorema 3 (Kronecker)**.** $\operatorname{rang}(A) = \dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$

Deci teorema Kronecker ne spune că $\operatorname{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea spaţiului generat de coloanele matricei A. Acest spaţiu este un subspaţiu în $\mathbb{R}^m$.

Demonstraţie: Dacă $A = 0$, este clar. Presupunem $A \neq 0$. Fie $r \in \mathbb{N}^\star$ a.î. există un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin $r+1$ care-l bordează, (în caz că există) sunt nuli. Arătăm că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$. Cum $\operatorname{rang}(A)$ este un astfel de r, va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= \operatorname{rang}(A)$. În plus, rezultă că orice astfel de r este egal cu $\operatorname{rang}(A)$.

Fără a restrânge generaliatea putem presupune că minorul Δ aflat la intersecţia primelor r linii cu primele r coloane din A este nenul. Atunci $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente. Altfel, am avea o relaţie de tipul $C_j(A) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j} \alpha_i C_i(A)$, pentru nişte $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j}$. Notând cu $\widetilde{C_i(A)}$ coloana de lungime r obţinută luând primele r linii din $C_i(A)$, obţinem $\widetilde{C_j(A)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j} \alpha_i \widetilde{C_i(A)}$, deci în Δ o coloană este combinaţie de celelalte coloane, deunde $\Delta = 0$, o contradicţie. Deci coloanele $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente de unde $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) > \geqslant r$.

Arătăm că $C_j(A) \in < C_1(A), \ldots, C_r(A) >$ pentru orice $j > r$, de unde va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$.

Fie $j > r$ c si $1 \leqslant i \leqslant m$. Atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$ deoarece pentru $1 \leqslant i \leqslant r$ acest determinant are două linii (i şi $r+1$) egale, iar pentru $i > r$ e un minor de ordin $r+1$ care bordează Δ.

Dezvoltând după ultima linie rezultă $d_1 \cdot a_{i1} + \ldots + d_r \cdot a_{ir} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$, iar $d_1, \ldots d_r$ sunt nişte complemenţi algebrici ce nu depind de i.

Obţinem că $a_{ij} = -\Delta^{-1} d_1 a_{i1} - \ldots - \Delta^{-1} d_r a_{ir}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, de unde $C_j(A) = -\Delta^{-1} d_1 C_1(A) - \ldots - \Delta^{-1} d_r C_r(A)$, ceea ce doream.

□

Teorema 4 (versiunea pe linii a teoremei Kronecker)**.** $\operatorname{rang}(A) = \dim < L_1(A), \ldots, L_m(A) >$, *unde $L_i(A)$ sunt liniile matricei A, $L_i(A) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie: Rezultă din faptul că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}({}^tA)$.

□

Corolarul 5 (al demonstraţiei teoremei Kronecker)**.** *Dacă pentru matricea A există un minor de ordin r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ care-l bordează sunt nuli, atunci* $\mathrm{rang}(A) = r$.

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Sistemul scris mai sus este un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloana termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Sistemul (1) se poate scrie sub formă matriceală $AX = B$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e matricea necunoscutelor.

Considerăm şi matricea extinsă,

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}).$$

care se obţine din matricea A adăugând coloana $n+1$ formată din membrii drepţi ai sistemului. Fiecare coloană este un vector în $\mathbb{R}^m$.

Definiţia 6. Se numeşte *soluţie* a sistemului de mai sus un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ care verifică toate ecuaţiile sistemului.

Un sistem care admite cel puţin o soluţie se numeţe *compatibil*. Altfel acesta se numeşte *incompatibil*.

Teorema 7 (Kronecker-Capelli). *Sistemul* (1) *este compatibil dacă şi numai dacă* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$.

Demonstraţie: Observăm că $AX = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A)$, deci sistemul (1) este echivalent cu $x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) = B$.

"$\Rightarrow$" Dacă sistemul (1) este compatibil, fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ o soluţie. Atunci $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$ şi deci $< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >= < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Avem $\dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >)$, şi din teorema Kronecker rezultă $\text{rang}(A^e) = \text{rang}(A)$.

"$\Leftarrow$" Avem $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) \Rightarrow \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >)$. Dar $< C_1(A), \ldots, C_n(A) > \subset < C_1(A), \ldots, C_n(A), B >$, şi pentru că avem egalitate de dimensiuni atunci avem egalitatea spaţiilor. Rezultă că $B \in < C_1(A), \ldots, C_n(A)$, adică există $x_1, \ldots, x_n$ a.î. $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \Rightarrow x_1, \ldots, x_n$ este soluţie a sistemului (1) .

□

Cum se rezolvă sistemul (1) atunci când $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$?

Voi prezenta în continuare metoda eliminării Gauss-Jordan.

Observăm că un sistem liniar peste corpul $\mathbb{R}$ este echivalent (adică are aceleaşi soluţii) cu un sistem obţinut prin aplicarea de un număr finit de ori a unor operaţii de tipul:

- permutarea a două ecuaţii
- înmulţirea unei ecuaţii cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^\star$
- adunarea la o ecuaţie a unei alte ecuaţii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

Pentru sistemul (1) scris sub forma matriceală $AX = B$, aceste operaţii înseamnă:

- permutarea a două linii
- înmulţirea unei linii cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$
- adunarea la o linie a unei alte linii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$

operaţii aplicate matricelor A şi B, deci matricei extinse $A^e = (A|B)$.

Definiţia 8. Se numeşte matrice eşalon o matrice cu proprietăţile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1; acesta numindu-se pivotul liniei

- pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i, pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Propoziţia 9. *Orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operaţii cu linii într-o matrice eşalon.*

Putem da acum algoritmul după Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuaţii.

Scriem matricea A^e a sistemului şi o aducem la forma eşalon. Dacă există un pivot pe ultima coloană atunci sistemul este incompatibil (în sistemul echivalent avem o ecuaţie $0 = 1$).

Altfel, necunoscutele corespunzătoare coloanelor cu pivoţi sunt coloanele principale, celelate secundare. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi le dăm valori arbitrare în $\mathbb{R}$ şi apoi calculăm necunoscutele principale în funcţie de cele secundare. Sistemul e compatibil determinat (adică are soluţie unică) dacă avem un pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Observăm că numărul pivoţilor = $\text{rang}(A^e)$ iar $\text{rang}(A)$ numărul pivoţilor din primele n coloane şi totodată numărul variabilelor principale.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 7
Sisteme de ecuaţii liniare

Continuăm consideraţiile începute cursul trecut.

Înainte de a trece la exemple voi menţiona şi algoritmul de rezolvare a unui sistem compatibil de ecuaţii liniare. Considerăm din nou sistemul

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Vom prsupune că este compatibil.

Fie A matricea sistemului şi presupunem că $\mathrm{rang}(A) = r$ şi considerăm $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subset \{1, 2, \ldots m\}$ şi $J = \{j_1 < \ldots < j_r\} \subset \{1, 2, \ldots n\}$ a.î. $\det(A_{I,J}) \neq 0$. Vom rezolva sistemul în funţie de acest minor nenul de ordin r, pe care îl vom fixa..

Ştim că $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^e)$ (sistemul este compatibil) $= \dim < L_1(A^e), \ldots, L_m(A^e) >$. Cum $L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e)$ sunt liniar independente (altfel, ar rezulta că restricţiile acestor linii la J sunt liniar dependente, deci $\det(A_{I,J}) = 0$), avem că faptul că $< L_1(A^e), \ldots, L_m(A^e) >=< L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e) >$, deci orice linie este combinaţie liniară de $L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e)$, asta însemnând că orice ecuaţie a sistemului este combinaţie liniară a ecuaţiilor $i_1, \ldots, i_r$ deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul format numai din ecuaţiile $i_1, \ldots, i_r$.

Reamintesc că două sisteme se numesc *echivalente* dacă au acelaşi soluţii.

Din observaţiile anterioare sistemul $AX = B$ este echivalent cu sitemul

$$A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = B_I$$

.

Notând cu $\overline{J} = [n] \setminus J$ avem $A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = A_{I,J}X_J + A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}}$, de unde

$$A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J + A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}} = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J = B_I - A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}} \Leftrightarrow$$

$$(A_{I,J} \text{ inversabilă}) \Leftrightarrow X_J = A_{I,J}^{-1}(B_I - A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}})$$

În termeni de ecuaţii şi necunoscute :

- păstrăm în membrul stâng necunoscutele $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$, (*necunoscutele principale*). Acestea formează vectorul X_J.
- trecem în membrul drept celelalte necunoscute (*necunoscutele secundare*)
- dăm valori arbitrare necunoscutelor secundare ($X_{\overline{J}} \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$ este arbitrar)
- calculăm necunoscutele principale în funcţie de necunoscutele secundare. Obţinem o unică soluţie pentru fiecare vector $X_{\overline{J}}$.

Vedem că mulţimea soluţiilor este parametrizată de numărul necunoscutelor secundare, care variază independent una de alta în $\mathbb{R}$. Deci avem $n - r$ (numărul necunoscutelor secundare) ”grade de libertate” sau parametri.

La sfârşitul cursului anterior am prezentat metoda eliminării Gauss-Jordan şi forma eşalon a unei matrice.

Am enunţat rezultatul că orice matrice poate fi transformată după un număr fimit de operaţii cu linii într-o matrice eşalon.

În loc de demonstaţie voi face exemple.

Exemplul 1. Fie matricea
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din definiţia pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L_2' = L_2 + L_1$ şi $L_3' = L_3 - 4L_1$. Avem

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Vedem că elementul de pe a doua linie şi a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obţine 1 în acea poziţie trebuie să împărţim linia a doua cu 4, deci facem transformarea $L_2' = \frac{1}{4}L_2$. Astfel obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Cu pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L_1' = L_1 - L_2, L_3' = L_3 + L_1$. Obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}$. Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana a treia. Aici obţinem al treilea pivot împărţind L_3 cu -9. După această operaţie matricea devine $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. În sfârşit vom face ultimele eliminări pe coloana a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L_1' = L_1 - L_3$ şi $L_2' = L_2 - L_3$. Forma eşalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Voi face mai multe observaţii.

În primul rând vedem că forma eşalon E are rangul maxim pe care îl poate atinge ($\operatorname{rang}(E) \leqslant \min\{3,4\} = 3$).

Întrebarea naturală care se pune este dacă $\operatorname{rang}(A)$ este egal cu rangul formei eşalon E.

Răspunsul vine din faptul că toate operaţiile pe care le-am făcut se pot scrie ca înmulţiri la stânga cu matrice.

Astfel dacă dorim să adunăm L_1 la L_2, adică să facem transformarea $L_2' = L_2 + L_1$ matricei A, atunci înmulţim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este o matricea I_3 la care am adăugat un 1 pe linia 2 şi coloana 1.

Deci $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Dacă procedăm mai departe şi facem a doua eliminare pe coloana întâi, $L_3' = L_3 - 4L_1$, înmulţim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Pentru a obţine al doilea pivot trebuie să împărţim linia a doua cu 4. Deci vom modifica numai linia a doua.

Acest lucru se obţine la sânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Restul operaţiilor pe care le-am descris în algoritmul de obţinere a formei eşalon (se numeşte eşalonare) E, a matricei A, se fac similar. Le voi menţiona la sfârşitul exemplului.

Deocamdată să observăm că matricele cu care înmulţim la stânga sunt matrice inversabile. Determinanţii $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ (sunt matrice inferior triunghiulare), iar $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$. Deci forma eşalon E a matricei A se obţine din A prin înmulţire la stânga cu matrice inversabile.

Acum putem răspunde la întrebarea pe care am pus-o.

În cursul trecut am menţionat că dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\operatorname{rang}(U \cdot A) = \operatorname{rang}(A)$. Cum $E = U \cdot A$, avem $\operatorname{rang}(E) = \operatorname{rang}(A)$.

Voi scrie acum produsul matricelor prin care obţinem matricea cu care înmulţim pe A la stânga pentru a obţine E, forma eşalon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Putem spune că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(E) = 3$.

Algoritmul Gauss-Jordan este folositor pentru a obţine şi inversa unei matrice.

Exemplul 2. Voi considera pentru uşurinţă matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ care este formată din primele coloane ale matricei A din exemplul anterior. Vom calcula folosind operaţii cu linii (înmulţiri la stânga cu matrice inversabile) inversa B^{-1}.

Vedem că dacă înmulţim la stânga matricea B cu matricele cu care am înmulţit A la stânga, în aceeaşi ordine, vom obţine primele trei coloane ale formei eşalon E

(înmulţirea se face linie pe coloană), adică I_3. Deci acest produs de matrice este B^{-1}.

Aplicăm acest algoritm matricei $(B|I_3)$. Înmulţim la stânga cu B^{-1} şi avem $B^{-1}\cdot(B|I_3) = (B^{-1}\cdot B|B^{-1}\cdot I_3) = (I_3|B^{-1})$. Făcând eliminare Gauss-Jordan pentru matricea $(B|I_3)$ vom obţine matricea $(I_3|B^{-1})$, deci în dreapta, inversa lui B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 4L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = \frac{1}{4}L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_2 \\ L_3' = L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3' = -\frac{1}{9}L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_3 \\ L_2' = L_2 - L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{12} & -\frac{8}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{12} & \frac{10}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Deci

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & -\frac{8}{36} & \frac{4}{36} \\ -\frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{15}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{4}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{-36}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 6 & -10 & -4 \\ -15 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Numitorul -36 este bineînţeles $\det(B)$. Se verifică uşor că $B\cdot B^{-1} = I_3$.

Este un algoritm mult mai economic decât cel de aflare a adjunctei matricei (deci a cofactorilor). Inversa este adjuncta înmulţită cu inversul determinantului matricei.

O ultimă observaţie, anume că forma eşalon a unei matrice inversabile este matricea unitate I_n. În acest exemplu forma eşalon a matricii B este I_3.

Sisteme liniare omogene

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm sistemul liniar $AX = 0$, unde $0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, adică

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Bineînţeles că un sistem omogen are întotdeauna soluţia nulă, deci orice sistem omogen este compatibil.

Aplicăm acelaşi algoritm de rezolvare ca şi în cazul sistemelor cu coloana termenilor liberi nenulă. Începem cu calculul rangului matricei. Cel mai economic este aplicarea algoritmul Gauss-Jordan, care ne dă nu numai rangul matricii, dar şi o formă simplă, echivalentă, a sistemului de unde aflăm cu uşurinţă soluţia.

Exemplul 3. Să rezolvăm sistemul omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = 0 \end{cases}$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, matricea din **exemplul 1** .

Forma eşalon ştim că este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Rangul este 3, primele trei necunoscute sunt principale şi depind de a patra necunoscută, cea secundară. Sistemul devine $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 & = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_4 & = 0 \\ x_3 + \frac{4}{3}x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 & = \frac{4}{3}x_4 \\ x_3 & = -\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

Soluţia are un parametru, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor este $S = \{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 8
Matricea unui morfism. Vectori şi valori proprii

Voi încheia consideraţiile despre sisteme liniare cu o teoremă pe care o cunoaşteţi din clasa a XI-a, anume regula Cramer.

Considerăm sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Forma matriceală a acestuia este $AX = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $X, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Notăm cu $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), 1 \leqslant j \leqslant n$ matricele ce se obţin din A înlocuind $C_j(A)$, coloana j a matricei A, cu coloana B a termenilor liberi.

Teorema 1 (Regula Cramer)**.** *Considerăm sistemul $AX = B$ de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Presupunem că $\det(A) \neq 0$. Atunci soluţia sistemului este dată de $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, 1 \leqslant j \leqslant n$.*

Recapitulăm metoda de rezolvare a sistemelor liniare.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem scriem matricea extinsă asociată acestuia. O aducem la forma eşalon care este unică.

Dacă avem un pivot pe ultima coloană sistemul este incompatibil. La nivel de ecuaţii aceasta înseamnă o ecuaţie cu membrul stâng nul şi membrul drept egal cu 1 (pivotul). Deci nu avem soluţii.

Dacă nu avem pivot pe ultima coloană sistemul este compatibil.

Numărul de pivoţi este egal cu rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii extinse (sistem compatibil) este egal cu numărul necunoscutelor principale. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi aflăm necunoscutele principale în funcţie de cele secundare.

Se scrie soluţia în funcţie de necunoscutele secundare, care sunt parametri.

Sistemele omogene întotdeauna sunt compatibile, având cel puţin soluţia nulă.

Dacă sistemul are n ecuaţii şi n necunoscute cu matricea sistemului inversabilă, atunci forma eşalon este matricea I_n şi soluţia este dată de regula lui Cramer.

Matrice şi morfisme

Considerăm $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Reamintesc că înmulţirea matricelor se face linie pe coloană, în cazul de faţă $L_i(A \cdot X) = L_i(A) \cdot X, 1 \leqslant i \leqslant m$.

(1) Se demonstrează uşor că $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$

$$A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j + y_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j + y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y.$$

(2) Chiar mai simplu se arată că $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ pentru A şi X ca mai sus şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notăm cu $\cdot_A$ înmulţirea cu matricea A.

Avem deci $\cdot_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ este morfism. Înmulţirea este aditivă (proprietatea (1)) şi respectiv omogenă (proprietatea (2)).

Considerăm acum V un spaţiu vectorial real cu $\dim(V) = n$. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază pentru V. O primă observaţie este că $(\forall) v \in V$, v are o scriere **unică** ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathcal{B}$.

Să presupunem că există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ şi $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0_V$. Dar $v_1, \ldots v_n$ sunt liniar independenţi $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

Deci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ cu coeficienţi unici. Aceşti coeficienţi se numesc *coordonatele* vectorului v în baza $\mathcal{B}$. Aleasă o bază $\mathcal{B} \subset V$ orice vector din V se identifică cu vectorul format din coordonatele sale. $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

Am folosit indicele $\mathcal{B}$ pentru vectorul coordonatelor pentru a specifica baza în care se face scrierea.

Să demonstrăm că $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ este izomorfism de spaţii vectoriale. Este clar că este morfism. Este injectiv din unicitatea scrierii unui vector în baza $\mathcal{B}$. Surjectiv: fie $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, atunci $\exists\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$ a.î. $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Baza în care am scris v este $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Deci orice spaţiu vectorial real V, cu $\dim(V) = n$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Fie V şi W două $\mathbb{R}$ spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$ şi $\dim(W) = m$ şi bazele $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ şi $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$. $V \simeq \mathbb{R}^n$ (izomorfe) şi $W \simeq \mathbb{R}^m$.

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ un morfism între cele două spaţii vectoriale.

Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$ avem $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i$, scrierea unică a vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Notăm $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i\,=\,1,m \\ j\,=\,1,n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matricea asociată morfismului f în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$. $C_j(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$, coloana j a acestei matrice este formată din coordonatele vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Fie $v \in V$. Atunci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, scriere unică. cu $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leqslant j \leqslant n$.

$f(v) = f(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{i,j}) w_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j) w_i$.

Observaţia 2. Ceea ce am obţinut este o echivalenţă între matrice şi morfisme între spaţii vectoriale.

Am văzut că dată o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\cdot_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este morfism de spaţii vectoriale.

Reciproc pentru $f : V \longrightarrow W$, morfism de spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ şi $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ baze în V şi respectiv W, ca mai sus avem asociată matricea $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vectorul de coordonate al lui $f(v)$ în baza $\mathcal{C}$ este

$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\alpha_j \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$.

De fapt avem un izomorfism de spaţii vectoriale:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) & \simeq & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f & \leftrightarrow & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

Exemplul 3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Folosind notaţiile anterioare, considerăm $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $\mathcal{C} = \{w_1 = 1\} \subset \mathbb{R}$ baze. Astfel $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xv_1 + yv_2) = f(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y.$

Fie V, W şi U spaţii vectoriale finit dimensionale cu bazele $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. şi $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morfisme între aceste spaţii vectoriale.

Atunci $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Dacă $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sunt baze în V atunci pentru 1_V, morfismul identitate al spaţiului vectorial V avem $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_2$ la $\mathcal{B}_1$ (elementele lui $\mathcal{B}_1$ se scriu în funcţie de elementele lui $\mathcal{B}_2$ şi coordonatele se scriu pe coloanele matricii A).

Avem faptul că vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_2$ este egal cu $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ înmulţit cu vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_1$.

Să vedem cum se schimbă matricea morfismului la schimbarea bazelor.

Dacă considerăm bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ în V şi $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ în W, şi morfismul $f : V \longrightarrow W$. Avem următoarele compuneri

$$V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{1_V} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{\mathcal{C}} \xrightarrow{1_W} W_{\mathcal{C}'}$$

Folosind formula matricii asociate compunerii morfismelor rezultă următoarea formulă.

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(1_W)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V).$$

Exemplul 4. Să considerăm $V = \mathbb{R}[X]_2$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienţi reali . Baza considerată este $\mathcal{B} = \{X^2, X, 1\}$. Fie derivarea $T : \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$. Ştim că derivarea este aditivă şi omogenă, deci un morfism. Pe elementele bazei avem $T(X^i) = iT^{i-1}$, pentru $i = 1, 2$, şi $T(1) = 0$. Astfel,

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pe fiecare coloană avem coordonatele vectorului $T(X^i)$ în baza $\mathcal{B}$. De exemplu $T(X^2) = (X^2)' = 2X = 0 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$. Vectorul coordonatelor este $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, prima coloană a matricii.

Considerăm şi baza $\mathcal{B}' = \{(X-1)^2, X, 1\}$. Verificaţi că este bază!

$T((X-1)^2) = 2(X-1) = 2X - 2, T(X) = 1, T(1) = 0$, de unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest exemplu $W = V = \mathbb{R}[X]_2$, iar $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$ iar $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Vreau să verificăm formula $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Mai trebuie să determinăm $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$, matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$. Avem $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1, X = X$ şi 1 =1, deci $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversa acesteia, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se verifică faptul că

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ morfism, unde în V avem baza $\mathcal{B}$ iar în W baza $\mathcal{C}$.

Cum aflăm dacă $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$. Acest vector este deci soluţia sistemului omogen scris mai sus.

Când $w \in \mathrm{Im}(f)$? $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists v \in V$ a.î. $f(v) = w \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui w în baza $\mathcal{C}$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f)$ dacă şi numai dacă sistemul $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ are soluţie. Notăm $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Reamintesc că $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A)$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow w$ este combinaţie liniară de coloanele matricei $A \Leftrightarrow w \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Deci $\mathrm{Im}(f) =< C_1(A), \ldots, C_n(A) >$.

Vectori şi valori proprii

Definiţia 5. Fie $f : V \longrightarrow V$ o aplicaţie liniară.
• un element $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ se numeşte valoare proprie a lui f dacă există $v \in V \backslash \{0\}$ cu $f(v) = \lambda v$ (un astfel de vector se numeşte vector propriu corespunzător valorii proprii λ).
• un element $v \in V \backslash \{0\}$ se numeşte vector propriu pentru f dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $f(v) = \lambda v$.

Notăm cu $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Propoziţia 6. *Fie $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, unde $\mathcal{B}$ este bază a lui V. $\lambda \in \mathbb{R}$ e valoare proprie a lui $f \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.*

Definiţia 7. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al lui A. (Observăm că $XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$).

Observaţia 8. 0 este valoare proprie pentru f, dacă şi numai dacă matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ este singulară.

Propoziţia 9. *Dacă $f : V \longrightarrow V$ este aplicaţie liniară, iar $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci P_A nu depinde de baza $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie: Dacă $\mathcal{B}'$ e altă bază, ştim că $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}AQ$ unde Q este matricea inversabilă $Q = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Atunci $P_{A'}(X) = \det(XI_n - Q^{-1}AQ) = \det(X \cdot Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1}(XI_n - A)Q) = \det(Q^{-1}) \det(XI_n - A) \det(Q) = \det(Q^{-1}) \det(Q) \det(XI_n - A) = \det(XI_n - A) = P_A(X)$.

□

Aşadar valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile în $\mathbb{R}$ ale polinomului caracteristic al lui f. Definim valorile proprii ale unei matrice A ca fiind valorile proprii ale aplicaţiei liniare asociate lui A prin izomorfismul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ (pentru o bază fixată a lui V), sau echivalent rădăcinile polinomului $P_A(X)$ în $\mathbb{R}$.

Exemplul 10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci $P_T(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 2 = (X - 1)^2 + 1$ şi f nu are valori proprii, valorile proprii fiind elemente din $\mathbb{R}$.

Definiţia 11. $f : V \longrightarrow V$ morfism se numeşte *diagonalizabil* dacă V are o bază $\mathcal{B}$ formată din vectori proprii pentru f. În acest caz $M_{\mathcal{B}}(f)$ este diagonală formată din valori proprii.

Să vedem când este un morfism diagonalizabil.

Propoziţia 12. *Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valori proprii distincte pentru $f : V \longrightarrow V$ şi $v_1, \ldots, v_p$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Atunci $v_1, \ldots, v_p$ sunt liniar independenţi.*

Corolarul 13. *Fie $f : V \longrightarrow V$ morfism. Dacă $P_f(X)$ are n valori proprii distincte, unde $n = \dim(V)$ atunci f este diagonalizabil.*

Exemplul 14. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A este matricea unui morfism f într-o bază $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Polinomul caracteristic este $P(X) = (X+1)^2(X-3)$. Pentru $\lambda_1 = -1$ calculăm vectorii proprii din sistemul $(A-(-1)I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rangul matricii $(A-(-1)I_3)$ este 1 şi vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se observă că avem doi vectori proprii liniar independenţi asociaţi aceleaşi valori proprii $\lambda_1 = -1$ ce are multiplicitatea 2. Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 3$ avem sistemul $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rangul matricii $(A - 3I_3)$ este 2, şi vectorul propriu asociat este $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Astfel notând cu $Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$. Avem $A = QDQ^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, matricea ce are pe diagonală valorile proprii.

Avem şi următoarul rezultat foarte important care explică de ce matircea de mai sus este diagonalizabilă neavând toate valorile proprii distincte.

Teorema 15. *Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$ (simetrică) este digonalizabilă.*

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecţia 9

Pentru început voi face câteva comentarii legate de ceea ce am predat la ultimul curs.

Am definit în cursul trecut ce înseamnă un morfism diagonalizabil. Similar o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *diagonalizabilă* dacă există o bază în $\mathbb{R}^n$ de vectori proprii ai matricei A. Punând aceşti vectori proprii $v_1, \ldots, v_n$ într-o matrice $Q = (v_1 \ldots v_n)$, ca şi coloanele acestei matrice, obţinem relaţia $AQ = QD \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$, unde D este o matrice diagonală formată din valori proprii carora le sunt asociate vectorii proprii $v_1, \ldots, v_n$.

De fapt relaţia $AQ = QD$ reprezintă toate egalităţile $Av_j = \lambda_j v_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Să vedem acest lucru. Vom identifica coloanele celor doi membri. Fie $1 \leqslant j \leqslant n$ arbitrar.

În membrul stâng avem $C_j(AQ) = AC_j(Q) = Av_j$ iar în membrul drept $C_j(QD) = QC_j(D) = 0C_1(Q) + 0C_2(Q) + \ldots + \lambda_j C_j(Q) + \ldots + 0C_n(Q) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + 0v_n = \lambda_j v_j$.

Exemplul 1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii fiind liniar independenţi şi fiind în număr de trei, în $\mathbb{R}^3$, formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectori proprii sunt:

$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$. Deci $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A - 1I_3) \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z$, de unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A + 1I_3) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$, şi rezultă $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $D = Q^{-1}AQ$. Ce reprezintă această relaţie ?

Matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, este matricea unei transformări liniare (endomorfism) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. $D = M_{\mathcal{B}'}(f)$, matricea aceleeaşi transformări liniare f, dar în baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, formată din vectorii proprii (vedeţi definiţia morfismului diagonalizabil).

Relaţia $D = Q^{-1}AQ$ este exact relaţia $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$ este matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Diagonalizarea unei matrice înseamnă, după cum am spus la începutul cursului, găsirea unei baze de vectori proprii. Nu toate matricele cu coeficienţi reali sunt diagonalizabile. Cele simetrice sunt.

Forme biliniare, forme pătratice

Considerăm un spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{R}$ cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Definiţia 2. $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *biliniară* dacă este liniară în fiecare argument. În plus se numeşte *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x)$. Forma biliniară se numeşte *pozitiv semidefinită* dacă $F(x, x) \geqslant 0$ pentru $\forall x \in V$, şi *pozitiv definită* dacă în plus $F(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$. Similar forma F este *negativ semidefinită*, respectiv *negativ definită*.

Exemplul 3.
- dacă $f_1, f_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt forme liniare atunci $F(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ este o formă biliniară.
- fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim $F(x,y) = x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_iy_j$.

  Considerăm $n = 3$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Forma biliniară asociată acestei matrice este $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$.

Dacă alegem o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a spaţiului V, şi pe V avem o formă biliniară F, considerăm matricea $F(e_i, e_j) = a_{i,j}$. În funcţie de această matrice exprimăm valorile lui F pentru orice vectori. $F(x,y) = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_iy_j$.

Propoziţia 4. *$F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea asociată lui F într-o bază este simetrică.*

Deci avem o corespondenţă bijectivă între mulţimea aplicaţiilor biliniare şi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care se restricţionează la o bijecţie între mulţimea aplicaţiilor biliniare simetrice şi mulţimea matricelor simetrice.

Legătura matricelor formei biliniare F la schimbarea bazei este dată de

Propoziţia 5. *Fie $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ două baze ale spaţiului vectorial V şi $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{C}$ şi $A_{\mathcal{B}}$ şi respectiv $A_{\mathcal{C}}$ matricele asociate formei biliniare F în cele două baze. Atunci avem $A_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^t \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.*

Exemplul 6. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ este biliniară. matricea asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $F(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$. Se vede că este pozitiv definită.

Definiţia 7. Forma *pătratică* asociată unei forme biliniare simetrice F, este $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x,x)$.

F se numeşte *polara* formei pătratice. Dintr-o formă pătratică obţinem polara acesteia prin formula $F(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$, care este simetrică.

Avem deci o bijecţie între forme pătratice şi matrice simetrice.

Exemplul 8. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 5x_2x_3$. Matricea A asociată lui Q în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Definiţia 9. Spunem că forma pătratică Q este redusă la forma canonică dacă într-o bază avem $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2$.

Voi prezenta două metode pentru aducerea formelor pătratice la forma canonică.

Metoda 1

Teorema 10 (Gauss)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există o bază în care Q are forma canonică.*

Demonstraţie: Presupunem $Q \neq 0$. Pentru forma nulă nu avem ce demonstra. Demonstraţia ne va da algoritmul de obţinere a formei canonice. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza în care $Q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$. Avem două cazuri.

(1) $\exists i$ a.î. $a_{i,i} \neq 0$. Renumerotăm şi presupunm că $a_{1,1} \neq 0$. Cu acesta vom forţa un pătrat perfect.

Rescriem $Q(x) = a_{1,1} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{1,i} a_{1,j} x_i x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x_i x_j,$

unde $a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{1,i} a_{1,j}}{a_{1,1}}$.

Facem notaţia $x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n$ şi obţinem $Q(x') = \frac{1}{a_{1,1}}(x'_1)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x'_i x'_j$.

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sunt componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, în care forma pătratică Q este reprezentată de ecuaţia de mai sus. În această scriere suma $\sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x'_i x'_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile căreia i se aplică cazul (1) sau/şi cazul (2) de mai jos.

(2) $a_{i,i} = 0, (\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$. $(\exists) i \neq j$ a.î. $a_{i,j} \neq 0$ $(Q \neq 0)$. Renumerotând putem presupune că $a_{1,2} \neq 0$. Facem următoarea schimbare de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2, x_2 = x'_1 - x'_2, x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n$ şi obţinem

$Q(x') = 2a_{1,2}[(x'_1)^2 - (x'_2)^2] + \ldots$, formă care este în cazul (1).

După o repetare de un număr finit de ori a acestor cazuri vom ajunge la forma canonică.

□

Exemplul 11. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Folosind algoritmul Gauss obţinem $Q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2) - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - x_3^2$.

Deci $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 - 4\overline{x}_2{}^2 - \overline{x}_3{}^2$, unde $\overline{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \overline{x}_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \overline{x}_3 = x_3$.

Exemplul 12. Fie $Q(x) = 2x_2x_3$. Matricea acestei forme pătratice este cea din **exemplul 1**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Folosind schimbarea de coordonate $x_2 = \overline{x}_2 + \overline{x}_3, x_3 = \overline{x}_2 - \overline{x}_3$, obţinem $Q(\overline{x}) = 2\overline{x}_2{}^2 - 2\overline{x}_3{}^2$.

Metoda 2

Teorema 13 (Jacobi)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, o formă pătratică $Q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$ într-o bază $\mathcal{B}$. Dacă matricea $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ are toţi minorii principali $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(A)$ nenuli, atunci există o bază $\overline{\mathcal{B}}$ a lui V în care $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x}_n{}^2$.*

Exemplul 14. Considerăm forma pătratică Q care într-o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ are matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = -1$. Toţi sunt nenuli, deci conform teoremei Jacobi forma canonică a formei pătratice Q este $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 + \frac{1}{3}\overline{x}_2^2 + \frac{3}{-1}\overline{x}_3^2$.

Spaţii euclidiene

Considerăm ca şi mai sus un spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{R}$ cu $\dim_R(V) = n$.

Definiţia 15. $<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, o aplicaţie biliniară, simetrică, pozitiv definită se numeşte *produs scalar* pe V. $(V, <,>)$ spaţiul vectorial V pe care avem definit un produs scalar se numeşte *spaţiu euclidian*.

Exemplul 16.
- Produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$ este $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$, unde $x, y \in \mathbb{R}^n$.Matricea asociată este matricea identitate I_n. Este clar biliniar, simetric şi pozitiv semidefinit. Dacă $< x, x >= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, x_i \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că $x_i = 0, (\forall)1 \leqslant i \leqslant n$, adică $x = 0$. Deci acest produs este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.
- Fie $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}|\ f\text{continuă}\ \}$. Pe acest spaţiu considerăm $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$. Se verifică faptul că acesta este un produs scalar pe $\mathcal{C}([a, b])$.

Propoziţia 17 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian şi $x, y \in V$. Atunci are loc $| < x, y > | \leqslant \sqrt{< x, x >< y, y >}$.*

Definiţia 18. Doi vectori x, y din spaţiul euclidian $(V, <,>)$ se numesc *ortogonali* dacă $< x, y >= 0$.

Exemplul 19. Considerăm $\mathbb{R}^2$ cu produsul scalar canonic şi vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avem $< v_1, v_2 >= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, adică aceştia sunt ortogonali. Acest fapt îl ştim deja. v_1 stă în plan pe prima bisectoare a axelor (având coordonatele egale), iar v_2 stă pe a doua bisectoare a axelor. Ştim că cele două bisectoare sunt ortogonale.

Mai uşor de văzut este că $< e_1, e_2 >= 0$, unde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sunt vectorii din baza canonică a planului $\mathbb{R}^2$.

Propoziţia 20. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n. Orice sistem de vectori nenuli ce sunt ortogonali doi câte doi este sistem de vectori liniar independenţi..*

Definiţia 21. Fie $L_1, L_2 \subset V$, submulţimi ale spaţiului euclidian $(V, <,>)$. Spunem că L_1 este *ortogonal* pe L_2 dacă $< v, w >= 0$ pentru $(\forall)$ $v \in L_1$ şi $(\forall)$ $w \in L_2$. Scriem $L_1 \perp L_2$. În particular dacă $L_1 = \{x\} \neq \{0_V\}$, atunci $x \perp L_2 \Leftrightarrow < x, w >= 0, (\forall)$ $w \in L_2$.

Ortogonalitatea este suficient să fie testată pe o bază. Mai precis.

Propoziţia 22. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n, şi L un subspaţiu vectorial al lui V. Considerăm $\mathcal{B} \subset L$, o bază a subspaţiului L. Atunci $x \perp L \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Clar pentru că $\mathcal{B} \subset L$.

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ bază în L. Considerăm $w \in L$ arbitrar, $w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ cu $a_i \in \mathbb{R}$. $< x, w >=< x, \sum_{i=1}^{k} a_i v_i >= \sum_{i=1}^{k} a_i < x, v_i >= 0$ pentru că $< x, v_i >= 0$ pentru $(\forall) i$.

□

Definiţia 23. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real şi $L \neq \emptyset$, o submulţime a lui V. Mulţimea notată $L^{\perp} = \{x \in V \mid x \perp L\}$ se numeşte *complementul ortogonal* al lui L în V.

Definiţia 24. Într-un spaţiu euclidian $(V, <,>)$, numim *normă* a vectorului $x \in V$ şi notăm $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Din definiţie $||x|| \geqslant 0$. Din proprietăţile produsului scalar rezultă următoarele proprietăţi ale normei.

(1) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, pentru $(\forall) x \in V$ şi $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$
(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$,
(3) $| < x, y > | \leqslant ||x|| \cdot ||y||$, $(\forall) x, y \in V$, (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

(4) $||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$, $(\forall)x, y \in V$, (inegalitatea Minkowski sau a triunghiului),
(5) $|\ ||x|| - ||y||\ | \leqslant ||x - y||$, $(\forall)x, y \in V$.

Definiţia 25. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, o bază a spaţiului euclidian V. Aceasta se numeţe *ortogonală* dacă $v_i \perp v_j$, $(\forall)i, j$. Dacă în plus $||v_i|| = 1$, $(\forall)i$ atunci baza se numeşte *ortonormată*.

Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ este bază ortogonală în V, atunci $\mathcal{B}' = \{\frac{v_1}{||v_1||}, \dots, \frac{v_n}{||v_n||}\}$ este o bază ortonormată.

În **exemplul 19** $\{v_1, v_2\}$ este bază ortogonală. Din aceasta, obţinem $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\}$ bază ortonormată. Baza canonică $\{e_1, e_2\}$ este bază ortonormată.

Definiţia 26. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real, L un subspaţiu a lui V şi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset L$, o bază a lui L. Fie $x \in V$. Vectorul $\sum_{i=1}^{k} < x, v_i > v_i$ se numeşte *proiecţia* vectorului x pe L şi se notează $\mathrm{pr}_L\, x$.

Există un algoritm de a obţine din orice bază a unui spaiu euclidian o bază ortonormată.

Teorema 27 (Gram-Schmidt). *Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază a spaţiului euclidian real $(V, <,>)$ cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \dots, e_n\}$, astfel încât sistemele de vectori $\{v_1, \dots, v_k\}$ şi $\{e_1, \dots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu a lui V, pentru $(\forall)k = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie: Obţinem mai întâi o bază ortogonală $\{x_1, \dots, x_n\}$, pe care o normăm.

Definim $x_1 = v_1, x_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{<v_j, x_i>}{<x_i, x_i>} x_i$, pentru $(\forall)j = \overline{2, n}$. Vectorii $x_1, \dots, x_n$ sunt ortogonali doi câte doi, deci conform **propoziţiei 20**, liniar independenţi.

Definim $e_i = \frac{x_i}{||x_i||}$. Din definiţia vectorilor x_i, şi deci ai vectorilor e_i rezultă că subspaţiul generat de $\{v_1, \dots, v_k\}$ este egal cu subspaţiul generat de $\{e_1, \dots, e_k\}$, pentru orice k.

□

Exemplul 28. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^3$, bază. Dorim să obţinem o bază ortonormată folosind algoritmul Gram-Schmidt.

$$x_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = v_2 - \frac{<v_2, x_1>}{<x_1, x_1>} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = v_3 - \frac{<v_3, x_1>}{<x_1, x_1>} x_1 - \frac{<v_3, x_2>}{<x_2, x_2>} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$||x_1|| = \sqrt{2}, ||x_2|| = 1, ||x_3|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1, e_2 = x_2, e_3 = \sqrt{2} x_3$ este baza ortonormată.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 10
Matrice şi morfisme ortogonale. Geometrie analitică

Metoda transformărilor ortogonale

A treia metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice Q este metoda transformărilor ortogonale.

Ce înseamnă aducerea la forma canonică a unei forme pătratice la nivel de matrice? Înseamnă aducerea la forma diagonală a matricei A asociate formei pătratice, care este o matrice simetrică. Ştim din **teorema 15** din cursul 7, că orice matrice simetrică este diagonalizabilă, deci Q poate fi adusă la forma canonică.

Forma canonică pentru Q, va fi $Q(v) = \lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n\overline{x}_n^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A.

Metodă constă în aflarea valorilor proprii dar şi a vectorilor proprii asociaţi acestora. Aceşti vectori proprii formează bază pentru spaţiul vectorial pe care este definită forma pătratică. Un ultim pas în această metodă constă în obţinea unei baze ortonormate de vectori proprii din vectorii proprii deja obţinuţi. Obţinem nu numai forma canonică, dar şi baza în care este exprimată această formă canonică. Această metodă funţionează numai pentru spaţii euclidiene.

Sigur că şi în cazul metodelor Gauss şi Jacobi se poate obţine baza în care este exprimată forma canonică, dar prin această metodă obţinem o bază ortonormată.

Voi descrie metoda pe un exemplu.

Exemplul 1. Considerăm forma pătratică $Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ pe $\mathbb{R}^3$, cu matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Metoda Gauss: $Q(v) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$. Deci $Q(v) = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2$. Schimbarea de coordonate este $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$. Matricea formei Q în baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Doresc să specific în acest caz baza în care am obţinut forma canonică. Considerăm A scrisă în baza canonică $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^3$ legătura dintre coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}$ şi baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix}$. Rezolvăm sistemul $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$

în funcţie de x_i-uri şi obţinem $x_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_3, x_2 = \overline{x}_2, x_3 = \overline{x}_3$, de unde $M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Astfel $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1 = e_1, \overline{e}_2 = e_2, \overline{e}_3 = -e_1 + e_3\}$. Se verifică relaţia între matricele formei pătratice în cele două baze (menţionată în **propoziţia 5** din cursul 9) $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = {}^tM_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(Q) M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

2. Metoda Jacobi nu se poate aplica pentru că $\Delta_3 = \det(A) = 0$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$.

3. Metoda transformărilor ortogonale

Polinomul caracteristic este $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cu $||v_1|| = \sqrt{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu $||v_2|| = 1$, şi $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu $||v_3|| = \sqrt{2}$. Se vede imediat că $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază ortogonală. Baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ unde $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, e'_2 = v_2, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$. Matricea $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tS \cdot S = I_3$, deci $S^{-1} = {}^tS$, şi $A = SDS^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să mai facem o observaţie legat de matricea S. $S = (e'_1\ e'_2\ e'_3)$ şi astfel matricea transpusă, ${}^tS = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$. Fiecare componentă a produsului $({}^tS \cdot S)_{ij} =< e'_i, e'_j >= \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker şi este 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$), adică ${}^tS \cdot S = I_3$, de unde $S^{-1} = {}^tS$.

Relaţia $A = SDS^{-1}$ se mai scrie $D = S^{-1}AS = {}^tSAS$, exact relaţia de transformare între matricele formei Q în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$, menţionată la metoda Gauss. Forma canonică a formei pătratice este asociată matricei D, adică l $Q(v') = x'^2_2 + 2x'^2_3$ expresie ce se obţine în baza ortonormată $\mathcal{B}'$.

Această metodă se numeşte a transformărilor ortogonale datorită faptului că trecerea de la baza $\mathcal{B}$ la baza ortonormată $\mathcal{B}'$ se face prin matricea $S = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ cu proprietatea ${}^tSS = I_n$ (în exemplu ${}^tSS = I_3$). O matrice cu această proprietate se numeşte *ortogonală*.

Matrice şi morfisme ortogonale

Notăm pentru orice spaţiu vectorial V, $\mathrm{End}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{morfism}\}$.

Definiţia 2. O matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *ortogonală* dacă ${}^tSS = I_n$. Un endomorfism $f : (V, <,>) \longrightarrow (V, <,>)$ al unui spaţiu euclidian se numeşte *ortogonal* dacă pentru $(\forall)v \in V$, $< f(v), f(v) >=< v, v >$ (adică păstrează produsul scalar).

Exemplul 3. $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ este un endomorfism ortogonal, oricare ar fi V spaţiul euclidian.

Teorema 4 (de caracterizare a endomorfismelor ortogonale)**.** *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu vectorial real şi $f \in \mathrm{End}(V)$. f este ortogonal dacă şi numai dacă pentru $(\forall)v \in V, ||f(v)|| = ||v||$.*

Teorema spune că un endomorfism este ortogonal (păstrează produsul scalar) dacă şi numai dacă păstrează norma.

Propoziţia 5. *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Atunci f este injectiv $\Leftrightarrow$ f este surjectiv $\Leftrightarrow$ f este bijectiv.*

Demonstraţie: f injectiv $\Rightarrow$ f surjectiv. Aplicăm teorema rang-defect lui $f : V \longrightarrow V$. Avem $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.$f$ injectiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = 0_V \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Deci $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$, iar $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în V, deci $\mathrm{Im}(f) = V$, adică f surjectiv.

Pentru f surjectiv $\Rightarrow$ f bijectiv trebuie să arătăm că f este injectiv. Argumentul este similar cu cel de mai sus.

f bijectiv $\Rightarrow$ f injectiv din definiţie.

□

Propoziţia 6. *Fie $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfism ortogonal al unui spaţiu euclidian. Atunci f este bijectiv.*

Demonstraţie: Folosind propoziţia anterioară trebuie să arătăm că f este injectiv. $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0_V$, dar $||v|| = ||f(v)|| = ||0_V|| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

□

Pentru $(V, <,>)$ spaţiu euclidian notăm $\mathcal{O}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid \text{f morfism ortogonal}\}$. $\mathcal{O}(V)$ formează grup în raport cu compunerea endomorfismelor spaţiului V.

Următorul rezultat face legătura între endomorfisme şi matrice ortogonale.

Notăm $O_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tSS = I_n\}$. Acesta este subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$. Parte stabilă: fie $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. Restul axiomelor grupului se verifică uşor.

Teorema 7. *Fie V un spaţiu euclidian, cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci $f \in \mathcal{O}(V)$ dacă şi numai dacă $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$ pentru $\mathcal{B}$ o bază ortonormată a spaţiului V.*

Pentru $S \in O_n(\mathbb{R})$ avem $\det({}^tSS) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det({}^tS)\det(S) = 1 \Leftrightarrow \det(S)^2 = 1 \Rightarrow \det(S) = \pm 1$. Deci pentru orice $S \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(S) = \pm 1$.

Notăm $SO_n(\mathbb{R}) = \{S \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(S) = 1\}$. Este clar că $SO_n(\mathbb{R})$ este subgrup al grupului $O_n(\mathbb{R})$.

Se arată uşor că toate matricele din $SO_2(\mathbb{R})$ sunt de forma $R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. (Considerăm o matrice $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, punemi condiţiile ca aceasta să fie în $SO_2(\mathbb{R})$. Rezultă $d = a$, $c = -b$, şi $a^2 + b^2 = 1$) Acestea sunt rotaţii.

Elementele $S \in O_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(S) = -1$, au forma $S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$. Sunt simetrii (reflecţii). De exemplu pentru $t = \frac{\pi}{2}$ obţinem $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ care este simetria în prima bisectoare a axelor de coordonate. Este clar că $S^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Pentru $t = \pi$ obţinem $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, simetria în axa Oy.

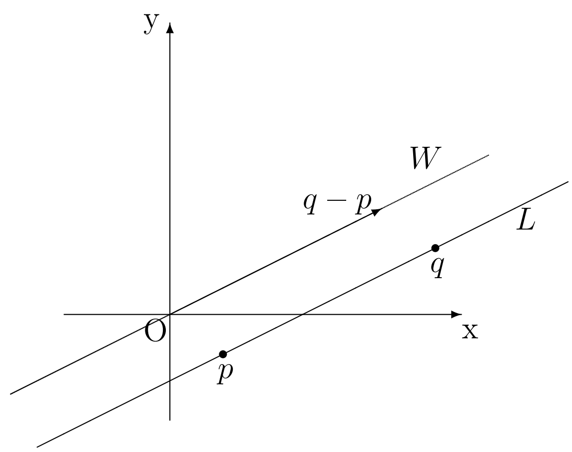
Dacă matricele ortogonale corespund operatorilor ortogonali, pentru matrice simetrice există o clasă specială de operatori cu care acestea sunt asociate.

Definiţia 8. Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian şi $f \in \mathrm{End}(V)$, f se numeşte *autoadjunct* dacă pentru $(\forall) v, w \in V, < f(v), w >=< v, f(w) >$.

Teorema 9. *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian finit dimensional şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Fie $\mathcal{B}$ bază ortonormată în V şi $S = M_{\mathcal{B}}(f)$. f este autoadjunct dacă şi numai dacă $S = {}^tS$.*

Geometrie analitică

Am lucrat până acum cu spaţii şi subspaţii vectoriale. Considerăm dreptele paralele L şi W incluse în planul $\mathbb{R}^2$.



Cele două submulţimi ale planului sunt $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\}$ şi respectiv $L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x - 1\}$. W conţine originea, este deci un subspaţiu vectorial al planului $\mathbb{R}^2$. L nu este subspaţiu vectorial neconţinând elementul $0_{\mathbb{R}^2}$. Şi totuşi L este o linie, este descris de o ecuaţie liniară. Este de fapt o varietate liniară.

Definiţia 10. O *varietate liniară* în $\mathbb{R}^n$ este o submulţime $L = p + W = \{p + w \mid w \in W\}$ unde $p \in \mathbb{R}^n$ şi $W \subset \mathbb{R}^n$ este un subspaţiu vectorial.

Bineînţeles definiţia se poate da pentru orice spaţiu vectorial V, orice $p \in V$ şi orice $W \subset V$ subspaţiu vectorial. Vom lucra însă numai în $\mathbb{R}^n$.

Este evident că o varietate liniară L este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $0_{\mathbb{R}^n} \in L$.

Propoziţia 11. *Dacă $p + W = p' + W'$, cu W, W' subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^n$, atunci $W = W'$.*

Deci în reprezentarea unei varietăţi liniare nevide sub forma $p + W$, subspaţiul vectorial W este unic determinat.

În figura anterioară $L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + W$, $p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Definiţia 12. Pentru orice $L \subset \mathbb{R}^n$ varietate liniară, există un unic subspaţiu vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$, numit *subspaţiul director al lui* L, a.î. $(\forall) p_0 \in L$, avem $L = p_0 + W$. *Dimensiunea* unei varietăţi liniare este dimensiunea spaţiului director, şi se notează $\dim_{\mathbb{R}}(L)$.

O varietate liniară de dimensiune 1 se numeşte *dreaptă*. O varietate liniară de dimensiune 2 se numeşte *plan*, iar dacă varietatea are dimensiune $n-1$ în $\mathbb{R}^n$ aceasta se numeşte *hiperplan*.

Dacă $p \in \mathbb{R}^n$, atunci $L = \{p\}$ are subspaţiul director $0_{\mathbb{R}^n}$, şi deci $\dim\{p\} = 0$.

Observaţia 13. *Dat un punct $p \in \mathbb{R}^n$ şi W un subpaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară ce trece prin p şi are ca spaţiu director W.*

Exemplul 14. Fie $L = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 1, 2x_1 - x_2 - x_3 = 3\}$. Arătăm că L este varietate liniară. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, adică L este mulţimea soluţiilor sistemului $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

O soluţie a acestui sistem este $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deci $L = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + W$, unde $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. W este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$. Este spaţiul soluţiilor sistemului omogen $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$. $\dim(W) = \text{defect}(A) = 1 =$ numărul variabilelor secundare. L este o dreptă în $\mathbb{R}^3$. Rezolvând sistemul $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$ obţinem $x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}$ este parametru. $W =< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \{t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$, este spaţiul generat de $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obţinem $L = \{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 - t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ecuaţiile prin care am definit L se numesc *implicite*. Ecuaţiile la care am ajuns se numesc *parametrice*, acestea depind de parametrul $t \in \mathbb{R}$.

În general o dreaptă (varietate liniară de dimensiune 1) are un parametru, un plan are doi parametri iar un hiperplan în $\mathbb{R}^n$ are $n-1$ parametri.

- **Ecuaţii ale dreptei**

O dreaptă este o varietate liniară de dimensiune 1, adică subspaţiul vectorial director este $< v >, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Orice alt vector λv, cu $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ generează $< v >$ ($< v >=< \lambda v >$).

Voi descrie ecuaţiile parametrice şi implicite ale unei drepte $L \subset \mathbb{R}^n$ ce trece prin p şi are $< v >= \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ (subspaţiul generat de v) ca subspaţiu director, cu $p = {}^t(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$L = p+ < v >$. Deci $(\forall) x \in L, x = p + tv$, pentru un $t \in \mathbb{R}$.

De aici obţinem ecuaţiile parametrice

$$x_1 = p_1 + tv_1, x_2 = p_2 + tv_2, \ldots, x_n = p_n + tv_n.$$

Ecuaţiile implicite ale dreptei L se obţin eliminând parametrul t din ecuaţiile de mai sus. Obţinem

$$L : \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{v_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, v_j = 0$, atunci ecuaţia corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.

Ecuaţiile dreptei $L(p,q)$ ce trece prin $p = {}^t(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq q = {}^t(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, două puncte distincte din $\mathbb{R}^n$.

Observăm că $v = q - p$ este un vector director al dreptei $L(p,q)$. Este un vector în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, deci originea sa este în $0_{\mathbb{R}^n}$. În figura cu care am început consideraţiile geometrice am descris acest fapt.

$L(p,q) = p + < q - p >$. Deci $(\forall) x \in L, x = p + t(q-p) = (1-t)p + tq$, cu $t \in \mathbb{R}$. O combinaţie liniară $\alpha p + \beta q$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1$, se numeşte combinaţie convexă. Am obţinut $L(p,q) = \{(1-t)p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$, muţimea combinaţiilor convexe dintre p şi q.

Dacă $t \in [0,1]$, atunci combinaţia convexă $(1-t)p + tq$ reprezintă segmentul dintre p şi q de pe dreapta $L(p,q)$. Îl putem nota $[p,q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\}$.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei $L(p,q)$ sunt

$x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) = (1-t)p_1 + tq_1,$

$x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) = (1-t)p_2 + tq_2, \quad \ldots,$

$x_n = p_n + t(q_n - p_n) = (1-t)p_n + tq_n.$

De aici, eliminând parametrul t, obţinem ecuaţiile implicite

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{q_n - p_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, q_j - p_j = 0$, atunci ecuaţia corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 11
Varietăţi liniare. Paralelism, perpendicularitate.

- **Ecuaţii ale planului**

După cum am definit în cursul anterior, un plan este o varietate liniară cu spaţiul director de dimensiune 2.

Fie $v, w \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, doi vectori liniar independenţi. Planul ce trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ şi are spaţiul director $W =< v, w >$ este $L = p + W$. Deci $(\forall) x \in L, x = p + sv + tw$ cu $s, t \in \mathbb{R}$, $L = \{p + sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Putem să scriem ecuaţiile parametrice:

$$x_1 = p_1 + sv_1 + tw_1, x_2 = p_2 + sv_2 + tw_2, \ldots, x_n = p_n + sv_n + tw_n; s, t \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţiile planului $L(p, q, r)$, ce trece prin trei puncte necoliniare $p, q, r \in \mathbb{R}^n$. Vectorii $q - p$ şi $r - p$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenţi (pentru că punctele p, q, r sunt necoliniare), şi deci generează un subspaţiu vectorial de dimensiune 2.

$L(p, q, r) = p + < q - p, r - p >= \{p + s(q - p) + t(r - p) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - s - t)p + sq + tr \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Vedem că avem din nou o combinaţie liniară convexă (suma coeficienţilor este 1) .

Ecuaţiile parametrice sunt în acest caz

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - s - t)p_1 + sq_1 + tr_1, \\ x_2 &= (1 - s - t)p_2 + sq_2 + tr_2, \qquad \ldots, \\ x_n &= (1 - s - t)p_n + sq_n + tr_n; \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- **Ecuaţii ale hiperplanului**

Un hiperplan este o varietate liniară de dimensiune $n - 1$ în $\mathbb{R}^n$.

Considerăm $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, $n - 1$ vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^n$. Hiperplanul ce trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ şi are spaţiul director $W =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$, este $L = p + W$, de unde $L = \{p + t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_{n-1}v_{n-1} \mid t_1, t_2, \ldots t_{n-1} \in \mathbb{R}\}$. Scriem $v_j, 1 \leqslant j \leqslant n-1$ în coordonate, $v_j = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ v_{2,j} \\ \vdots \\ v_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Primul indice reprezintă coordonata iar al doilea indice reprezintă indicele vectorului.

Deci $x \in L \Leftrightarrow x = p + t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_{n-1}v_{n-1}$, pentru anumiţi $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile parametrice sunt în acest caz

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1v_{1,1} + t_2v_{1,2} + \ldots + t_{n-1}v_{1,n-1}, \\ x_2 = p_2 + t_2v_{2,1} + t_2v_{2,2} + \ldots + t_{n-1}v_{2,n-1}, & \ldots, \\ x_n = p_n + t_2v_{n,1} + t_2v_{n,2} + \ldots + t_{n-1}v_{n,n-1} & t_1, t_2, \ldots t_{n-1} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pentru a obţine ecuaţia implicită ne uităm la sistemul ecuaţiilor parametrice. Pentru $t_1, \ldots, t_{n-1}$ găsim $x_1, \ldots, x_n$. Date $x_1, \ldots, x_n$, coordonatele unui punct din hiperplan, găsim parametrii $t_1, \ldots t_{n-1}$, care îl definesc. Deci gândind sistemul în funcţie de variabilele $t_1, \ldots t_{n-1}$, acesta este compatipil dacă şi numai dacă matricea formată din vectorii $v_1, \ldots, v_{n-1}$ are acelaşi rang cu matricea extinsă. Vectorii $v_1, \ldots v_{n-1}$ sunt liniar independenţi, deci rangul matricii din $\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ formată cu aceşti vectori are rang $n-1$. Deci matricea extinsă are rang $n-1$, adică
$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n-1} \\ x_2 - p_2 & v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - p_n & v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0$, ceea ce reprezintă ecuaţia implicită a hiperpalnului. Ceea ce trebuie reţinut este că petru un hiperplan avem o singură ecuaţie cu n necunoscute.

Propoziţia 1. *Dacă $\{L_i\}_{i \in I}$ este o familie de varietăţi liniare în $\mathbb{R}^n$, atunci $\bigcap_{i \in I} L_i$ este o varietate liniară. Fie W_i spaţiul director pentru $L_i, i \in I$. Dacă $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ atunci spaţiul director al intersecţiei $\bigcap_{i \in I} L_i$ este $\bigcap_{i \in I} W_i$. În acest caz* $\dim(\bigcap_{i \in I} L_i) = \dim(\bigcap_{i \in I} W_i)$.

Paralelism

Definiţia 2. Fie L_1 şi L_2 varietăţi liniare având subspaţiile directoare W_1 şi W_2. Spunem că L_1 este *paralelă* cu L_2 şi notăm $L_1 || L_2$ dacă $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$.

Propoziţia 3. *Fie $L_1 || L_2$ două varietăţi liniare paralele. Atunci $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ sau $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.*

Demonstraţie: Scriem $L_i = p_i + W_i, i = 1, 2$. Presupunem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Fie $x \in L_1 \cap L_2$. Din definiţia paralelismului varietăţilor liniare, $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$, deci $x + W_1 \subseteq x + W_2$ sau $x + W_2 \subseteq x + W_1$, adică $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.

□

Exemplul 4. Fie $L_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2 = 1\}$ drepta verticală ce trece prin ${}^t(1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ şi $L_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_3 = 0\}$, axa Ox_2 din $\mathbb{R}^3$. W_1 este axa Ox_1 iar $W_2 = L_2$. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dar $L_1 \nparallel L_2$ pentru că nu avem nu avem nici o incluziune între W_1 şi W_2..

Postulatul lui Euclid Printr-un punct $p \in \mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară care trece prin p, este paralelă cu o varietate liniară dată L şi are dimensiunea varietăţii L.

Poziţia relativă a două drepte în $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$.

Considerăm $L = p + < v >$ şi $L' = p' + < v' >$, două drepte în $\mathbb{R}^n$. Avem $L \cap L' \neq \emptyset$ dacă există $t, t' \in \mathbb{R}$ a.î. $p + tv = p' + t'v'$, adică $p - p' \in < v, v' >$, sau sistemul $tv - t'v' = p' - p$, în t şi t' are soluţie, adică este compatibil.

Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ \vdots & \vdots \\ v_n & -v_n' \end{pmatrix}$ şi $\overline{A} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' & p_1' - p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & -v_n' & p_n' - p_n \end{pmatrix}$.

Deci L şi L' se intersectează dacă şi numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$.

$L || L'$ dacă şi numai dacă $< v >=< v' >$ (sunt spaţii de dimensiuni egale cu 1), adică v este multiplu nenul de v', adică $\text{rang}(A) = 1$.

Am obţinut:

• dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A}) = 1$ atunci dreptele L şi L' coincid,

• dacă $\text{rang}(A) = 1, \text{rang}(\overline{A}) = 2$ atunci dreptele sunt paralele distincte (nu se intersectează),

• dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A}) = 2$ atunci dreptele se intersectează într-un unic punct.

Cazurile de mai sus au loc şi pentru $n = 2$, adică în plan. Următorul caz poate avea loc numai pentru $n \geqslant 3$.

• dacă $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(\overline{A}) = 3$ atunci dreptele sunt neconcurente şi neparalele (necoplanare). Este cazul dreptelor din **exemplul 4**.

Putem considera cazul particular a două linii în $\mathbb{R}^3$. Fie acestea

$L : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & = & \beta \end{cases}$ şi $L' : \begin{cases} a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & \alpha' \\ b_1'x_1 + b_2'x_2 + b_3'x_3 & = & \beta' \end{cases}$ .Avem linii deci un parametru pentru fiecare linie, adică numărul variabilelor secundare este 1 pentru fiecare sistem. Rangul matricii fiecărui sistem aşadar 2.

Considerăm sitemul dat de cele patru ecuaţii cu necunoscutele x_1, x_2, x_3. Notăm cu B, $\overline{B}$ matricea, respectiv matricea extinsă a sistemului. Dreptele L şi L' se intersectează dacă şi numai dacă sistemul ce are matricea B este compatibi adică $\text{rang}(B) = \text{rang}(\overline{B})$ şi sunt paralele dacă $\text{rang}(B) = 2$.

Obţinem cazurile.

• $\text{rang}(B) = \text{rang}(\overline{B}) = 2$ dreptele coincid,

• $\text{rang}(B) = 2, \text{rang}(\overline{B}) = 3$, dreptele sunt paralele, distincte,

• $\text{rang}(B) = \text{rang}(\overline{B}) = 3$, dreptele sunt concutente într-un singur punct,

• $\text{rang}(B) = 3, \text{rang}(\overline{B}) = 4$, dreptele sunt neconcurente şi neparalele; sunt necoplanare (cazul din **exemplul 4**).

Dacă cele două drepte le considerăm în plan, atunci reptele pot fi confundate, paralele distincte sau concurente într-un unic punct.

Poziţia relativă a două plane în $\mathbb{R}^3$.

Un plan în $\mathbb{R}^3$ este de fapt un hiperplan, şi este descris de o singură ecuaţie.

Fie $\pi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \ |a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = \alpha\}$ şi $\pi_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \ |a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3 = \alpha'\}$, două plane în $\mathbb{R}^3$.

Considerăm sistemul $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = \alpha' \end{cases}$ cu matricea $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}$ şi matricea extinsă $\overline{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & \alpha' \end{pmatrix}$.

Planele sunt paralele dacă $\text{rang}(C) = 1$ şi se intersectează dacă şi numai dacă sistemul este compatibil, adică $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C})$.

Obţinem următoarele cazuri:

• $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C}) = 1$, planele coincid,

• $\text{rang}(C) = 1$ şi $\text{rang}(\overline{C}) = 2$, planele sunt paralele, distincte,

• $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C}) = 2$, planele se intersectează. Dimensiunea intersecţiei este numărul variabilelor secundare = 1, adică planele se intersectează după o dreaptă.

Poziţia relativă dintre o dreaptă şi un hiperplan în $\mathbb{R}^n$

Cum poate sta o dreaptă faţă de un plan (care este un hiperplan) în $\mathbb{R}^3$? Poate fi conţinută în plan, poate fi paralelă cu acesta, sau poate să se intersecteze într-un unic punct. Acelaşi lucru este valabil pentru o dreaptă şi un hiperplan în $\mathbb{R}^n$.

Să demonstrăm acest lucru. Fie dreapta $L = p + < v >$, cu $p \in \mathbb{R}^n$ şi $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ şi hiperplanul $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$. Ştim că pentru orice $x \in L$, coordonatele satisfac ecuaţiile $x_i = p_i + tv_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Considerăm sistemul $\begin{cases} x_1 - tv_1 & = p_1 \\ \ldots & \\ x_n - tv_n & = p_n \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n & = \alpha \end{cases}$. Este un sistem cu $n+1$ ecuaţii în $n+1$ variabile, $x_1, \ldots, x_n, t$. Considerăm t necunoscută. Dacă $L \cap H = \{z\}$, atunci trebuie să existe $t_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $z = p \ + t_0v \in H$. Deci soluţia sistemului dacă există este un $n+1$- uplu $(z_1, \ldots, z_n, t_0)$

Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$.

Pentru a compara cele două ranguri ajungem să comparăm rangurile a două matrice 1×1 şi 1×2. Astfel comparăm $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n)$ cu $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 + \ldots + a_np_n)$.

Obţinem:

• $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 + \ldots + a_np_n) = 0$ atunci sistemul este compatibil şi $L \subset H$.

• $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = 0 < \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 + \ldots + a_np_n) = 1$ Sistemul este incompatibil, $L \cap H = \varnothing$

• $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 + \ldots + a_np_n) = 1$, sistemul este compatibil, are soluţie unică. $L \cap H = \{z\}$.

Perpendicularitatea varietăţilor liniare

Definiţia 5. Fie L_1 şi L_2 două varietăţi liniare în $\mathbb{R}^n$ cu subspaţiile directoare W_1 şi respectiv W_2. L_1 şi L_2 se numesc *perpendiculare* dacă $W_1 \perp W_2$. L_1 şi L_2 se numesc *normale* dacă $W_1^{\perp} = W_2$

De exemplu două linii în spaţiu pot fi perpendiculare, dar nu normale. Complementul ortogonal al unei drepte în $\mathbb{R}^3$ este un plan!

Fie $L_1 = p_1 + < v_1 >$ şi $L_2 = p_2 + < v_2 >$ două drepte în $\mathbb{R}^n$. Prin definiţie $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow < v_1, v_2 >= 0$, unde $<,>$ este produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$.

Fie $L = p + < v >$ o linie şi $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$ un hiperplan în $\mathbb{R}^n$. Spaţiu director al dreptei este $< v >$ iar spaţiul director al hipelplanului este $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$. Spaţiu ortogonal al lui W, $W^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \ < z, x >= 0, (\forall)x \in W\}$. L şi H sunt normale $\Leftrightarrow W^{\perp} =< v > \Leftrightarrow v$ este proporţional cu ${}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definiţia 6. Fie $p, q \in \mathbb{R}^n$. Distanţa între p şi q, $d(p, q) = ||p-q|| = \sqrt{< p - q, p - q >}$.

Distanţa se poate defini în acelaşi mod pe orice spaţiu euclidian. În cazul particular de mai sus, în care lucrăm cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$, distanţa este distanţa euclidiană, anume pentru $p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$. Este lungimea diagonalei paralelipipedului cu laturile de lungimi $p_i - q_i$.

Distanţa satisface următoarele proprietăţi.

- $d(p, q) \geqslant 0$ şi $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
- $d(p, q) = d(q, p)$, pentru $(\forall)p, q \in \mathbb{R}^n$
- $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ pentru $(\forall)p, q, r \in \mathbb{R}^n$.

Fie $L = p + < v >$ şi $L' = p' + < v' >$ două drepte în $\mathbb{R}^n$. Cosinusul unghiului θ dintre aceste dreptele L şi L' este $\cos(\theta) = \frac{< v, v' >}{||v|| \cdot ||v'||}$.

Remarcă 7. Să aflăm o formulă pentru distanţa de la un punct $p \in \mathbb{R}^n$ la un hiperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$. Normala la H, după cum am văzut mai sus, are vectorul director $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $d(p, H) = \min_{q \in H} d(p, q)$. Această distanţă minimă se realizează pe normala de la p la H. Notăm $n(p)$ normala la H ce trece prin p. Fie $\{q_0\} = n(p) \cap H$. Avem $d(p, H) = d(p, q_0)$.

Cu aceste observaţii obţinem formula

$$d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n - \alpha|}{||a||}$$

Definiţia 8. Se numeşte *reper* al unui spaţiu vectorial V o bază ordonată a lui V. Într-un spaţiu euclidian un reper se numeşte *ortonormat* dacă baza este ortonormată.

O remarcă importantă este că spre deosebire de spaţiul vectorial V, în avem un punct special, anume 0_V (elementul neutru pentru adunarea vectorilor), în spaţiul V, nespecificând că este un spaţiu vectorial, toate punctele sunt la fel.

În $\mathbb{R}^n$ avem reperul format din baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Matricea formată cu vectorii din $\mathcal{B}$ este matricea I_n care are determinantul 1. Matricea $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de trecere de la reperul canonic $\mathcal{B}$ la un alt reper $\mathcal{B}'$ este inversabilă, şi are determinantul pozitiv sau negativ. Vom spune că reperul este pozitiv dacă $\det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) > 0$, altfel negativ. De exemplu reperul $\mathcal{B}' = \{e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n\}$ este negativ pentru că am permutat primele două coloane din I_n între ele şi astfel $\det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = -1$.

În cele ce urmează vom lucra în $\mathbb{R}^3$. Un triplet de vectori $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ este *pozitiv*, dacă un observator situat pe w vede unghiul de la u spre v în sens trigonometric (invers acelor de ceasornic). În caz contrar reperul este negativ. Considerăm un reper ortonormat pe care îl vom nota $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$, (de exemplu reperul canonic $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$).

Definiţia 9. Fie $u, v \in \mathbb{R}^3$. *Produsul vectorial*, notat cu $u \times v$ este vectorul din $\mathbb{R}^3$ cu proprietăţile

- $u \times v \perp < u, v >$ (planul generat de u şi v)
- reperul $(u, v, u \times v)$ este pozitiv
- $||u \times v||$ este egală cu aria paralelogramului construit cu vectorii u şi v, mai precis $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \sin(u, v)$.

Observaţia 10. *Fie n vectorul unitar perpendicular pe planul generat de vectorii $u, v \in \mathbb{R}^3$, a.î. (u, v, n) este un reper pozitiv. Atunci $u \times v = ||u|| \cdot ||v|| sin(u, v)\ n$.*

Propoziţia 11. *Pentru $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$ şi pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt adevărate:*

- $u \times v = 0$ *dacă u, v sunt coliniari (paralelogramul este degenerat),*
- $v \times u = -u \times v$,
- $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *este aplicaţie biliniară:* $(\alpha u + \beta u') \times v = \alpha u \times v + \beta u' \times v$ *şi* $u \times (\alpha v + \beta v') = \alpha u \times v + \beta u \times v'$

Teorema 12. *Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în $\mathbb{R}^3$. Pentru $u, v \in \mathbb{R}^3$,*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definiţia 13. Fie, $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. *Produsul mixt* al vectorilor u, v, w, se notează (u, v, w) şi este definit prin $(u, v, w) = < u, v \times w > \in \mathbb{R}$.

Observaţia 14. *Din proprietăţile produsului scalar şi a celui vectorial rezultă că produsul mixt $(, ,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este liniar în fiecare argument.*

Teorema 15. *Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în $\mathbb{R}^3$. Pentru $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, avem*

- $(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$,

- $(u, v, w) = -(v, u, w)$; *semnul nu se schimbă la permutări ciclice* $(u, v, w) = (v, w, u)$,
- *dacă* u, v, w *sunt necoplanari, atunci* $|(u, v, w)|$ *reprezintă volumul paralelipipedului construit cu vectorii* u, v *şi* w,
- $(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ *sunt coplanari.*

Folosind produsul mixt se poate da o formulă pentru distanţa între două drepte necoplanare (vectorii directori sunt liniar independenţi). Fie $L_1 = q_1 + < v_1 >$ şi $L_2 = q_2 + < v_2 >$ cele două drepte, unde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ şi $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sunt vectori liniar independenţi. $d(L_1, L_2) = \min_{P_1 \in L_1, P_2 \in L_2}\{d(P_1, P_2)\}$. Bineînţeles, $d(L_1, L_2)$ se atinge pe perpendiculara comună n a dreptelor L_1 şi L_2. Fie $\{A\} = L_1 \cap n$ şi $\{B\} = L_2 \cap n$. $d(L_1, L_2) = d(A, B)$. AB este înălţimea paralelipipedului format cu muchiile q_1q_2, v_1, v_2. Lungimea acestei înălţimi este volumul paralelipipedului împărţit la aria bazei, paralelogramul de laturi v_1, v_2. Menţionând că $q_1q_2 = q_2 - q_1$, avem $d(L_1, L_2) = \frac{(q_1q_2, v_1, v_2)}{||v_1 \times v_2||} = \frac{(q_2 - q_1, v_1, v_2)}{||v_1 \times v_2||}$.

Izometrii

Definiţia 16. Se numeţe *izometrie* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că pentru $(\forall)p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$.

Este uşor de arătat că:
• Orice izometrie este o aplicaţie injectivă.
• Orice izometrie $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformă varietăţi liniare în varietăţi liniare de aceeaşi dimensiune.
• Izometriile $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ formează grup cu operaţia de compunere a aplicaţiilor.

Teorema 17. $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *este izometrie dacă şi numai dacă există un reper ortonormat* $\mathcal{B}$ *în* $\mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \phi(x) = A \cdot x + b$, *unde* $A \in O_n(\mathbb{R})$ *şi* $b \in \mathbb{R}^n$.

Translaţia cu $b \in \mathbb{R}^n$, $\phi_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \phi(x) = x + b$, corespunzătoare matricei I_n în reperul canonic, este izometrie.

Considerăm $A \in O_n(\mathbb{R})$, atunci $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definită prin $\phi(x) = Ax$ este o izometrie. Pentru $A \in SO_n(\mathbb{R})$, avem rotaţii.

Să mai menţionăm simetria faţă de o varietate liniară, $L \subset \mathbb{R}^n$. Notăm $s_L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $s_L(p) = p'$, unde p' se obţine astfel: considerăm varietatea normală la L ce trece prin p, $L^{\perp}(p)$ şi $\{q\} = L \cap L^{\perp}(p)$. p' simetricul lui p faţă de q pe dreapta pq, sau q este mijlocul segmentului $[p, p']$. Deci $q = \frac{p+p'}{2} \Leftrightarrow p' = 2q - p$. Punctul $q = \operatorname{pr}_L(p)$, proiecţia lui p pe L. Deci $s_L(p) = 2\operatorname{pr}_L(p) - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n}(p), (\forall)p \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow s_L = 2\operatorname{pr}_L - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Pentru $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$, un hiperplan , atunci pentru $p \in \mathbb{R}_n$, $s_L(p) = p + 2\frac{\alpha - <a,p>}{||a||^2}a$. Dacă hiperplanul trece prin origine ($\alpha = 0$), atunci $s_L(p) = p - 2\frac{<a,p>}{||a||^2}a$. Se demonstrează în acest caz că matricea $A = M_{\mathcal{B}}(s_L)$ într-un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{B}$ are $\det(A) = -1$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 12
Conice

Voi începe prin a enumera conicele şi în primul rând cele ce pot fi descrise ca locuri geometrice.

Elipsa se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor din plan ce au suma distanţelor la două puncte fixate (numite focare, notate în figura de mai jos cu F_1 şi F_2) constantă. Notăm constanta cu $2a$. Ecuaţia elipsei ce rezultă din această definiţie este $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Trecem radicalul ce conţine $(x-c)^2$ în membrul drept, ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Ridicăm din nou la pătrat, reducem termenii asemenea şi ajungem la ecuaţia $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Avem $a>c>0$ şi facem notaţia $b^2=a^2-c^2>0$. Cu această notaţie ecuaţia devine $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Împărţind cu a^2b^2 obţinem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia redusă* a elipsei. În figura de mai jos avem o elipsă orizontală cu $a>b$. Semiaxa majoră, mai lungă, de lungime a, este pe Ox. Semiaxa minoră, mai scurtă, este de lungime b şi este pe axa Oy. În afară de elipsă, punctat, am figurat şi dreptunghiul de laturi $2a$ şi $2b$, centrat în $O(0,0)$, dreptunghi în care înscriem elipsa. Cantitatea $0<e=\frac{c}{a}<1$ se numeşte *excentricitatea elipsei.* Elipsa este o conică cu centru.

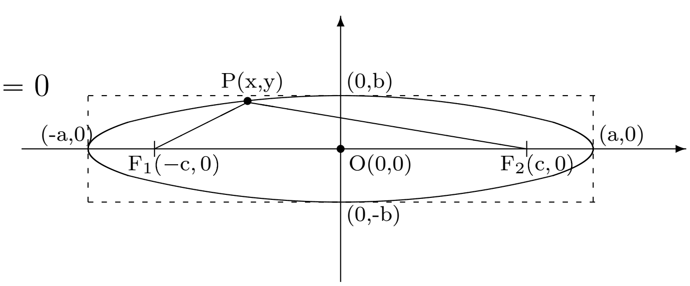
Elipsa

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

centru: O(0,0)

lungime semiaxe: a, b

$b^2=a^2-c^2, a>c>0$



Cercul este elipsa pentru care focarele F_1 şi F_2 coincid. În acest caz, cele două focare se confundă cu centrul cercului. Deci pentru $c=0$ semiaxele sunt egale şi ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ este $x^2+y^2=r^2$, unde r este raza cercului. Cercul este deci locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat, numit centrul cercului.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixate este constantă. Notăm constanta cu $2a$. Folosind definiţia scriem ecuaţia $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Făcând calcule similare ca şi în cazul elipsei ajungem la relaţia $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. $c > a > 0$ şi notăm $b^2 = c^2 - a^2$. Împărţind la a^2b^2 obţinem *ecuaţia redusă* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hiperbola are două asimptote, anume dreptele de ecuaţii $y = \pm\frac{b}{a}x$. În figură, în afară de hiperbolă am reprezentat punctat dreptunghiul centrat în $O(0,0)$ de laturi $2a$ şi $2b$, dreptunghi ale cărui diagonale sunt cele două asimptote. Hiperbola este conică cu centru. *Excentricitatea hiperbolei* este $e = \frac{c}{a} > 1$.

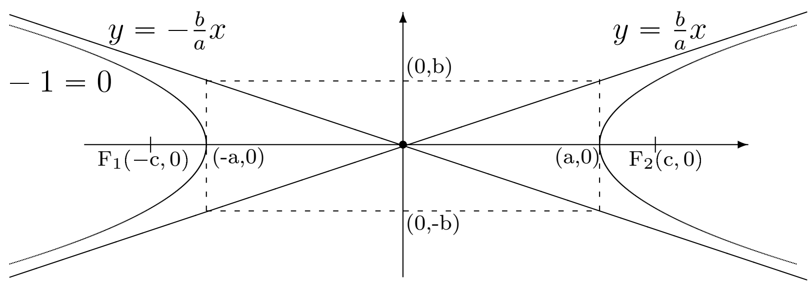
Hiperbola

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: O(0,0)

asimptote: $y = \pm\frac{b}{a}x$

$b^2 = c^2 - a^2, c > a > 0$



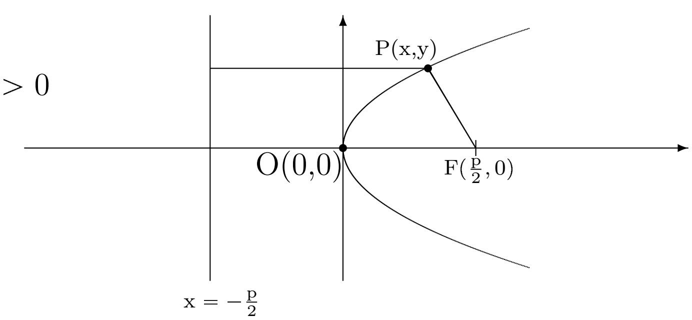
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fixat numit *focar* şi de o dreaptă fixată, numită *directoare*. Scriind ecuaţia ce reiese din definiţie şi făcând calculele algebrice ca şi în cazurile anterioare obţinem *ecuaţia redusă* $2px = y^2$, sau $2py = x^2$. În primul caz dreapta directoare este verticală, iar în al doilea caz este orizontală. Parabola nu are centru. *Excentricitatea parabolei = 1.*

Parabola

ecuaţie redusă: $2px = y^2, p > 0$

fără centru

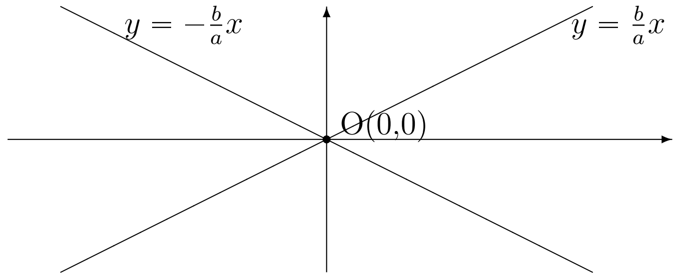
axă de simetrie: $y = 0$



Reuniune de drepte concurente

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)

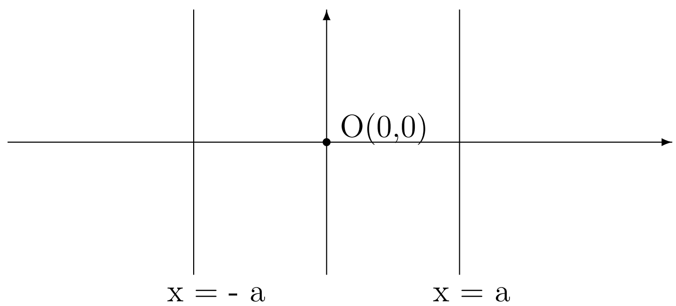


Cele două drepte concurente au ca centru punctul lor de intersecţie, în acest caz, punctul $O(0,0)$.

Reuniune de drepte paralele

ecuaţie redusă: $x^2 - a^2 = 0$

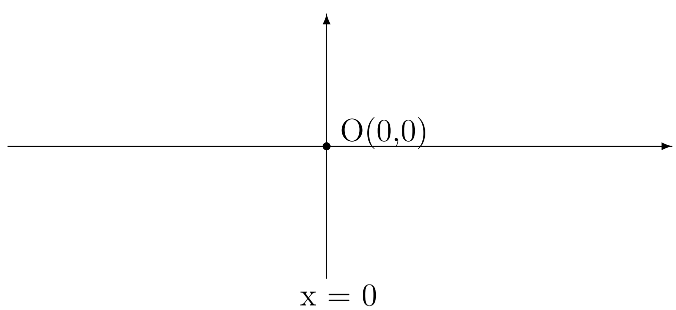
infinitate de centre



Două drepte confundate

ecuaţie redusă: $x^2 = 0$

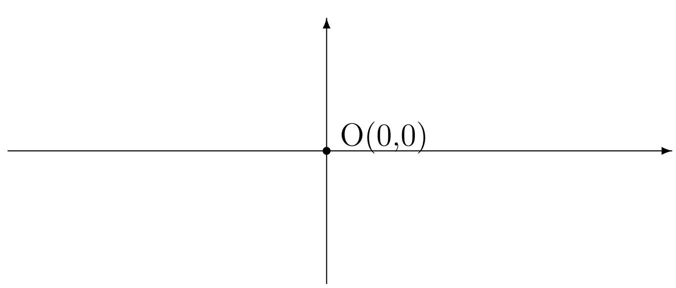
infinitate de centre



Un punct

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)



Mulţimea vidă

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$.

Până aici am descris ecuaţiile reduse ale conicelor. O conică este descrisă printr-o ecuaţie de tipul:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, (\forall)i, j = \overline{1,3}$ şi $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Conicei i se asociază matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Submatricea de ordin 2 din stânga sus $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea unei forme pătratice pe $\mathbb{R}^2$.

Notăm $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \operatorname{tr}(A_2) = a_{11} + a_{22}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \operatorname{tr}(A_2)$ *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Clasificarea conicelor

Putem da o clasificare a conicelor folosind invarianţii Δ, δ, I.

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *nedegenerată.*

a) dacă $\delta > 0$, atunci $\mathcal{C}$ este $\begin{cases} \textit{elipsă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I < 0 \\ \textit{mulţimea vidă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I > 0 \end{cases}$

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *parabolă*

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *hiperbolă*

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este conică *degenerată*

a) dacă $\delta > 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *un punct*,

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica este o reuniune de *drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*,

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este o reuniune de *drepte concurente*.

În cele ce urmează voi descrie metoda roto-translaţiei de aducere la forma redusă a ecuaţiei unei conice.

0. Din invarianţii Δ, δ, I se deduce tipul conicei

1. Se aduce la forma canonică forma pătratică dată de matricea A_2. Pentru aceasta se foloseşte metoda transformărilor ortogonale. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

2. Se forţează pătratele perfecte în x şi y şi se obţine forma redusă.

Exemplul 2. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea asociată conicei este $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta = 16, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 = 16, I = 10$.

$\Delta = 16 \neq 0, \delta \cdot I = 160 > 0$, deci avem conică nedegenerată, care este de fapt mulţimea vidă.

Considerăm $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ pe care o aducem la forma diagonală folosind metoda transformărilor ortogonale.

$P_{A_2}(X) = X^2 - IX + \delta = X^2 - 10X + 16$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 8I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am ales în $v_2, x = -1$ şi $y = 1$ pentru ca matricea formată cu coloanele v_1, v_2 să aibă det > 0. Matricea $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, are proprietatea ${}^tSS = I_2$, şi $\det(S) = 1$, deci S este matricea unei rotaţii în plan.

Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, adică $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$.

Ecuaţia conicei în x' şi y' devine $\mathcal{C} : 8x'^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$. De aici deducem ecuaţia redusă $8x'^2 + 2(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 1 = 0$. Suma a două pătrate perfecte plus 1, este mulţimea vidă. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii ale matricii A_2.

Voi mai da un exemplu.

Exemplul 3. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Invarianţii metrici ai conicei sunt $\Delta = 8 \neq 0, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, I = 3$. Avem o conică nedegenerată, care este o hiperbolă.

Considerăm forma pătratică $3x^2 - 4xy$ în $\mathbb{R}^2$ pe care o aducem la forma canonică. Matricea asociată este $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_2}(X) = X^2 - 3X - 4$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 4I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x = -2y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x = y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matricea formată cu vectorii e_1, e_2 (coloanele matricei), este $S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. S este o matrice ortogonală de determinant 1, deci matricea unei rotaţii. Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$.

Ecuaţia conicei în noile coordonate devine $\mathcal{C} : 4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$.

Formăm pătrate perfecte şi obţinem $4(x' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 - 2 = 0$.

Notăm $X = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = y' - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Aceasta reprezintă o translaţie. Împărţim cu 2 şi obţinem ecuaţia redusă a hiperbolei.

$$\mathcal{C} : 2X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0$$

unde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt{2}$. Centrul hiperbolei este intersecţia dreptelor $X = 0$ şi $Y = 0$ iar noile coordonate în funcţie de x şi y sunt $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Acestea se obţin folosind $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tS\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cât şi formulele pentru X şi Y în funcţie de x' şi y'. Matricea ${}^tS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dreapta $X = 0$ în sistemul Oxy are ecuaţia $y = 2x - 1$ iar dreapta $Y = 0$ are ecuaţia $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Intersecţia acestora este punctul $o(1, 1)$. Acesta este centrul sistemului de coordonate oXY. În acest sistem de axe se reprezintă hiperbola. Asimptotele hiperbolei sunt $Y = \pm\frac{b}{a}X = \pm 2X$. În sistemul Oxy aceste drepte au ecuaţiile $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ şi respectiv $x = 1$.

Voi adăuga teorema Sylvester de caracterizare a formelor pătratice. Considerăm V un spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Reamintesc că forma pătratică Q este *pozitiv (negativ) definită* dacă $Q(v) > 0$ ($Q(v) < 0$), pentru orice $v \in V \backslash \{0_V\}$.

Teorema 4 (Sylvester)**.** *Fie $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică ca mai sus şi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V în care forma pătratică are matricea $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A. Atunci:*

1) Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$,

2) Q este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$.

GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 13
Cuadrice

Voi enumera cuadricele specificându-le ecuaţiile reduse.
Elipsoidul Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

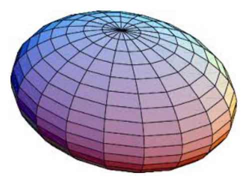


FIGURE 1. Elipsoid

Pentru $a = b = c = r > 0$, obţinem sfera de rază r, ce are ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Sfera este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat. Atât elipsoidul cât şi sfera descrise prin ecuaţiile de mai sus au centrul $O(0, 0, 0)$. Elisoidul de centru (x_0, y_0, z_0) are ecuaţia $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - 1 = 0$, şi similar sfera de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r are ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Intersecţia elipsoidului cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este o elipsă. Intersecţia sferei cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este un cerc. Sfera se intersectează cu orice plan ce trece prin origine într-un cerc mare. Mai mult, sfera este o suprafaţă de rotaţie.

Hiperboloidul cu o pânză

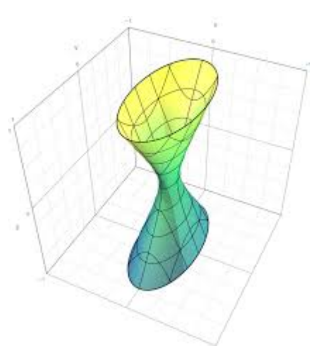


FIGURE 2. Hiperboloid cu o pânză

Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

Pentru $a = b$ este o suprafaţă care se poate obţine prin rotaţia unei drepte în jurul axei verticale. Prin orice punct al hiperboloidului trec două drepte distincte ce sunt conţinute în suprafaţă. O astfel de suprafaţă se numeşte *dublu riglată*.

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \alpha$ este o elipsă, iar intersecţia cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt hiperbole. Să descriem intersecţia cu un plan orizontal. Aceasta este soluţia sistemului $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (\frac{\gamma^2}{c^2} + 1) = 0$, ceea ce reprezintă ecuaţia unei elipse.

Hiperboloidul cu două pânze Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

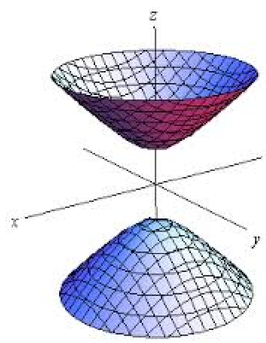


FIGURE 3. Hiperboloid cu o pânze

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: mulţimea vidă pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ şi o elipsă pentru $|\gamma| > c$.

Intersecţiile cu plane paralele cu atât cu Oxz cât şi cu Oyz sunt hiperbole. Punctele $V_1(0, 0, c)$ şi $V_2(0, 0, -c)$ se numesc *vârfurile hiprboloidului.*

Paraboloidul eliptic Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

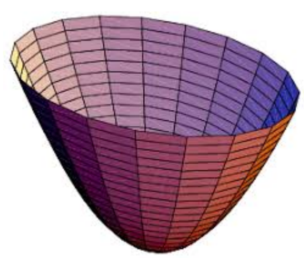


FIGURE 4. Paraboloid eliptic

Intersecţia acestei suprafeţe cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: o elipsă pentru $\gamma > 0$, un punct pentru $\gamma = 0$, şi mulţimea vidă pentru $z < 0$. Intersecţia cu orice plan paralel cu Oxz sau Oyz este o parabolă. Punctul $O(0,0,0)$ se numeşte vârful paraboloidului.

Paraboloidul hiperbolic sau şa Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

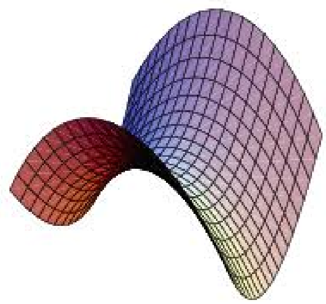


FIGURE 5. Paraboloid hiperbolic

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan $z = \gamma$, este o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$ şi o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$, $(z = 0, y = \pm\frac{b}{a}x)$. Intersecţia cu un plan paralel cu Oxz $(y = \beta)$ sau cu Oyz $(x = \alpha)$ este o parabolă. Originea $O(0,0,0)$ este vârful sau punctul şa al paraboloidului hiperbolic. Acoperişul gării din Predeal este o astfel de suprafaţă.

Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trec două drepte distincte conţinute în suprafaţă. Deci şi aceasta este o suprafaţă dublu riglată.

Conul Ecuaţia redusă a conului este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu $a, b, c > 0$.

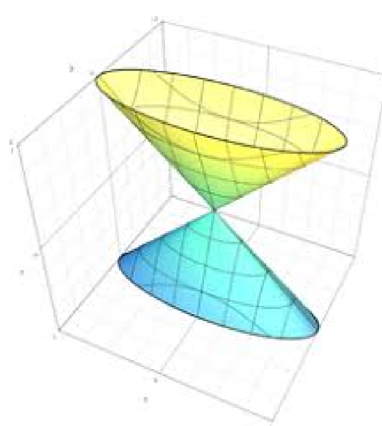


FIGURE 6. Con

Intersecţia conului cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: punctul $O(0, 0, 0)$ pentru $\gamma = 0$ şi o elipsă pentru $\gamma \neq 0$. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\beta = 0$ şi o hiperbolă pentru $\beta \neq 0$. La fel, intersecţia cu un plan $x = \gamma$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$ şi o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$.

Dacă $a \neq b$ conul se numeţe *eliptic* iar dacă $a = b$ avem un con *circular*. Punctul $O(0, 0, 0)$ se numeşte *vârful* conului.

Conul este asimptotic atât hiperboloidului cu o pânză cât şi celui cu două pânze. Hiperboloidul cu o pânză este exterior conului, iar hiperboloidul cu două pânze este interior conului.

Cilindru eliptic Ecuaţia redusă a cilindrului eliptic este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Intersecţia unui cilindru eliptic cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o elipsă.

Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi mulţimea vidă pentru $|\beta| > b$. Similar, intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\alpha| < a$, o dreaptă pentru $|\alpha| = a$ şi mulţimea vidă pentru $|\alpha| > a$.

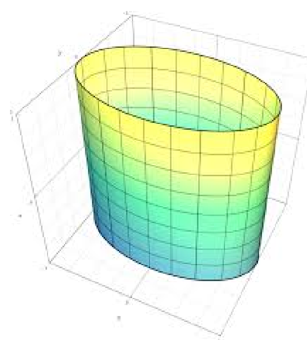


Figure 7. Cilindru eliptic

Dacă $a = b = r$, suprafaţa este un cilindru circular cu ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$. Intersecţia unui cilindru circular cu un plan orizontal $z = \gamma$ este un cerc. Intersecţiile cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt la fel ca în cazul cilindrului eliptic.

Cilindru hiperbolic Ecuaţia redusă a cilindrului hiperbolic este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$.

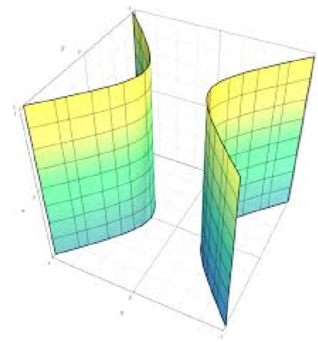


Figure 8. Cilindru hiperbolic

În figură este reprezentat un cilindru hiperbolic de ecuaţie $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Intersecţia acestuia cu un plan $z = \gamma$ este o hiperbolă. Intersecţia cilindrului hiperbolic cu un plan $y = \beta$ este mulţimea vidă pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi reuniunea a două drepte paralele pentru $|\beta| > b$, iar intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o pereche de drepte paralele

Cilindru parabolic Ecuaţia redusă este $y^2 = 2px$ cu $p > 0$

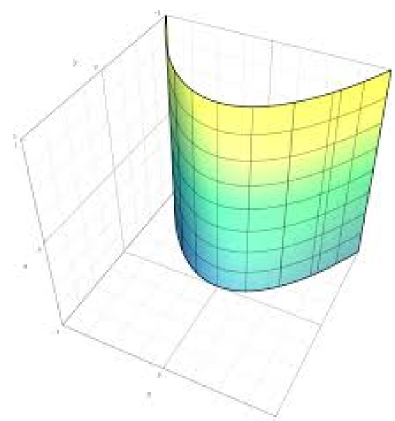


Figure 9. Cilindru parabolic

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o parabolă. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este dreapta de ecuaţie $x = \frac{\beta^2}{2p}$, iar intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este mulţimea vidă dacă $\alpha < 0$, dreapta $y = 0$ pentru $\alpha = 0$, şi o reuniune de drepte $y = \pm\sqrt{2p\alpha}$ pentru $\alpha > 0$.

Reuniune de plane secante Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

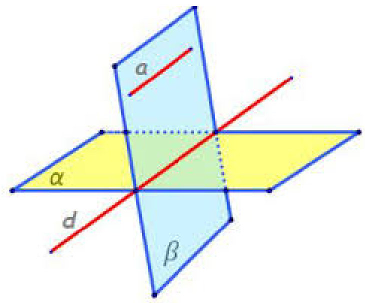


FIGURE 10. Plane secante

Reuniune de plane paralele Ecuaţia redusă este $x^2 - a^2 = 0$.

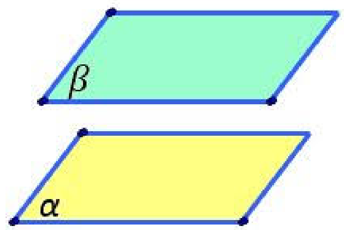


FIGURE 11. Plane paralele

Reuniune de plane confundate Ecuaţia redusă: $x^2 = 0$.

O dreaptă Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Fiind în $\mathbb{R}^3$, z fiind un parametru.

Un punct Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Mulţimea vidă Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

Ecuaţia generală prin care este dată o cuadrică este

$\mathcal{S} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, (\forall)i, j = \overline{1,4}$ şi $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Cuadricei $\mathcal{S}$ îi asociem matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$. Notăm cu $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ submatricea din colţul stânga sus, $\Delta = \det(A), \delta =$

$\det(A_3), I = \mathrm{tr}(A_3) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ şi $J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ se numesc invarianţii metrici ai cuadricei $\mathcal{S}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_3), I$ *şi* J *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Aducerea la forma canonică a cuadricelor

Considerăm forma pătratică pe $\mathbb{R}^3$, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ a cărei matrice este A_3. Folosim metoda transformărilor ortogonale pentru a o aduce la forma normală. Deci calculăm valorile proprii şi vectorii proprii asociaţi, găsim matricea ortogonală S, care realizează rotaţia. Se forţează pătratele perfecte în ecuaţia cuadricei $\mathcal{S}$ în noile coordonate şi se pune în evidenţă translaţia.

Exemplul 2. Utilizând metoda roto-translaţiei să se aducă la forma canonică cuadrica $\mathcal{S} : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$.

Matricea $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_3}(X) = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X+1)(X-4)$. valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$. Vectorii prprii asociaţi acestor valori proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ şi $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am obţinut matricea $S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\det(S) = 1$, ${}^tSS = I_n$. Schimbarea de coordnate este $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Astfel schimbarea de coordonate este $x = x', y = \frac{1}{\sqrt{5}}(y' - 2z'), z = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y' + z')$. Introducând în formula cuadricei $\mathcal{S}$ se obţine $x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow (x'-3)^2 - (y' - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + 4(z' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{7}{5} = 0$. Este un hiperboloid cu două pânze. Putem împărţi cu $\frac{7}{5}$. Ecuaţia redusă este $\frac{1}{\frac{7}{5}}X^2 - \frac{1}{\frac{7}{5}}Y^2 + \frac{1}{\frac{7}{20}}Z^2 + 1 = 0$. Coeficienţii $a = b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}, c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$.

Exemplul 3. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu al căror raport al distannţelor la punctele $A(2, -2, 3)$ şi $B(-2, 2, -3)$ este constantă.

Punctul B este simetricul punctului A faţă de origine. Fie P un punct al locului geometric. Pentru un astfel de punct P avem $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \sqrt{\lambda}$, pentru $\lambda > 0$. Distanţele sunt cantităţi pozitive, deci raportul este o cantitate pozitivă şi putem scrie membrul drept $\sqrt{\lambda} > 0$. Înlocuind coordonatele punctelor A şi B şi ridicând la pătrat obţinem

$\frac{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} = \lambda$. Înmulţind şi dând factori comuni vom obţine $(1-\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2+(1-\lambda)z^2-4(1+\lambda)x+4(1+\lambda)y-6(1+\lambda)z+17(1-\lambda) = 0.$

Avem următoarele două cazuri:

1. $\lambda = 1$ atunci ecuaţia este $-8x+8y-12z = 0 \Leftrightarrow -4x+4y-6z = 0$. Este ecuaţia unui plan ce trece prin origine. Este planul mediator al segmentului AB, adică este planul perpendicular pe AB ce trece prin mijlocul acestui segment $O(0,0,0)$. Dreapta normală la acest plan are vectorul director $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4,4,-6)$, acestă dreptă AB care trece prin origine şi este complementul ortogonal al planului mediator.

2. Pentru $\lambda \neq 1$, adică $\lambda \in (0,1)\cup(0,\infty)$ obţinem sfera de centru $C(2\alpha,-2\alpha,3\alpha)$ şi rază $\frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}$, unde $\alpha = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Ecuaţia sferei este $(x-2\alpha)^2+(y+2\alpha)^2+(z-3\alpha)^2 = \frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2}$.