SIMULARE EXAMEN ŞI RĂSPUNSURI
GEOMETRIE SI ALGEBRA LINIARA

Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Următoarele proprietăţi ale determinantuluii sunt adevărate, cu EXCEPŢIA
A) pentru $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \det(AB) = \det(A)\det(B)$
B) fie $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ care are o linie cu elemente egale cu 0, atunci $\det(A) = 0$
C) pentru $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
D) pentru $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \det({}^tA) = \det(A)$.

2. Fie $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaţia *urmă*. Următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru tr, cu EXCEPŢIA
A) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
B) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
C) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$ pentru $(\forall)A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$
D) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pentru problemele **3**, **4**, **5** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia (i, i) sunt egale cu $-i$ şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu -1. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

3. Atunci:
A) $\Delta_3 = -2$ şi $\Delta_4 = -6$
B) $\Delta_3 = -1$ şi $\Delta_4 = -2$
C) $\Delta_3 = -2$ şi $\Delta_4 = 6$
D) $\Delta_3 = -1$ şi $\Delta_4 = 2$

4. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:
A) $\Delta_n = -(n-1)!$
B) $\Delta_n = (-1)^n(n-1)!$
C) $\Delta_n = -(n-2)$
D) $\Delta_n = (-1)^n(n-2)!$

5. Fie A_n ca mai sus. Atunci inversa matricei A_3 este:

A) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. Polinomul caracteristic al matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este

A) $P_A(X) = (X-1)(X-2)(X^2+2X+2)$ **B)** $P_A(X) = X(X-2)(X^2+2X+2)$

C) $P_A(X) = X(X-1)(X^2-2X+2)$ **D)** $P_A(X) = X(X-2)(X^2-2X+2)$

Răspunsuri

1. C 2. A

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 2 = -2,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Pentru calculul determinanţilor se scoate (-1) factor comun de pe fiecare coloană şi se scade prima coloană din fiecare cealaltă coloană. Pentru Δ_n se face acelaşi calcul. Se obţine o matrice inferior triunghiulară ce are pe diagonala principală 1, 1, 2, 3, $\ldots n-1$. $\Delta_n = (-1)^n(n-1)!$. Pentru **5** se fac câteva înmulţiri.

3. C 4. B 5. D

$P_A(X) = \det(XI_4 - A)$ şi dezvoltând după prima coloană obţinem

$$P_A(X) = (-1)^{1+1}(X-1)\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X-1 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (X-1)^4 - 1$. Matricea este A este singulară , deci una dintre valorile proprii este 0, şi deci polinomul caracteristic trebuie să aibă cel puţin un factor X.

6. D