

Examen

1 Partea I. Logică propozițională

(P1) [1 punct] Fie

$$Z = \{\varphi \in Form \mid Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}\}.$$

Să se demonstreze că Z este numărabilă.

(P2) [1 punct] Arătați că pentru orice formule φ, ψ, χ , avem:

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi).$$

(P3) [1,5 puncte] Fie $\varphi, \psi \in Form$. Să se arate sintactic :

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi.$$

(P4) [2,5 puncte]

- (i) Să se aducă formula $\varphi := (v_1 \leftrightarrow \neg v_2) \rightarrow v_1$ la FND și FNC folosind transformări sintactice.
- (ii) Să se aducă formula $\psi := (v_1 \wedge v_3) \leftrightarrow (\neg v_2 \vee v_3)$ la FND și FNC folosind funcția booleană asociată.

(P5) [2 puncte]

- (i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulțimii de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\}.$$

- (ii) Folosind primul subpunct și eventual alte proprietăți, să se arate că:

$$\{v_0, v_0 \rightarrow v_1, (v_1 \rightarrow v_2) \vee v_3, v_3 \rightarrow v_4\} \models \neg v_4 \rightarrow v_2.$$

2 Partea II. Logică de ordinul întâi

(P6) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj \mathcal{L} de ordinul I și orice formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} , avem:

(a) $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \models \exists x(\varphi \vee \psi)$, pentru orice variabilă x .

(b) $\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj \mathcal{L} de ordinul I și de formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} astfel încât:

$$\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \not\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi).$$

(P7) [1 punct] Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I ce conține cel puțin un simbol de relație unară P și un simbol de constantă c . Să se arate:

$$\models P(c) \rightarrow (\exists v_0 P(v_0)).$$

(P8) [2 puncte] Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de operație unară f ;
- un simbol de constantă c .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

$$\varphi_1 = \exists x P(x, y) \rightarrow (\neg \exists z (f(z) = c) \wedge \forall v R(v))$$

$$\varphi_2 = \exists x (\forall y S(y) \wedge \neg \exists y Q(x, y)) \rightarrow \neg (\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \neg \exists x R(x)).$$