~ Seminar 6 ~

(Leme de pompare pentru limbajele regulate)

Lema de pompare pentru limbajele regulate:

Fie L un limbaj regulat. Atunci $\exists n \in N$ (număr natural) astfel încât pentru orice cuvânt $\alpha \in L$, cu $|\alpha| \geq n$, putem scrie $\alpha = u \cdot v \cdot w$ cu proprietățile:

i) $|u \cdot v| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

iii) $u \cdot v^i \cdot w \in L, \forall i \geq 0$

Vrem să demonstrăm că următoarele limbaje nu sunt regulate.
Schema demonstrației este să presupunem prin absurd că limbajul este regulat și atunci putem aplica lema anterioară. Alegem un cuvânt α din limbajul dat care să respecte ipoteza lemei, adică să aibă lungimea cel puțin n, iar descompunerea sa $\alpha = u \cdot v \cdot w$ să respecte condițiile i) și ii). Apoi alegem convenabil un număr natural i pentru care să obținem o contradicție a condiției iii), adică să rezulte că cuvântul $u \cdot v^i \cdot w \notin L$, și deci presupunerea făcută este falsă.

L1 = {a^(k^2), k ≥ 1} = {$a^1, a^4, a^9, a^{16}, a^{25}, a^{36}, a^{49}, a^{64}, a^{81}, a^{100}, \ldots$}

Vrem să demonstrăm că L1 nu este limbaj regulat. Observăm că L1 conține cuvinte formate doar din litera "a" și având lungimi egale cu pătratele perfecte strict pozitive.
Presupunem prin absurd că L1 este limbaj legulat. Atunci $\exists n \in N$ și putem aplica lema de pompare. Alegem cuvântul $\alpha = a^{n^2}$, cu $|\alpha| = n^2 \geq n$ *(deci lungimea cuvântului respectă ipoteza lemei).*
Conform lemei, cuvântul poate fi scris sub forma $\alpha = u \cdot v \cdot w$, iar $1 \leq |v| \leq n$ *(cele două inegalități rezultă din condițiile ii) și i) și din faptul că nu se spune că "u" nu ar putea fi cuvântul vid, deci de lungime 0).*
De asemenea, condiția iii) spune că $u \cdot v^i \cdot w \in L, \forall i \geq 0$. Alegem $i = 2$. Atunci avem cuvântul $u \cdot v^2 \cdot w$ de lungime $|u \cdot v^2 \cdot w| = |u \cdot v \cdot w| + |v| = |\alpha| + |v| = n^2 + |v|$.
La inegalitatea de mai sus adunăm peste tot n^2 și obținem: $n^2 + 1 \leq n^2 + |v| \leq n^2 + n$, adică $n^2 + 1 \leq |u \cdot v^2 \cdot w| \leq n^2 + n$.
Dar $n^2 < n^2 + 1$ și $n^2 + n < (n+1)^2$. Rezultă că $n^2 < |u \cdot v^2 \cdot w| < (n+1)^2$, adică $u \cdot v^2 \cdot w \notin L1$ (pentru că lungimea cuvântului este inclusă strict între două pătrate perfecte alăturate, deci $|u \cdot v^2 \cdot w|$ nu poate fi pătrat perfect).

L2 = {$a^k b^k$, k ≥ 1} = {ab, $a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, \ldots$}

Vrem să demonstrăm că L2 nu este limbaj regulat. Observăm că L2 conține cuvinte formate din k litere de "a" urmate tot de k litere de "b", deci având lungimi numere pare strict pozitive.
Presupunem prin absurd că L2 este limbaj legulat. Atunci $\exists n \in N$ și putem aplica lema de pompare. Alegem cuvântul $\alpha = a^n b^n$, cu $|\alpha| = 2n \geq n$ *(deci lungimea cuvântului respectă ipoteza lemei).*
Conform lemei, cuvântul poate fi scris sub forma $\alpha = u \cdot v \cdot w$.
Din condiția i), avem $|u \cdot v| \leq n$. Rezultă că cuvântul $u \cdot v$ conține doar litere de "a" (pentru că $u \cdot v$ este un prefix al primelor n caractere din α).
Atunci fie $v = a^p$. Din condițiile i) și ii) avem $1 \leq |v| \leq n$. Deci $1 \leq |a^p| \leq n$, adică $1 \leq p \leq n$.
De asemenea, condiția iii) spune că $u \cdot v^i \cdot w \in L, \forall i \geq 0$. Alegem $i = 0$. Atunci avem cuvântul $u \cdot v^0 \cdot w = u \cdot w = a^{n-p} b^n \notin L2$ (pentru că p>0, deci numărul de "a"-uri este strict mai mic decât numărul de "b-uri").