

# Décomposition de la variance

ABOUZAID Mehdi  
TOOMEY Damien

# Contents

1	Notations	3
2	Modèle	3
3	Décomposition de la somme des carrés des écarts	4
4	Décomposition de la variance	5
5	Bibliographie	6

# 1 Notations

$c$ : nombre de groupes

$r_i$  : effectif d'un groupe,  $i = 1 \dots c$

$n$  : effectif total

Moyenne globale (tous groupes confondus) :

$$\bar{y} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{i=1}^c \bar{y}_i$$

Moyenne d'un groupe :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}$$

# 2 Modèle

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_i$$

Dans cette démonstration, pour rester général, on considère que les groupes n'ont pas forcément les mêmes effectifs.

### 3 Décomposition de la somme des carrés des écarts

SCE = somme des carrés des écarts

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (1) \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (2) \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^c r_i \cdot (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \\
&\quad \text{Intra-Classe} \qquad \qquad \text{Inter-Classes}
\end{aligned}$$

Passage des lignes (1) à (2) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} \cdot \bar{y}_i - y_{ij} \cdot \bar{y} - \bar{y}_i^2 + \bar{y}_i \cdot \bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (\bar{y}_i \cdot (y_{ij} - \bar{y}_i) - \bar{y} \cdot (y_{ij} - \bar{y}_i)) \\
&= \sum_{i=1}^c (\bar{y}_i \cdot \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) - \bar{y} \cdot \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i))
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \\
&= \left( \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \right) - \bar{y}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^{r_i} 1 \right) \\
&= \left( \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \right) - \bar{y}_i \cdot r_i \\
&= \left( \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \right) - \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{f=1}^{r_i} y_{if} \cdot r_i \\
&= \left( \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \right) - \sum_{f=1}^{r_i} y_{if} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En effet, la moyenne des écarts à la moyenne est toujours nulle.

Ainsi,

$$2 \cdot \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) = 0$$

## 4 Décomposition de la variance

$$\Rightarrow \text{Variance} = \frac{\text{SCE}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^c r_i \cdot (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Variance Intra-Classe

Variance résiduelle

Variance Inter-Classes

Variance expliquée

Par la suite, on considérera que l'effectif de chaque groupe est identique ( $r_i = r, \forall i = 1 \dots c$ ).

## 5 Bibliographie

- Wikipedia

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Analyse\_de\_la\_variance`